

Mémoire présenté le :
pour l'obtention du diplôme de
Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Inès Lafourcade

Titre : **Mise en place de l'approche Increased Limit Factor pour la tarification des
traités en excédent de sinistres par risques en responsabilité civile générale**

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

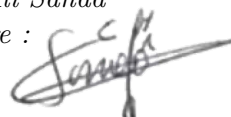
Membres présents du jury de la filière

Olivier Lopez

Entreprise : CCR Re 

Nom : Ali Sanaa

Signature :



*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

Jury IA 1

Jury IA 2

Jury IA 3

Jury IA 4

Jury IA 5

Jury IA 6

Directeur du mémoire en entreprise :

Nom : Alpha Bah

Signature :

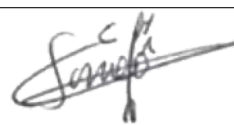


**Autorisation de publication
et de mise en ligne sur
un site de diffusion de
documents actuariels**

*(après expiration de l'éventuel délai
de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :



Bibliothèque :

Signature du candidat



Résumé

Les entreprises qui souscrivent à un contrat d'assurance responsabilité civile générale cherchent à s'assurer contre les dommages causés à des tiers du fait de leur exploitation ou de leurs activités. Les dommages alors susceptibles d'être pris en compte peuvent être de nature corporelle, matérielle ou immatérielle.

Dans le cas d'un traité en excédent de sinistres par risques, les méthodes de tarification usuelles basées sur l'expérience peuvent se révéler insatisfaisantes pour de multiples raisons que nous évoquerons. C'est de ce constat qu'est née la volonté d'utiliser une approche par exposition, prenant en compte les éléments du portefeuille actuel.

Notre périmètre d'étude concernant les portefeuilles de responsabilité civile générale, également appelée responsabilité civile entreprise, la méthode par exposition adaptée se nomme l'approche *Increased Limit Factor* (ILF) : elle détermine l'augmentation de la prime impliquée par l'accroissement de la limite d'indemnité. Néanmoins, ses difficultés de mise en oeuvre vont nous inciter à déterminer un moyen alternatif de tarification des traités définis ci-dessus. Pour cela, nous allons nous inspirer de la méthode ILF classique tout en y intégrant l'information essentielle et grandement utile contenue dans le profil de risques fourni par les cédantes.

Ces différentes étapes seront présentées et détaillées chronologiquement au cours de ce mémoire, en combinant nécessité opérationnelle et justification mathématique avec l'objectif d'aboutir à une forme de tarification rigoureuse et efficace.

Forts de cette approche, nous la testerons sur différents jeux de données et la validerons grâce à des tests d'adéquation et de sensibilité. Nous concluerons enfin en synthétisant l'ensemble des écueils inhérents à la tarification de la responsabilité civile générale qui nous ont conduits au cheminement décrit dans ce mémoire.

Mots clés : réassurance, responsabilité civile générale, tarification non-proportionnelle, méthode par expérience, méthode sur exposition, Increased Limit Factor (ILF), hypothèse de Riebesell

Abstract

Businesses that purchase a general liability insurance policy will insure themselves against damages caused to third parties by the business through its operations and activities. The damages that can be covered may be of bodily, material or immaterial nature.

In the case of an excess of loss treaty by risk, the usual experience-based pricing methods may prove unsatisfactory for many reasons. This assessment leads to use an exposure-based approach, taking into account the elements of the current portfolio.

As our scope of study concerns general liability portfolios, also known as commercial liability, the adapted exposure method is called the « Increased Limit Factor » (ILF) approach : it determines the premium increase implied by the increase of the indemnity limit. Nevertheless, due to the difficulties inherent to its implementation, we will try to determine an alternative way of pricing the treaties defined above. To do so, we will draw on the classic ILF method while incorporating the essential and highly useful information contained in the risk profile provided by the cedants. In this sense, this paper follows chronologically the steps related to the implementation of this approach, combining operational necessity and mathematical justification in an attempt to arrive at a rigorous and operational form of pricing.

We test this approach on different datasets and validate it through adequacy and sensitivity tests. Then, we conclude by summarizing all of the pitfalls inherent to the pricing of general liability that led us to the path described in this paper.

Keywords : reinsurance, general liability, non-proportional pricing, experience method, exposure method, Increased Limit Factor (ILF), Riebesell hypothesis

Synthèse

Ce mémoire a pour objectif la construction d'une nouvelle approche de tarification pour les traités en excédent de sinistres par risques en responsabilité civile générale. Les entreprises qui souscrivent à un contrat d'assurance responsabilité civile générale cherchent à s'assurer contre les dommages causés à des tiers du fait de leur exploitation ou de leurs activités. Les dommages alors susceptibles d'être pris en compte peuvent être de nature corporelle, matérielle ou immatérielle. Dans le cas d'un traité en excédent de sinistres par risques, les méthodes de tarification usuelles basées sur l'expérience telles que le burning cost ou la méthode coût-fréquence, peuvent se révéler inadaptées à notre périmètre d'étude. En effet, dans le domaine de responsabilité civile générale qui nous préoccupe ici, les tranches de réassurance peuvent être particulièrement élevées. Cela résulte du fait qu'un tel domaine peut se retrouver confronté à de graves sinistres corporels, assez rares, mais de sévérité particulièrement élevée. De ce fait, la probabilité d'être confronté à une quantité trop faible de données, pouvant ainsi impliquer la présence de tranches non travaillantes, va être de plus en plus forte. Cette limite particulièrement contraignante peut rendre inadéquate l'utilisation de méthodes de tarification usuelles basées sur l'expérience.

De ce fait, nous nous sommes tournés vers les méthodes par exposition telles que l'approche Loss Scale et l'approche ILF. La tarification des XS sur exposition par l'approche Loss Scale est une méthode basée sur l'utilisation de courbes de distribution de sinistres et sur l'information contenue dans le profil de risques fourni par la cédante. Cette approche a pour inconvénient majeur de ne pas être adaptée aux portefeuilles de responsabilité civile générale, notamment du fait de la distinction entre somme assurée (terme utilisé dans le cas d'assurance de biens physiques) et limite d'indemnité.

L'approche ILF quant à elle consiste à se baser sur une courbe ILF indiquant le taux d'accroissement d'une prime de référence consécutif à l'augmentation de la limite d'indemnité associée. Le problème alors rencontré provient des possibilités d'obtention d'une telle courbe. La première grande famille d'obtention de ce type de courbe s'appuie sur des méthodes non-paramétriques, telles que des courbes obtenues empiriquement, ou des courbes discrètes fournies par des organismes de marché. Mais le manque de données nous amène à exclure de fait ces méthodes. En effet, l'obtention d'une courbe empirique nécessite un certain volume de données afin d'en permettre une construction rigoureuse et pertinente. Cela n'est malheureusement pas possible dans notre cas, tout comme l'obtention de courbes discrètes trop peu accessibles ou mal adaptées. Quant aux courbes obtenues par des formes paramétriques, nous présentons successivement celles reposant sur la loi de Pareto, la loi Exponentielle ou encore l'approche de Riebesell.

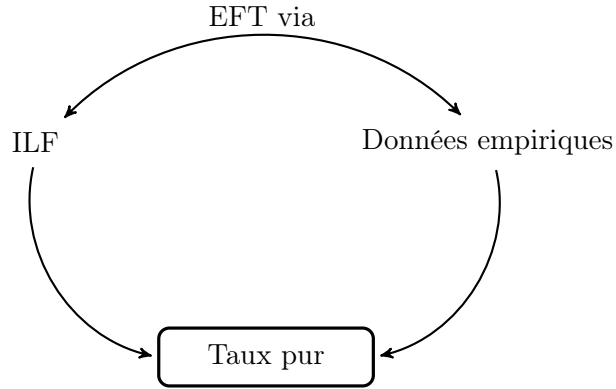
Hormis Riebesell, les lois de Pareto et Exponentielle nécessitent une hypothèse forte sur la distribution de la sévérité des sinistres. Or, le recours à une tarification par exposition s'explique

généralement par une trop faible occurrence de sinistres, voire une absence totale. Cela augmentant alors les difficultés d'obtenir un ajustement de loi jugée suffisamment pertinent sur notre distribution de sévérité, il n'y aurait pas vraiment de sens à se baser sur la modélisation de la sévérité des sinistres pour appliquer notre méthode par exposition. L'approche Riebesell va, elle, s'affranchir d'une telle contrainte grâce à l'hypothèse faite sur la variation du coefficient ILF. Cette hypothèse est la suivante : si la limite d'indemnité d'un risque (dite limite d'indemnité de base) est amenée à doubler, alors le montant de la prime pure associée à cette nouvelle limite va être multipliée par un coefficient $(1+z)$. Sous cette hypothèse, la formule indiquant le coefficient ILF associé à une limite d'indemnité y est la suivante : $ILF_{Rieb}(y) = (\frac{y}{BL})^{\log(1+z,2)}$.

Les deux inconnus d'une telle formule sont le paramètre z ainsi que la limite d'indemnité de base BL . Cette dernière n'étant pas fixée selon une règle précise, il est difficile d'en trouver la valeur optimale. Après reformulation mathématique de la précédente formule, nous trouvons le moyen d'obtenir une nouvelle formule exploitable, indépendante de la BL , réduisant ainsi nos deux paramètres inconnus à un seul. La formule en question nous indique la probabilité qu'un risque de police limite PL ait un sinistre supérieur à un montant y :

$$\mathbb{P}(\min(X, PL) > y | \min(X, PL) > x) = \begin{cases} (\frac{y}{x})^{\log(1+z,2)-1} & \text{si } y \leq PL \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'enjeu ultime consiste donc à déterminer le paramètre z . Pour ce faire, nous avons choisi de considérer d'une part l'aspect théorique de l'approche ILF et d'autre part une composante empirique. Nous calculons alors nos probabilités selon cette formule pour un paramètre z fixé arbitrairement. Dans un second temps, nous nous appuyons sur ces informations pour aboutir au calcul des fréquences de dépassement au-delà d'un certain seuil (correspondant au nombre annuel de sinistres attendus dont la sévérité est supérieure au seuil considéré). Ces éléments sont consignés dans une table appelée table de fréquences excédentes (EFT, pour *Exceedance Frequency Table* en anglais) : EFT_{ILF} . Par ailleurs, nous construisons une table identique mais construite empiriquement, sur les données réelles dont nous disposons : EFT_{EMP} . L'idée est ensuite de déterminer le paramètre z optimal tel qu'il minimise les écarts entre ces deux tables sur l'horizon choisi. C'est la méthode des moindres carrés qui a été utilisée comme critère d'optimalité. Notre but est de rendre notre formule ILF la plus représentative possible de l'historique de la cédante sur l'intervalle en question. C'est sur ce paramètre ainsi obtenu que nous nous baserons pour construire la table de fréquences excédentes finale EFT_{FINAL} , permettant d'aboutir au taux pur :



Une première application à un jeu de données nous permet de prendre conscience qu'un affinement de l'approche théorique est encore possible, permettant une meilleure réconciliation avec l'approche empirique et ainsi l'amélioration de la table finale.

En effet, jusque là, nous n'avions pas encore intégré la limite d'indemnité du risque considéré (travaillant à l'échelle du portefeuille), dont nous pouvons obtenir une information plus précise en nous appuyant sur le profil de portefeuille.

Nous sommes donc passés d'une vision globale du portefeuille à une vision par tranches d'indemnités. En affinant progressivement notre clé de répartition, nous sommes parvenus à une approche théorique relativement complète. Le graphique suivant traduit l'affinement progressif de notre méthode (le coefficient 1 correspond à la méthode initiale, jusqu'à un affinage de plus en plus poussé atteignant le niveau 3), par comparaison des taux leader :

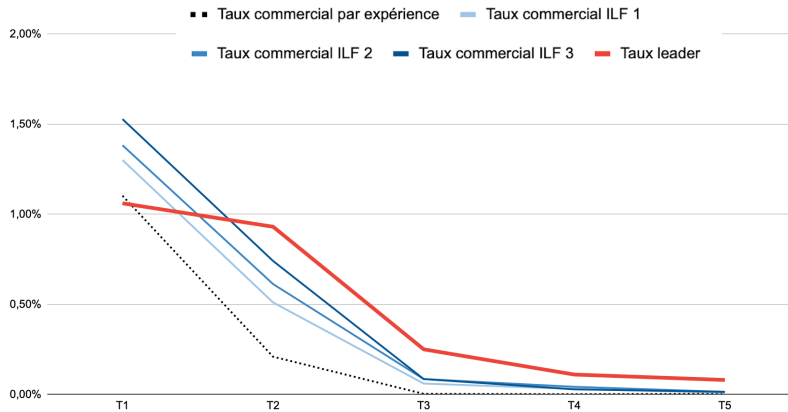


FIGURE 1 – Comparaison du taux commercial par tranche selon les différentes méthodes

Bien que les résultats soient relativement concluants quantitativement parlant, nous les avons ensuite soumis à des tests d'adéquation et de sensibilité, permettant de démontrer la pertinence ainsi que la stabilité de notre méthode.

Summary

The objective of this brief is to construct a new pricing approach for general liability excess of loss treaties. Companies that subscribe to a general liability insurance policy will insure themselves against damages caused to third parties by the company's operations and activities. The damages that may be covered may be of bodily, material or immaterial in nature.

In the case of an excess of loss treaty by risk, the usual experience-based pricing methods such as the burning cost or the cost-frequency method may prove unsuitable for our scope of study. Indeed, in the field of general civil liability, the reinsurance layers can be particularly high. This is due to the fact that such an area may be confronted with serious bodily injury claims, which are quite rare, but of particularly high severity. As a result, the probability of being confronted with not enough data, thus implying the presence of non-working layers, will become increasingly high. This particularly constraining limit may make inadequate usual experience-based pricing methods.

As a result, we turned to exposure-based methods such as the Loss Scale and ILF approaches. The XS exposure pricing by the Loss Scale approach is a method based on the use of loss distribution curves and on the information contained in the risk profile provided by the ceding company. The major disadvantage of this approach is that it is not adapted to general liability portfolios, notably due to the distinction between sum insured (a term used in the case of physical property insurance) and limit of indemnity.

The ILF approach is based on an ILF curve indicating the rate of increase of a reference premium following the increase of the associated indemnity limit. The problem arises from the possibilities of obtaining such a curve. The first major family of possibilities for obtaining this type of curve relies on non-parametric methods, such as curves obtained empirically, or discrete curves provided by market organizations. But the lack of data leads us to exclude these methods. Indeed, obtaining an empirical curve requires a certain volume of data in order to allow a rigorous and relevant construction. This is unfortunately not possible in our case, just like obtaining discrete curves which are not easily accessible or adapted. As for the curves obtained by parametric forms, we present successively those based on Pareto's law, the Exponential law or Riebesell's approach.

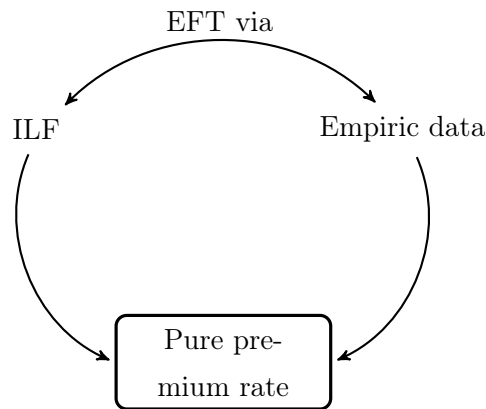
Apart from Riebesell, the Pareto and Exponential laws require a strong assumption about the distribution of the severity of claims. However, the use of exposure-based pricing is generally explained by a too low occurrence of claims, or even a total absence. This increases the difficulties of obtaining a sufficiently relevant law fit on our severity distribution, so it would not make sense to rely on modeling the severity of claims to apply our exposure method. The Riebesell approach, on the other hand, will free itself from such a constraint thanks to the hypothesis made on the variation of the ILF coefficient. This assumption is as follows : if the indemnity limit of a risk (called basic

indemnity limit) is doubled, then the amount of the pure premium associated with this new limit will be multiplied by a coefficient $(1 + z)$. Under this assumption, the formula indicating the ILF coefficient associated with a limit of indemnity y is the following : $ILF_{Rieb}(y) = (\frac{y}{BL})^{\log(1+z,2)}$.

The two unknowns in such a formula are the parameter z and the limit of the basic allowance BL. As this limit is not fixed according to a precise rule, it is difficult to find the optimal value. After a mathematical reformulation of the previous formula, we find a way to obtain a new usable formula, independent of the BL, thus reducing our two unknown parameters to one. The formula in question tells us the probability that a limit policy risk PL has a claim above an amount y :

$$\mathbb{P}(\min(X, PL) > y | \min(X, PL) > x) = \begin{cases} (\frac{y}{x})^{\log(1+z,2)-1} & \text{si } y \leq PL \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

The ultimate challenge is therefore to determine the parameter z . To do this, we have chosen to consider both the theoretical aspect of the ILF approach and an empirical component. We then calculate our probabilities according to this formula for an arbitrarily fixed parameter z . In a second step, we use this information to calculate the frequencies of excess above a certain threshold (corresponding to the annual number of expected claims whose severity is higher than the threshold considered). These elements are recorded in a table called the table of exceedance frequencies (EFT, *Exceedance Frequency Table* in English) : EFT_{ILF} . On the other hand, we construct an identical table but built empirically, on the real data at our disposal : EFT_{EMP} . The idea is then to determine the optimal parameter z such that it minimizes the differences between these two tables over the chosen horizon. The least squares method was used as the optimality criterion. The idea is to make our ILF formula as representative as possible of the cedant's history over the interval in question. It is on this parameter that we will base ourselves to build the final table of excess frequencies EFT_{FINAL} , allowing us to obtain the pure rate :



A first application to a dataset allows us to realize that a refinement of the theoretical approach

can still be done, in order to obtain a better reconciliation with the empirical approach, and thus improve the final table obtained.

Indeed, until now, we have not yet integrated the indemnity limit of the considered risk (working at the portfolio level), of which we can obtain more precise information by relying on the portfolio profile.

We have therefore moved from a global view of the portfolio to a view by indemnity tranches. By progressively refining our allocation key, we have arrived at a relatively complete theoretical approach. The following graph shows the progressive refinement of our method (coefficient 1 corresponds to the initial method, until a more and more advanced refinement reaching level 3), by comparing the leading rates :

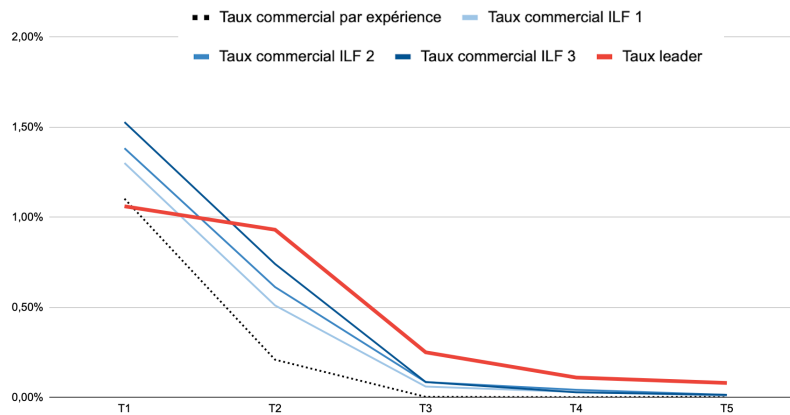


FIGURE 2 – Comparison of commercial rate per layer by different methods

Although the results are relatively conclusive quantitatively speaking, we then submitted them to adequacy and sensitivity tests, making it possible to demonstrate the good contribution as well as to attest the stability of our method.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mes deux tuteurs successifs au sein de CCR Re : Diep NGUYEN-DANG pour m'avoir offert l'opportunité de découvrir le monde de la réassurance, et pour m'avoir partagé ses savoirs et ses conseils; ainsi que Ali SANAA pour avoir généreusement accepté de prendre le relais en cours de route et pour sa disponibilité. Merci à lui, ainsi qu'à Florian MERILLAC et Pierre MOURIER pour leurs précieux conseils, et à Sharmini MANICKAM et Lucas RICHARD pour leur relecture éclairée de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Alpha BAH pour son encadrement et ses recommandations, et plus largement aux membres de la Direction Actuariat et Risques pour leur bienveillance, leur disponibilité tout au long de mon alternance, ainsi que leur précieux soutien lors de la période si atypique qu'a connue la CCR au cours de cet été 2022.

Je souhaite également exprimer toute ma gratitude à Nikita AKSENOV pour son aide extrêmement précieuse et ses explications passionnantes, ainsi que sa grande disponibilité à mon égard.

Enfin, je remercie mes parents pour leur soutien constant tout au long de mes études, ainsi que la gentillesse et la grande aide de Alexandre, Alexis et Dominique.

Et parce que la rédaction de ce mémoire est l'aboutissement concret de six années d'études supérieures, j'adresse mes sentiments de respect et de considération à l'ensemble des enseignants et des membres de l'administration universitaire qui m'ont offert un cadre intellectuel et humain très stimulant.

Table des matières

Résumé	1
Abstract	2
Synthèse	3
Summary	6
Remerciements	9
1 Présentation générale de la réassurance	13
1.1 La réassurance	13
1.1.1 Définition	13
1.1.2 A quoi sert la réassurance?	13
1.1.3 Présentation de CCR Re	13
1.2 Les contrats de réassurance	15
1.3 Les formes de réassurance proportionnelle	15
1.3.1 Le traité Quote-Part	16
1.3.2 Le traité en Excédent de Plein	16
1.4 Les formes de réassurance non proportionnelle	18
1.4.1 Excédent de Sinistres	18
1.4.2 Excédent de Perte	20
1.5 Domaines d'applications	21
1.5.1 La réassurance Non-Vie	21
1.5.2 Les domaines concernés	21
1.5.3 Focus sur la responsabilité civile générale	22
2 Les méthodes de tarification usuelles en réassurance	24
2.1 La tarification en réassurance	24
2.1.1 L'étape de cotation	24
2.1.2 Les spécificités du contrat	25
2.1.3 Les statistiques de la cédante	27
2.1.4 La prime de réassurance	28
2.2 La tarification par expérience	29
2.2.1 Mise en AS-IF	29
2.2.2 Burning Cost	31

2.2.3	Modèle coût - fréquence	32
2.2.4	Critique des approches par expérience	34
2.3	La tarification sur exposition	35
2.3.1	L'approche <i>Loss Scale</i>	35
2.3.2	L'approche Increased Limit Factor	41
3	L'approche Increased Limit Factor	44
3.1	Aspect théorique	44
3.1.1	Notation	44
3.1.2	Aspect théorique général	44
3.2	Application en réassurance	46
3.2.1	Approche théorique	46
3.2.2	Exemple numérique	47
3.3	Les formes non paramétriques d'une courbe ILF	49
3.3.1	Courbe empirique	49
3.3.2	Courbe discrète	50
3.3.3	Limites	50
3.4	Les formes paramétriques d'une courbe ILF	50
3.4.1	Pareto	51
3.4.2	Exponentielle	52
3.4.3	L'approche Riebesell	52
3.4.4	Limites	54
4	Mise en place d'une nouvelle approche reposant sur la méthode Increased Limit Factor	56
4.1	Méthode générale	56
4.1.1	Obtention empirique des fréquences excédentes	57
4.1.2	Obtention des fréquences excédentes à partir de la formule d'un Increased Limit Factor	59
4.1.3	Recalibrage du paramètre	62
4.1.4	Aboutissement au taux pur	65
4.2	Première application sur une base de données	67
4.2.1	Présentation de l'affaire	68
4.2.2	Application des méthodes usuelles	70
4.2.3	Application de la nouvelle approche	72
4.2.4	Limites de la nouvelle approche	74

4.3	Affinement de l'approche	74
4.3.1	D'une vision portefeuille à une vision par tranches	75
4.3.2	Clé de ventilation intuitive	78
4.3.3	Application aux données	82
4.4	Mise en oeuvre de l'approche définitive	82
4.4.1	Clé de ventilation finale	82
4.4.2	Application finale de l'approche développée	86
4.4.3	Adéquation	88
4.4.4	Bilan de l'application de notre méthode	93
5	Critiques du modèle	95
5.1	Points forts et points faibles	95
5.2	Sensibilité	96
5.2.1	Étude de la sensibilité de nos taux par rapport au paramètre z	96
5.2.2	Étude de la sensibilité de notre taux résultant du choix des bornes de calcul de la SCE	100
5.2.3	Conclusion quant au choix de T_X	101
6	Conclusion	102
	Références	103
	Annexes	106

1 Présentation générale de la réassurance

1.1 La réassurance

1.1.1 Définition

La réassurance, qui pourrait être définie de façon simpliste par l'assurance des assureurs, désigne un contrat entre un réassureur et un assureur - dit cédant - à l'intérieur dans le cadre duquel le réassureur va prendre en charge la totalité - ou une partie - du risque défini, moyennant une rémunération. Dans les conditions déterminées, ce dernier s'engage alors à rembourser à la cédante la totalité (ou une partie) des sommes versées aux assurés à titre de sinistre.

1.1.2 A quoi sert la réassurance ?

Les intérêts à faire appel à un réassureur sont multiples.

Principalement, la réassurance vise à partager les risques, limitant ainsi l'exposition financière de l'assureur direct en lui permettant de réagir plus facilement en cas de sinistre majeur : risques extrêmes (par exemple en responsabilité civile automobile, ou encore ce qui concerne les catastrophes naturelles : tremblements de terre, inondations, tornades), ou aussi les risques peu ou mal maîtrisés (risques cyber, menace terroriste, risques pandémiques).

Son intervention peut également être justifiée en tant que support financier. Elle permet à l'assureur de s'engager sur des risques pour des montants supérieurs à sa propre capacité de souscription. Elle renforce la trésorerie de la cédante en permettant le financement de ses activités par le versement des avances sur sinistre et des dépôts constitués et lui permet de conserver une solvabilité répondant aux exigences des normes internationales. Cela assure l'homogénéité du portefeuille de la cédante, dans la mesure où le transfert en réassurance de capitaux significatifs lui permet de maintenir le risque à un niveau semblable à la plupart de ses engagements sur le reste de la souscription.

En raison de son activité internationale, la réassurance permet aussi de distribuer et de disperser géographiquement les risques.

Pour finir, elle peut également apporter une fonction de support technique importante à la cédante : cet accompagnement peut se traduire à la fois lors de la souscription d'un risque, lors de la conception d'un produit, ou encore lors de l'évaluation et la gestion de sinistres graves.

1.1.3 Présentation de CCR Re

Filiale du groupe CCR (Caisse Centrale de Réassurance), CCR Re gère l'activité de réassurance de marché depuis 2017. La société mère CCR (créée en 1946) opère en tant que réassureur public.

Créée sous l'initiative de l'Etat français, cette société anonyme détenue à 100 % par l'Etat propose aux cédantes opérant en France des couvertures contre les catastrophes naturelles, les actes de terrorisme et d'autres risques extrêmes, non assurables, le tout avec la garantie de l'Etat et dans l'intérêt général.

Ce n'est que depuis cinq ans qu'une séparation juridique a été créée : CCR exerce exclusivement les activités de réassurance publiques bénéficiant de la garantie de l'Etat en France, tandis que les activités de réassurance de marché sont exercées par CCR Re.

Proposant des couvertures dans les branches traditionnelles dommages aux biens et responsabilité civile, vie et santé, ainsi que dans certaines branches de spécialités (crédit, transport maritime, aviation, spatiale, risques agricoles), le chiffre d'affaire de CCR Re s'élève à 843 M € en 2021 (soit une augmentation de 30 % par rapport à 2020), dans un contexte exceptionnel marqué par la pandémie Covid-19. La partie Non Vie représente une grosse partie de l'activité chez CCR Re : selon le rapport d'activités de CCR Re relatif à l'année 2021, la partie Non Vie représente 64.7 % du chiffre d'affaires, dont 21 % généré par la branche Automobile et Responsabilité Civile :

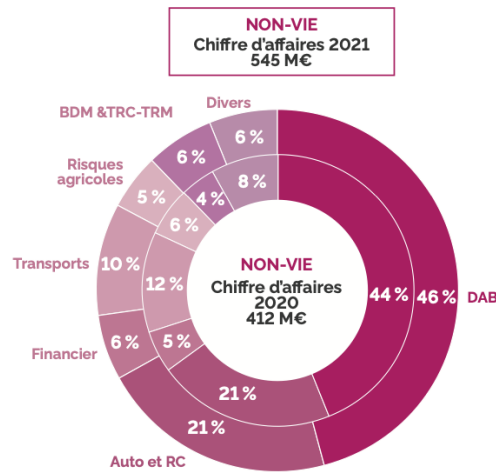


FIGURE 3 – Comparaison de la répartition du chiffre d'affaire de CCR Re en 2020 et 2021

Au sein de la Direction Actuariat et Risques, plus précisément du Département Cotation et Cellule Cat (Catastrophes naturelles), le service Tarification et Aide à la Souscription Non Vie a pour principale mission d'apporter une expertise technique sur la tarification des affaires. Les activités annexes vont alors se concentrer sur des travaux de recherche et de développement des outils, permettant de mener à bien cette première mission. C'est au sein de ce service qu'a été rédigé ce mémoire.

1.2 Les contrats de réassurance

En réassurance, il y a une distinction entre deux principaux modes de cession : la réassurance « facultative » et la réassurance « obligatoire ». La réassurance facultative est un mode de réassurance qui offre une couverture risque par risque, ou bien police par police, avec une totale liberté de souscription de la part du réassureur comme de l'assureur. Dans ce type de réassurance, l'assureur comme le réassureur sont respectivement libres de céder ou d'accepter le risque. Plus utilisée, la réassurance obligatoire (appelée communément « traité ») va couvrir un ensemble de risques d'une branche d'assurance, sous la forme d'un contrat de réassurance unique. L'assureur s'engage alors à céder tous les risques relevant de cette branche, et le réassureur s'engage à les accepter.

Deux autres modes de cessions, moins utilisés, s'ajoutent à ceux cités précédemment : la réassurance « facultative-obligatoire » et la réassurance « facultative-facultative ». Le premier type permet de laisser le choix à la cédante sur les risques qu'elle désire céder au réassureur, qui a l'obligation d'accepter tous les risques cédés. Enfin, le dernier type laisse le choix aux deux parties de céder ou d'accepter les risques.

Un contrat de réassurance va donc être caractérisé par son mode de cession et sa nature, qui peut être « proportionnelle » ou « non-proportionnelle », et que nous allons décrire ci-dessous. Mais ce mémoire s'articulant sur le cas des traités non proportionnels, cette section fera l'objet d'une description plus détaillée.

1.3 Les formes de réassurance proportionnelle

Comme l'indique son nom, cette forme de réassurance traduit un partage proportionnel entre assureur et réassureur : le pourcentage utilisé pour déterminer ce que le réassureur doit verser à la cédante en cas de sinistre est identique à celui utilisé pour le partage de la prime. Ce type de traité implique des intérêts communs pour les deux parties concernant la performance du portefeuille couvert. Le versement d'une commission à l'assureur par le réassureur est réalisé sous la forme d'un certain pourcentage des primes, en participation aux frais administratifs et commerciaux engagés par la cédante.

La réassurance proportionnelle distingue deux formes de traités : le Quote-Part et l'Excédent de Plein.

1.3.1 Le traité Quote-Part

Abrégé par l'acronyme « QP » ou « QS » (pour Quota-Share en anglais), ce traité représente le cas le plus intuitif de réassurance : l'assureur cède un certain taux, appelé taux de cession, de tous les risques du portefeuille considéré. Pour ce faire, l'assureur verse une proportion identique de l'assiette de prime d'assurance estimée pour l'année de couverture (correspondant au portefeuille couvert).

Outre la simplicité de gestion, le principal avantage de ce type de traité concerne l'abaissement du niveau des engagements des assureurs. Cela est intéressant pour les cédantes ne disposant pas d'un capital suffisant et voulant se développer. Le taux de cession appliqué est identique quel que soit le risque couvert. En revanche, ce type de traité ne permet pas le lissage des résultats dans le temps, (le ratio sinistres/primes demeure le même) ou la protection contre la survenance de sinistres extrêmes.

Exemple du partage entre les deux parties d'un QS cédé à 30 % :

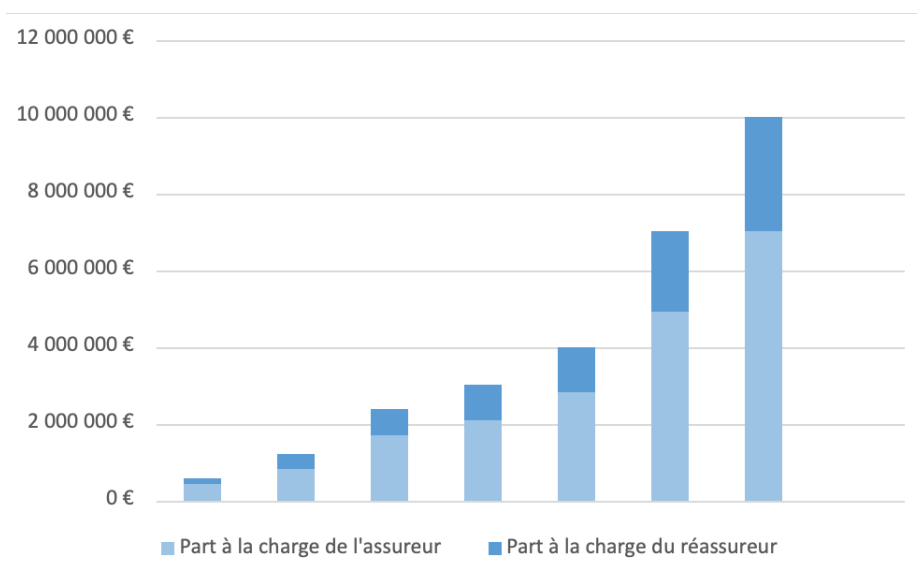


FIGURE 4 – Exemple d'une couverture de réassurance quote-part cédé à 30 %

1.3.2 Le traité en Excédent de Plein

Abrégé par l'acronyme « EP » ou « SP » (pour Surplus en anglais), ce traité ne concerne qu'une portion de risques dont le capital assuré (CA) est supérieur à un certain niveau, appelé plein de rétention (R , pouvant être défini comme le montant maximal que la cédante souhaite payer par sinistre). Le capital assuré reflète la somme maximale brute que peut atteindre un sinistre : dans

certains cas, il peut être exprimé sous forme de somme assurée (selon le secteur d'activité considéré, il reflète la valeur marchande du bien, ou sa valeur de reconstruction, ...), de SMP (sinistre maximum possible ou probable, correspondant au montant maximum qu'un assureur est disposé à rembourser en cas d'incident) ...

Le fonctionnement de l'excédent de plein est donc semblable à celui du Quote-Part, à l'exception près que le taux de cession diffère pour chaque risque. Un pourcentage de dépassement du capital assuré est déterminé pour chaque risque, définissant le taux de cession à appliquer dans chaque cas. Ce dernier ne se déclenche que si le capital assuré du risque CA_i est supérieur au plein de rétention (pas d'intervention du réassureur dans le cas contraire), et est calculé dans la limite de la capacité de l'excédent de plein C . Mathématiquement, le taux de cession du i^{me} risque T_i est égal à :

$$T_i(CA_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } CA_i < R \\ \frac{CA_i - R}{CA_i} & \text{si } R \leq CA_i < C \\ \frac{C}{CA_i} & \text{si } C \leq CA_i \end{cases}$$

Contrairement au Quote-Part, il permet à l'assureur de ne pas faire intervenir le réassureur sur des petits sinistres (de faibles montants, plus fréquents), et de bénéficier d'une protection proportionnelle uniquement sur les risques les plus importants.

Voici un exemple du partage entre les deux parties d'un EP pour un plein de rétention fixé à 2 millions d'euros, avec une capacité de 6 millions d'euros (souvent exprimée sous la forme de nombre de pleins, correspondant donc à 3 pleins).

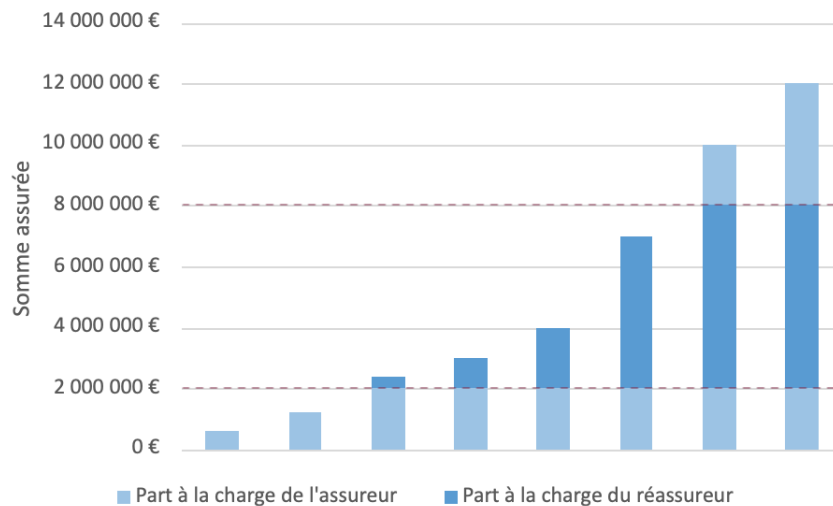


FIGURE 5 – Exemple d'une couverture de réassurance excédent de plein pour $R = 2$ et $C = 6$ (millions d'euros)

1.4 Les formes de réassurance non proportionnelle

Cette forme de réassurance étant au cœur de notre étude, elle fera en conséquence l'objet d'une analyse plus approfondie.

En réassurance non proportionnelle, le réassureur prend l'engagement de payer à la cédante un certain montant, à condition qu'un événement défini dépassant un certain seuil (sinistre individuel ou somme de sinistres) se réalise. Contrairement au cas proportionnel, les intérêts entre assureur et réassureur peuvent diverger : la fréquence de petits sinistres n'impactera pas le réassureur, contrairement à la fréquence et sévérité des grands sinistres. La prime de réassurance, tarifée par les réassureurs, est le plus souvent exprimée en taux de l'assiette de prime d'assurance. Ce taux peut être fixe ou variable.

Il existe deux grandes catégories de couverture pour cette forme : les traités en excédent de sinistres (notés XS ou XL, pour Excess of Loss en anglais), et les traités en excédent de pertes (notés SL pour Stop Loss en anglais).

1.4.1 Excédent de Sinistres

Ce type de protection est la forme la plus courante en réassurance non proportionnelle. Son objectif consiste à couvrir l'assureur lors de la survenance de sinistres supérieurs à un certain montant prévu dans le contrat (franchise, priorité, ou encore *deductible*), et dans une certaine limite. Les bornes d'un tel type de traité sont définies par la franchise et la portée (ou capacité), aussi utilisées pour définir une tranche de réassurance. La portée est définie comme étant le montant maximal couvert par le réassureur. Elle est égale à la différence entre le plafond du traité et la priorité. La notation d'un tel traité se fait de la manière suivante : « portée XS priorité ». Dans la suite de ce mémoire, la notation f désignera la franchise, p la portée, et l la limite (avec $l = p + f$).

Afin de différencier deux types de traités en excédent de sinistres, il est nécessaire de s'attarder plus en détail sur la distinction entre le risque et le sinistre. Le risque correspond à la probabilité que survienne un dommage, tandis qu'un sinistre représente la réalisation de ce risque (incendie, tempête ...). Lorsque qu'il y a un croisement entre une cause et un risque unique, il en résulte alors un sinistre potentiel. Mais lorsque ce croisement concerne une cause avec plusieurs risques, il en résulte alors un événement (composé de plusieurs sinistres potentiels). Ce constat va nous permettre de distinguer les deux types de traités suivants :

- **Excédent de sinistres par risques**

Un tel type permet de couvrir l'assureur dans le cas de sinistres individuels supérieurs à la franchise et dans une certaine limite. Soit X le montant brut d'un sinistre couvert par un traité XS à une tranche p XS f . Mathématiquement, le montant à charge du réassureur M_R sera alors égal à :

$$M_R = \min(\max[X - f, 0], p)$$

Il est également possible d'empiler des excédents de sinistres, constituant ainsi plusieurs tranches, ce qui forme ce qu'on appelle un programme de réassurance.

Voici un exemple de partage des sinistres couverts par un traité XS par risque, composé de deux tranches avec la tranche 1 (T1) : 2 XS 1, et la tranche 2 (T2) : 3 XS 3 (millions d'euros), entre assureur et réassureur.

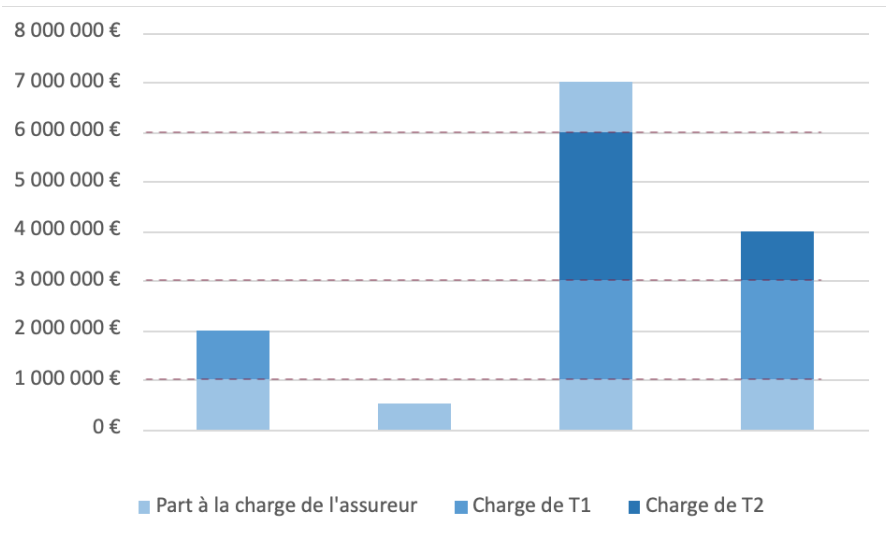


FIGURE 6 – Exemple d'une couverture de réassurance en excédent de sinistres par risques composé de deux tranches

Le traité s'applique à chaque sinistre survenu durant la période de couverture. Ce type de traité est d'une grande utilité dans la protection contre certaines sévérités individuelles exceptionnelles (souvent rencontrées dans le cas de tierce responsabilité).

- **Excédent de sinistres par évènement**

Cette forme de réassurance permet de couvrir l'assureur dans le cas d'un évènement particulier, correspondant au coût total de plusieurs sinistres ayant une même cause (si ce dernier dépasse la franchise et dans une certaine limite). La notion d'évènement doit être clairement définie : elle peut être d'origine humaine (attentat terroriste...), ou naturelle (tempête...).

Exemple du partage entre les deux parties des sinistres couverts par un traité XS par événement, composé d'une tranche T1 : 10 XS 10 (millions d'euros). Les quatre sinistres utilisés dans l'exemple sont supposés découler d'un même événement.

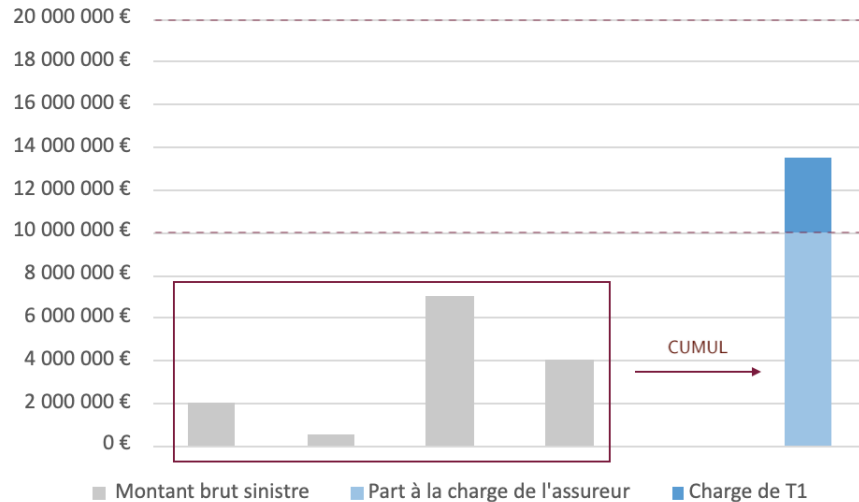


FIGURE 7 – Exemple d'une couverture de réassurance en excédent de sinistres par événement à une tranche

Le traité s'applique au montant cumulé de tous les sinistres causés par un même événement. Ce type permet de se protéger contre la survenance d'un événement exceptionnel, une catastrophe, occasionnant de multiples sinistres individuels. Des clauses de limitations dans le temps ou de limitations géographiques peuvent être ajoutées au traité afin de limiter la charge du réassureur provenant d'un même événement.

Il est également possible de mettre en place des XS par risque et/ou par événement : la cédante est alors couverte pour tout type de sinistre, événementiel ou individuel.

1.4.2 Excédent de Perte

Abrégé par SL (pour Stop Loss en anglais), le traité en excédent de perte annuelle adopte un fonctionnement semblable à celui d'un traité XS : la différence porte sur l'expression de la franchise et de la portée, qui vont être exprimées sous la forme de rapports sinistres / primes (ou plus rarement en fonction de sommes assurées couvertes).

Soit X_i le montant du i^{me} sinistre, n le nombre annuel des sinistres, et EPI la somme des primes acquises par la cédante. Mathématiquement, le montant à charge du réassureur est défini de la manière suivante :

$$M_R = \min \left[\max \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{EPI} - f, 0 \right), p \right] \times EPI$$

Par conséquent, ce type de traité va permettre de se prémunir contre les mauvais résultats annuels enregistrés par la cédante sur un secteur donné : d'une certaine manière, il est utilisé comme outil de protection de bilan de la cédante.

1.5 Domaines d'applications

1.5.1 La réassurance Non-Vie

Un peu plus de 5 % des primes totales du marché mondial de l'assurance sont cédées en réassurance, correspondant à environ 320 milliards USD. Tout comme l'assurance classique, la réassurance se déploie sur deux grands axes bien distincts. L'activité « IARD » (acronyme de « Incendies, Accidents et Risques Divers », aussi appelé Non-Vie) et l'activité « Vie ».

L'axe IARD est une part majoritaire dans le secteur de la réassurance en terme de primes brutes cédées, représentant plus de 60 % de ces primes (*Apréf, l'Association des Professionnels de la Réassurance En France, 2020*). Elle englobe plusieurs branches (construction, automobile, incendie, ...) et sous-branches, chacune ayant ses spécificités.

1.5.2 Les domaines concernés

En réassurance non-vie, les domaines concernés relèvent généralement soit des branches à développement court (branche courte), soit de celles à développement long (branche longue). Cette distinction repose sur le temps requis pour le développement complet des sinistres avant d'être en mesure d'évaluer correctement leurs montants. Ce délai peut varier énormément d'une branche à une autre.

Cette catégorisation branche courte / branche longue joue un rôle particulièrement important lors de la tarification. Par exemple, lors de la modélisation sur expérience, le choix d'un horizon sur l'historique des sinistres de la cédante est nécessaire. Malgré l'adaptation de son étendue selon d'autres critères annexes (pays, marché, nature de l'affaire ...), l'intervalle de modélisation retenu dépendra en premier lieu du type de la branche du traité : en règle générale, l'étendue retenue sera de dix années pour les cas de branche longue, contre cinq pour ceux de la branche courte. Cette différence découle notamment du temps de développement des sinistres jusqu'à l'ultime (montant final) estimé du sinistre.

- **Risques relatifs à un développement court**

Les domaines typiques relevant de la branche courte sont notamment ceux qui répondent à la problématique d'indemnisation dans le cas de dommages aux biens de l'assuré. Le principe d'indemnisation va chercher à redonner à l'assuré la position financière qu'il détenait avant que le sinistre n'ait lieu. Il est clair que lors de l'incendie d'une maison d'un assuré, une telle perte va être relativement simple à évaluer, dans le sens où cette dernière est rapidement identifiable et estimable. Les risques relatifs à un développement court en non-vie correspondent aux risques incendie, accident et divers.

Malgré des développements différents selon les pays ou les marchés, le principe d'indemnisation reste majoritairement vérifié à travers les territoires.

- **Risques relatifs à un développement long**

Les domaines relatifs à la branche longue sont majoritairement ceux traitant de la responsabilité civile. Ces derniers vont couvrir la responsabilité de l'assuré sur les dommages qu'il va causer aux tiers : dommages corporels, matériels, pertes financières ou atteintes à la réputation. Ces dommages font généralement suite à une négligence de la part de l'assuré.

Parmi ces branches longues, il est possible de discerner deux grands types de risques que sont la responsabilité civile générale (RCG) et la responsabilité civile automobile (RCA). Ces branches présentent des sinistres dont le développement s'opère sur plusieurs années (généralement jusqu'à des dizaines d'années). Cela s'explique par leur découverte qui peut ne pas être immédiate, ainsi que la difficulté de déterminer les conséquences des préjudices corporels sur la santé de la victime. En effet, le délai de stabilisation de l'état de la victime peut parfois prendre des années (par exemple dans le cas des mineurs qui ne peuvent être stabilisés avant leur majorité). L'évaluation finale du coût total de l'accident n'étant connue qu'après cette étape, cela explique les déroulements très longs des sinistres dans certains cas.

Cette complexité est beaucoup moins conséquente dans le cadre du dommage aux biens. En effet, il est beaucoup plus aisé de rattacher une étiquette de prix à un objet, que d'estimer le développement de sinistres touchant aux domaines de la santé (dommages corporels, prix de la douleur ...). C'est l'une des principales raisons pour lesquelles la tarification de traités couvrant de tels secteurs d'activités est rendue plus délicate, motivant ainsi notre problématique sur la tarification des traités en excédent de sinistres en responsabilité civile générale.

1.5.3 Focus sur la responsabilité civile générale

Les entreprises qui souscrivent à un contrat d'assurance responsabilité civile (RC) générale, aussi appelé responsabilité civile entreprise, vont s'assurer contre les dommages causés à des tiers

par l'entreprise, de par son exploitation et ses activités. Ces dommages peuvent être de nature corporelle, matérielle ou immatérielle.

Ce contrat d'assurance peut contenir plusieurs volets, notamment :

- RC Exploitation (Public Liability en anglais) : également appelée RC Avant Livraison, cette garantie intervient pour les dommages causés aux tiers par l'entreprise dans le cadre de l'exercice de ses activités, avant la fin de prestation de l'entreprise ;
- RC Après Livraison (Product Liability en anglais) : aussi appelées RC Produits ou encore RC Après Travaux, ces garanties relatives interviennent à compter de la mise en circulation des produits ou de la réalisation des travaux ;
- RC Professionnelle : va être intégrée au contrat d'assurance dès lors que vous effectuez des prestations d'ordre intellectuel dans le cadre de vos activités (notaire, avocats,...). Ces garanties interviennent pour couvrir des dommages liés à une faute professionnelle (erreurs, omissions, oublis, négligence,...) lors de la réalisation des prestations.

Comme exposé précédemment, la branche de Responsabilité Civile Entreprise va relever du domaine des branches longues. Cela peut s'expliquer par la recherche de responsabilité, de l'attente de décisions judiciaires, ou encore de l'incertitude sur l'évolution de l'état de la victime.

Les caractéristiques propres à ce secteur décrites antérieurement dans cette section vont lourdement impacter nos méthodes de tarification. Ce mémoire a donc pour objectif de tarifier la responsabilité civile générale dans le cas d'un traité XS, et de répondre à la problématique d'une forme de tarification qui serait adaptée à ce secteur. Nous allons donc maintenant décrire les méthodes de tarification générale dans le cas des traités XS, avant de cibler notre problématique en particulier.

2 Les méthodes de tarification usuelles en réassurance

Avant de détailler ces méthodes, présentons tout d'abord les principes généraux de la tarification en réassurance.

2.1 La tarification en réassurance

La cédante désirant se réassurer a le choix entre passer par un courtier ou s'adresser directement à un réassureur. Chez le réassureur, la personne en charge de la relation directe avec le client (cédante ou courtier) est le souscripteur. Une fois que ce dernier a pris connaissance de la demande précise du client et que les échanges sur l'affaire sont arrêtés, l'affaire est transmise à l'actuaire tarificateur pour le versant tarification / cotation de l'affaire.

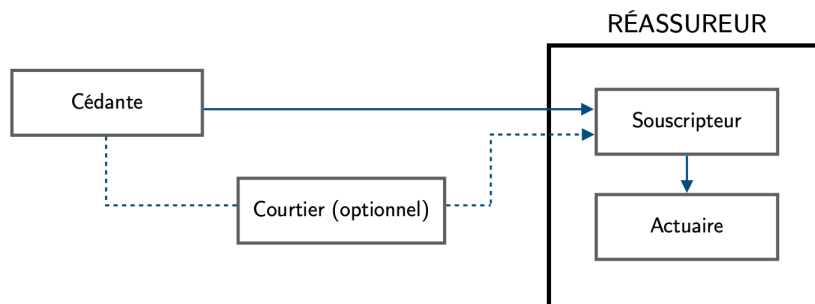


FIGURE 8 – Processus de la réassurance

2.1.1 L'étape de cotation

La cotation représente l'étape durant laquelle l'actuaire tarificateur va chercher à déterminer un prix à un programme de réassurance. Pour ce faire, il va recevoir un ensemble de données sur la cédante et le portefeuille concerné. Ces informations comprennent à la fois :

- la note de couverture (Slip) : détail du type de couverture et des conditions négociées ;
- le document contractuel (Wording) : détail des règles et conditions du contrat de réassurance, que chaque partie doit signer ;
- les statistiques de la cédante : l'historique des primes globales perçues par cette dernière, celui des sinistres, et sa mesure d'exposition dans certains cas.

Le manque de données constitue le problème majeur auquel est confronté l'actuaire. C'est pourquoi il va considérer et analyser avec rigueur la moindre information qui lui sera communiquée.

2.1.2 Les spécificités du contrat

Le Slip et le Wording vont contenir toutes les clauses générales et particulières au contrat. Certaines d'entre elles seront spécifiques à certains produits. L'ensemble de ces spécificités est indispensable à la bonne tarification de l'actuaire. Les principales clauses des XS sont les suivantes :

- **La période de couverture**

Il est possible de définir différents types de périodes de couverture de contrat : cette spécificité déterminera l'année de rattachement du sinistre. Les deux cas majeurs rencontrés sont la couverture par année de souscription (risk attaching), ou celle par année de survenance (losses occurring).

- **La définition du risque, du sinistre, de l'événement**

La définition de tels éléments va permettre de clarifier et préciser la notion d'engagement du réassureur sur un sinistre donné (au sens individuel ou au sens de l'événement).

- **La franchise agrégée annuelle (Annual Aggregate Deductible, notée AAD)**

Exprimée sous la forme d'un montant ou d'un pourcentage (de l'assiette de prime du traité le plus souvent), l'AAD désigne le montant des pertes au-dessus de la priorité que va accepter de prendre en charge la cédante. L'intérêt d'une AAD est de retarder l'intervention du réassureur, et de diminuer son coût grâce à l'augmentation contrôlée de la rétention de l'assureur.

- **La limite annuelle (Annual Aggregate Limit, notée AAL)**

Exprimée sous la forme d'un montant, l'AAL correspond à la garantie annuelle maximum offerte par le réassureur (qui ne peut être inférieure à la portée du contrat).

- **La clause de reconstitution de garantie (reinstatement clause)**

La prime de base versée par l'assureur sert uniquement à couvrir la portée initiale d'un excédent de sinistre. L'objectif principal d'une telle clause est de mettre en place une limite annuelle d'engagement sous forme d'un « nombre de fois » la portée du contrat. Cette limite n'est pas indiquée par un montant comme l'AAL, mais par un nombre compris entre 0 et infini, désignant le nombre de rétablissements de portée rendus possibles. En échange, immédiatement après une perte, l'assureur va verser par anticipation une prime additionnelle pour reconstituer la garantie qui a été consommée. Cette « surprime » s'appelle prime de reconstitution. Elle est évaluée à chaque fois que

la portée est touchée. Soit p_c la partie de la portée qui est consommée suite au sinistre, t_p le taux de prime de base et c le coefficient forfaitaire. Cette surprime sera évaluée de la manière suivante :

$$\frac{p_c}{p} \times t_p \times c$$

Le coefficient forfaitaire est un coefficient pouvant varier entre 0 % (reconstitution dite gratuite) et 200 %. Le lien entre l'AAL et le nombre n de reconstitutions est le suivant : $AAL = (1 + n) \times p$.

- **La clause de stabilisation**

Dans le cas où une perte touche la priorité, la charge sinistre supplémentaire générée par l'inflation entre la date de survenance et sa clôture définitive va venir s'ajouter à la perte initiale. Ce phénomène est d'autant plus présent dans un contexte de branche longue, étant donné que la clôture définitive d'un tel sinistre peut prendre de nombreuses années. Sans clause de stabilisation, ce surcoût sera uniquement supporté par le réassureur. Une telle clause va chercher à éviter cela, en partageant cette surcharge entre assureur et réassureur. Elle fonctionne de la manière suivante : pour chaque paiement relatif à un sinistre donné, un paiement équivalent est calculé à un taux d'inflation constant, correspondant au montant théorique qui aurait dû être versé au moment de la perte (correspond à la perte dite historique). C'est sur la base de la perte historique que la répartition est alors effectuée, et ce sont ces mêmes proportions qui seront ensuite utilisées pour le partage de la perte réelle entre assureur et réassureur. Une clause de stabilisation se doit donc de spécifier le détail de son fonctionnement (certaines fonctionnent avec un système de seuil atteint, ...), et de définir un indice. Les indices les plus souvent utilisés sont les indices « Salaires » (généralement le cas en Responsabilité Civile), ou à défaut les indices « Consommation ».

- **La clause d'indexation**

Une telle clause va permettre la reconduction d'un traité / programme de réassurance au fil des années, sans avoir à recalculer les bornes considérées (afin de conserver le niveau économique de ces dernières par rapport aux sinistres potentiels). Les limites vont être indexées selon un indice économique reflétant l'évolution des coûts des sinistres dans une branche définie. Là encore, une telle clause devra définir un indice, en lien à la branche d'assurance couverte (indice salaires, indice construction, indice consommation, ...).

Cette liste non exhaustive des spécificités du contrat n'est qu'un mince aperçu des informations essentielles que doit récolter et prendre en compte l'actuaire lors de sa tarification. L'autre élément

principal que reçoit l'actuaire, et qui nécessite une attention toute particulière dans la démarche de tarification, concerne les données envoyées par la cédante.

2.1.3 Les statistiques de la cédante

- **Primes et Sinistres**

Tout d'abord, l'actuaire va prendre connaissance de l'historique des primes globales perçues par la cédante. Il est en effet important d'avoir une idée des tendances du portefeuille de la cédante sur les dernières années. À cet élément vient s'ajouter l'historique de sinistralité de la cédante, permettant l'analyse de son passé, tout en fournissant une base pour l'utilisation de modèle lors de la tarification. Cet aspect fera l'objet de notre prochaine partie.

- **Mesure d'exposition du portefeuille**

Dans la grande majorité des cas, lorsqu'une information sur la mesure d'exposition est fournie par la cédante, elle prend la forme d'un profil de portefeuille. Également connu sous le nom de profil de risques, il correspond à une description de l'exposition actuelle du portefeuille de la cédante. Il se présente sous la forme d'un tableau, qui indique la répartition des risques du portefeuille en fonction de leurs sommes assurées (SA). Généralement, ce tableau donne également d'autres informations telles que le nombre de polices, la somme des primes (P totale), ainsi que le total des sommes assurées des biens ayant une somme assurée comprise dans les « bandes » prédéfinies. Il n'est toutefois pas possible de connaître la somme assurée individuelle de chaque police, seule une moyenne de cette information y figure (ou est déterminable) pour chaque ligne.

SA_{inf}	SA_{sup}	Nombre de polices	SA totale	SA moyenne	P totale
0	500 000	325	61 789 325	190 121	48 392
500 000	1 000 000	457	294 876 051	645 243	142 127
...
A	B	C	D	D / C	E

TABLE 1 – Exemple d'un profil de risques

Idéalement, ces informations seraient transmises spécifiquement pour chaque risque. Ceci étant impossible, il est souhaitable de bénéficier de la granularité la plus fine possible, permettant de disposer d'une précision de l'information des plus optimales.

2.1.4 La prime de réassurance

Le coeur du processus de cotation concerne la détermination de ce que l'on nomme la prime pure, soit l'espérance mathématique de la charge des sinistres attendue par le réassureur. Dans la suite de ce chapitre, nous ne nous intéresserons qu'à la détermination de cette prime pure.

A partir de celle-ci est obtenue la prime technique, qui correspond à la prime pure augmentée des chargements et des frais. Ces derniers vont englober les frais servant à rémunérer les employés de la compagnie de réassurance (les frais de gestion), le courtier (les frais de courtage) et l'actionnaire (le coût du capital), ainsi que des chargements liés aux incertitudes présentes dans le processus de cotation (le chargement de sécurité).

Enfin, la prime versée par la cédante au réassureur est la prime commerciale : elle correspond à la prime technique (parfois) modifiée en fonction de la politique commerciale du réassureur.

La détermination de la prime pure, objectif de l'actuaire tarificateur, est généralement obtenue à l'aide de modèles statistiques. Ces derniers diffèrent en fonction de nombreux critères, comme le type de traité ou le type de branche.

Par exemple, la tarification proportionnelle se fait de manière plus immédiate puisque la part de prime revenant au réassureur est déterminée par le taux de cession (principe général de la tarification, auquel vient s'ajouter les commissions à prendre en compte). Mais ce principe ne sera pas d'avantage détaillé ici, ce type de traité n'étant pas le cœur de notre problématique.

En réassurance non-proportionnelle, la prime de réassurance n'est pas fonction directe de celle d'assurance. Cela engendre un calcul de prime de réassurance effectué à l'aide de différentes méthodes. La prime de réassurance sera souvent exprimée par un taux, applicable à la prime d'assurance dans ce cas.

Allant des plus simplistes aux plus complexes, de nombreuses méthodes de tarification se sont développées au fil des années en réassurance, les évolutions significatives du domaine de la statistique ayant suscité l'émergence de modèles toujours plus poussés et complexes. Malgré cela, les méthodes considérées comme les plus « basiques » prennent encore toute leur place aujourd'hui dans l'étape de tarification. Pour le cas des traités XS, on recense deux grands types de méthodes de tarification de réassurance : les méthodes par expérience et les méthodes par exposition. La distinction majeure entre elles-deux concerne la catégorie de données sur laquelle vont reposer ces modèles : alors que l'approche par expérience se base uniquement sur la sinistralité historique de la cédante, l'approche par exposition s'appuie elle sur le portefeuille de la cédante. Ces deux méthodes ne sont néanmoins pas incompatibles : il est possible de les combiner, approche d'autant plus pertinente dans le domaine de la réassurance que le manque de données y est un problème récurrent.

Pour de multiples raisons qui seront explicitées plus en détail ultérieurement, la tarification des traités en excédent de sinistres est rendue complexe en responsabilité civile générale. C'est la raison pour laquelle ce mémoire porte sur l'étude d'une telle problématique. Avant de cibler ce secteur d'activité particulier, nous développerons et approfondirons ci-dessous les méthodes de tarification générales utilisées dans le cas non-proportionnel.

2.2 La tarification par expérience

La tarification par expérience est l'approche la plus répandue chez les réassureurs. Elle se base sur l'hypothèse que le meilleur reflet du comportement d'un portefeuille est la sinistralité observée par le passé. Les deux méthodes s'appuyant sur l'expérience et qui sont les plus couramment utilisées sont l'approche du Burning Cost (méthode empirique), et l'approche dite du coût - fréquence, aussi appelée modèle du risque collectif (approche probabiliste). Avant de présenter leur modèle respectif, attardons-nous sur une étape indispensable à l'utilisation de ces approches : la mise en AS-IF des données.

2.2.1 Mise en AS-IF

Les données transmises par la cédante se présentent sous forme de statistiques recensant les primes et sinistres historiques. La préparation des données pour le processus de tarification passe impérativement par une première étape couramment appelée la « mise en AS-IF » : elle permet de rendre les données représentatives de l'année d'exposition à tarifier. Celle-ci se décompose principalement en trois temps comme suit :

- dans un premier temps, l'idée est de rendre ces données représentatives de la sinistralité dans l'environnement de l'année de couverture. Ainsi, les données historiques vont être capitalisées. Cela permet de gommer l'impact de l'inflation économique, et de se positionner sur la base d'une unité monétaire constante ;
- dans un deuxième temps, compte tenu de l'évolution du portefeuille (capitaux, nombre de polices,...) ou de la nature des garanties accordées (franchise de base, exclusions,...), une étape de redressement est nécessaire. Le but est de reconstituer une base de portefeuilles homogènes dans le temps ;
- pour terminer, une revalorisation des données peut être réalisée, consistant à prendre en compte l'évolution du coût du risque (par exemple évolution du coup des matières premières pour reconstruire un bâtiment..), ou de l'environnement juridique (par exemple mise en place d'une nouvelle jurisprudence concernant l'indemnisation des accidentés de la route).

Afin de considérer les effets du temps sur les montants de sinistres (d'autant plus dans le cas de développement long), une dernière étape est susceptible d'être ajoutée : la projection à l'ultime de la charge de sinistre (correspondant à la dernière date de développement). À une date d'observation donnée, par exemple à la date de tarification du traité, il reste des inconnus dont l'actuaire devra évaluer l'impact :

- les IBNER (Incurred But Not Enough Reported) : correspondent aux sinistres survenus, ouverts, mais dont l'estimation totale à la date d'évaluation est inférieure au montant réel payé à la clôture du sinistre ;
- les IBNYR (Incurred But Not Yet Reported) : correspondent aux sinistres survenus, mais non encore observables car non encore rapportés à la date d'évaluation (correspond aux sinistres dits « tardifs »).

En principe, pour les branches longues, les sinistres sont présentés sous la forme d'un triangle de développement. Celui-ci représente une vision de l'évolution des données de paiement des sinistres, par année de développement (mais peut aussi être constitué de nombre de sinistres ou encore de charges associées). A partir de ce triangle AS-IF, l'étape dite de liquidation va être réalisée afin de comptabiliser ces IBNER dans le calcul du coût à l'ultime (la plus utilisée est celle de Chain-Ladder). Un certain nombre de sinistres tardifs ainsi que leur montant vont également être simulés afin de les prendre en compte dans la tarification.

Nous avons maintenant à disposition des statistiques considérées comme représentatives de l'exposition que nous cherchons à côter.

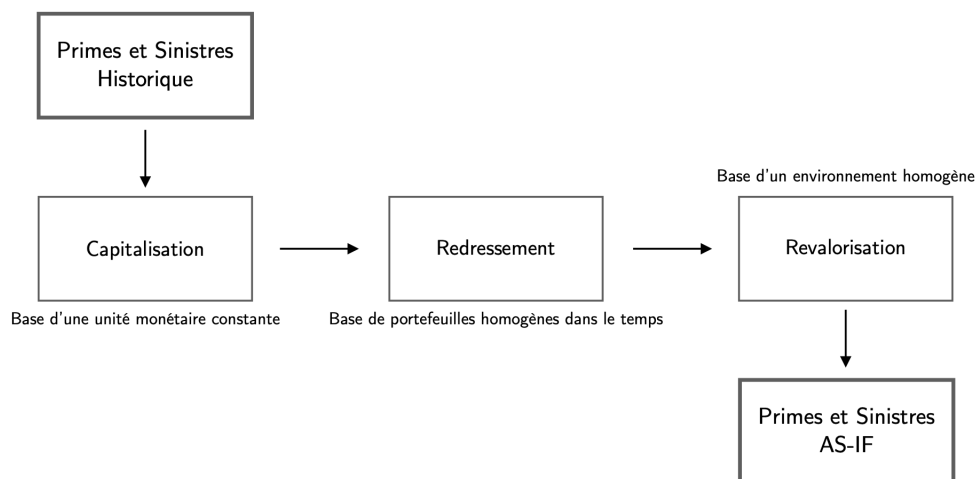


FIGURE 9 – Étapes de mise en AS-IF

Ces étapes sont généralement réalisées à travers la mise en place de deux indices :

- indice des primes : doit refléter l'évolution des tarifs et des garanties originaux. C'est l'évolution de la prime originale moyenne
- indice des sinistres : doit refléter l'impact de l'évolution du coût du sinistre, c'est à dire l'inflation des différentes composantes de ce dernier

Le choix de tels indices va être fonction du domaine considéré. Par exemple, l'indice BT01 (représentant l'évolution des coûts dans le secteur du bâtiment), majoritairement utilisé pour la branche construction, ou encore l'indice GIMRP (groupe des industries métallurgiques), souvent retrouvé lors de la tarification de la branche automobile.

2.2.2 Burning Cost

Considérée comme la plus intuitive, cette méthode non paramétrique dite du « Burning Cost » représente le ratio entre le montant de pertes à charge de la tranche et les primes perçues par l'assureur.

Après la mise en AS-IF des données, pour chaque tranche, ce ratio va être calculé pour chaque année d'expérience, en tenant compte des spécificités propres au traité (AAD, AAL...).

Soit n_i le nombre de sinistres de l'année i , EPI_i l'assiette de prime associée à cette année, et X_j le montant AS-IF du j^{ime} sinistre. Exemple du calcul de ce taux pour l'année i pour une tranche p XS f (sans AAD ni AAL) :

$$BC_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \min(p, \max(X_j - f, 0))}{EPI_i}$$

Le taux de prime pure représente simplement la moyenne de ces taux calculés chaque année. L'intervalle de temps choisi pour calculer cette moyenne dépend évidemment en premier lieu du nombre d'années de statistiques disponibles (parfois minime). Affranchi de cette contrainte, il va dépendre du type de branche couvert par le traité. Enfin, la prime pure est obtenue en multipliant ce taux par l'assiette de prime estimée pour l'année de couverture de la cédante.

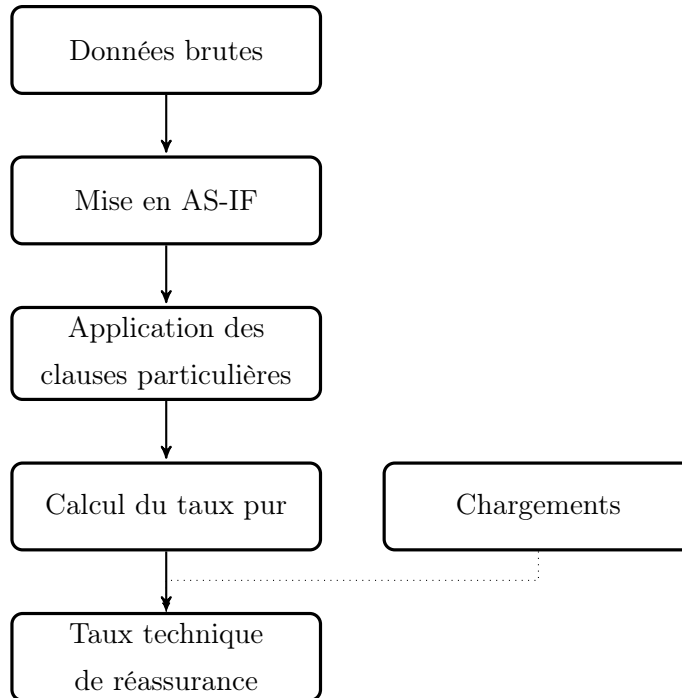


FIGURE 10 – Schéma récapitulatif du fonctionnement de la méthode du Burning Cost

2.2.3 Modèle coût - fréquence

Cette méthode paramétrique repose sur le modèle collectif qui permet une étude distincte de la fréquence et de la sévérité des sinistres, en les modélisant séparément. Soient les notations suivantes :

- la fréquence : N la variable aléatoire décrivant le nombre annuel de sinistres du portefeuille ;
- la sévérité : le coût du sinistre individuel, représenté par les variables $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$, supposées indépendantes et identiquement distribuées, de fonction de répartition F , de fonction de densité associée f .

Ces deux composantes caractérisent un portefeuille de réassurance. La charge totale sur ce dernier serait alors représentée par la variable aléatoire S , désignant le coût total des sinistres survenus cette même année :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

Ce modèle reposant sur l'hypothèse d'indépendance entre les montants des sinistres et la fréquence, il est alors possible d'obtenir la prime pure, correspondant à la charge moyenne telle que :

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N] \times \mathbb{E}[X]$$

Les deux lois les plus couramment utilisées pour la modélisation de la fréquence vont être la loi Poisson, et la loi Binomiale-Négative (la loi Poisson sera privilégiée dans le cas où l'espérance de la fréquence de l'échantillon est supérieure à sa variance). Concernant les méthodes statistiques utilisées, leurs paramètres seront simplement estimés par la méthode des moments ou maximum de vraisemblance, calibrés à partir des données d'expériences. Les données sur lesquelles vont être calibrées ces lois correspondent à l'échantillon du nombre annuel de sinistres AS-IF : contrairement à la mise en AS-IF des données primes et sinistres, il sera privilégié pour la fréquence un coefficient d'échelle à appliquer, permettant de recalibrer ces fréquences par rapport à l'exposition du portefeuille (nombres de risques du portefeuille, EPI,...).

Du côté de la sévérité des sinistres, les lois choisies seront généralement celles de Pareto, Log Normale ou Weibull. Là encore, les méthodes statistiques d'estimation de paramètres utilisés seront les mêmes, également calibrées à partir des données d'expérience. Ces lois sont souvent rencontrées en réassurance du fait de leur queue épaisse, spécificité permettant la modélisation des sinistres graves, qui constitue un des enjeux majeurs de la réassurance.

Une fois obtenue la loi de fréquence et de sévérité, une simulation stochastique de ces deux composantes permettra d'estimer le taux pur souhaité pour chaque tranche.

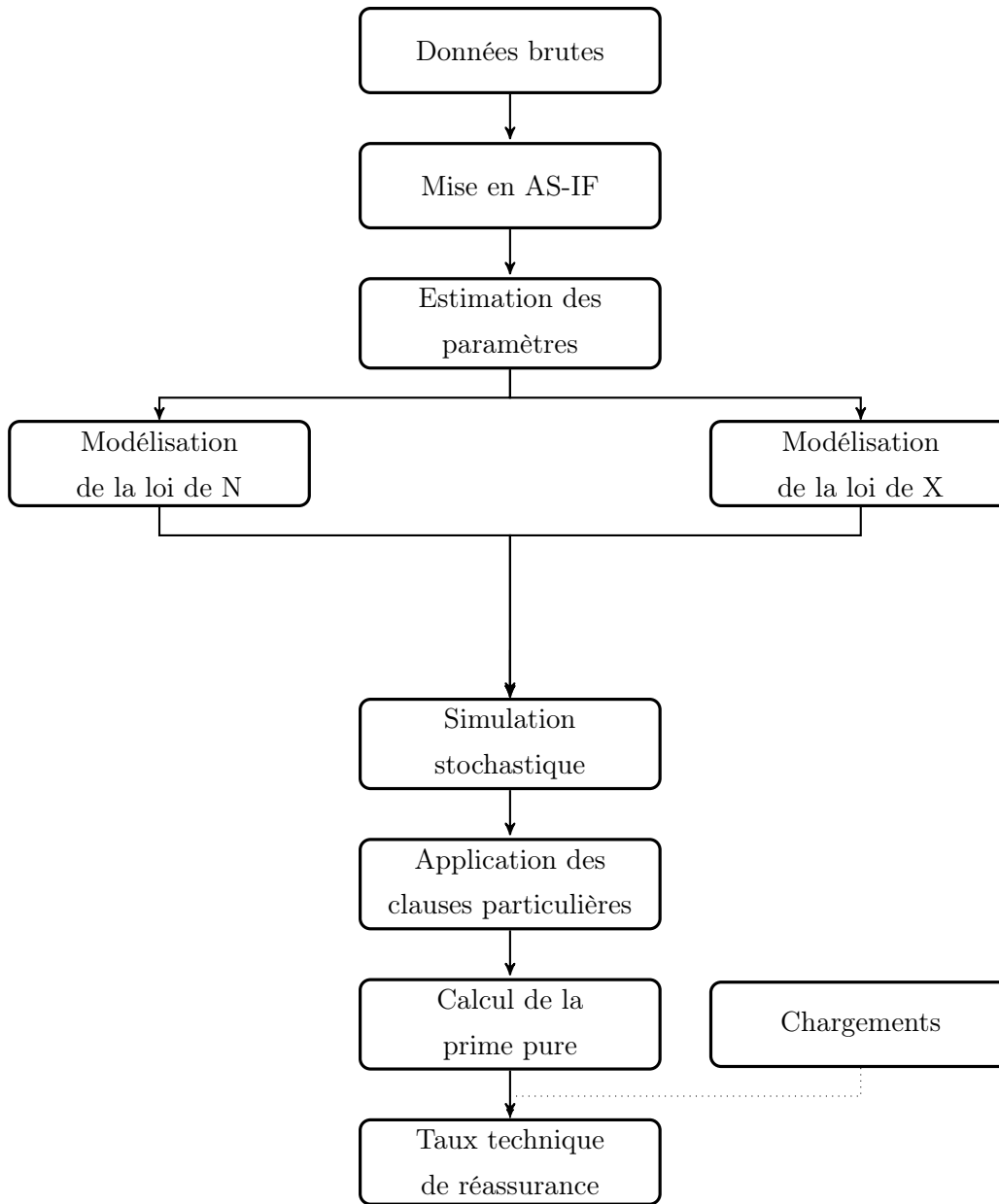


FIGURE 11 – Schéma récapitulatif du fonctionnement de la méthode coût-fréquence

2.2.4 Critique des approches par expérience

- **Burning Cost**

Malgré l'existence de nombreuses autres approches possibles de tarification, la méthode du Burning Cost reste incontournable sur le marché de la réassurance : elle est essentielle pour se forger une première vision du risque, ainsi qu'une première perception du comportement statistique du traité

non proportionnel. L'hypothèse principale utilisée, à savoir que l'histoire passée se répètera dans le futur, présente néanmoins plusieurs inconvénients. Cela implique tout d'abord une stabilité du portefeuille dans le temps. De plus, cette méthode ne va pas correctement représenter les tranches dites « non travaillantes », à savoir les tranches jamais ou très rarement touchées (par opposition au terme de tranches « travaillantes »). Le taux de Burning Cost calculé pour de telles tranches sera alors proche de zéro (voire égal à zéro dans le cas de l'absence totale de sinistre), ce qui n'a pas de sens étant donné que le risque est bien réel.

- **Modèle coût-fréquence**

Un des principaux problèmes de ce modèle coût-fréquence provient de la taille de l'échantillon de données disponibles, qui n'est pas forcément suffisante pour l'obtention de paramètres jugés suffisamment robustes. Ce problème majeur est d'autant plus contraignant dans notre étude que le domaine de la responsabilité civile générale présente des tranches particulièrement élevées, augmentant ainsi la possibilité de se retrouver en présence de tranches non travaillantes, avec trop peu de données permettant d'obtenir une bonne adéquation de notre modèle. Cela résulte du fait qu'un tel domaine peut se retrouver confronté à de graves sinistres corporels, assez rares mais de sévérité particulièrement élevée. L'assureur doit donc se couvrir contre de tels sinistres, ce grâce à des tranches particulièrement hautes. Enfin, le modèle coût-fréquence ne va pas non plus tenir compte de l'évolution du portefeuille de la cédante, un point qui constitue justement l'élément central de la méthode dite sur exposition.

2.3 La tarification sur exposition

La tarification des XS sur exposition est une méthode basée sur l'utilisation de courbes de distribution de sinistres et sur l'information contenue dans le profil de risques fourni par la cédante. La tarification par exposition distingue deux types de méthodes, étroitement liées aux types d'affaires que l'on cherche à tarifier :

- L'approche *Loss Scale*
- La méthode *ILF*

2.3.1 L'approche *Loss Scale*

Particulièrement plébiscitée dans le domaine de couverture des dommages aux biens, cette méthode nécessite d'être clairement décrite et maîtrisée. A priori celle-ci ne se prête pas à notre cas, mais il est nécessaire de comprendre d'où viennent les limites de son application pour la tarification des couvertures de responsabilité civile générale. Une fois clairement identifiés ses problèmes d'utilisation, nous tenterons ensuite de les contourner.

- **Principe**

Comme expliqué précédemment, au lieu d'estimer le tarif de l'XS sur la base unique des sinistres, l'approche *Loss Scale* repose sur le profil de portefeuille associé aux sinistres en question. En l'occurrence, le profil permet de recenser les risques du portefeuille de la cédante par tranche de sommes assurées, ainsi que les primes totales associées.

L'objectif est de partager les primes totales d'une tranche entre assureur et réassureur. Le moyen pour y parvenir repose sur l'utilisation des fonctions de distribution de pertes individuelles, aussi appelées courbes d'exposition. Ces dernières permettent de déterminer la proportion de primes nécessaires au réassureur, en fonction de la franchise. Chaque tranche permettant de regrouper des risques supposés homogènes, les risques d'une même tranche partageront alors la même courbe d'exposition.

Avant d'introduire l'obtention de telles fonctions, difficilement connues en pratique, nous allons les définir mathématiquement.

- **Courbe d'exposition**

Une courbe d'exposition \mathcal{G} représente le rapport entre prime pure retenue par l'assureur (PP_A) et prime pure (PP), indiquant ainsi l'allocation de risque retenue entre assureur et réassureur :

$$\frac{PP_A}{PP} = 1 - \frac{PP_R}{PP}$$

avec PP_R la part de prime allouée au réassureur.

Étudions plus en détail le formalisme mathématique à l'oeuvre derrière de telles courbes. Soit :

— $Y = \frac{X}{SA}$ le montant de perte normalisé (aussi appelé degré de dommage ou taux de destruction), correspondant au montant du sinistre brut normalisé par sa somme assurée SA .

Désignons F_Y la fonction de répartition du taux de destruction Y , et par f_Y sa densité, toute deux définies sur l'intervalle $[0, 1]$

— $d = \frac{f}{SA}$ la franchise normalisée par la somme assurée

Comme évoqué auparavant, la prime pure totale est égale à :

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(N) = SA \times \mathbb{E}(\min(Y, 1)) \times \mathbb{E}(N)$$

Il est supposé que le montant du sinistre en cas de destruction totale n'excèdera pas sa somme assurée, d'où $\mathbb{E}(\min(Y, 1)) = \mathbb{E}(Y)$.

Plaçons-nous dans le cas d'une tranche de portée illimitée, que l'on note ∞ XS f. La prime pure retenue par l'assureur est alors égale à :

$$PP_A = E(\min(X, f)) \times E(N) = SA \times E(\min(Y, d)) \times E(N)$$

Alors, d'après sa définition, la courbe d'exposition \mathcal{G} est égale à :

$$\mathcal{G} : d \in [0, 1] \rightarrow \mathcal{G}(d) = \frac{PP_A}{PP} = \frac{\mathbb{E}(\min(Y, d))}{\mathbb{E}(Y)} = \frac{\int_0^d 1 - F_Y(t).dt}{\mathbb{E}(Y)}$$

La fonction \mathcal{G} est une fonction strictement croissante et concave sur $[0,1]$. De plus $\mathcal{G}(0) = 0$ et $\mathcal{G}(1) = 1$ par définition.

Propriétés aisément vérifiables par le calcul de ses dérivées première et seconde :

$$\frac{\partial \mathcal{G}(d)}{\partial d} = \frac{1 - F_Y(d)}{\mathbb{E}(Y)}$$

et

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}(d)}{\partial d^2} = -\frac{f_Y(d)}{\mathbb{E}(Y)}$$

Étant donné que la dérivée seconde est toujours négative, cela traduit bien la propriété de la concavité de la fonction ILF. De plus, $d \mapsto \mathcal{G}'(d)$ est bien toujours positive, vérifiant la croissance de \mathcal{G} sur $[0,1]$.

Connaissant la fonction \mathcal{G} , il est possible d'en déduire une expression analytique de F_X :

$$F_Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 1 \\ 1 - \frac{\mathcal{G}'(t)}{\mathcal{G}'(0)} & \text{si } 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

La difficulté d'application d'une telle méthode provient de l'obtention problématique de courbes devant respecter ces conditions. Il est certes possible de construire nos propres courbes d'exposition, mais cela nécessite une très large base de données sinistres, provenant de portefeuilles aux propriétés similaires, et incluant l'information de la somme assurée du bien pour chacun. Cette solution nécessite donc des données internes conséquentes, qui font hélas souvent défaut.

Une autre solution consiste en la modélisation de ces courbes. Certaines sont plus fréquemment rencontrées dans le domaine de la réassurance. Cette approche n'étant toutefois pas au coeur de

notre travail, nous allons nous contenter de n'en présenter qu'une partie brièvement.

• **Les courbes MBBEFD**

Défini par un acronyme issu des noms des mathématiciens MAXWELL-BOLTZMANN, BOSE-EINSTEIN et FERMI-DIRAC, cette famille de courbes est une modélisation particulièrement utilisée en physique statistique, et basée sur une fonction de deux paramètres a et b :

$$\mathcal{G}_{a,b}(x) = \frac{\ln(a + b^x) - \ln(a + 1)}{\ln(a + b) - \ln(a + 1)} \text{ avec } F_Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 1 \\ 1 - \frac{(a+1)b^t}{a+b^t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

Les paramètres a et b sont calculés de manière à ce que $\mathcal{G}_{a,b}$ respecte bien les propriétés ci-dessus. Cette fonction de répartition des taux de destruction ne correspond à aucune loi de distribution classiquement utilisée en actuariat non-vie.

C'est Stefan BERNEGGER qui a initié son application en réassurance en 1997. C'est aujourd'hui une famille de courbes de référence des plus utilisée dans le domaine du dommage aux biens.

Sa méthode consiste dans une nouvelle paramétrisation, sous la forme :

$$g = \frac{a + b}{(a + 1)b} \text{ et } a = \frac{(g - 1)b}{1 - gb}$$

Les cas particuliers où les valeurs des paramètres a et b sont respectivement égales à $\{-1, 0, \infty\}$ et $\{0, 1, \infty\}$ doivent être traités séparément. Ainsi, il est possible d'exprimer $\mathcal{G}_{a,b}(x) = \mathcal{G}_{b,g}(x)$:

$$\mathcal{G}_{b,g}(x) = \begin{cases} x & \text{si } g = 1 \text{ ou } b = 0 \\ \frac{\ln(1+(g-1)x)}{\ln(g)} & \text{si } b = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{1-b^x}{1-b} & \text{si } bg = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{\ln(\frac{(g-1)b+(1-gb)b^x}{1-b})}{\ln(gb)} & \text{si } b > 0 \text{ et } b \neq 1 \text{ et } bg \neq 1 \text{ et } g > 1 \end{cases}$$

Une approche simplifiée consiste à modéliser les sous-familles MBBEFD pour différentes valeurs d'un certain paramètre c, défini tel que :

$$b(c) = e^{3,1-0,15(1+c)c} \text{ et } g(c) = e^{(0,78+0,12c)c}$$

En fonction du paramètre c, leur représentation graphique aura la forme suivante :

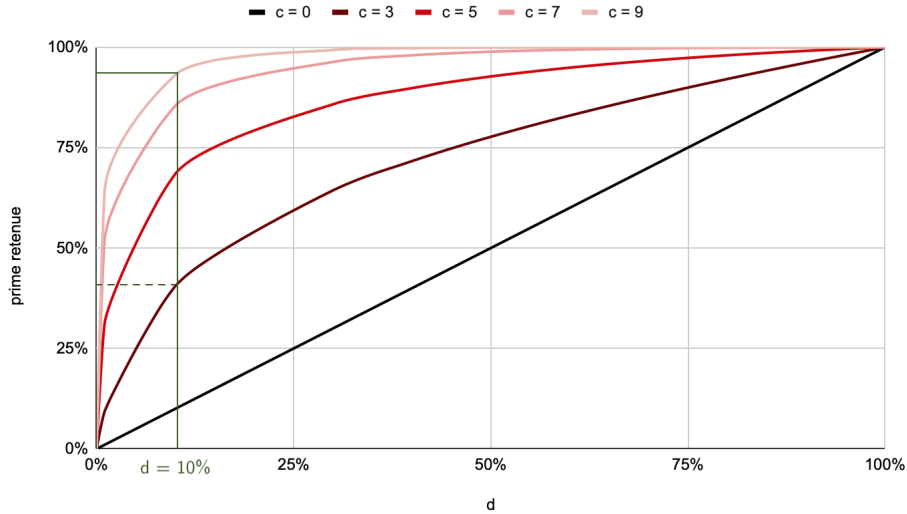


FIGURE 12 – Représentation graphique de la sous-famille MBBEFD pour différents c

Les variations du paramètre c vont impacter la concavité de la courbe.

Interprétons cette concavité par rapport à c , en prenant la courbe modélisant le taux de destruction à l'aide du paramètre $c = 3$. Dans le cas où la franchise représente 10 % de la somme assurée du risque considéré, la répartition de la prime pure entre assureur et réassureur sera respectivement d'environ 40 % et 60 %. En prenant le taux de destruction modélisé par le paramètre $c = 9$, cette même valeur de d correspondra à une répartition assureur - réassureur respectivement d'environ 95 % - 5 %.

Pour un même d fixé, plus c va augmenter, plus la proportion de primes à charge de l'assureur sera importante. Cela permet de refléter la probabilité de destruction totale du bien. Le cas où c est très grand permet de traduire une probabilité de destruction totale du bien très faible : en effet, cela implique une part plus importante pour l'assureur dans le partage de la prime pure, étant donné qu'il est jugé comme très peu probable que la destruction soit totale, et donc dépasse la franchise.

À l'inverse, si cette probabilité est estimée comme très forte, la courbe va alors avoir tendance à se rapprocher de la droite d'équation $y = x$, et la répartition de la prime pure se rapprochera de la proportion que représente la franchise par rapport à la somme assurée. C'est pourquoi un bien avec une probabilité de destruction totale égale à 1, traduisant l'hypothèse que tout sinistre est un sinistre total, a une courbe d'exposition correspondant à $x = y$ (cas de la courbe $c = 0$).

• Conclusion

Nous avons présenté ci-dessus quelques méthodes permettant d'aboutir à l'obtention de courbes d'exposition. Leur exploitation va par la suite nous permettre de calculer la part de l'assiette de

prime directe exposée grâce à l'information sur l'allocation des primes qu'elles nous apportent, et d'arriver ainsi au taux pur :

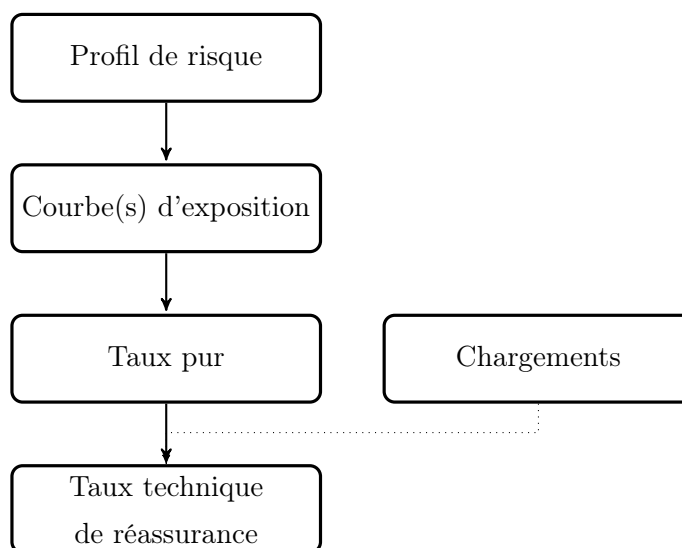


FIGURE 13 – Schéma récapitulatif du fonctionnement de la méthode sur exposition

• Critiques de l'approche Loss Scale

Dans le cas d'une application de la méthode *Loss Scale*, l'approche MBBEFD à un paramètre constitue une bonne alternative au manque de données internes, menant à l'impossibilité de construire des courbes empiriques. Par le passé, plusieurs courbes d'exposition ont été construites empiriquement et publiées grâce à la possession d'un gros volume de données historiques par certains organismes. L'approche MBBEFD peut alors être adoptée pour la modélisation de telles courbes. Cependant, bien que la probabilité d'avoir un sinistre d'un montant de $x\%$ de la somme assurée ne soit pas susceptible d'évoluer significativement avec le temps, ces courbes sont maintenant assez anciennes (datant des années 1960/1980). Une autre solution envisageable consiste à choisir directement ce paramètre c à l'aide d'études préalablement menées en interne. Grâce à elles, il serait alors possible d'estimer la probabilité du taux de destruction totale du portefeuille / tranches du portefeuille considéré, en se basant sur des indicateurs jugés appropriés (type de risques considérés, somme assurée,...).

Jusqu'à présent nous nous sommes basés dans notre démarche sur la somme assurée d'un bien, qui représente en quelque sorte la valeur marchande de ce dernier (correspondant dans le pire des cas à la perte maximale possible). Son utilisation est donc envisageable dans le cas de risques assurant des biens physiques. Or, dans le cas d'une couverture en responsabilité civile générale, le terme de somme assurée n'existe pas, et il est remplacé par celui de limite d'indemnité. Il n'est donc plus

possible de donner une valeur économique à une police, étant donné que cette limite d'indemnité va dépendre du souhait du client sur son niveau de garantie : il va choisir une limite correspondant au montant jusqu'auquel il voudrait être remboursé par l'assureur dans le cas d'un sinistre de responsabilité civile. Il est alors possible de se retrouver avec un sinistre brut de responsabilité civile s'élevant à 50 millions d'euros, alors que le client n'est couvert que par une limite d'indemnité de 5 millions d'euros. De ce fait, contrairement à la couverture de dommage aux biens, la limite d'indemnité n'est pas un facteur explicatif du montant de sinistralité, ce qui rend l'approche *Loss Scale* inadaptée.

Après cette brève introduction de l'approche *Loss Scale*, nous allons présenter l'autre grande approche de l'approche par exposition : la méthode ILF.

2.3.2 L'approche Increased Limit Factor

L'approche ILF est utilisée pour tarifier sur exposition les traités de responsabilité civile limitée. En assurance de responsabilité civile générale, la police couvre généralement jusqu'à une certaine limite d'indemnité, se différenciant ainsi du dommage aux biens. L'approche ILF permet de tenir compte de cette spécificité et de proposer ainsi une méthode plus adaptée.

- **Présentation générale de la méthode**

Considérons un risque couvert par une compagnie d'assurances dans une certaine limite d'indemnité. Dans le cas où celle-ci est amenée à augmenter, la compagnie, alors confrontée à une perte potentielle plus élevée, va logiquement augmenter la prime associée.

Le coefficient par lequel la prime de base sera multipliée se nomme le coefficient ILF (Increased Limit Factor).

- **Principe**

La méthode ILF consiste en premier lieu à fixer une certaine limite d'indemnité dite de base (basic limit en anglais, d'où l'abréviation utilisée *BL*), associée à une prime de référence connue (soit PP_{BL} cette prime). Le montant de la nouvelle prime associée à une limite d'indemnité supérieure à celle de base sera obtenu en multipliant la prime de référence par le coefficient ILF associé à la nouvelle limite d'indemnité. Soit y cette nouvelle limite d'indemnité, et $PP(y)$ sa prime pure associée. Cette dernière peut être calculée de la manière suivante :

$$PP(y) = PP_{BL} \times ILF(y)$$

avec $ILF(y)$ le coefficient multiplicateur correspondant à la limite y .

Le choix de la limite d'indemnité de base n'est pas établi selon une règle précise. Cette limite devrait être choisie suffisamment basse pour pouvoir bénéficier d'un historique de sinistralité conséquent, et ainsi pouvoir servir de base avec un degré de confiance suffisamment élevé.

Afin de disposer du coefficient ILF relatif à la limite d'indemnité souhaitée, il est nécessaire de disposer d'une courbe ILF, qui nous indique les valeurs de ce coefficient en fonction des limites d'indemnité.

Exemple d'une courbe ILF pour une limite d'indemnité de base fixée à 50 (en milliers d'euros).

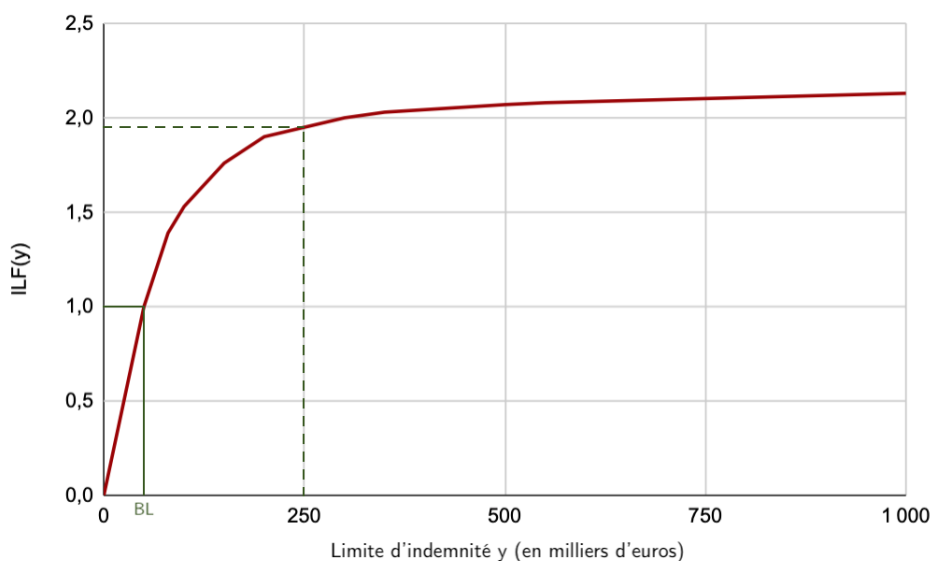


FIGURE 14 – Exemple d'une courbe ILF

Par exemple, dans le cas où la limite d'indemnité serait amenée à être relevée pour atteindre 250 milliers d'euros, la prime de référence serait multipliée par 1.95.

L'intérêt majeur d'une telle approche réside en son apport d'information sur les primes pures associées aux limites d'indemnité élevées. De telles limites présentent un risque potentiel pour les tranches les plus élevées, et donc généralement pas ou rarement sinistrées. La tarification de telles tranches est ainsi difficilement estimable par les méthodes usuelles vues précédemment (contrairement aux tranches plus basses, plus souvent qualifiées de tranches travaillantes). L'approche ILF pourrait alors nous apporter un gain d'information inestimable sur les limites d'indemnités élevées, et donc sur le comportement du risque auquel sont soumises les tranches les plus hautes.

Conclusion Chapitre 2

De par les limites exposées, la plupart des méthodes usuelles présentées jusqu'ici ne semblent pas être des solutions envisageables pour notre périmètre d'étude. Cela concerne à la fois les méthodes de tarification par expérience, ou encore la méthode sur exposition par l'approche *Loss Scale*, jugée inadéquate pour les portefeuilles de responsabilité civile.

Ces constatations nous incitent à retenir et approfondir tout particulièrement la méthode ILF, qui semble la plus adaptée à notre problématique.

3 L'approche Increased Limit Factor

3.1 Aspect théorique

Avant de présenter la théorie détaillée relative à l'ILF, complétons nos précédentes notations.

3.1.1 Notation

Les nouvelles notations plus spécifiques à cette nouvelle approche seront les suivantes (les variables définies ci-après resserviront dans la suite de l'exposé) :

- X_i : la variable aléatoire du montant individuel du i^{me} sinistre, ils sont supposés indépendants et identiquement distribués suivant une variable aléatoire X . Soit f sa fonction de densité, et F sa fonction de répartition ;
- N : la variable aléatoire du nombre annuel de sinistres ;
- BL : la limite d'indemnité de base (basic limit) ;
- PP_{BL} : la prime pure associée à la BL ;
- $PP(.)$: la fonction de prime ;
- y : la limite d'indemnité cible ;
- $ILF(.)$: la fonction du coefficient ILF ;
- T_S : le seuil à partir duquel le réassureur a connaissance des sinistres transmis par la cédante.

Il est important d'apporter une précision quant à l'utilisation de la notation N , qui est en réalité un abus de langage. Cette variable aléatoire représente le nombre de sinistres annuels en vision réassureur. Son estimation se base sur les sinistres disponibles, qui le sont uniquement à partir d'un certain seuil T_S . Une notation plus adaptée pour décrire une telle variable aléatoire pourrait alors être \tilde{N}_{T_S} , correspondant au nombre annuel de sinistres supérieur à T_S . Néanmoins, toutes nos données disponibles l'étant à partir de ce seuil T_S , la notation N ne portera pas à confusion par la suite. Cette précision permet toutefois d'introduire la notation \tilde{N}_x qui sera utilisée plus loin dans ce mémoire.

3.1.2 Aspect théorique général

Selon sa définition, le coefficient ILF en un point y représente simplement le rapport entre la prime pure d'assurance pour une limite d'indemnité y (cible), et la prime pure d'assurance pour la limite d'indemnité de base.

Les hypothèses sur lesquelles reposent la formule ILF sont les suivantes :

- indépendance entre la sévérité et la fréquence ;

— indépendance entre la limite d'indemnité et la fréquence.

Soit la prime pure d'assurance pour une limite d'indemnité y , pouvant être définie comme suit : $PP(y) = \mathbb{E}(N) \times \mathbb{E}[\min(X, y)]$. Cette quantité n'est autre que le montant de la perte brute X capée à une certaine limite d'indemnité y , multipliée par l'estimation moyenne de la fréquence annuelle.

Par conséquent, le coefficient ILF peut être défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} ILF(y) &= \frac{\mathbb{E}(N) \times \mathbb{E}[\min(X; y)]}{\mathbb{E}(N) \times \mathbb{E}[\min(X; BL)]} \\ &= \frac{\mathbb{E}[\min(X; y)]}{\mathbb{E}[\min(X; BL)]} \end{aligned}$$

Sous les hypothèses citées auparavant, les ILF ont notamment pour avantage de dépendre uniquement de la distribution de la sévérité. En effet, dans le cas où X est une variable aléatoire supérieure à zéro, alors

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx$$

Il est ainsi possible de définir une approche ILF par :

$$ILF(y) = \frac{\int_0^y (1 - F(x)) dx}{\int_0^{BL} (1 - F(x)) dx}$$

Une courbe ILF se doit de respecter les trois propriétés suivantes :

1. monotone croissante : elle permet d'assurer la croissance de la prime avec celle de la limite d'indemnité ;
2. convergente : elle permet d'assurer un montant de prime fini avec l'augmentation de la limite d'indemnité ;
3. concave : elle permet d'assurer que l'augmentation des coûts avec la limite d'indemnité se fera à un taux décroissant.

La propriété de croissance et de concavité d'une fonction ILF sur $[0; \infty]$ est vérifiable par le

calcul de ses dérivées première et seconde :

$$\frac{\partial ILF(y)}{\partial y} = \frac{1 - F(y)}{\int_0^{BL} (1 - F(x)) dx}$$

et

$$\frac{\partial^2 ILF(y)}{\partial y^2} = -\frac{f(y)}{\int_0^{BL} (1 - F(x)) dx}$$

Le fait que la dérivée seconde soit toujours négative traduit bien la propriété de la concavité de la fonction ILF. De plus, la fonction $y \mapsto ILF'(y)$ est strictement positive, vérifiant bien la propriété 1 de la croissance de la fonction ILF.

Le respect de ces propriétés est indispensable pour la bonne utilisation d'une telle approche. Après ce zoom sur la partie purement théorique d'une approche ILF, intéressons-nous à son application.

3.2 Application en réassurance

Nous supposons pour la suite que nous disposons d'une table ILF adaptée à notre cas, renseignant le coefficient ILF pour certaines limites d'indemnité. Nous nous plaçons dans le cas de la tarification d'un traité en excédent de sinistres par risque p xs f (avec $l = p + f$). Soit une certaine police du portefeuille j , avec PL_j sa limite d'indemnité, et f_{ASS_j} la franchise à charge de l'assuré.

3.2.1 Approche théorique

Nous cherchons à déterminer le taux t_j à appliquer à la prime pure totale afin de déterminer la part de prime pure de la police j revenant au réassureur.

Sachant que la prime pure totale à l'échelle du portefeuille est égale à $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(N)$, la prime pure correspondante à la police j est égale à :

$$PP_j = \mathbb{E}[\min(X, PL_j)] \times \mathbb{E}(N)$$

dans le cas sans franchise à charge de l'assuré. Sinon :

$$PP_j = (\mathbb{E}[\min(X, PL_j)] - \mathbb{E}[\min(X, f_{ASS_j})]) \times \mathbb{E}(N)$$

La prime pure de l'XS étant la suivante :

$$PP_{XS} = (\mathbb{E}[\min(X, \min(PL_j, l))] - \mathbb{E}[\min(X, \min(PL_j, f))]) \times \mathbb{E}(N)$$

dans le cas sans franchise à charge de l'assuré.

Alors, toujours dans le même cas, t_j est égal à :

$$t_j = \frac{\mathbb{E}[\min(X, \min(PL_j, l))] - \mathbb{E}[\min(X, \min(PL_j, f))]}{\mathbb{E}[\min(X, PL_j)]}$$

$$= \frac{ILF[\min(PL_j, l)] - ILF[\min(PL_j, f)]}{ILF[PL_j]}$$

Dans le cas de franchise à charge de l'assuré, t_j est égal à :

$$t_j = \frac{ILF[\min(f_{ASS_j} + PL_j, f_{ASS_j} + l)] - ILF[\min(f_{ASS_j} + PL_j, f_{ASS_j} + f)]}{ILF[PL_j + f_{ASS_j}] - ILF[f_{ASS_j}]}$$

Illustrons cette formule à l'aide d'un exemple numérique.

3.2.2 Exemple numérique

Soit la tranche de réassurance 20 xs 10 (en millions d'euros), c'est à dire que $l = 30$ et $f = 10$.

Soit la table ILF suivante (pour une limite d'indemnité de base fixée à 5, avec y exprimé en millions d'euros) :

Limite y	ILF(y)
0	0
5	1
8	1,39
10	1,53
15	1,76
20	1,9
30	2
35	2,03
50	2,07
55	2,08
100	2,13

TABLE 2 – Exemple de table ILF

Nous allons traiter le cas de trois risques avec des limites d'indemnité différentes, en distinguant le cas sans franchise à la charge de l'assuré de celui avec franchise avec $f_{ASS} = 5$. Soient les trois risques traités avec PL1, PL2 et PL3 leur limite d'indemnité respective de 8, 15 et 50 millions d'euros.

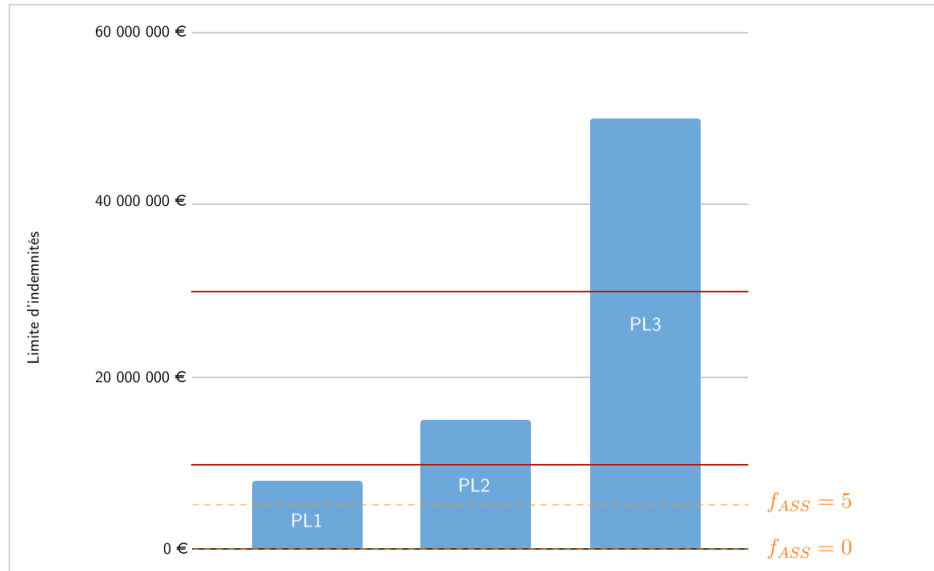


FIGURE 15 – Représentation des limites d'indemnité de différents risques par rapport à la structure d'un traité

La formule utilisée pour calculer le taux de prime pure revenant au réassureur est la suivante :

$$t_j = \begin{cases} 0 & \text{si } PL_j < f \\ \frac{ILF[\min(f_{ASS_j} + PL_j, f_{ASS_j} + l)] - ILF[\min(f_{ASS_j} + PL_j, f_{ASS_j} + f)]}{ILF[PL_j + f_{ASS_j}] - ILF[f_{ASS_j}]} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La présence du minimum dans cette formule s'explique par le fait qu'il n'est pas possible de prendre une part de prime plus importante que la limite de la tranche ou celle de la police.

Le calcul du pourcentage de la prime pure qui revient au réassureur se fait donc de la manière suivante :

- $PL1 = 8$: la limite d'indemnité se situe sous la franchise du traité. La tranche ne sera donc pas impactée par ce sinistre quelque soit son montant : $t_j = 0$;
- $PL2 = 15$: la limite d'indemnité est bien comprise dans les bornes du traité. Dans le cas sans

franchise de l'assuré, le calcul du t se fera de la manière suivante :

$$t_j = \frac{ILF(15) - ILF(10)}{ILF(15)} = \frac{1,76 - 1,53}{1,76} = 13,07\%$$

Sinon

$$t_j = \frac{ILF(20) - ILF(15)}{ILF(20) - ILF(5)} = \frac{1,9 - 1,76}{1,9 - 1} = 15,56\%$$

— $PL3 = 50$: la limite d'indemnité est supérieure à la limite du traité. De ce fait, dans le cas sans franchise de l'assuré, le pourcentage de revient sera égal à :

$$t_j = \frac{ILF(30) - ILF(10)}{ILF(50)} = \frac{2 - 1,53}{2,07} = 22,71\%$$

Sinon

$$t = \frac{ILF(35) - ILF(15)}{ILF(55) - ILF(5)} = \frac{2,03 - 1,76}{2,08 - 1} = 25\%$$

Cet exemple permet de mettre en évidence la simplicité de la méthode proposée, ainsi que sa pertinence dans la tarification de risques avec de fortes limites d'indemnité. Intéressons-nous maintenant à la faisabilité de sa mise en place, autrement dit à la question de savoir comment se procurer une telle courbe. Pour cela, nous allons nous attarder successivement sur ses deux principaux moyens d'obtention : l'approche non paramétrique et l'approche paramétrique.

3.3 Les formes non paramétriques d'une courbe ILF

3.3.1 Courbe empirique

Une telle courbe peut s'obtenir empiriquement à l'aide d'une base de données suffisamment fournie et détaillée. Pour ce faire, les informations nécessaires seraient alors :

- le montant individuel brut de chaque perte ;
- la limite d'indemnité relative à la perte.

Ces données vont provenir de portefeuilles de taille très hétérogène, c'est pourquoi il conviendrait de les normaliser par les chiffres d'affaires respectifs des portefeuilles en question.

En plus d'un niveau de détail extrêmement précis relatif à chaque sinistre, il est également nécessaire de disposer d'un nombre suffisant d'occurrences de ces informations afin de construire une base de données conséquente et de bénéficier ainsi de la meilleure robustesse possible en vue de la construction de courbes ILF.

3.3.2 Courbe discrète

Une autre façon de se procurer une courbe ILF consiste à passer par des organismes spécialisés proposant de fournir des courbes de marché. Par exemple, l'organisme ISO (*Insurance Services Office*) basé aux Etats-Unis procure des courbes ILF pour divers types de business dans le domaine de la responsabilité civile. Initialement, ces courbes sont basées sur des courbes empiriques, possiblement avec une queue ajoutée et interpolée à l'aide d'un modèle de mélange exponentiel, ou autres méthodes. Ces courbes conviennent pour les territoires américains. En l'absence d'un volume suffisant de données pour calibrer de telles courbes afférentes au business hors US, des versions dérivées sont proposées pour certains pays (Royaume-Uni, France, Allemagne,...), après avoir été recalibrées à l'aide de divers facteurs : les facteurs COPE (construction, occupation, protection et exposition) et les facteurs ARM (montant d'assurance, coûts de reconstruction, et divers facteurs comme l'inflation sociale, etc.).

3.3.3 Limites

Encore une fois, le monde de la réassurance fait face au problème majeur du manque d'informations.

En premier lieu, les réassureurs ne vont concrètement jamais, ou extrêmement rarement, se retrouver en possession des limites d'indemnité relatives à chaque sinistre, car c'est une information qui n'est pas transmise par les cédantes. L'obtention d'une courbe ILF par la voie empirique semble ainsi compromise.

Du côté cette fois des organismes spécialisés, l'obtention d'une telle courbe n'est pas possible en open source (contrairement aux cas de dommages aux biens avec les courbes SwissRe par exemple). L'organisme ISO étant spécialisé dans le domaine US, cette option ne permet pas non plus de retenir notre attention : une telle restriction de marché n'est pas intéressante. Même si l'organisme propose des recalibrages pour certains marchés, beaucoup en restent exclus. Les paramètres de recalibrage utilisés étant inconnus, il est compliqué d'appliquer par la suite une méthode de recalibrage similaire pour les autres territoires. A ce constat s'ajoute le fait que certaines de ces courbes sont basées sur des données empiriques datant de plusieurs dizaines d'années, ce qui pose le problème de leur représentativité actuelle.

Face à ces contraintes complexifiant l'élaboration d'une courbe ILF, d'autres moyens ont été envisagés, notamment via une modélisation paramétrique de ces courbes.

3.4 Les formes paramétriques d'une courbe ILF

Voici les formes paramétriques les plus fréquemment rencontrées.

3.4.1 Pareto

Cette première approche s'appuie sur la loi de la variable aléatoire X du montant individuel de sinistres, en supposant que cette dernière suit une loi de Pareto $P(t, \alpha)$, avec $\alpha > 0$ (paramètre de forme), et $x \geq t > 0$ (paramètre de location).

Développée en annexe, nous partons de la formule suivante pour obtenir notre approche ILF :

$$\mathbb{E}[\min(X; y)] = \int_0^y x.f(x)dx + y[1 - F(y)]$$

Si la variable aléatoire X suit une loi de Pareto telle que $X \sim \mathcal{P}(t, \alpha)$, de densité et fonction de répartition définies pour toute valeur réelle :

$$f(x) = \frac{\alpha t^\alpha}{x^{\alpha+1}} \text{ et } F(x) = 1 - \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha$$

Alors

$$\mathbb{E}[\min(X; y)] = \alpha t^\alpha \int_t^y \frac{1}{x^\alpha} dx + y\left(\frac{t}{y}\right)^\alpha$$

$$= \begin{cases} t[\ln(\frac{y}{t}) + 1] & \text{si } \alpha = 1 \\ \alpha t^\alpha \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_t^y + \left(y\frac{t}{y}\right)^\alpha = \frac{t^\alpha}{1-\alpha} [y^{-\alpha+1} - \alpha t^{-\alpha+1}] & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où :

$$ILF_{\mathcal{P}}(y) = \frac{\mathbb{E}[\min(X; y)]}{\mathbb{E}[\min(X; BL)]} = \begin{cases} \frac{\ln(\frac{y}{t})+1}{\ln(\frac{BL}{t})+1} & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{y^{-\alpha+1}-\alpha t^{-\alpha+1}}{BL^{-\alpha+1}-\alpha t^{-\alpha+1}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les paramètres α et t peuvent être estimés à partir de la méthode d'estimation classique du maximum de vraisemblance. Les estimateurs ainsi obtenus sont les suivants (calculs détaillés en annexe) :

- $\hat{t}_{MV} = \min_i(x_i)$
- $\hat{\alpha}_{MV} = \frac{n}{\sum_{j=1}^n \ln(\frac{x_j}{\hat{t}})}$

3.4.2 Exponentielle

Nous partons toujours de la loi de la variable aléatoire X , en supposant cette fois que X suit une loi exponentielle telle que $X \sim \mathcal{E}(\theta)$ avec $\theta > 0$. La densité et la fonction de répartition d'une telle variable aléatoire sont alors définies telles que :

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} \text{ et } F(x) = 1 - e^{-\theta x}$$

Comme pour le cas traitant la loi de Pareto, intéressons-nous en premier lieu à l'espérance :

$$\mathbb{E}[\min(X; y)] = \int_0^y x \theta e^{-\theta x} dx + y e^{-\theta y}$$

Par intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-\theta x} & v'(x) = \theta e^{-\theta x} \end{cases}$$

Alors

$$\mathbb{E}[\min(X; y)] = -y e^{-\theta y} - \frac{1}{\theta} e^{-\theta y} + \frac{1}{\theta} + y e^{-\theta y} = \frac{1}{\theta} [1 - e^{-\theta y}]$$

Ainsi,

$$ILF_{\mathcal{E}}(y) = \frac{1 - e^{-\theta y}}{1 - e^{-\theta BL}}$$

Là aussi, le paramètre d'une telle loi est aisément évaluable à l'aide des méthodes d'estimation usuelles. En se basant sur celle du maximum de vraisemblance, l'estimateur obtenu est alors (calculs détaillés en annexe) :

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

3.4.3 L'approche Riebesell

Basée sur les travaux actuariels de l'Allemand Paul Riebesell (1936), l'approche Riebesell est l'une des méthodes de modélisation des courbes ILF les plus couramment employées. Contrairement aux deux autres approches paramétriques introduites auparavant, cette approche ne se base pas sur la distribution des sinistres, mais sur le coefficient ILF en lui-même.

- Aspect théorique

Plaçons-nous dans le périmètre habituel d'une prime de référence $PP_{BL} = PP(BL)$ associée à une certaine limite d'indemnité BL. Alors, si cette limite d'indemnité est amenée à doubler, le montant de la prime pure associée PP_{2BL} sera égal à :

$$PP(2BL) = ILF(2.BL) \times PP_{BL} = (1 + z) \times PP_{BL}$$

La prime de référence va être augmentée d'un coefficient $(1+z)$. Si pour le même risque on désire non pas doubler mais quadrupler sa limite d'indemnité, alors :

$$PP(4BL) = (1 + z)^2 \times PP_{BL}$$

Il est alors possible de généraliser cette formule par :

$$PP(2^i BL) = (1 + z)^i \times PP_{BL}.$$

Soit $t = 2^i \iff i = \log(t, 2)$, le log de t en base 2. La précédente formule peut donc se réécrire de la manière suivante :

$$PP(2^i BL) = PP(tBL) = (1 + z)^i \times PP_{BL} = (1 + z)^{\log(t, 2)} \times PP_{BL}.$$

Avec y la limite d'indemnité recherchée, telle que $y = t.BL \iff t = \frac{y}{BL}$, la formule obtenue est la suivante :

$$PP(y) = (1 + z)^{\log(\frac{y}{BL}, 2)} \times PP_{BL}$$

Enfin, en utilisant la loi des logs, la formule de Riebesell est définie telle que :

$$PP(y) = \left(\frac{y}{BL}\right)^{\log(1+z, 2)} \times PP_{BL}$$

Cette dernière permet de définir le coefficient ILF obtenu par la formule de Riebesell :

$$ILF_{Rieb}(y) = \left(\frac{y}{BL}\right)^{\log(1+z, 2)}.$$

• Propriétés

Le paramètre z est compris entre 0 et 1, notamment pour respecter les propriétés auxquelles doit répondre une courbe ILF :

- $z > 0$: permet d'assurer la croissance de la courbe ILF, et donc la croissance de la prime ;
- $z < 1$: permet d'assurer la concavité de la courbe ILF, et donc la décroissance du taux d'augmentation de la prime avec l'augmentation de la limite d'indemnité.

3.4.4 Limites

Bien qu'apportant une plus grande facilité concernant l'exploitation mathématique de telles courbes (et ce du fait de la connaissance de la formule qui les caractérise), les principales formes paramétriques d'une courbe ILF nécessitent toutes une condition nécessaire à leur modélisation : le choix d'une limite d'indemnité de base. Cette dernière n'étant pas fixée selon une règle précise, et la formule étant dépendante de celle-ci, il est difficile d'en limiter les biais ainsi introduits. Il aurait pu être envisageable, une fois les paramètres de la formule d'une approche ILF estimés, de fixer une BL et de calculer les primes associées aux limites d'indemnités supérieures à celle de base. Il serait ainsi possible de comparer les valeurs obtenues avec celles réelles, et de faire varier la BL choisie pour minimiser les écarts. Néanmoins, comme explicité auparavant, l'information de la limite d'indemnité de chaque sinistre n'est pas en possession du réassureur.

Il est également important de noter que, hormis Riebesell, les deux autres formes paramétriques nécessitent une hypothèse forte sur la distribution de la sévérité des sinistres. Cela nous confronte donc aux incertitudes liées à la pertinence d'une telle loi sur notre distribution. Cette incertitude est d'autant plus grande que nous nous plaçons dans un contexte de tarification par exposition, qui est une méthode utilisée pour ne pas avoir à se baser sur l'historique de la cédante. Le recours à une tarification par exposition s'explique généralement par une trop faible occurrence de sinistres, voire une absence totale, ne permettant pas d'obtenir un ajustement de loi pertinent sur notre distribution de sévérité. Ainsi, il n'y aurait pas vraiment de sens à se baser sur la modélisation de la sévérité des sinistres pour appliquer notre méthode par exposition, étant donné que c'est précisément une incertitude particulièrement marquée. L'approche Riebesell va, elle, s'affranchir d'une telle contrainte grâce à l'hypothèse directement faite sur la variation du coefficient ILF.

Conclusion Chapitre 3

En vue de notre conclusion, voici le tableau récapitulatif des différents types d'approches présentés dans ce chapitre car permettant l'obtention d'une courbe ILF :

Type	Approche	Obtention courbe ILF	Limites
Non paramétrique	Empirique	Données internes	Choix BL Manque de données
	Discrète	Organismes spécialisés	Recalibrage compliqué Données anciennes
Paramétrique	Pareto	$ILF_{\mathcal{P}}(y) = \frac{\ln(\frac{y}{t}) + 1}{\ln(\frac{BL}{t}) + 1} \text{ si } \alpha = 1$ $ILF_{\mathcal{P}}(y) = \frac{y^{-\alpha+1} - \alpha t^{-\alpha+1}}{BL^{-\alpha+1} - \alpha t^{-\alpha+1}} \text{ sinon}$	Choix BL Hypothèse sur la distribution des sinistres
	Exponentielle	$ILF_{\mathcal{E}}(y) = \frac{1 - e^{-\frac{y}{\theta}}}{1 - e^{-\frac{BL}{\theta}}}$	Choix BL Hypothèse sur la distribution des sinistres
	Riebesell	$ILF_{Rieb}(y) = (\frac{y}{BL})^{\log(1+z,2)}$	Choix BL

FIGURE 16 – Tableau récapitulatif des méthodes d'obtention d'une courbe ILF

De ce tableau découle le constat suivant : même si elle est jugée comme particulièrement bloquante, l'unique contrainte de l'approche Riebesell est le choix de la limite d'indemnité de base, contrairement aux autres approches qui se heurtent à d'autres limites en plus de celle-là.

C'est pour cette raison que notre dernière partie va se concentrer sur le développement d'une approche qui s'appuie sur cette formule de Riebesell. Le but sera donc de parvenir à l'obtention d'un taux pur, en cherchant une manière de contourner notre problème de limite d'indemnité de base.

4 Mise en place d'une nouvelle approche reposant sur la méthode Increased Limit Factor

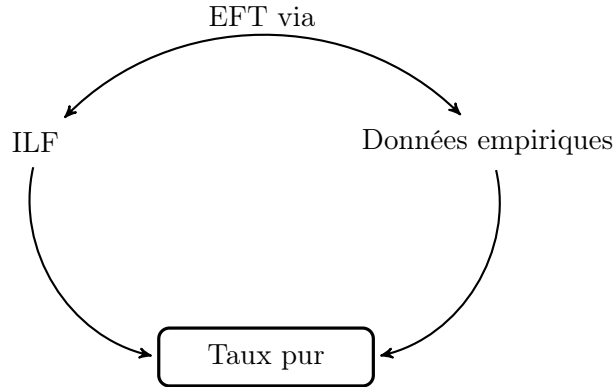
Le cheminement global de l'approche ILF a été introduit dans la section précédente. Cependant, son application semble compromise dans le cadre de notre étude : nous n'avons pas de courbe ILF à disposition et nous manquons d'informations pour en permettre l'obtention via les méthodes usuelles. Aussi allons-nous chercher dans ce chapitre des moyens de pallier ce déficit d'informations pour arriver à nos fins. Dans cet objectif, nous allons prendre appui sur l'approche de Riesebell et chercher à contourner son unique limite d'utilisation identifiée, à savoir le choix de la limite d'indemnité de base.

4.1 Méthode générale

Notre démarche vise à déterminer la probabilité qu'un sinistre soit supérieur à un certain seuil, en nous basant pour cela sur la formule d'une ILF que nous allons décliner de différentes manières. La formule obtenue ne dépendant pas de la limite d'indemnité de base, il nous est alors possible de calculer de telles probabilités, à l'aide d'un paramètre z choisi arbitrairement (en considérant la formule de Riesebell). Nous nous appuierons ensuite sur ces probabilités pour calculer les fréquences de dépassement de sinistre au-delà d'un certain seuil.

Ces résultats seront ensuite stockés dans un tableau, dénommé table de fréquences excédentes (EFT, pour *Exceedance Frequency Table* en anglais) : EFT_{ILF} . La construction d'une telle table sera parallèlement menée de manière empirique : EFT_{EMP} .

L'étape finale consistera à recalibrer notre paramètre z , basé jusque-là sur un choix arbitraire, de telle sorte qu'il minimise les écarts entre ces deux tables sur l'horizon choisi. L'idée est de rendre notre formule ILF la plus représentative possible de l'historique de la cédante sur l'intervalle en question. C'est sur ce paramètre ainsi obtenu que nous nous appuierons pour construire la table de fréquences excédentes finale EFT_{FINAL} , permettant d'aboutir au taux pur.



Construite pour une part empiriquement et pour une part « théoriquement », notre approche peut être en quelque sorte qualifiée de semi-paramétrique. Elle a pour but d'éviter l'ensemble des écueils évoqués précédemment.

Passons maintenant au premier stade de sa mise en place : la construction de la table de fréquences excédentes, qui n'aboutira pas aux mêmes chiffres selon que l'on opte pour l'approche ILF ou pour l'approche empirique. Ensuite, à partir de l' EFT_{FINAL} obtenu après recalibration du paramètre z , le cheminement jusqu'au taux pur sera explicité. Enfin, nous appliquerons cette approche à nos données, et en analyserons les résultats.

4.1.1 Obtention empirique des fréquences excédentes

Attardons-nous tout d'abord sur le principe général d'une telle table avant de présenter sa construction empirique.

- **Table de fréquences excédentes**

Abrégée par l'acronyme EFT, cette table indique la fréquence de dépassement pour chaque seuil souhaité, à savoir le nombre annuel moyen de sinistres attendus dont la sévérité est supérieure au seuil en question. Soit \tilde{N}_y la variable aléatoire modélisant ce nombre, représentant donc la fréquence de sinistres annuels excédant le seuil y . On note $\tilde{\lambda}^y$ son estimation moyenne, telle que $\tilde{\lambda}^y = \mathbb{E}[\tilde{N}_y]$.

Il est commun de stocker ces résultats sous la forme d'un tableau, en calculant cette fréquence pour chaque seuil défini.

Exemple d'une EFT calculant les fréquences de dépassement pour chaque seuil à partir du seuil 1 000 000 :

Seuil y	EFT
1 000 000	$\frac{\sim 1\ 000\ 000}{\lambda} = 1.893$
1 023 502	1.885
1 047 004	1.867
1 070 506	1.857
1 094 008	1.850
...	...

TABLE 3 – Exemple d’une EFT

D’où le terme de table de fréquences excédentes, que nous allons maintenant construire au moyen de deux méthodes différentes, la première étant par la voie empirique.

- **Obtention d’une EFT par voie empirique**

Pour obtenir notre EFT_{EMP} , nous allons nous baser uniquement sur les données de sinistres que nous a transmises la cédante, disponibles à partir d’un certain seuil T_S .

La première étape consiste à définir les bornes des seuils sur lesquels nous voulons obtenir nos fréquences de dépassement. Puis le calcul du nombre de sinistres annuels moyen dépassant ces seuils va être effectué pour chaque seuil généré y . Il correspond simplement à la moyenne empirique du nombre annuel de sinistres AS-IF dont le montant AS-IF excède le seuil concerné.

Cette mise en AS-IF nécessite une attention toute particulière. Concernant la fréquence, évoquée auparavant lors de la présentation de l’approche coût-fréquence (*2.2.3 Modèle coût - fréquence*), sa mise en AS-IF repose sur l’application d’un certain coefficient d’échelle. Ce dernier doit être le plus représentatif possible des variations qu’a connues le portefeuille, jugées comme potentiellement impactantes sur la fréquence annuelle de celui-ci. L’élément qui peut alors être considéré comme étant le plus représentatif d’une telle évolution serait le nombre total de polices du portefeuille. Concernant la sévérité des sinistres, évoquée lors de la présentation de la mise en AS-IF des données (*2.2.1 Mise en AS-IF*), cette étape va utiliser l’indice des salaires dans le domaine de la santé, ce qui permettra d’en refléter l’évolution des coûts. Cet indice s’avère en effet tout à fait adapté à une branche susceptible d’être régulièrement confrontée à des sinistres résultant de la santé des personnes.

Une fois en possession de ces fréquences mises en AS-IF, il ne reste plus qu’à calculer la fréquence de dépassement pour chaque seuil généré pour aboutir à notre table de fréquence de dépassement

EFT_{EMP} . Par exemple, dans le cas où R_j représente le nombre de risques du portefeuille de l'année j , N_j le nombre de sinistres annuel AS-IF de la même année, avec $X_{i,j}$ le i^{me} sinistre de l'année j (calculé à l'ultime, c'est-à-dire mis en AS-IF et liquidé). Le calcul du nombre de sinistres moyen annuel dépassant y sera donc :

$$\tilde{\lambda}_y^{EMP} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^A \left(\frac{R_{A+1}}{R_j} \sum_{i=1}^{N_j} \mathbb{1}_{\{X_{i,j} > y\}} \right)$$

avec A le nombre d'années d'historique retenu ($A + 1$ désigne donc l'année de couverture). Comme développé auparavant (1.5.2 *Les domaines concernés*), notre domaine d'étude appartenant au domaine des branches longues, il convient généralement de se baser sur un horizon d'une dizaine d'années.

Concernant les bornes entre lesquelles nous allons calculer ces fréquences de dépassement, elles correspondent :

- au seuil de transmission des données T_S pour la borne inférieure ;
- au plafond du traité pour la borne supérieure.

Cela permet d'avoir une vision totale du risque auquel notre traité est exposé. Étudions maintenant la deuxième méthode envisagée pour la construction de notre table.

4.1.2 Obtention des fréquences excédentes à partir de la formule d'un Increased Limit Factor

Nous allons pour cela nous appuyer sur une information extraite de la formule d'une ILF, à l'issue d'un travail spécifique sur sa formule. Puis, nous expliciterons le cheminement jusqu'à la construction de l' EFT_{ILF} .

• Extraction de l'information sur la probabilité de sinistre de la formule ILF

En effet, même si l'utilité première d'une courbe ILF consiste à indiquer le coefficient multiplicateur de la prime de référence lors du passage d'une certaine limite d'indemnité à une autre, ce n'est pas la seule information que nous pouvons tirer d'une telle courbe, qui regorge d'informations cachées.

Repartons d'une formule démontrée auparavant (3.1.2 *Aspect théorique général*) pour exploiter la relation entre la distribution de sévérité de X et une courbe ILF :

$$ILF(y) = \frac{\int_0^y (1 - F(x)) dx}{\int_0^{BL} (1 - F(x)) dx}$$

avec y la limite d'indemnité cible.

En affranchissant cette formule de la primitive en dérivant par rapport à y , nous obtenons :

$$ILF'(y) = \frac{1 - F(y)}{\mathbb{E}[\min(X, BL)]} \iff$$

$$\mathbb{P}(X \geq y) = ILF'(y) \times \mathbb{E}[\min(X, BL)]$$

La présence de l'espérance va nous poser souci pour l'exploitation de cette formule. Conditionnons cette probabilité pour nous en affranchir.

Soit $y > x > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(X \geq y | X \geq x) = \frac{\mathbb{P}(X \geq y)}{\mathbb{P}(X \geq x)} = \frac{\mathbb{E}[\min(X, BL)] \times ILF'(y)}{\mathbb{E}[\min(X, BL)] \times ILF'(x)}$$

En posant $X = \min(X, PL)$, permettant de représenter un sinistre X initialement associé à une limite d'indemnité PL :

$$\iff \mathbb{P}(\min(X, PL) > y | \min(X, PL) > x) = \begin{cases} \frac{ILF'(y)}{ILF'(x)} & \text{si } y \leq PL \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La probabilité qu'un risque de police limite PL ait un sinistre supérieur à un montant y , sachant que ce sinistre est supérieur à x , est égale au rapport des valeurs de la fonction ILF' en ces deux points dans le cas où $y \leq PL$ (et nulle si $y > PL$, étant donné qu'il ne sera pas possible que $\min(X, PL)$ dépasse ce seuil).

Cette formule ainsi obtenue a pour avantage de permettre l'exploitation des informations fournies par une courbe ILF , et ce en nous affranchissant du choix de la limite d'indemnité de base, qui était un problème bloquant jusqu'à maintenant.

En effet, sous l'hypothèse de Riebesell, on a :

$$ILF'(y) = \log(1 + z, 2) \frac{1}{BL} \left(\frac{y}{BL}\right)^{\log(1+z, 2) - 1}$$

Ainsi, sous cette hypothèse, la probabilité qu'un risque de police limite PL ait un sinistre supérieur à un montant y sachant qu'il est supérieur à x sera la suivante :

$$\mathbb{P}(\min(X, PL) > y | \min(X, PL) > x) = \begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^{\log(1+z, 2) - 1} & \text{si } y \leq PL \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'exploitation de cette information contenue dans une courbe ILF a donc bien été rendue possible, contournant ainsi le problème de choix de la limite d'indemnité de base. Regardons maintenant comment cette information va permettre d'aboutir à la construction d'une table de fréquence de

dépassement.

- **Lien avec la fréquence de dépassement**

Comme expliqué auparavant, la construction d'une table nécessite le calcul du nombre moyen de sinistres annuels excédant un seuil y : $\mathbb{E}[\tilde{N}_y]$. Cet indicateur peut être obtenu à partir de la fréquence moyenne calculée à l'échelle du portefeuille $\mathbb{E}[N]$:

$$\mathbb{E}[\tilde{N}_y] = \mathbb{E}[N] \times \mathbb{P}(\min(X, PL) > y)$$

Or, comme précisé dans la partie *3.1.1 Notation*, la variable aléatoire N désigne en réalité le nombre annuel de sinistres supérieur à T_S , pouvant ainsi être notée $\mathbb{E}[\tilde{N}_{T_S}]$. Soit λ_{PTF} l'estimation de $\mathbb{E}[\tilde{N}_{T_S}]$, correspondant à la moyenne empirique du nombre de sinistres AS-IF annuels disponible au delà de ce seuil spécifique. Par conséquent, nous allons conditionner par ce seuil chaque élément de notre formule précédente. Ainsi, en se plaçant uniquement dans le cas où $y > T_S$:

$$\mathbb{E}[\tilde{N}_y] = \mathbb{E}[\tilde{N}_{T_S}] \times \mathbb{P}(\min(X, PL) > y | \min(X, PL) > T_S)$$

$$\iff \tilde{\lambda}^y = \begin{cases} \lambda_{PTF} \times \left(\frac{y}{T_S}\right)^{\log(1+z, 2)-1} & \text{si } y \leq PL \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Construction de EFT_{ILF}**

Avant de mobiliser cette formule pour la construction de notre EFT, il convient tout d'abord de fixer notre paramètre z de manière arbitraire, tout en s'assurant du respect des conditions alors requises (soit celles évoquées en sous-section *3.4.3*, à savoir $z \in]0, 1[$). De ce fait, notre choix se porte sur $z = 0.5$. Au premier abord, il est vrai qu'un choix arbitraire de paramètre ne paraît pas du tout rigoureux. Néanmoins, sous réserve qu'il respecte bien les propriétés imposées, ce choix n'influencera aucunement la suite de notre approche. En effet, à partir de ce premier paramètre vont être calculées les fréquences excédentes. Nous veillerons ensuite à minimiser les écarts entre les fréquences empiriques et celles calculées à l'aide de la formule ILF. Ce calcul est un calcul 100 % déterministe. De ce fait, notre paramètre initial $z \in]0, 1[$ quel qu'il soit n'aura aucun impact sur notre taux final.

L'estimation de la valeur du λ_{PTF} sera menée de manière empirique, correspondant simplement à la moyenne du nombre de sinistres annuels disponible à partir du seuil T_S , mis en AS-IF, moyenne calculée sur le même nombre d'années que celui pris pour EFT_{EMP} .

Enfin, il est important de noter que le risque pris en compte dans cette formule peut posséder n'importe quelle limite d'indemnité, étant donné que nous avons une vision à l'échelle du portefeuille à ce stade, ce qui rend complexe l'application du conditionnement de la formule. N'ayant pas plus d'indications sur la limite d'indemnité à laquelle le risque considéré est capé, cette première approche ne va pas en tenir compte pour le moment. La présente section étant consacrée à l'introduction de la méthode générale, nous en écarterons pour le moment l'exploitation de ce conditionnement, que nous reprendrons en détail ultérieurement. De ce fait, PL sera prudemment pris comme étant égale à PL_{max} , la limite d'indemnité maximale du portefeuille, information contenue dans le profil de risque.

Il ne reste plus qu'à faire varier le seuil considéré y en appliquant notre formule, en gardant le même intervalle et seuils générés que pour l' EFT_{EMP} .

4.1.3 Recalibrage du paramètre

Nous avons maintenant à disposition nos deux EFT : EFT_{EMP} (obtenue uniquement par nos données sinistres) et EFT_{ILF} (obtenue en se servant d'une courbe ILF avec un paramètre z arbitraire). Soient $\tilde{\lambda}_{EMP}$ et $\tilde{\lambda}_{ILF}$ leur fréquence de dépassement respective. L'étape suivante consiste à comparer sur un intervalle de seuil prédéfini les fréquences obtenues par ces deux approches. Nous allons chercher à réduire les écarts observés entre fréquence empirique et fréquence ILF sur cet intervalle, en faisant varier le paramètre z utilisé. Au sens de la mesure choisie (utilisée pour mesurer l'erreur de ces deux tables), nous disposerons alors d'un paramètre z jugé comme le plus représentatif de notre portefeuille. Ce paramètre noté z^* permettra par la suite d'étendre notre formule aux seuils supérieurs à l'intervalle considéré. L'indicateur a priori le plus adapté nous paraît être la somme des carrés des erreurs SCE, mesurant la somme des carrés des résidus :

$$SCE = \sum_{i=1}^n (\tilde{\lambda}_{EMP}^{\sim_{seuil_i}} - \tilde{\lambda}_{ILF}^{\sim_{seuil_i}})^2$$

Avec n le nombre déterminé de seuils sur lesquels cette erreur va être calculée. Comme établi précédemment, le paramètre ILF retenu sera celui minimisant une telle quantité : une faible somme des carrés des erreurs indique un ajustement serré du modèle aux données, d'où son utilisation comme critère d'optimalité.

Récapitulatif de la démarche attendue à cette étape :

Seuil y	EFT_{EMP}	EFT_{ILF}	SCE
1 000 000	$\tilde{\lambda}_{EMP}^{1\ 000\ 000} = 1.891$	$\tilde{\lambda}_{ILF}^{1\ 000\ 000} = 1.893$	$(1.893 - 1.891)^2$
1 023 502	$\tilde{\lambda}_{EMP}^{1\ 023\ 502} = 1.885$	$\tilde{\lambda}_{ILF}^{1\ 023\ 502} = 1.890$	$(1.885 - 1.890)^2$
1 047 004	$\tilde{\lambda}_{EMP}^{1\ 047\ 004} = 1.867$	$\tilde{\lambda}_{ILF}^{1\ 047\ 004} = 1.882$	$(1.867 - 1.882)^2$
1 070 506	$\tilde{\lambda}_{EMP}^{1\ 070\ 506} = 1.857$	$\tilde{\lambda}_{ILF}^{1\ 070\ 506} = 1.873$	$(1.857 - 1.873)^2$
1 094 008	$\tilde{\lambda}_{EMP}^{1\ 094\ 008} = 1.850$	$\tilde{\lambda}_{ILF}^{1\ 094\ 008} = 1.861$	$(1.850 - 1.861)^2$
...

TABLE 4 – Étape du recalibrage du paramètre z

Il ne reste plus qu'à sommer les résultats obtenus dans la colonne SCE , et procéder à la minimisation d'une telle somme en faisant varier le paramètre z . Le solveur d'excel est une solution simple pour effectuer cette minimisation, détaillée en annexe.

Le dernier point à éclaircir concerne le choix des bornes des seuils entre lesquelles nous allons minimiser l'erreur de ces deux EFT. Un temps de réflexion s'impose à ce stade, car ce choix correspond en réalité au choix de l'intervalle de sévérité des sinistres sur lesquels nous voulons nous baser pour construire notre courbe.

Au premier abord, cet intervalle de seuil devrait être pris le plus étendu possible, avec un seuil inférieur au plus bas afin de capter le maximum de sinistres et de bénéficier ainsi de la plus grande fiabilité possible.

D'un autre côté, il n'y a pas vraiment de sens à vouloir s'approcher au plus près de la distribution empirique. Le recours à une approche par exposition pour la tarification cherche à résoudre les problèmes rencontrés précédemment, notamment lors de la tarification des tranches hautes, généralement pas ou peu exposées aux sinistres. À travers un calibrage sur des montants plus faibles, l'objectif est d'étendre la formule de calcul de fréquence de dépassement avec ce z^* à notre intervalle entier, permettant donc d'obtenir des résultats, et notamment d'atteindre les tranches hautes.

Cette approche revient à supposer que le comportement des risques avec de faibles limites d'in-

demnités est similaire à ceux comportant des limites plus élevées (pouvant potentiellement atteindre des montants plus élevés). Cette hypothèse paraît réaliste dans le sens où l’approche ILF a été envisagée à défaut de la méthode *Loss Scale* suite à la mauvaise mesure de la sinistralité par les limites d’indemnités.

Compte tenu de ces réflexions, il semble difficile d’instaurer une règle universelle applicable à l’ensemble des affaires concernant le choix de l’intervalle des seuils de fittage, mais le cadre de départ serait le suivant :

- montant du plus faible sinistre à l’ultime de l’historique $X_{(1)}$ pour la borne inférieure. De ce fait, cela permet de limiter les biais introduits par les sinistres survenus mais dont leur montant ne dépassera T_S que dans le futur (et dont le réassureur n’en prendra connaissance qu’un certain temps après leur survenance).
- seuil à partir duquel les sinistres peuvent être qualifiés d’« extrêmes » pour la borne supérieure. Écarter de tels sinistres de notre calcul permet de se baser uniquement sur la « robustesse » des autres sinistres, sans biaiser l’analyse par la prise en compte des extrêmes, difficilement mesurables. Plusieurs méthodes existent pour déterminer le seuil que nous noterons T_X à partir duquel il est possible de qualifier un sinistre d’extrême. Nous choisirons parmi elles la méthode graphique du *Mean Excess Plot*.

La problématique propre à ce choix des bornes de seuil sera développée dans le cadre de l’application de notre approche (sous-section 4.2.3 *Application de la nouvelle approche*). Nous pouvons toutefois d’ores et déjà préciser à ce stade qu’il reviendra bien sûr à l’actuaire d’adapter la démarche aux caractéristiques de l’affaire traitée (tranches, sinistres, historique disponible).

Une fois le paramètre z^* obtenu, la construction de notre EFT_{FINAL} va être entreprise de la même manière que pour EFT_{ILF} , à la différence près du paramètre z utilisé et du choix des bornes de seuil. Destinée à délivrer des informations quant au risque auquel est soumis notre traité, cette table se doit d’être construite sur un intervalle de seuil concordant avec le traité en question. De ce fait, les bornes inférieure et supérieure de seuil seront prises comme étant respectivement égales à la franchise et au plafond du traité.

Récapitulatif du choix des bornes utilisées pour les étapes décrites ci-dessus (en supposant que $X_{(1)} < f < T_X < \text{plafond}$:

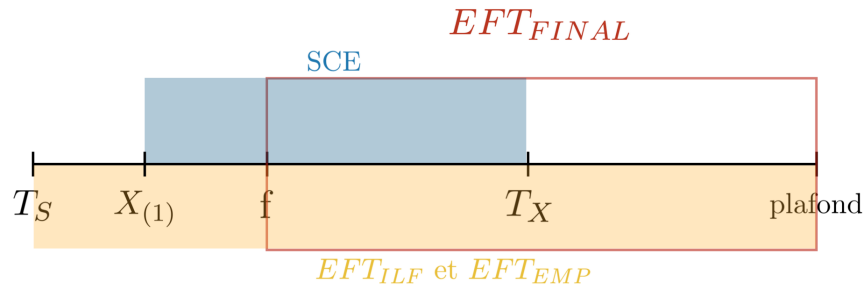


FIGURE 17 – Récapitulatif des seuils utilisés

4.1.4 Aboutissement au taux pur

L'étape intermédiaire entre l'obtention de notre EFT_{FINAL} et la détermination du taux pur consistera à créer une table de simulation de pertes, Year Loss Table en anglais (YLT). En simulant nos pertes sur un grand nombre d'années, cette table nous permettra d'aboutir au taux pur.

- De l'EFT au YLT

La construction de ce générateur de pertes se base sur notre EFT_{FINAL} , plus particulièrement sur la fonction de distribution de la variable modélisant la fréquence excédante. Sous l'hypothèse d'une loi Poisson ou Binomiale Négative, un certain nombre de sinistres vont être simulés pour chaque année, dont la sévérité sera déterminée à l'aide de l'EFT.

Nous obtiendrons alors notre YLT simulant le nombre de pertes et leur montant associé pour un nombre d'années prédéfini.

Exemple d'un YLT obtenu par l'EFT pris en exemple précédemment (4.1.1 *Obtention empirique des fréquences excédentes*), avec un seuil minimum fixé à 1 000 000 :

Année	Évènement	Sévérité
1	1	1 132 432
1	2	1 783 332
1	3	2 232 898
2	1	1 028 332
3	1	2 033 932
3	2	4 085 234
...

TABLE 5 – Exemple d'un YLT

- **Du YLT au taux pur**

Une fois en possession du simulateur de pertes, déployé sur un assez grand nombre d'années pour bénéficier de la meilleure fiabilité possible, il suffira d'appliquer la structure de réassurance et de calculer la charge réassureur à la tranche pour obtenir le taux de prime pure associé.

Nous allons maintenant tester cette approche sur nos données, en suivant les étapes résumées ci-dessous :

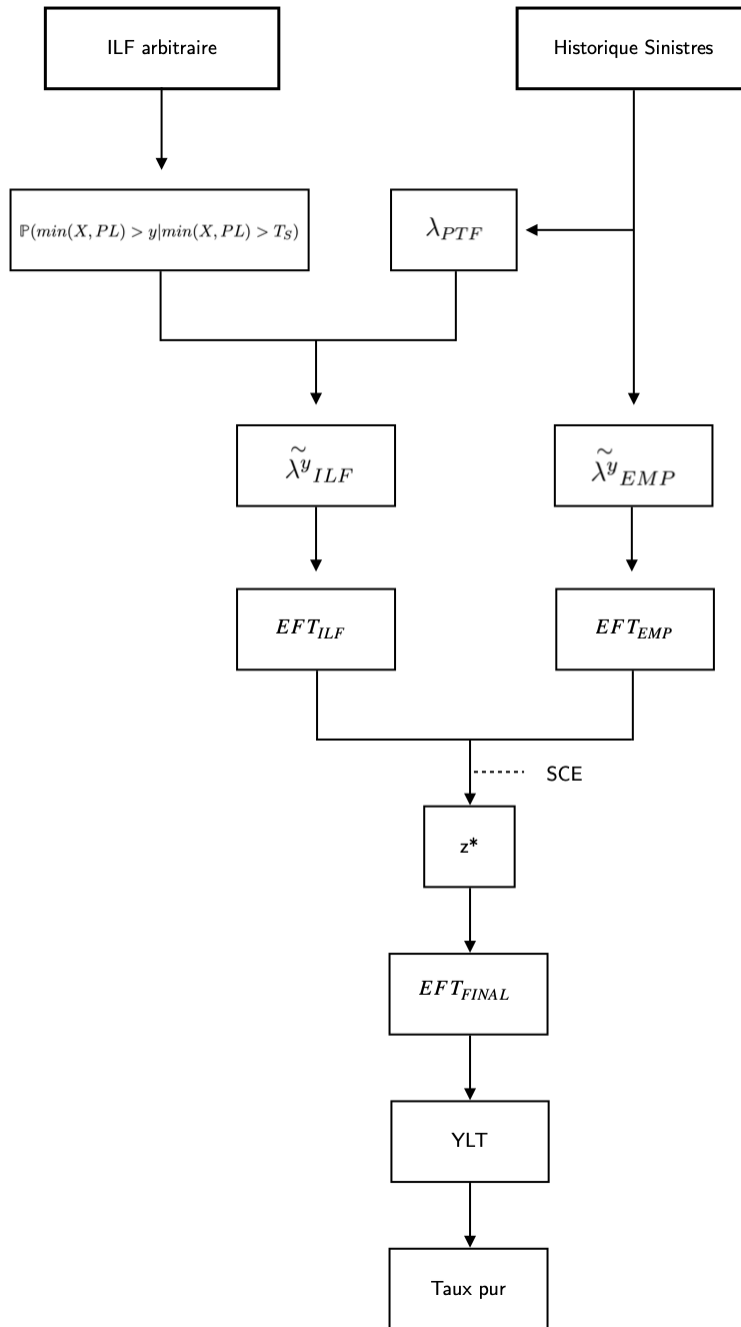


FIGURE 18 – Schéma récapitulatif de la démarche (vision portefeuille)

4.2 Première application sur une base de données

Nous avons pour cela à notre disposition une base de données relative à une affaire de tarification d'un traité en excédent de sinistres par risques dans la branche de responsabilité civile générale.

Après présentation et analyse de ces données, nous présenterons rapidement les résultats de tarification obtenus par les méthodes introduites jusqu'à présent, présentation qui permettra de mettre en évidence les limites de ces méthodes pour notre périmètre d'étude. Nous appliquerons ensuite à ces données la nouvelle approche que nous avons suggérée ci-dessus.

4.2.1 Présentation de l'affaire

Comme expliqué auparavant, lors de la tarification d'une affaire, l'actuaire dispose de données qui lui ont été communiquées par la cédante. Ce sont ces données que nous allons présenter puis exploiter afin de tester nos modèles.

- **Périmètre d'étude**

Nous sommes dans le cas de la tarification d'un traité en excédent de sinistres par risques avec date d'effet au 1^{er} janvier 2022 pour un client de CCR Re, nommé cédante X pour des raisons évidentes de confidentialité. Cette affaire concerne le marché Asie. Les données disponibles le sont en Renminbi (CNY).

Le programme de réassurance en question est constitué de cinq tranches, notées $T_{XS_1}, \dots, T_{XS_5}$, dont leur portée et franchise respectives seront notées p_1, \dots, p_5 et f_1, \dots, f_5 (avec $p_1 + f_1 = f_2, \dots, p_4 + f_4 = f_5$). Les données qui nous ont été transmises par cette cédante X concernent son historique de sinistres, de primes, ainsi que son profil de portefeuille. Ces statistiques sont disponibles à partir de 2010.

- **Primes**

La première étape consiste à analyser l'évolution de son assiette de primes historiques, ainsi que celle AS-IF.

L'historique du nombre de polices contenu dans le portefeuille étant communiqué par la cédante, il est alors possible de calculer une prime moyenne prévisionnelle pour l'année de couverture à venir. Cette prime moyenne reflétant les dernières évolutions de coûts auxquelles le portefeuille est soumis (inflation, augmentation de coûts annexes, ..), elle va être utilisée pour la mise en AS-IF des assiettes de primes. Pour ce faire, l'assiette de primes de chaque année va être multipliée par un coefficient égal à la prime moyenne calculée pour l'année de couverture divisée par la prime moyenne de l'année concerné. Cette méthode permet notamment de tenir compte de l'évolution du portefeuille, ce qui est donc préférable à l'utilisation d'indice (mais l'historique du nombre de polices n'étant pas toujours un élément à disposition du réassureur, cela n'est pas toujours possible).

Ci-dessous l'évolution relative des primes historiques ainsi que des primes après l'étape de mise en AS-IF.

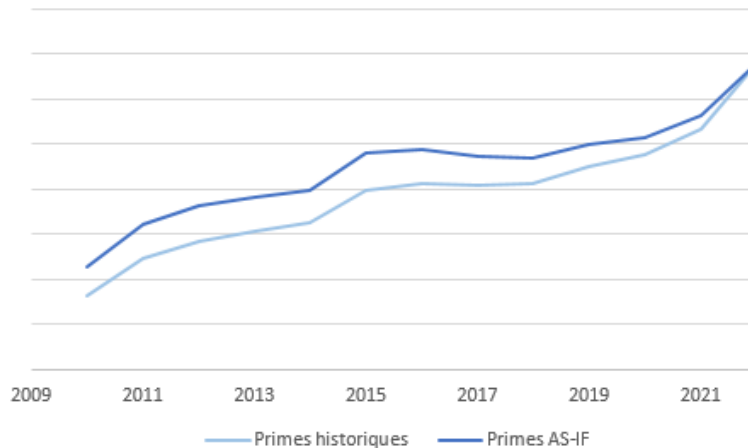


FIGURE 19 – Évolution des primes historiques et AS-IF de la cédante X

Ces primes AS-IF connaissent une augmentation légère et régulière depuis 2010. Cette variation traduit une augmentation de la prime moyenne depuis 2010, ainsi que l'augmentation de la taille du portefeuille.

- **Sinistres**

Concernant la sévérité des sinistres, l'étape de la mise en AS-IF va utiliser l'indice des salaires dans le domaine de la santé, comme justifié dans la partie 4.1.1 *Obtention empirique des fréquences excédentes*. La fréquence AS-IF des sinistres va être calculée en appliquant un coefficient d'échelle basé sur le nombre de polices contenu dans le portefeuille.

Analysons les sévérités des sinistres AS-IF obtenues :

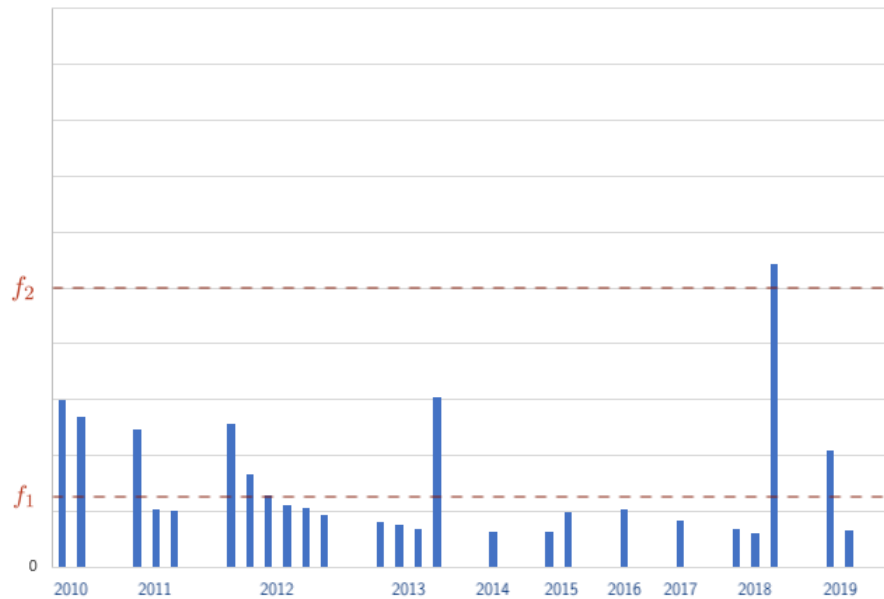


FIGURE 20 – Représentation par année de survenance de la sévérité AS-IF des sinistres en fonction de la structure du traité

Les années 2020 et 2021 ne connaissent pas à ce jour de sinistres. Sur la période 2010-2019, il y a eu au moins un sinistre par année. Néanmoins, les années incluant 2014 jusqu'à 2017 ne font pas jouer le traité. Les autres années touchent T_{XS_1} , sans pour autant complètement traverser sa portée p_1 , à l'exception d'un unique sinistre en 2018 atteignant f_2 . Les tranches $T_{XS_3}, T_{XS_4}, T_{XS_5}$ n'ont jamais été touchées à ce jour.

De par ces analyses, seule la T_{XS_1} sera qualifiée de tranche travaillante.

4.2.2 Application des méthodes usuelles

Avant d'appliquer les méthodes basées sur l'expérience énoncées précédemment (2.2.2 *Burning Cost* et 2.2.3 *Modèle coût - fréquence*), il convient de choisir l'horizon sur lequel nous voulons nous appuyer pour appliquer nos modèles. Comme développé auparavant (1.5.2 *Les domaines concernés*), notre domaine d'étude appartenant au domaine des branches longues, il convient de se baser sur un horizon d'une dizaine d'années. Nos données disponibles couvrant la période s'étendant de 2010 à 2021 (avec l'année 2021 qui n'était alors pas achevée au moment de la réception des statistiques), nous décidons de nous baser sur l'historique couvrant la période 2010-2019. Dans les domaines de branche longue, il est assez courant de ne pas tenir compte des dernières années, et d'exclure ainsi

de la base d'analyse les sinistres trop récents : leur montant est en effet jugé trop incertain car trop peu développé, et donc potentiellement trop éloigné de leur montant à l'ultime.

• **Burning Cost**

Appliquons tout d'abord la méthode du Burning Cost afin de disposer d'une première vision du risque de notre portefeuille.

	T_{XS_1}	T_{XS_2}	T_{XS_3}	T_{XS_4}	T_{XS_5}
Taux pur BC	1.092%	0.038%	0.00%	0.00%	0.00%

TABLE 6 – Taux de prime pure obtenu par tranche par la méthode du Burning Cost

La T_{XS_1} étant touchée à plusieurs reprises sur l'historique disponible, un certain degré de confiance peut être assimilé sur le taux ainsi obtenu. Néanmoins, le taux obtenu pour la T_{XS_2} ne paraît pas pertinent, et ceux correspondants aux tranches $T_{XS_3}, T_{XS_4}, T_{XS_5}$, jusque là jamais touchées sur l'historique considéré, s'élèvent sans surprise à 0%, ce qui n'a évidemment pas de sens pour une tarification.

• **Modèle coût - fréquence**

Il convient pour ce modèle de trouver les lois les plus adéquates afin d'estimer nos deux variables aléatoires X et N , qui représentent respectivement la sévérité individuelle d'un sinistre, et la fréquence annuelle. Le choix de ces lois peut se faire par la mesure de la bonne adéquation de ces dernières avec l'échantillon considéré. Cela est possible à l'aide de diverses méthodes, comme par exemple :

- le graphique QQ-plot (quantile-quantile-plot) : montre que la loi est en accord si les points sont alignés suivant la première bissectrice
- le test statistique Kolmogorov- Smirnov : détermine si deux échantillons sont issus de la même loi

Les études menées sur notre base de données nous ont conduits à la sélection de la loi Poisson pour N , et de la loi Qlnorm pour X . Avec ces lois, une simulation stochastique va être réalisée sur un grand nombre d'années pour y appliquer la structure du traité et aboutir au taux pur.

	T_{XS_1}	T_{XS_2}	T_{XS_3}	T_{XS_4}	T_{XS_5}
Taux pur	0.718%	0.075%	0.002%	0.001%	0.002%

TABLE 7 – Taux de prime pure obtenu par tranche par le modèle fréquence-coût

A l'exception de T_{XS_1} , une augmentation des taux purs est à noter pour chacune des tranches. Cependant les taux obtenus pour les trois tranches qui n'ont jamais été touchées jusqu'à présent restent toujours très proches de zéro.

Afin d'avoir une idée du positionnement de nos taux sur le marché, nous pouvons exploiter l'information dont nous disposons concernant le taux leader. Celui-ci correspond au taux proposé par le réassureur principal (ou "leader" en anglais) : c'est un réassureur dont les modalités ont été acceptées par la partie cédante dans un contrat de réassurance. Le réassureur principal négocie ces modalités, les conditions, les taux de prime et signe le contrat en premier. Il peut donc être intéressant de se comparer sous une telle métrique. Les taux leaders à disposition ne sont pas présentés sous la forme de prime pure mais de prime commerciale. Même si l'utilisation des taux leaders comme métrique peut être discutable, cela reste un bon moyen de se situer par rapport au marché (et surtout l'un des seuls). Afin de comparer nos taux obtenus avec ceux leaders, nous y rajoutons donc les chargements et les frais pour aboutir à nos taux commerciaux :

	T_{XS_1}	T_{XS_2}	T_{XS_3}	T_{XS_4}	T_{XS_5}
Taux commercial leader	1.06%	0.93%	0.25%	0.11%	0.08%
Taux commercial CCR Re	1.102%	0.209%	0.003%	0.001%	0.003%

TABLE 8 – Comparaison des taux de prime commerciale du leader et de CCR Re (via modèle fréquence-coût)

Outre la tranche 1, les taux que nous obtenons sont clairement en-deçà du leader, ce qui se répercute dans le taux de prime commerciale totale : 2.43% côté leader contre 1.318% du nôtre.

• Conclusion

Développées précédemment sur un registre théorique, les limites des méthodes usuelles décrites plus en amont dans ce mémoire se révèlent nettement lors de leur application à un cas concret.

Les résultats obtenus étant jugés non satisfaisants, une des solutions alors envisageable consiste à utiliser la méthode que nous avons mise au point et présentée un peu plus haut dans ce chapitre.

4.2.3 Application de la nouvelle approche

Nous allons donc appliquer à l'affaire en question notre méthode mise au point et détaillée plus en amont. Nous nous consacrerons ensuite à l'analyse des résultats obtenus alors.

• Construction des deux EFT

Que cela soit pour EFT_{ILF} ou EFT_{EMP} , la construction de ces tables repose sur un élément commun : le calcul de λ_{PTF} . Son calcul, après l'étape de mise en AS-IF, aboutit à une fréquence

annuelle à partir du seuil disponible T_S de 4.53 (on a gardé le même horizon 2010-2019 pour le calcul de cette moyenne).

La construction empirique de cette table va être menée en appliquant la méthode décrite précédemment (4.1.1 *Obtention empirique des fréquences excédentes*). Le seuil minimum est choisi égal à T_S , celui maximum au plafond du traité, à savoir $f_5 + p_5$.

Côté EFT_{ILF} , après avoir fixé notre paramètre $z = 0.5$, nous appliquons la méthode explicitée auparavant via la formule développée (4.1.2 *Obtention des fréquences excédentes à partir de la formule d'un Increased Limit Factor*) afin d'obtenir nos fréquences de dépassement entre nos deux seuils choisis, en reprenant les mêmes que pour EFT_{EMP} .

- **Aboutissement au taux pur total à partir de l' EFT_{FINAL}**

La construction de cette table requiert le recalibrage du paramètre z par minisation du SCE. Pour cela, il est nécessaire de choisir l'intervalle sur lequel nous voulons minimiser la somme des erreurs de nos deux EFT, qui, comme précisé dans la sous-section (4.1.3 *Recalibrage du paramètre*), n'est pas soumise à une règle arrêtée.

Le but de cette étape est de cerner au mieux le comportement du risque auquel est soumis notre portefeuille en s'appuyant sur l'historique à notre disposition. Il convient donc de s'assurer au préalable de la fiabilité et de la représentativité de cette historique, propre à chaque cédante.

Les sinistres que nous allons considérer comme les plus « fiables » vont être ceux de faible sévérité, qui sont les plus fréquents. C'est ceux dont le comportement est le moins difficile à cerner sur un intervalle de temps donné en raison de leur plus forte fréquence. Dans notre affaire, la longueur de l'historique considéré s'élève à dix ans. Comme vu sur le graphique représentant la sévérité AS-IF des sinistres en sous-section 4.2.1 *Présentation de l'affaire*, chaque année comprise entre 2010 et 2019 connaît au moins un sinistre. De par ces analyses et nos réflexions précédentes, l'intervalle minimal de seuil sera pris comme étant égal à $X_{(1)}$. L'intervalle maximal lui sera pris égal à T_X , le seuil à partir duquel les sinistres sont considérés comme extrêmes, que nous estimons à l'aide du *Mean Excess Plot* obtenu en annexe. De ce fait, cet intervalle inclut environ 70 % de nos sinistres.

Par minimisation de la SCE sur un tel intervalle, nous obtenons un paramètre z^* égal à $z_1^* = 0.1811$. A partir de ce z^* , le calcul des fréquences de dépassement de l' EFT_{FINAL} va être réalisé du seuil minimal f_1 jusqu'au seuil maximal $f_5 + p_5$. A partir de cette table, la création d'un YLT va être réalisée (la loi Poisson est privilégiée en raison de la loi utilisée pour le modèle fréquence-coût). Après application de la structure de réassurance, cela permettra d'aboutir aux taux purs suivants :

	T_{XS_1}	T_{XS_2}	T_{XS_3}	T_{XS_4}	T_{XS_5}
Taux pur	0.87%	0.29%	0.04%	0.02%	0.01%
Taux commercial	1.30%	0.51%	0.06%	0.03%	0.01 %

TABLE 9 – Taux de prime pure obtenu par tranche par l’approche développée (z_1^*)

L’application de notre nouvelle méthode apporte une augmentation du taux de prime pure de chacune de ces tranches. Cependant, excepté sur la tranche 1, les taux commerciaux restent toujours relativement bas par rapport aux taux leaders.

4.2.4 Limites de la nouvelle approche

Comme brièvement explicité auparavant (4.1.2 *Obtention des fréquences excédentes à partir de la formule d’un Increased Limit Factor*), le conditionnement de la formule utilisée pour la construction de notre EFT_{ILF} n’a pas été correctement exploité. Pour rappel, la formule utilisée était alors la suivante :

$$\Leftrightarrow \tilde{\lambda}_{ILF}^y = \begin{cases} \lambda_{PTF} \times \left(\frac{y}{T_S}\right)^{\log(1+z,2)-1} & \text{si } y \leq PL_{max} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela résulte de l’ignorance de la limite d’indemnité du risque considéré (travaillant à l’échelle du portefeuille). De ce fait, en raisonnant de manière très prudente avec $PL = PL_{max}$, il en résulte une surestimation de la fréquence des sinistres, qui s’accroît au fur et à mesure du seuil considéré : des sinistres potentiels vont alors être prédits à un certain montant, alors qu’en réalité certains de ces risques possèdent une limite d’indemnité moindre, mais qui n’a alors pas été prise en compte. Lors du fittage pour trouver z^* , cela va alors se compenser par une sous-estimation de la probabilité de sinistre $\mathbb{P}(\min(X, PL) > y | \min(X, PL) > T_S)$. Afin de réduire ce biais, l’idée est donc d’apporter une information plus précise sur la limite d’indemnité du risque considéré, ce qui permettra d’ajuster cette formule et d’affiner ainsi notre approche. Pour cela, nous allons nous appuyer sur le profil de portefeuille. Indicateur de la répartition des risques à l’échelle du portefeuille selon leurs limites d’indemnité, ce profil de portefeuille pourrait notamment nous permettre de mieux capter les risques avec de fortes limites d’indemnité. Ces derniers pouvant d’autant plus représenter des sinistres qui atteignent potentiellement des seuils élevés, cela permettrait de corriger le biais associé à de tels seuils.

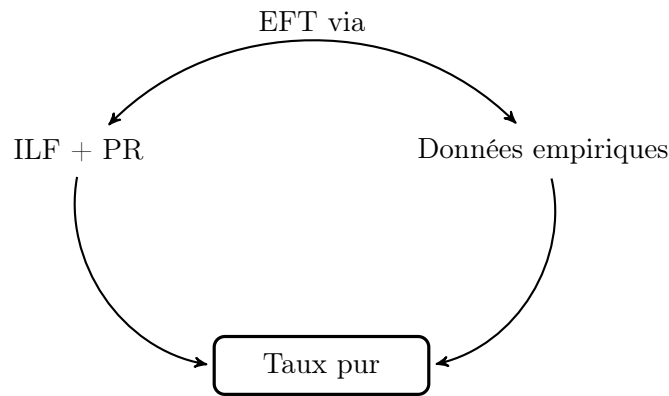
4.3 Affinement de l’approche

L’utilisation du profil de risques dans notre approche (voir 2.1.3 *Les statistiques de la cédante*) a été souhaitée pour plusieurs raisons.

Tout d'abord, l'apparition d'un biais grandissant avec le seuil considéré a été relevé, menant à la nécessité d'un apport plus précis quant à la provenance de la limite d'indemnité d'un risque du portefeuille. Une vision de leur répartition au sein du portefeuille, rendue possible via le profil de risques (PR), va incontestablement enrichir notre méthode.

De plus, même si l'approche pour laquelle nous avons opté dans cette cinquième partie l'a été sous contrainte (pour contourner les limites explicitées précédemment), elle s'appuie sur la théorie de l'approche par exposition ILF. L'idée majeure d'une tarification par exposition consiste à utiliser l'information contenue dans le portefeuille de la cédante. C'est un très grand atout que possède (parfois) le réassureur, et qui était jusque-là inutilisé. L'ajout d'une telle information ne peut qu'être bénéfique à notre approche.

Nous allons donc reprendre la construction de EFT_{ILF} en y intégrant cette fois l'information du profil de risques :



Même si aucun lien direct entre une approche ILF et le profil de risque n'a été introduit jusque là, l'approche que nous allons utiliser pour l'établir se base sur le changement de référentiel considéré : nous n'allons plus raisonner à l'échelle du portefeuille mais plutôt au niveau des tranches.

4.3.1 D'une vision portefeuille à une vision par tranches

Pour introduire notre idée, repartons de la formule utilisée dans la première partie pour le calcul des $\tilde{\lambda}_{ILF}^y$ (4.1.2 *Obtention des fréquences excédentes à partir de la formule d'un Increased Limit Factor*) :

$$\tilde{\lambda}_{ILF}^y = \lambda_{PTF} \times \mathbb{P}(\min(X, PL) > y | \min(X, PL) > T_S) = \lambda_{PTF} \times \frac{ILF'(y)}{ILF'(T_S)} \times \mathbb{1}_{\{y \leq PL\}}$$

Comme explicité brièvement dans cette même section, cette indicatrice n'a pas été exploitée, étant donné qu'on ne possédait pas plus d'informations concernant la limite d'indemnité considérée. Elle nous donne cependant l'opportunité de conditionner la probabilité à la limite d'indemnité du risque en question, et donc de perfectionner notre méthode. Cela va être rendu possible grâce à l'ajout du profil de risque : en raisonnant à l'échelle de la tranche, et non du portefeuille, nous bénéficions d'une indication plus précise sur la limite d'indemnité considérée, permettant alors d'utiliser ce conditionnement à bon escient. L'idée globale sera donc de calculer cette fréquence de dépassement à l'échelle de chaque tranche : $\tilde{\lambda}_{ILF_j}^y$ pour la j^{ime} tranche. Il suffira d'en faire la somme pour obtenir la fréquence de dépassement à l'échelle du portefeuille $\tilde{\lambda}_{ILF}^y$. Par souci de simplification dans les notations utilisées, nous considérerons directement par la suite que $\tilde{\lambda}_{ILF_j}^y = \tilde{\lambda}_j^y$.

Dans le cas d'un portefeuille de responsabilité civile générale, il est en effet également possible de bénéficier d'un profil de risques, mais en raisonnant en termes de limite d'indemnité (et non en termes de somme assurée). Nous allons généralement bénéficier des informations suivantes pour chaque tranche :

- la limite d'indemnité minimale et maximale que cette tranche peut contenir ;
- le nombre de risque inclus dans un tel intervalle ;
- la prime et limite d'indemnité totales de la tranche.

Cherchant, comme développé ci-dessus, à être plus précis sur la limite d'indemnité qu'un risque peut posséder, ce profil de portefeuille peut nous permettre d'arriver à nos fins : il ne va pas apporter une telle information à un niveau individuel, mais à celui de la tranche. Pour cela, il convient d'émettre une hypothèse d'homogénéité des risques contenus dans une même tranche, en supposant qu'ils possèdent une limite d'indemnité commune. Le choix le plus cohérent pour cette limite d'indemnité paraît être la limite d'indemnité moyenne de la tranche. Soit T_j la j^{ime} tranche du profil de risque. Alors, la limite d'indemnité moyenne de la tranche notée PL_j sera obtenue en divisant la limite d'indemnité totale de cette tranche par son nombre de risques associés n_j .

Notre idée initiale reviendrait alors à calculer ce $\tilde{\lambda}_j^y$ pour chaque tranche : cette fréquence désigne le nombre moyen de sinistres annuels excédant y , dont les risques respectifs proviennent de T_j . Prenons un exemple pour illustrer cette idée. Soit un profil de risques composé de T tranches, le but est d'obtenir la colonne $\tilde{\lambda}_{ILF}^y$ suivante :

T	PL	Nombre de risques	$\tilde{\lambda}_{ILF}^y$
T_1	PL_1	n_1	$\tilde{\lambda}_1^y$
T_2	PL_2	n_2	$\tilde{\lambda}_2^y$
...
T_j	PL_j	n_j	$\tilde{\lambda}_j^y$
...
T_T	PL_T	n_T	$\tilde{\lambda}_T^y$

TABLE 10 – Visualisation des $\tilde{\lambda}_j^y$ à travers les T_j du profil de risques

Avec :

$$\tilde{\lambda}_{ILF}^y = \sum_{j=1}^T \tilde{\lambda}_j^y = \sum_{j=1}^T \mathbb{E}[N_j] \times \mathbb{P}_j(\min(X, PL_j) > y | \min(X, PL_j) > T_S)$$

avec N_j la variable aléatoire modélisant le nombre annuel de sinistres provenant de T_j supérieur au seuil T_S .

Par la suite, la construction de l'EFT s'effectuera par la même méthode que celle explicitée précédemment.

Étudions plus en détail les conséquences de ce changement de référentiel pour les deux éléments constituant la formule.

- **L'impact sur le calcul de la probabilité**

Pour rappel, la formule générale précédemment utilisée était la suivante :

$$\mathbb{P}(\min(X, PL) > y | \min(X, PL) > T_S) = \frac{ILF'(y)}{ILF'(T_S)} \times \mathbb{1}_{\{y \leq PL_{max}\}}$$

Suite au changement de référentiel, le seul impact perceptible concernera l'indicatrice. Développons pourquoi, en considérant la valeur de cette probabilité, sans tenir compte de son conditionnement dans un premier temps. Alors, toute chose égale par ailleurs, cette valeur restera identique quelle que soit la tranche du risque considéré.

Comme développé précédemment, suite à la mesure insatisfaisante de la sinistralité par les limites d'indemnité, il avait été supposé que les risques responsables de sinistres de faible sévérité se comportaient d'une manière similaire dans les cas de montants plus élevés, typiques des risques

avec de fortes limites d'indemnité. De ce fait, la sévérité d'un sinistre ne variera pas selon que son risque provienne d'une tranche avec une limite d'indemnité moyenne plus ou moins haute. C'est typiquement une conclusion à laquelle nous n'aurions pas pu arriver dans le cas du dommage aux biens, étant donné que la sinistralité est alors dépendante de la somme assurée. Dans notre cas, la probabilité ainsi calculée sera la même pour chaque tranche.

Néanmoins, l'impact du changement de référentiel sur cet élément va bien se faire ressentir, mais sur son conditionnement : grâce au profil de risques, nous sommes maintenant en capacité de connaître plus précisément la limite d'indemnité relative au risque considéré, en supposant que les risques d'une même tranche partagent la même limite d'indemnité, prise comme étant égale à la moyenne des limites d'indemnités de la tranche.

Suite à ces constats, la formule de probabilité applicable pour chaque tranche sera la suivante :

$$\mathbb{P}_j(\min(X, PL_j) > y | \min(X, PL_j) > T_S) =$$

$$\mathbb{P}(\min(X, PL_j) > y | \min(X, PL_j) > T_S) = \frac{ILF'(y)}{ILF'(T_S)} \times \mathbb{1}_{\{y \leq PL_j\}}$$

- **L'estimation de $\mathbb{E}[N_j]$**

Suite au changement de référentiel envisagé, il est maintenant nécessaire d'avoir une estimation de $\mathbb{E}[N_j]$ pour chaque tranche, contre $\mathbb{E}[N]$ avec la précédente méthode.

Pour ce faire, nous allons toujours calculer le nombre moyen de sinistres λ_{PTF} à l'échelle du portefeuille, pour ensuite le répartir selon les tranches. En effet, les sinistres ne représentent rien de plus que la réalisation de certains risques contenus dans le portefeuille. Nous allons donc chercher à associer à chaque tranche la part de la fréquence du portefeuille dont elle est « responsable ». Soit λ_{PTF_j} cette quantité, représentant la fréquence annuelle moyenne de sinistres associée à la $j^{ième}$ tranche. Afin de « ventiler » le λ_{PTF} à travers ces différentes tranches du profil de risques, il convient de créer une clé de ventilation.

Nous nous attacherons ci-dessous à décrire la construction de cette clé primaire, puis son application. Enfin, nous analyserons les résultats qui en découlent.

4.3.2 Clé de ventilation intuitive

En premier lieu, il convient d'établir les critères de définition de ce type de clé un tel type de clé, les informations à notre disposition étant assez restreintes.

Tout d'abord, comme évoqué précédemment, la sévérité d'un sinistre n'étant pas mesurable par

sa limite d'indemnité, la part de fréquence de λ_{PTF} revenant à la tranche j ne sera pas dépendante du niveau d'indemnité considéré PL_j . Il y a autant de chances qu'un sinistre provienne d'une tranche avec une limite d'indemnité moyenne très faible que très forte.

Au regard du profil de risques, le choix le plus intuitif d'un critère influençant la répartition de la fréquence se porte sur celui du nombre de risques par tranche : dans le cas où un sinistre se présente, son risque correspondant a plus de chances d'appartenir à une tranche qui comporte 10 000 risques qu'un seul.

Suite à ces constats, une définition possible de notre clé de ventilation peut simplement être le partage de λ_{PTF} au prorata du nombre de risques dans chaque tranche :

$$\forall j \in \llbracket 1; T \rrbracket, \lambda_{PTF_j} = \lambda_{PTF} \times \frac{n_j}{\sum_{i=1}^T n_i}$$

avec $\lambda_{PTF} = \sum_{j=1}^T \lambda_{PTF_j}$

L'ajout d'une condition semble nécessaire à cette formule : comme introduit auparavant, les données disponibles à partir desquelles est calculé notre λ_{PTF} sont celles transmises par la cédante, à partir d'un certain seuil de transmission T_S . Le profil de risques prodiguant des informations sur l'ensemble du portefeuille, il est possible de se retrouver dans la situation où notre T_S se trouve supérieure à une, voire à plusieurs limites d'indemnités moyennes des tranches. Lorsqu'un tel cas se présente, les risques appartenant aux tranches avec une limite d'indemnité moyenne inférieure à T_S ne sont pas captés dans les données, et ne sont donc pas représentés par ce λ_{PTF} . La fréquence associée à leur tranche sera de ce fait égale à zéro, ce qui se traduit par : $PL_j \leq T_S \Rightarrow \lambda_j = 0$.

Notre clé prenant en compte cette spécificité sera alors la suivante :

$$\forall j \in \llbracket 1; T \rrbracket, \lambda_{PTF_j} = \left(\lambda_{PTF} \times \frac{n_j}{\sum_{i=1}^T n_i \mathbb{1}_{\{T_S \leq PL_i\}}} \right) \mathbb{1}_{\{T_S \leq PL_j\}}$$

En reprenant le profil de risques introduit auparavant (4.3.1 *D'une vision portefeuille au par tranche*), nous introduisons la colonne de calcul des λ_{PTF_j} . Cela permet de mettre en évidence leur calcul et leur utilisation en vue d'aboutir à la colonne des λ_j^y , la fréquence excédente à un certain seuil associée à la j^{ime} tranche. Supposons être dans le cas où $PL_1 < T_S < PL_2 < \dots < PL_j < \dots < PL_T$.

L'application de cette première clé mènera alors à la répartition suivante :

T	PL	Nombre de risques	λ_{PTF}	$\tilde{\lambda}_{ILF}^y$
T_1	PL_1	n_1	$\lambda_{PTF_1} = 0$	$\tilde{\lambda}_1^y = 0$
T_2	PL_2	n_2	λ_{PTF_2}	$\tilde{\lambda}_2^y$
...
T_j	PL_j	n_j	$\lambda_{PTF_j} = \lambda_{PTF} \times \frac{n_j}{n_2 + \dots + n_T}$	$\tilde{\lambda}_j^y = \lambda_{PTF_j} \times \frac{ILF'(y)}{ILF'(T_S)} \times \mathbb{1}_{\{y \leq PL_j\}}$
...
T_T	PL_T	n_T	λ_{PTF_T}	$\tilde{\lambda}_T^y$

TABLE 11 – Visualisation du calcul des $\tilde{\lambda}_j^y$ suite à l'application de la première clé de répartition

En résumé, l'ajout du profil de risques dans le cheminement de notre méthode initiale rajoutera les étapes indiquées en rouge dans le schéma suivant :

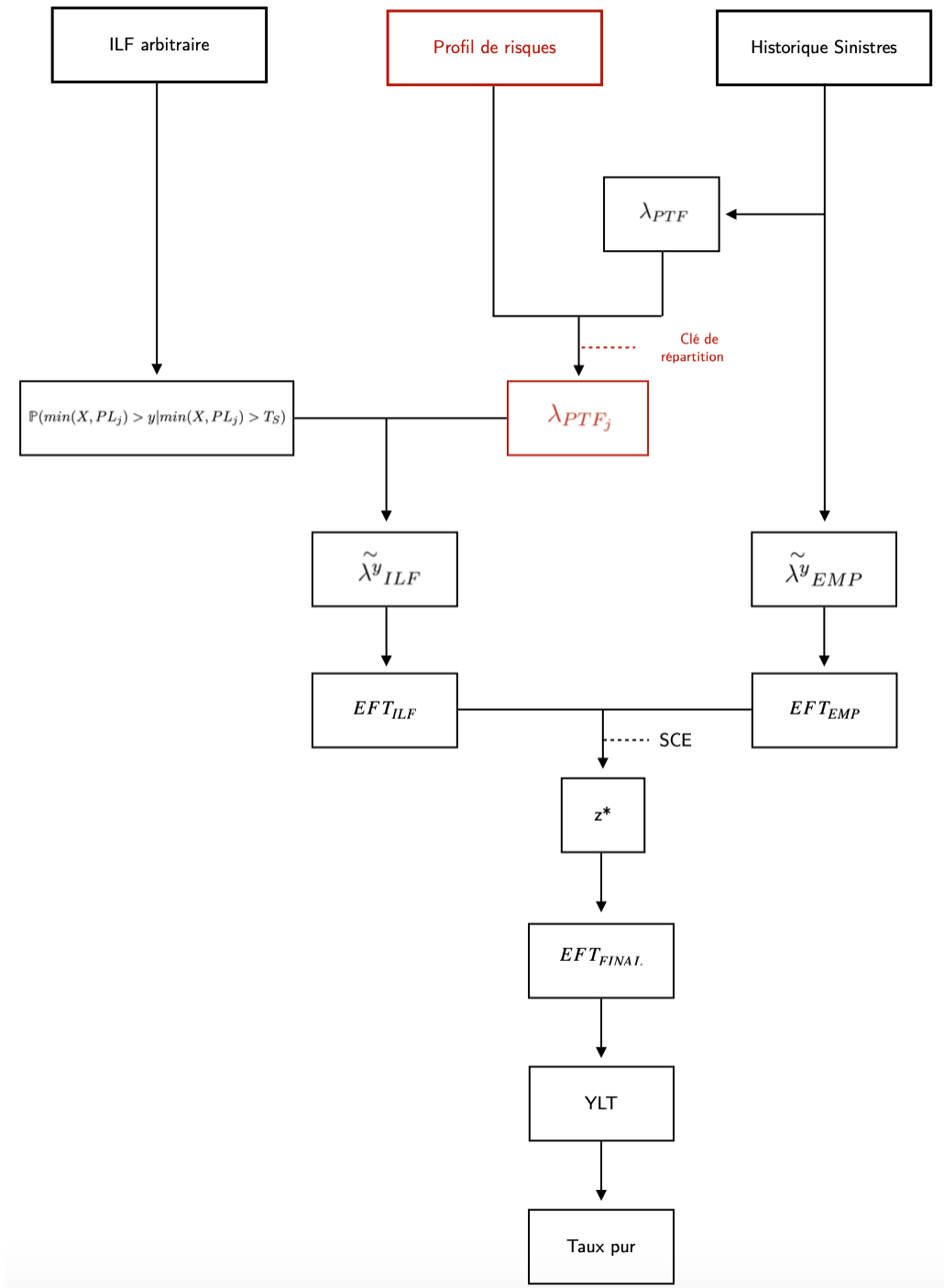


FIGURE 21 – Schéma récapitulatif de la démarche suite à l'introduction de la première clé

4.3.3 Application aux données

Afin d'appliquer cette nouvelle méthode à notre affaire, il est nécessaire de présenter un aperçu du profil de risques que nous avons à disposition :

T	PL	Nombre de risques
1	93 697	2257
2	416 172	3912
...
16	78 362 809	340

TABLE 12 – Profil de risques du portefeuille de RCG de la cédante X

En appliquant notre nouvelle méthode qui se place dans le référentiel de la tranche, cela implique l'obtention d'une EFT_{ILF} avec des valeurs qui diffèrent de la première version. La minimisation de la SCE sur le même intervalle mène à l'obtention d'un nouveau z^* égale à $z_2^* = 0.2428$, permettant d'aboutir aux taux suivants :

	T_{XS_1}	T_{XS_2}	T_{XS_3}	T_{XS_4}	T_{XS_5}
Taux pur obtenu pour $z_1^* = 0.1811$	0.87%	0.29%	0.04%	0.02%	0.01%
Taux pur obtenu pour $z_2^* = 0.2428$	0.93%	0.36%	0.06%	0.03%	0.01%

TABLE 13 – Taux de prime pure obtenu par tranche via l'approche développée (comparaison z_1^* et z_2^*)

Ce tableau montre une légère augmentation des taux purs suite à ce changement de référentiel, permettant de se rapprocher des taux leaders. En gardant l'idée de l'ajout du profil de risques, essayons de perfectionner la clé de ventilation utilisée.

4.4 Mise en oeuvre de l'approche définitive

4.4.1 Clé de ventilation finale

Afin d'améliorer autant que possible la répartition de notre λ_{PTF} , notre clé de ventilation va être soumise à une nouvelle condition, que nous allons exposer ci-dessous.

Jusqu'à présent, la répartition du λ_{PTF} était réalisée selon une clé de ventilation dépendant uniquement du nombre de risques par tranche. Cependant, bien que les limites d'indemnités moyennes par tranche aient été jusqu'à présent mises de côté pour la construction de cette clé, cette information pourrait tout de même intervenir dans l'affinage de notre clé, sous forme de conditionnement. Cette nouvelle condition amènerait un critère « d'éligibilité » de la tranche lors de la répartition de

la fréquence, en se basant pour cela sur le lien entre la limite d'indemnité moyenne de la tranche et la sévérité des sinistres sur lesquels est basé le calcul du λ_{PTF} .

Illustrons par un exemple comment la sévérité du sinistre va nous aider à redéfinir notre clé. En reprenant le contexte du précédent profil de risques, considérons deux sinistres S_1 et S_2 , avec $S_1 \in [T_S, PL_2]$ et $S_2 \in [PL_3, PL_4]$.

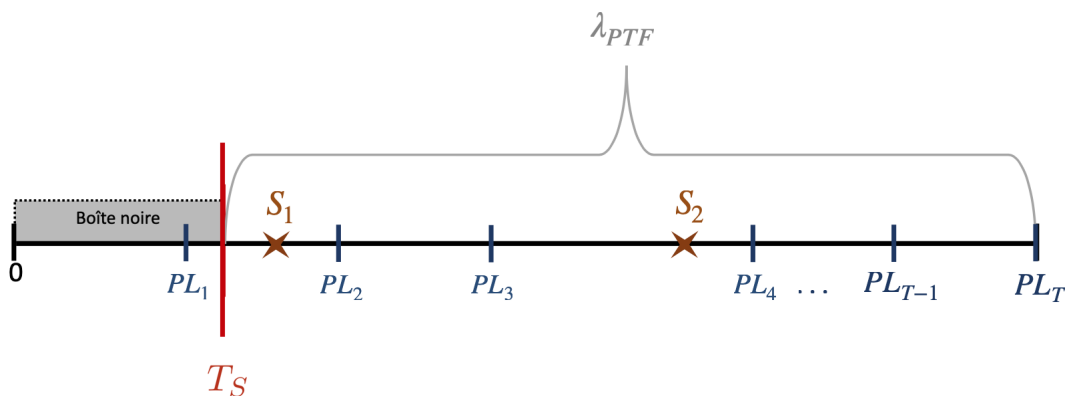


FIGURE 22 – Exemple de survénance de deux sinistres

Leur sévérité relative permet alors d'affirmer les points suivants :

- S_1 : ce sinistre représente l'occurrence d'un risque pouvant provenir de n'importe quelle tranche (à condition que la limite d'indemnité moyenne de la tranche soit bien supérieure à T_S)
- S_2 : outre la condition soulevée pour S_1 ci-dessus, ce risque ne concerne pas non plus les tranches dont la limite d'indemnité moyenne est inférieure ou égale à celle de PL_3 . Le risque caractérisant S_2 peut donc provenir de la tranche 4, ou plus.

L'idée derrière ce nouveau conditionnement est donc d'éliminer les tranches dont les limites d'indemnités moyennes sont inférieures à la sévérité du sinistre considéré.

Pour aboutir à une telle différenciation, il est nécessaire de décomposer λ_{PTF} selon certains intervalles de sévérité (en prenant comme bornes celles des limites d'indemnités moyennes des tranches), ce qui permettra dans un second temps de les répartir selon les tranches "éligibles".

Soit $\lambda_{[PL_{j-1}; PL_j]}$ la notation utilisée pour désigner le nombre de sinistres dont la sévérité relative est comprise entre la limite d'indemnité moyenne j-1 et j. L'idée est donc de décomposer le λ_{PTF} selon ces $\lambda_{[PL_{j-1}; PL_j]}$, en ayant avec $\lambda_{PTF} = \sum_{j=1}^T \lambda_{[PL_{j-1}; PL_j]}$ (avec $PL_0 = 0$) :

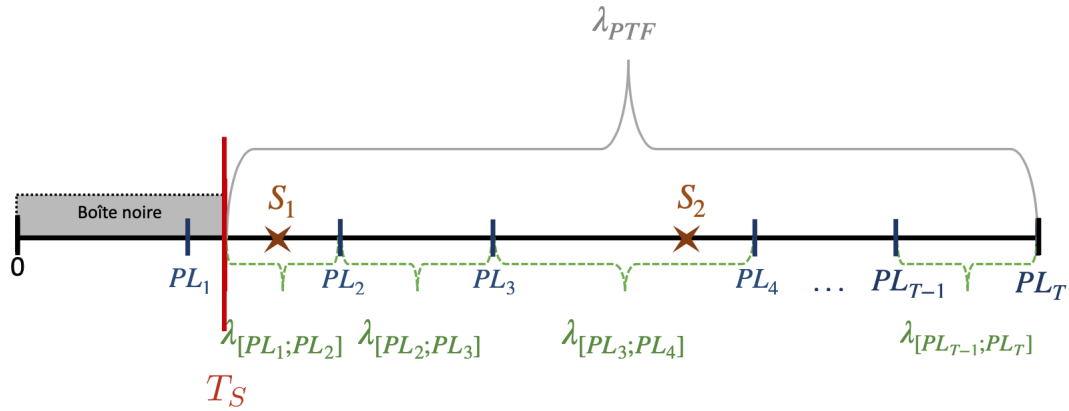


FIGURE 23 – Représentation de la décomposition de λ_{PTF} par les $\lambda_{PTF} = \sum_{j=1}^T \lambda_{[PL_{j-1}; PL_j]}$

Après obtention de ces fréquences, chacune va être répartie dans les tranches éligibles. La condition d'éligibilité permettra d'éliminer les tranches dont les limites d'indemnités moyennes sont inférieures à l'intervalle de sévérité associé à la fréquence considérée.

En résumé, nous passons alors d'une décomposition de λ_{PTF} par tranche (calculée uniquement au prorata du nombre de risques par tranche grâce à notre première clé de répartition) :

$$\begin{bmatrix} \lambda_{PTF_1} \\ \dots \\ \lambda_{PTF_j} \\ \dots \\ \lambda_{PTF_T} \end{bmatrix}$$

à une décomposition plus poussée : en premier lieu par sévérité des sinistres, pour ensuite les répartir selon le même principe que la première clé évoquée :

$$\begin{matrix}
& \lambda_{[0;PL_1]} & \lambda_{[PL_1;PL_2]} & \lambda_{[PL_2;PL_3]} & \lambda_{[PL_3;PL_4]} & \dots & \lambda_{[PL_{T-1};PL_T]} \\
\lambda_{PTF_1} & \left(\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \lambda_{PTF_2,[PL_1;PL_2]} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \lambda_{PTF_3,[PL_1;PL_2]} & \lambda_{PTF_3,[PL_2;PL_3]} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \lambda_{PTF_4,[PL_1;PL_2]} & \lambda_{PTF_4,[PL_2;PL_3]} & \lambda_{PTF_4,[PL_3;PL_4]} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \lambda_{PTF_T,[PL_1;PL_2]} & \lambda_{PTF_T,[PL_2;PL_3]} & \lambda_{PTF_T,[PL_3;PL_4]} & \dots & \lambda_{PTF_T,[PL_{T-1};PL_T]}
\end{array} \right)
\end{matrix}$$

Nos λ_{PTF_j} sont alors obtenus en sommant les quantités de la j^{ime} ligne, tels que $\lambda_{PTF_j} = \sum_{i=1}^T \lambda_{PTF_j,[PL_{i-1};PL_i]}$.

Le coefficient $\lambda_{PTF_j,[PL_{i-1};PL_i]}$ d'une telle matrice peut s'interpréter de la manière suivante : il correspond au nombre moyen de sinistres annuels avec une sévérité correspondante comprise entre PL_{i-1} et PL_i , dont les risques proviennent de T_j .

En résumé, la présence dans la matrice des zéros :

- de la première ligne est le résultat de la condition $\mathbb{1}_{\{T_S \leq PL_j\}}$
- du restant provient de la nouvelle condition rajoutée dans cette partie basée sur l'éligibilité de la tranche de laquelle peut provenir le risque, ce en fonction de la sévérité du sinistre : $j < i \iff \lambda_{PTF_j,[PL_{i-1};PL_i]} = 0$.

La clé finale ainsi développée se présentera donc sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& \forall j \in \llbracket 1; T \rrbracket, \lambda_{PTF_j} = \sum_{i=1}^T \lambda_{PTF_j,[PL_{i-1};PL_i]} \\
& = \sum_{i=1}^T \left(\lambda_{[PL_{i-1};PL_i]} \times \frac{n_j}{\sum_{i=1}^T n_i \mathbb{1}_{\{T_S \leq PL_i\}} \mathbb{1}_{\{j < i\}}} \right) \mathbb{1}_{\{T_S \leq PL_j\}} \mathbb{1}_{\{j < i\}}
\end{aligned}$$

4.4.2 Application finale de l'approche développée

L'approche développée précédemment va maintenant être mise en application sur les données à notre disposition, présentées dans la troisième partie.

Voici présenté de façon synthétique le cheminement que nous allons adopter :

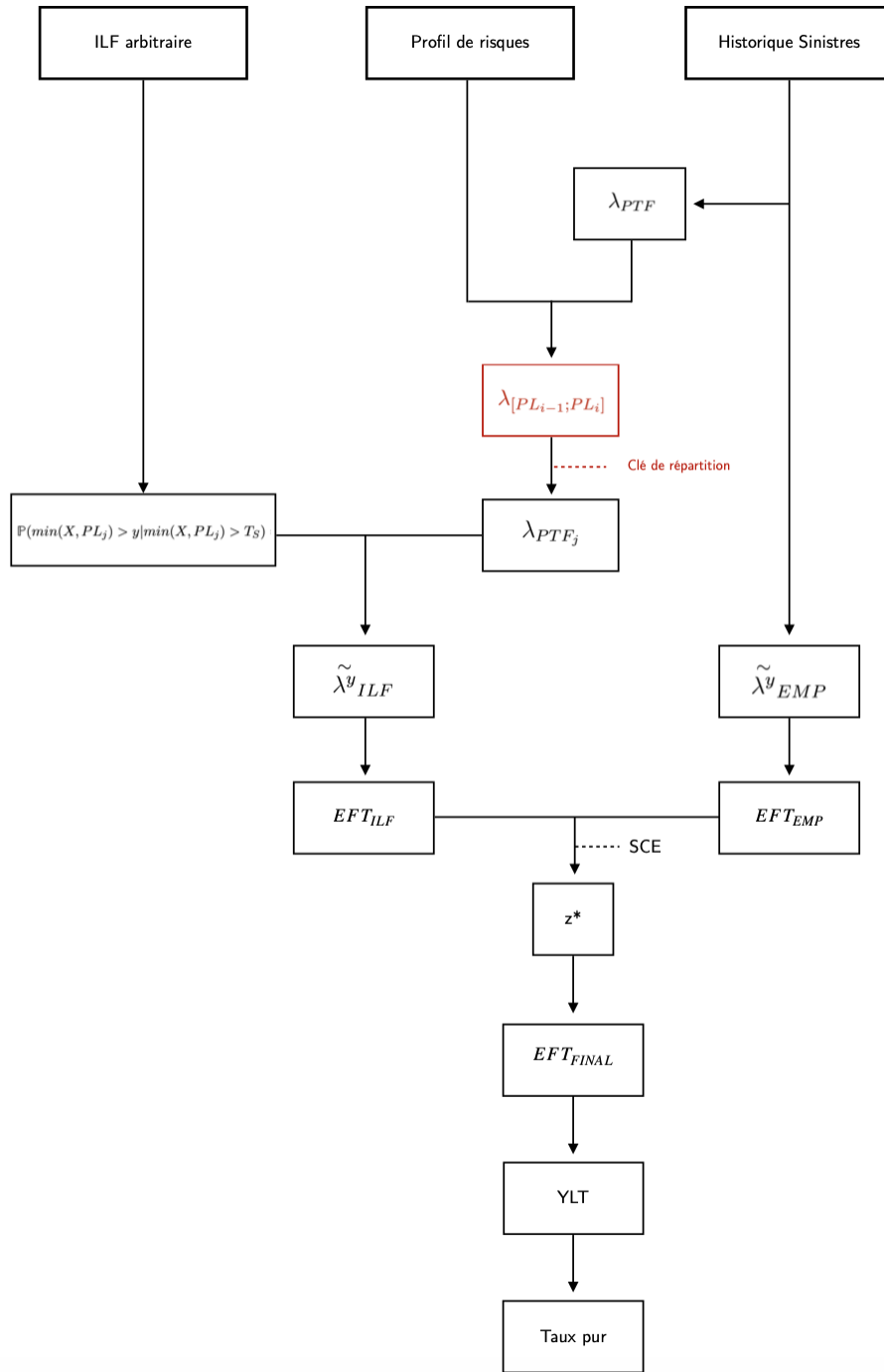


FIGURE 24 – Schéma récapitulatif de l’approche finale adoptée

Par application de cette dernière méthode, le nouveau paramètre z^* obtenu est égal à $z_3^* = 0.198$, permettant d’aboutir aux taux suivants :

	T_{XS_1}	T_{XS_2}	T_{XS_3}	T_{XS_4}	T_{XS_5}
Taux pur obtenu pour $z_3^* = 0.198$	1.04%	0.45%	0.06%	0.02%	0.01%

TABLE 14 – Taux de prime pure obtenu par tranche via l’approche développée (z_3^*)

4.4.3 Adéquation

La pertinence de notre approche semble relativement complexe à vérifier. En effet, la méthodologie utilisée permet de calculer une probabilité associée à un seuil, et la fréquence de dépassement de ce dernier afin d’obtenir le taux pur de l’affaire étudiée. De fait, s’assurer de l’adéquation de la méthode à l’aide de valeurs théoriques semble difficile.

Un des seuls éléments à notre disposition est le taux leader, nous procurant une idée du positionnement des taux du marché. Il peut être intéressant de comparer l’ensemble de nos taux obtenus à ce dernier. Outre ce premier élément, un autre aspect va pouvoir être vérifié : l’adéquation des fréquences de dépassement calculées via la formule ILF (suite au recalibrage du z) aux fréquences de dépassement empiriques.

- **Taux commerciaux obtenus**

Afin de visualiser l’ensemble de nos résultats, nous représenterons graphiquement ci-dessous les taux commerciaux obtenus grâce aux différentes méthodes testées jusqu’à présent (les taux commerciaux ILF 1, ILF 2 et ILF 3 correspondent respectivement aux paramètres z_1^* , z_2^* et z_3^*), ainsi que les taux leaders :

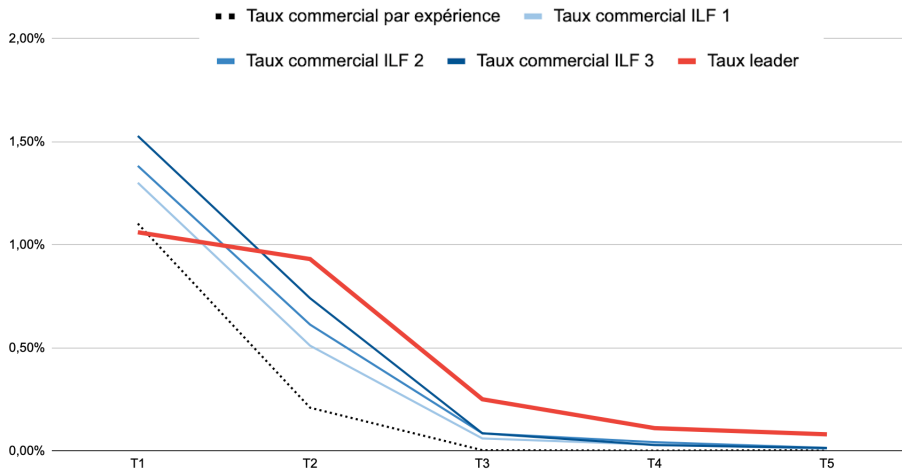


FIGURE 25 – Comparaison du taux commercial par tranche selon les différentes méthodes

L’imperfection des taux par expérience se manifeste clairement sur le graphique ci-dessus, en

particulier pour les tranches allant de 2 à 5. Notre méthode (quelque soit le z utilisé) va permettre de redresser ces taux, en particulier sur les trois premières tranches. Cela aboutit à un taux pour la tranche 1 supérieur au taux leader, quelle que soit la méthode utilisée.

Même si les taux obtenus par l'approche finale (correspondants à z_3^*) restent en deçà du taux leader (hormis pour la tranche 1), l'ajout du profil de risque conjugué à l'affinement de la clé de répartition utilisée ont permis d'aboutir au redressement global des taux par rapport à ceux obtenus par la méthode par expérience. C'était un aspect que nous avons préconisé suite à l'analyse des résultats obtenus via la méthode par expérience.

• Fréquences de dépassement

Comme évoqué plus haut, la robustesse du modèle peut être vérifiée par la comparaison des valeurs réelles aux résultats obtenus lors d'une étape précise : celle de recalibration de notre paramètre z . Pour rappel, ce passage consiste à trouver le paramètre z^* permettant d'obtenir des fréquences de dépassement représentant au mieux la réalité, c'est-à-dire à celles empiriques, sur un intervalle choisi. Soient les distributions suivantes :

- distribution empirique : la distribution constituée des valeurs des fréquences de dépassement empiriques sur l'intervalle choisi pour le calcul de la SCE ;
- distribution z initial : la distribution constituée des valeurs des fréquences de dépassement calculées à partir de la formule ILF avec le paramètre arbitraire z sur le même intervalle ;
- distribution z^* : la distribution constituée des valeurs des fréquences de dépassement calculées à partir de la formule ILF avec le paramètre z^* , le paramètre minimisant la SCE, toujours sur ce même intervalle.

Afin de mettre en avant l'estimation plus performante qu'apporte notre z^* , nous allons réaliser un diagramme quantile-quantile (Q-Q). Constitué des points dont les coordonnées vont être la distribution z initial en abscisse, et la distribution empirique en ordonné, il permet de comparer entre elles deux distributions.

Un alignement selon la première bissectrice indique la présence d'une identité de loi. Il est important de prendre en compte le fait que les fréquences empiriques vont, de manière logique, présenter des valeurs répétitives, contrairement à l'échantillon obtenu par notre paramètre z . Ceci explique l'allure peu conventionnelle obtenue par notre graphe, à savoir :

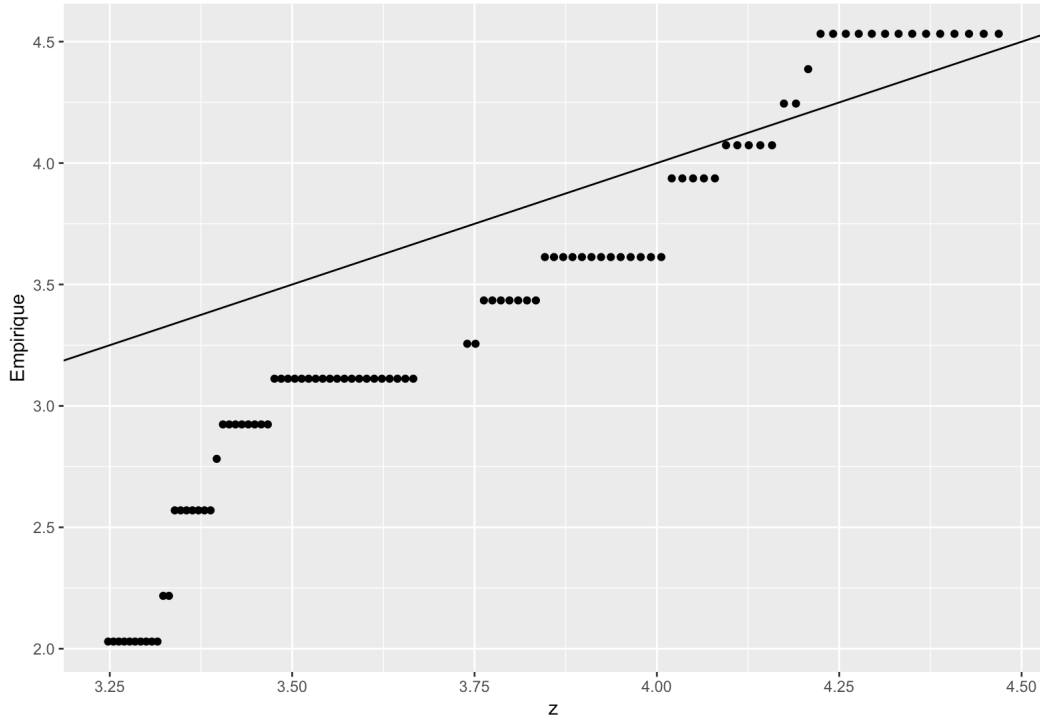


FIGURE 26 – Diagramme Q-Q comparant la distribution empirique et la distribution z initial

Le graphique traduit nettement une inadéquation entre les deux échantillons. Le point de départ des deux échantillons étant relativement proche, correspondant à la fréquence au seuil $X_{(1)}$. Plus le seuil augmente, plus l'écart de prédiction observée entre les fréquences empiriques et estimées s'intensifient. En effet, ces dernières ont tendance à nettement surestimer les fréquences réelles, se traduisant sur le graphique par des points de plus en plus en deçà de la bissectrice à mesure que les valeurs faiblissent. L'étude numérique des principaux quantiles confirme bien ces dires (Q25 et Q75 représentent respectivement le premier et le troisième quantile) :

	Q25	Médiane	Q75
Distribution empirique	2.92	3.35	3.97
Distribution z initial	3.45	3.76	4.53
Différence par rapport à la valeur réelle	18 %	12 %	14 %

TABLE 15 – Comparaison de quantiles des distributions obtenues empiriquement et par z initial

Les quantiles de notre échantillon z initial sont nettement supérieurs à ceux empiriques. Représentons à présent le même graphique avec z^* , le paramètre optimal obtenu :

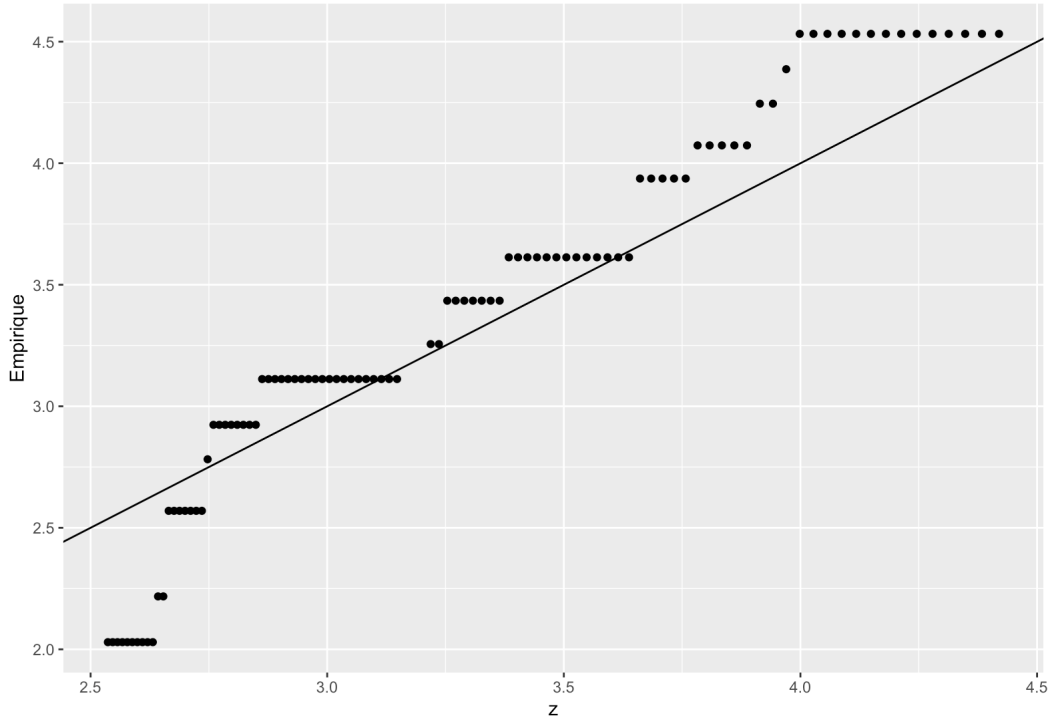


FIGURE 27 – Diagramme Q-Q comparant la distribution empirique et la distribution z^*

L'alignement des points avec la bissectrice est nettement plus marqué que dans le cas précédent. Cette évaluation graphique met en évidence l'apport de la recalibration du paramètre z , qui permet une meilleure approximation de la distribution réelle. Ce point se confirme également par la comparaison numérique des principaux quantiles :

	Q25	Médiane	Q75
Distribution empirique	2.92	3.35	3.97
Distribution z^*	2.82	3.24	3.76
Différence par rapport à la valeur réelle	3 %	3 %	5 %

TABLE 16 – Comparaison de quantiles des distributions obtenues empiriquement et par z^*

Un tel constat est également perceptible en représentant simplement la fréquence de dépassement de chaque distribution associée à chaque seuil de l'intervalle choisi :

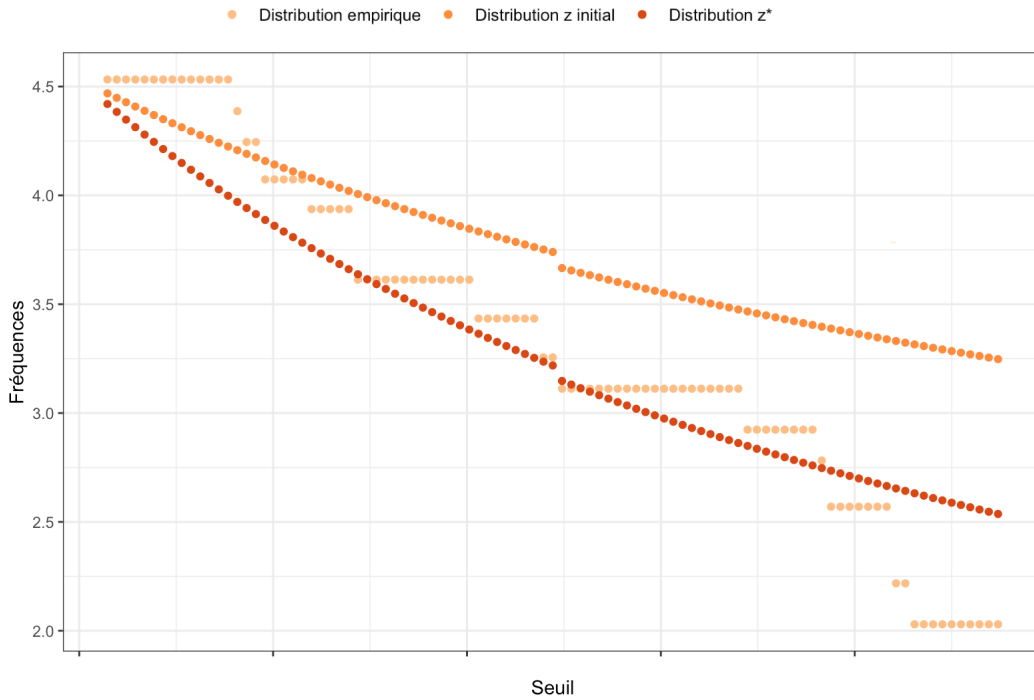


FIGURE 28 – Comparaison des différentes fréquences excédentes obtenues

Ce graphique illustre clairement la meilleure adéquation aux fréquences de la distribution recalibrée z^* .

Outre cette preuve graphique, ce constat peut être vérifié à l'aide du test de Kolmogorov-Smirnov (K-S) : c'est un test d'adéquation non paramétrique permettant d'estimer si le caractère d'un échantillon est distribué de façon comparable à celui d'un autre. Son principe est assez simple : l'écart maximum qui existe entre deux fonctions de répartition empiriques, noté d , est mesuré. Soit D la variable aléatoire qui prend la valeur de d . Soit H_0 l'hypothèse selon laquelle les deux échantillons proviennent de la même distribution. Sous l'hypothèse H_0 , d tend vers 0. Les sorties obtenues pour un tel test sont les suivantes :

Échantillon testé	D	p -value
Empirique et z initial	0.48	1.972e-10
Empirique et z^*	0.17	0.1111

TABLE 17 – Sorties obtenues suite au test de K-S

En se plaçant au seuil 5 %, l'hypothèse nulle H_0 est rejetée pour le z initial, ce qui n'est pas le cas pour le paramètre optimal z^* .

4.4.4 Bilan de l'application de notre méthode

Les résultats obtenus par notre approche ont bien permis un redressement des taux par tranches, malgré une légère surestimation que cela a engendré sur la première tranche. Néanmoins, notre approche a permis de pallier le déficit amené par l'approche par expérience dans notre affaire. De plus, l'adéquation obtenue grâce à notre méthode témoigne bien de sa cohérence. Après cette première application jugée concluante, il nous a semblé intéressant de la tester sur d'autres affaires.

Pour cela, les pré-requis nécessaires à une application pertinente étant particulièrement contraignants, notamment en terme de données requises, il nous a paru souhaitable que notre périmètre d'investigation englobe un nombre conséquent d'affaires candidates, de façon à s'assurer qu'un nombre minimum d'entre elles remplisse les conditions demandées. Dans cette perspective le marché français nous a paru le plus approprié. Il comporte cependant une spécificité : les rentes, qui va complexifier l'étape de tarification. En effet, l'indemnisation des victimes d'un sinistre corporel peut se faire sous forme de rente (suite de versements périodiques payables en cas de survie), ou de capital, dans le cas d'un sinistre relevant de la branche responsabilité civile. L'indemnisation sous forme de rentes est un aspect particulièrement récurrent sur le marché français. Notre choix s'est alors porté sur un autre marché peu impacté par cette spécificité, de façon à pouvoir nous focaliser exclusivement sur l'application de notre méthode, en ne nous souciant que des étapes habituelles de retraitement de données (liquidation, revalorisation, ..). Notre sélection s'est de ce fait portée sur le marché Asie, qui remplit tous les critères définis ci-dessus.

Nous avons donc appliqué notre approche à trois autres affaires de ce marché, les résultats obtenus sont disponibles en annexe de ce mémoire. Pour apporter une conclusion plus concise que l'affaire principale étudiée, les graphiques obtenus pour ces autres affaires confirment bien le constat la première application. En effet, malgré la présence de différences plus ou moins marquées selon la tranche / les affaires, les taux obtenus demeurent toujours du même ordre de grandeur que celui des taux leaders. Comme développé dans l'analyse de notre étude, les données de sinistres et de profils de risques sur lesquelles nous nous appuyons ont un rôle particulièrement important, potentiellement facteur d'explication d'une partie des différences observées .

Conclusion Chapitre 4

La contrainte du choix de la limite d'indemnité de base avait rendu impossible l'application classique de la méthode ILF. De ce fait, nous avons élaboré et mis en pratique une méthode alternative, qui présente l'avantage de conjuguer la théorie afférente au modèle ILF avec l'information contenue dans le profil de risques dans le cas d'un portefeuille de RCG. Sa mise en oeuvre sur différentes affaires a pu attester de son applicabilité, tout en aboutissant à une vision du risque cohérente avec celle du marché.

Notre méthode ayant été clairement détaillée et appliquée à des cas concrets, nous allons maintenant consacrer une dernière partie à son évaluation, en commençant par résumer ses avantages et inconvénients. Cette démarche critique permettra d'une part de délimiter précisément les affaires auxquelles cette méthode pourra valablement s'appliquer, et d'autre part de mettre en exergue les points qui devront solliciter notre vigilance dans son utilisation. En dernier lieu, nous mènerons une analyse de la sensibilité des choix qui ont été faits.

5 Critiques du modèle

L'application concrète de notre méthode ayant contribué à affiner notre perception de ses atouts et faiblesses, nous allons ici les exposer plus clairement. Nous réaliserons pour terminer des tests de sensibilité sur les choix effectués en amont.

5.1 Points forts et points faibles

Notre approche va apporter une vision enrichie du risque auquel est confronté le portefeuille de notre affaire, en s'appuyant directement sur celui-ci pour quantifier ce risque. Cet atout majeur provient de l'utilisation dans la tarification de l'information contenue dans le profil de risques, élément jusqu'alors le plus souvent inexploité, alors même qu'il constitue un indicateur capital du risque de l'exposition du portefeuille. L'exploitation d'une telle information permet en effet d'obtenir des taux purs concernant des tranches pour lesquelles l'estimation de ces taux pouvait s'avérer complexe via les méthodes usuelles. Ce type de difficultés pouvait notamment découler d'une trop faible occurrence de sinistres, notamment ressentie sur les tranches hautes, ne permettant pas d'en modéliser correctement la sinistralité.

Toutefois, si la mise en oeuvre effective de notre approche permet d'en attester l'applicabilité, elle en éclaire dans le même temps ses difficultés de mise en oeuvre ainsi que ses faiblesses. Nous en avons recensé principalement quatre que voici détaillées, successivement sous forme d'exigences et de faiblesses :

- nécessité d'un fort apport de données quantitatives : l'affaire concernée se doit de détenir une quantité suffisante d'informations. En premier lieu, il est nécessaire que l'actuaire soit en possession du profil de risques du portefeuille de la cédante (ce qui n'est pas toujours le cas). En outre, notre méthode s'appuyant sur la fréquence de sinistralité annuelle du portefeuille, il convient de disposer d'un portefeuille couvrant un historique de sinistres conséquent ;
- une nécessité d'un fort apport de données qualitatives : cet aspect vient compléter celui précédemment évoqué, en terme de rigueur exigée sur de telles informations. Concernant le profil de risques, il est souhaitable qu'il détienne la granularité la plus fine possible, nous prodiguant ainsi une information de précision optimale : en effet et fort logiquement, plus le nombre de tranches sera élevé, plus la répartition pourra être affinée. Quant aux sinistres, ils doivent être suffisamment nombreux pour pouvoir être jugés comme fiables tout en constituant une bonne base d'analyses. Enfin, notre périmètre d'étude concernant les branches longues, il est nécessaire qu'une telle information soit disponible sur plusieurs années (environ dix ans) ;
- limite d'une approche uniquement cédante : la méthode développée repose sur le profil de risques du portefeuille de la cédante, ainsi que sur sa sinistralité. Ces deux points sont des

éléments propres au portefeuille de la cédante. Cela constitue un avantage certain puisque la méthode de tarification qui en découle possède une composante empirique non négligeable qui permet de définir un tarif ajusté. A contrario, une telle méthode semble difficilement généralisable à une approche marché ;

- limite liée à un choix arbitraire : le déroulement de notre méthode a nécessité une décision qui se doit d'être prise par l'actuaire selon son propre jugement, et concernant les bornes entre lesquelles va être calculée la SCE. L'impact d'un tel choix sur le taux final va être étudié ci-dessous dans la partie « Sensibilité ».

5.2 Sensibilité

Nous allons chercher dans cette dernière partie à étudier la stabilité de notre méthode. Pour ce faire, nous allons analyser les conséquences de la variation du paramètre z sur les taux purs finaux.

Cette étude préliminaire nous permettra de mener ensuite une analyse relativement similaire concernant l'impact engendré par le choix des seuils entre lesquels est calculée la SCE sur les taux purs.

5.2.1 Étude de la sensibilité de nos taux par rapport au paramètre z

Afin de permettre l'étude rigoureuse de l'impact d'une variation du paramètre z sur le taux pur, nous allons tout d'abord délimiter précisément les étapes et éléments qui vont être impactés par une telle variation.

Pour rappel, notre taux pur va être calculé en appliquant la structure de réassurance au YLT construit, qui a été lui même obtenu à partir de notre EFT_{FINAL} . Les fréquences excédentes à un seuil y figurant dans une telle table sont calculées de la manière suivante :

$$\tilde{\lambda}_{ILF}^y = \sum_{j=1}^T \tilde{\lambda}_j^y = \sum_{j=1}^T \lambda_{PTF_j} \times \mathbb{P}(\min(X, PL_j) > y | \min(X, PL_j) > T_S)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{PTF_j} = \sum_{i=1}^T \left(\lambda_{[PL_{i-1}; PL_i]} \times \frac{n_j}{\sum_{i=1}^T n_i \mathbb{1}_{\{T_S \leq PL_i\}} \mathbb{1}_{\{j < i\}}} \right) \mathbb{1}_{\{T_S \leq PL_j\}} \mathbb{1}_{\{j < i\}} \\ \mathbb{P}(\min(X, PL_j) > y | \min(X, PL) > T_S) = \frac{ILF'(y)}{ILF'(T_S)} \times \mathbb{1}_{\{y \leq PL_j\}} \end{array} \right.$$

λ_{PTF_j} est calculé de manière totalement indépendante de notre paramètre z . Il ne sera donc

pas impacté par sa variation, contrairement au deuxième élément constituant cette formule qui va directement l'être. En effet, notre paramètre z intervient dans la formule de la dérivée d'une ILF, ainsi :

$$\mathbb{P}(\min(X, PL_j) > y | \min(X, PL) > T_S) = \begin{cases} \left(\frac{y}{T_S}\right)^{\log(1+z, 2)-1} & \text{si } y \leq PL_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit z^- la valeur minimale que peut être amené à prendre le z ($z^- \rightarrow 0^+$), et z^+ la valeur maximale que peut être amené à prendre le z ($z^+ \rightarrow 1^-$).

Alors, comme développé en annexe, notre exposant sera compris entre :

$$-1 < \log(1+z, 2) - 1 < 0$$

Comme $y \geq T_S$, alors :

$$0 < \left(\frac{y}{T_S}\right)^{\log(1+z^-, 2)-1} \leq \left(\frac{y}{T_S}\right)^{\log(1+z, 2)-1} \leq \left(\frac{y}{T_S}\right)^{\log(1+z^+, 2)-1} < 1$$

Ainsi, une augmentation du paramètre z engendre une variation similaire de la probabilité. Ce constat mathématique fait sens : pour rappel, ce paramètre désigne initialement le taux d'augmentation de la prime pure, résultant de l'accroissement de la limite d'indemnité considérée. Ainsi, une très faible augmentation de la prime pure correspond à un z également très faible. Un tel cas de figure révèle le raisonnement suivant de la part de l'assureur : il est très peu probable que le risque considéré atteigne et / ou soit capé par son ancienne limite. De ce fait, une augmentation de cette dernière sera insignifiante relativement à la sévérité du sinistre auquel l'assureur est potentiellement confronté.

Maintenant que nous avons identifié précisément l'élément originel qui va être impacté par la variation du z , analysons-en les répercussions.

Comme évoqué précédemment, une telle probabilité va intervenir dans la création de la table EFT_{FINAL} , calculée pour chaque seuil y à partir de la formule rappelée ci-dessus. Afin de visualiser l'impact du z sur les valeurs d'une telle table, nous reprenons l'affaire présentée plus haut et nous représentons, pour les mêmes seuils, les fréquences excédentes calculées avec un paramètre z variant de 0.1 à 0.9, par pas de 0.1 (z_1 correspond à $z = 0.1$, ..., z_9 correspond à $z = 0.9$). Le graphique obtenu est alors le suivant :

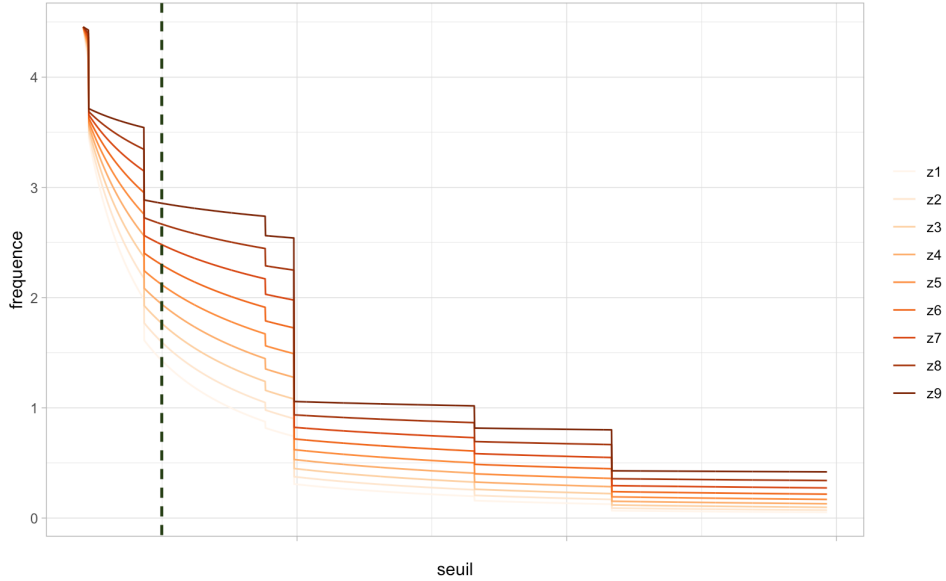


FIGURE 29 – Fréquences excédentes calculées à partir de différents paramètres z

Il est important d’apporter une précision à ce graphique : la table EFT_{FINAL} est bien calculée entre les seuils f_1 et $f_5 + p_5$, mais afin d’en faciliter la visualisation graphique puis l’interprétation, il a été décidé de représenter les fréquences excédentes calculées dès le seuil T_S . Le seuil minimal de l’ EFT_{FINAL} f_1 est représenté par la ligne verticale en pointillé, et il a été décidé d’arrêter la représentation avant son seuil maximal $f_5 + p_5$.

Nous ajouterons que la représentation graphique au moyen d’une courbe ne fait pas réellement sens. Les seuils de la table ont été générés entre deux bornes prédéfinies, avec un nombre fixé de seuils. L’écart entre deux seuils va donc être amené à varier en fonction des bornes choisies. Pour représenter ces données avec une meilleure lisibilité, nous avons préféré opter pour des courbes plutôt que des points.

Ces précisions étant posées, attachons-nous maintenant à analyser le graphique obtenu. En premier lieu, nous noterons que ce graphique démontre bien un aspect souligné plus haut, qui est l’indépendance du calcul du λ_{PTF_j} avec le paramètre z . Cette caractéristique se traduit graphiquement par des chutes verticales, qui adviennent pour les mêmes seuils quelle que soit la courbe considérée. Ce comportement reflète le critère d’éligibilité qui intervient dans le calcul du λ_{PTF_j} : au fur et à mesure de l’augmentation du seuil considéré, un certain nombre de fréquences associées à certaines tranches ne seront plus prises en compte dans la formule de calcul, qui est une conséquence des conditions présentes dans la formule.

Analysons maintenant les différences qui apparaissent. Nous observons que pour un même seuil,

plus le z est élevé, plus il en sera de même pour la fréquence associée à ce seuil : ceci est la conséquence de l'augmentation de la probabilité de la formule, se traduisant par un z plus élevé. Graphiquement, cela se traduit par un degré d'inclinaison moins important, ce qui implique un redressement global de la courbe.

Afin d'orienter notre réflexion sur un registre quantitatif, analysons maintenant les principaux quantiles des fréquences excédentes calculées à partir des deux z les plus extrêmes inclus dans notre set de départ (à savoir $z = 0.1$ et $z = 0.9$) :

	Q25	Médiane	Q75
Distribution $z = 0.1$	0.002	0.004	0.016
Distribution $z = 0.9$	0.053	0.076	0.159

TABLE 18 – Comparaison des quantiles des distributions obtenues pour $z = 0.1$ et 0.9

Q75 indique notamment que la valeur de la fréquence excédente obtenue pour $z = 0.9$ est presque 10 fois plus grande que celle obtenue par $z = 0.1$. En considérant maintenant la totalité de nos neuf distributions, la différence maximale entre deux distributions pour un même seuil atteint 1.86 : elle correspond à une fréquence excédente estimée à 2.74 pour notre paramètre $z = 0.9$, contre 0.87 pour $z = 0.1$, soit plus de 3 fois supérieur.

Mesurons pour terminer l'impact de la variation du paramètre sur nos taux purs finaux :

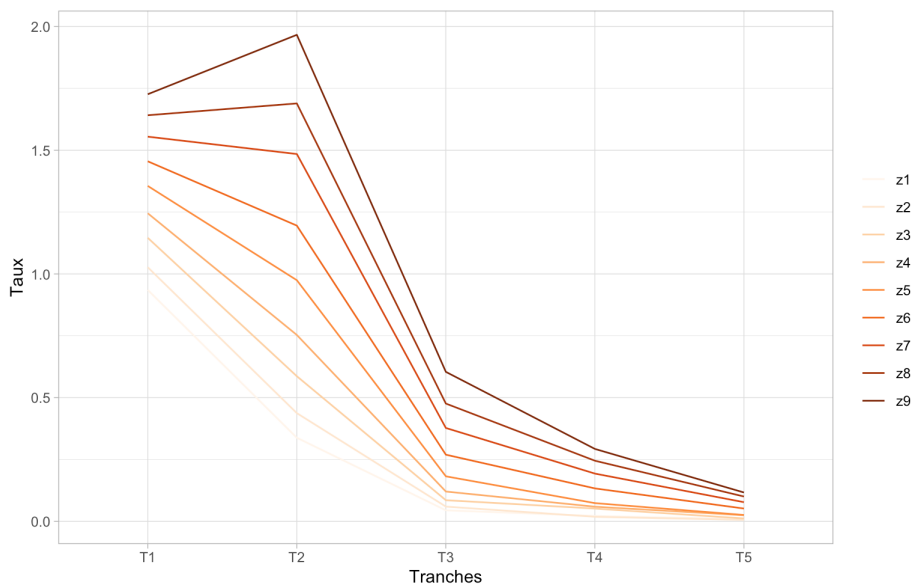


FIGURE 30 – Taux purs calculés à partir de différents paramètres z

Comme on pouvait logiquement s’y attendre, l’augmentation des fréquences excédentes due à la hausse du paramètre z se retrouve également dans les variations des taux purs.

L’ensemble de ces analyses, menées successivement sur un registre graphique puis mathématique, permettent d’aboutir en conclusion au constat suivant : malgré la présence d’une base « commune » à tous les z , provenant du premier élément de la formule de calcul, à savoir le calcul des λ_{PTF_j} , les variations de ce paramètre z provoquent un impact non négligeable sur le calcul de la probabilité. Cet impact se répercute directement dans le calcul des fréquences excédentes de notre table.

L’impact d’une variation du paramètre z sur nos taux purs ayant été étudié, consacrons-nous maintenant à l’étude de l’intervalle réel de variations des taux relatifs à l’affaire traitée.

5.2.2 Étude de la sensibilité de notre taux résultant du choix des bornes de calcul de la SCE

Nous allons tout d’abord faire varier les bornes utilisées pour le calcul de la SCE afin d’en mesurer l’impact sur le paramètre z . Pour rappel, il avait été préconisé de prendre les bornes $[X_{(1)}, T_X]$ pour les raisons évoquées dans la partie 4.1.3 *Recalibrage du paramètre*.

Le seuil minimal $X_{(1)}$ permet de capter les plus faibles sinistres disponibles, et généralement les plus fréquents, constituant ainsi une base de départ solide. Par conséquent, un tel choix n’est pas réellement remis en question, contrairement à celui de T_X , pouvant être qualifié de moins évident, et de plus subjectif.

Ci-dessous le tableau présentant les paramètres z obtenus ainsi que les taux purs correspondants, suite aux variations du seuil des extrêmes considéré T_X :

Variation seuil	z	T1	T2	T3	T4	T5	global
-20%	0,301	1,151%	0,598%	0,102%	0,040%	0,013%	1,904%
	52%	11%	33%	69%	102%	33%	20%
-10%	0,288	1,128%	0,584%	0,095%	0,039%	0,015%	1,861%
	46%	8%	30%	59%	97%	51%	18%
10%	0,142	0,966%	0,368%	0,049%	0,017%	0,006%	1,407%
	-28%	-7%	-18%	-18%	-16%	-37%	-11%
20%	0,130	0,961%	0,365%	0,045%	0,017%	0,006%	1,394%
	-34%	-8%	-19%	-26%	-18%	-36%	-12%

FIGURE 31 – Taux purs calculés à partir de différents paramètres z suite à la variation des bornes de calcul de la SCE

Les valeurs figurant en bleu dans le tableau indiquent les variations par rapport aux valeurs obtenues initialement (pour le paramètre $z^* = 0,198$, obtenue à partir de T_X).

Tout d'abord, relevons que quel que soit le sens de variation considéré, plus on s'éloigne du seuil initial T_S , plus les variations qui en résultent sont élevées (légère exception pour T_5 mais ces variations sont moins significatives vu le très faible taux de cette tranche).

Considérons à présent les répercussions relatives au sens de variation de T_X . Concernant le taux global, correspondant à la somme des taux purs de chaque tranche, une diminution de 10 % de T_X entraîne une augmentation de 18 % du taux global, alors même qu'une augmentation équivalente aboutit à une diminution de seulement 11%. Le même constat émerge pour une variation de 20 % du seuil : on observe 20 % d'augmentation du taux global pour une diminution du seuil, contre 12 % de diminution pour une augmentation du seuil. Ces analyses permettent d'affirmer que les variations des taux consécutives à une diminution de T_X vont être dans l'ensemble comparativement plus marquées que lors de l'augmentation d'une même proportion de ce seuil. Cela peut s'expliquer par le fait qu'une diminution du seuil T_X entraîne un calcul du SCE qui va se baser sur un plus petit intervalle, se référant ainsi à un nombre de sinistres plus faible. La diminution de l'intervalle contribue à l'augmentation de la volatilité du paramètre, en raison de la quantité de plus en plus faible de données sur lesquelles la SCE s'appuie.

5.2.3 Conclusion quant au choix de T_X

Ces différents tests et analyses mettent en relief l'importance du rôle des données sur lesquelles nous effectuons le calcul de la SCE. Il est indispensable d'établir un niveau de confiance élevé dans ces données, en considérant à la fois un seuil des extrêmes T_X pertinent tout en cherchant à garder un nombre de sinistres suffisamment conséquent pour la constitution d'une base stable et cohérente.

6 Conclusion

L'étude réalisée dans ce mémoire a permis de concevoir une méthode de tarification adaptée aux portefeuilles de responsabilité civile générale, et dont la mise en pratique dans une affaire concrète a généré des résultats se rapprochant des données marché. Une généralisation à d'autres affaires du marché Asie a ensuite été tentée, et a confirmé ce premier constat.

Bien que son utilisation nécessite également un apport de données par expérience, cette méthode présente plusieurs avantages, dont celui de pallier au mauvais ajustement des données que peuvent susciter les méthodes par expérience. Ce constat est d'autant plus vrai dans le cas de notre périmètre de responsabilité civile générale, présentant des tranches particulièrement élevées, ce qui augmente la probabilité d'être confronté à des tranches non travaillantes et de complexifier alors la tarification sur expérience. Un autre avantage de notre méthode est l'ajout, lors de la tarification, de l'information du profil de risques du portefeuille, élément jusque-là laissé de côté.

Il serait intéressant d'effectuer la même étude en discernant les différents types de responsabilité civile générale. En effet, il est probable qu'on puisse relever des différences significatives de sinistralité selon le volet de responsabilité civile d'entreprise considéré. Opérer une telle différenciation pourrait permettre de mieux s'adapter au comportement du risque auquel est soumis notre portefeuille. Néanmoins, une telle étude nécessiterait de disposer d'un apport d'informations encore plus conséquent que précédemment : cela requerrait une distinction, non seulement des sinistres, mais aussi des profils de risques, selon les différents types de responsabilité civile générale. Malgré cette exigence de taille, cela reste une piste forte intéressante à exploiter dans la continuité du travail présenté dans ce mémoire.

Références

- [1] El Madhi Belhoudji. Tarification des traités en excédant de sinistres de la branche responsabilité civile : une approche entre expérience et exposition. *Mémoire*, 2014.
- [2] Stefan Bernegger. The swiss re exposure curves and the mbbefd distribution class. 1997.
- [3] Thomas Boyet. La modélisation de la responsabilité civile générale par des courbes d'exposition. *Mémoire*, 2010.
- [4] CCR. <https://www.ccr.fr/l-entreprise-ccr>.
- [5] Christine Finas. Les tarifs des réassureurs sont-ils crédibles ? *Mémoire*, 2015.
- [6] Tony Wang Jeremy Waite, Jurgen Gaiser-Porter. Casualty reinsurance exposure rating - moving into the stochastic realm. 2003.
- [7] MAAA CPCU Joseph M. Palmer, FCAS. Increased limits ratemaking for liability insurance. 2006.
- [8] Pietro Parodi. Pricing in general insurance. 2015.
- [9] Ulrich Riegel. Generalizations of common ilf models. 2008.
- [10] Andreas Schwepcke. Reinsurance : Principles and state of the art - a guidebook for home learners. 2004.
- [11] Michael Fackler Thomas Mack. Exposure rating in liability reinsurance. 2003.
- [12] Verisk. <https://www.verisk.com/siteassets/media/downloads/demystifying-the-origins-and-applications-of-original-loss-curves-.pdf>.

Table des figures

1	Comparaison du taux commercial par tranche selon les différentes méthodes	5
2	Comparison of commercial rate per layer by different methods	8
3	Comparaison de la répartition du chiffre d'affaire de CCR Re en 2020 et 2021	14
4	Exemple d'une couverture de réassurance quote-part cédé à 30 %	16
5	Exemple d'une couverture de réassurance excédent de plein pour $R = 2$ et $C = 6$ (millions d'euros)	17
6	Exemple d'une couverture de réassurance en excédent de sinistres par risques composé de deux tranches	19
7	Exemple d'une couverture de réassurance en excédent de sinistres par événement à une tranche	20
8	Processus de la réassurance	24
9	Étapes de mise en AS-IF	30
10	Schéma récapitulatif du fonctionnement de la méthode du Burning Cost	32
11	Schéma récapitulatif du fonctionnement de la méthode coût-fréquence	34
12	Représentation graphique de la sous-famille MBBEFD pour différents c	39
13	Schéma récapitulatif du fonctionnement de la méthode sur exposition	40
14	Exemple d'une courbe ILF	42
15	Représentation des limites d'indemnité de différents risques par rapport à la structure d'un traité	48
16	Tableau récapitulatif des méthodes d'obtention d'une courbe ILF	55
17	Récapitulatif des seuils utilisés	65
18	Schéma récapitulatif de la démarche (vision portefeuille)	67
19	Évolution des primes historiques et AS-IF de la cédante X	69
20	Représentation par année de survenance de la sévérité AS-IF des sinistres en fonction de la structure du traité	70
21	Schéma récapitulatif de la démarche suite à l'introduction de la première clé	81
22	Exemple de survenance de deux sinistres	83
23	Représentation de la décomposition de λ_{PTF} par les $\lambda_{PTF} = \sum_{j=1}^T \lambda_{[PL_{j-1}; PL_j]}$	84
24	Schéma récapitulatif de l'approche finale adoptée	87
25	Comparaison du taux commercial par tranche selon les différentes méthodes	88
26	Diagramme Q-Q comparant la distribution empirique et la distribution z initial	90
27	Diagramme Q-Q comparant la distribution empirique et la distribution z^*	91
28	Comparaison des différentes fréquences excédentes obtenues	92

29	Fréquences excédentes calculées à partir de différents paramètres z	98
30	Taux purs calculés à partir de différents paramètres z	99
31	Taux purs calculés à partir de différents paramètres z suite à la variation des bornes de calcul de la SCE	100
32	Graphique Mean Excess Plot	110
33	Comparaison du taux commercial par tranche pour l'affaire 1	112
34	Comparaison du taux commercial par tranche pour l'affaire 2	112
35	Comparaison du taux commercial par tranche pour l'affaire 3	113

Liste des tableaux

1	Exemple d'un profil de risques	27
2	Exemple de table ILF	47
3	Exemple d'une EFT	58
4	Étape du recalibrage du paramètre z	63
5	Exemple d'un YLT	65
6	Taux de prime pure obtenu par tranche par la méthode du Burning Cost	71
7	Taux de prime pure obtenu par tranche par le modèle fréquence-coût	71
8	Comparaison des taux de prime commerciale du leader et de CCR Re (via modèle fréquence-coût)	72
9	Taux de prime pure obtenu par tranche par l'approche développée (z_1^*)	74
10	Visualisation des T_j à travers les T_j du profil de risques	77
11	Visualisation du calcul des T_j suite à l'application de la première clé de répartition	80
12	Profil de risques du portefeuille de RCG de la cédante X	82
13	Taux de prime pure obtenu par tranche via l'approche développée (comparaison z_1^* et z_2^*)	82
14	Taux de prime pure obtenu par tranche via l'approche développée (z_3^*)	88
15	Comparaison de quantiles des distributions obtenues empiriquement et par z initial	90
16	Comparaison de quantiles des distributions obtenues empiriquement et par z^*	91
17	Sorties obtenues suite au test de K-S	92
18	Comparaison des quantiles des distributions obtenues pour $z = 0.1$ et 0.9	99

Annexes

La loi de Pareto

La formule suivante est utilisée pour obtenir la forme de la courbe ILF :

$$\mathbb{E}[\min(X; y)] = \int_0^y x.f(x)dx + y[1 - F(y)]$$

En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\min(X; y)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \min(x, y)f(x)dx = \int_0^y \min(x, y)f(x)dx + \int_y^{+\infty} \min(x, y)f(x)dx \\ &= \int_0^y xf(x)dx + \int_y^{+\infty} yf(x)dx = \int_0^y xf(x)dx + y(1 - F(y))\end{aligned}$$

Concernant l'estimation des paramètres, soit X une variable aléatoire suivant une loi de Pareto de paramètre t et α , avec $x \geq t > 0$ (paramètre de location), et $\alpha > 0$ (paramètre de forme).

La densité de la loi de Pareto est définie par :

$$f(x) = \frac{\alpha t^\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

La fonction de répartition de la loi de Pareto est donnée par :

$$F(x) = 1 - \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha$$

L'espérance et la variance d'une telle loi est :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha t}{\alpha - 1} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}[X] = \left(\frac{t}{\alpha - 1}\right)^2 \frac{\alpha}{\alpha - 2}$$

Pour déterminer le paramètre t d'une telle loi, la méthode du maximum de vraisemblance peut être utilisée. Pour un n -uplet de réels positifs (x_1, \dots, x_n) , la fonction de vraisemblance sera la suivante :

$$\mathbb{L}(x_1, \dots, x_n, t) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha t^\alpha}{x_i^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{[t, \infty)}(x_i) = \alpha^n t^{\alpha n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{[t, \infty)}(x_i)$$

Nous devons donc absolument avoir :

$$t \leq x_i < \infty \iff t \leq \min_i(x_i)$$

Étant donné que $\alpha^n t^{\alpha n}$ est une fonction croissante de t , alors la fonction de vraisemblance va

atteindre son maximum lorsque : $\hat{t}_{MV} = \min_i(x_i)$.

Concernant α , sa fonction de vraisemblance sera la suivante :

$$\mathbb{L}(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha t^\alpha}{x_i^{\alpha+1}} = \alpha^n t^{\alpha n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i^{\alpha+1}}$$

La log-vraisemblance est alors :

$$\log(\mathbb{L}(x_1, \dots, x_n, \alpha)) = n \log(\alpha) + \alpha n \log(t) - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i)$$

En dérivant par rapport à α :

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L}(x_1, \dots, x_n, \alpha))}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n \log(t) - \sum_{i=1}^n \log(x_i)$$

Et va s'annuler pour :

$$\frac{n}{\alpha} = \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{x_i}{t}\right) \iff \hat{\alpha}_{MV} = \frac{n}{\sum_{j=1}^n \log\left(\frac{x_j}{t}\right)}$$

Sa dérivé seconde étant négative strictement ($-\frac{n}{\alpha^2}$), la valeur de $\alpha_{\hat{MV}}$ est bien un maximum.

La loi Exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre θ avec $\theta > 0$.

La densité de la loi exponentielle est définie par :

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}$$

La fonction de répartition de la loi exponentielle est donnée par :

$$F(x) = 1 - e^{-\theta x}$$

L'espérance et la variance d'une telle loi est :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\theta} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}[X] = \frac{1}{\theta^2}$$

Pour déterminer le paramètre θ d'une telle loi, la méthode du maximum de vraisemblance peut être utilisée. Pour un n -uplet de réels positifs (x_1, \dots, x_n) , la fonction de vraisemblance sera la suivante :

$$\mathbb{L}(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i}$$

La log-vraisemblance est alors :

$$\log(\mathbb{L}(x_1, \dots, x_n, \theta)) = n \log(\theta) - \theta \sum_{i=1}^n x_i$$

En dérivant par rapport à θ :

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L}(x_1, \dots, x_n, \theta))}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i$$

Et va s'annuler pour : $\theta_{MV}^{\hat{}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$.

Sa dérivée seconde étant négative strictement ($-\frac{n}{\theta^2}$), la valeur de $\theta_{MV}^{\hat{}}$ est bien un maximum.

Étape de minimisation de la SCE

Le solveur d'excel est une fonctionnalité qui permet de trouver une valeur optimale (maximale ou minimale) pour une formule dans une seule cellule : la cellule objectif. Nous souhaitons minimiser la SCE, qui sera donc notre cellule objectif, en faisant varier la cellule contenant le paramètre z . Des contraintes / limites peuvent être appliquées lors de cette étape : il est nécessaire d'y indiquer les valeurs entre lesquelles notre z doit être compris, à savoir $0 < z < 1$.

Différentes méthodes peuvent être utilisées par le solveur. Notre cas relevant de contraintes non linéaires, la méthode du G.R.G (*Generalized Reduced Gradient* en anglais) est tout à fait adaptée.

Mean Excess Plot

Le graphique des excès moyens - *Mean Excess Plot* - est l'outil le plus utilisé pour choisir un seuil des valeurs extrêmes.

Soit X une variable aléatoire. On définit alors la fonction des excès moyens par :

$$e(u) = \mathbb{E}[X - u | X > u]$$

Le principe d'un tel graphique est de tracer les points $(X_{k,n}, e_n(X_{k,n}))$, où $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ sont les statistiques d'ordres des $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, et $e_n(u)$ la fonction empirique des excès moyens.

Le *Mean Excess Plot* obtenu pour le cas de notre affaire se présente sous la forme suivante :

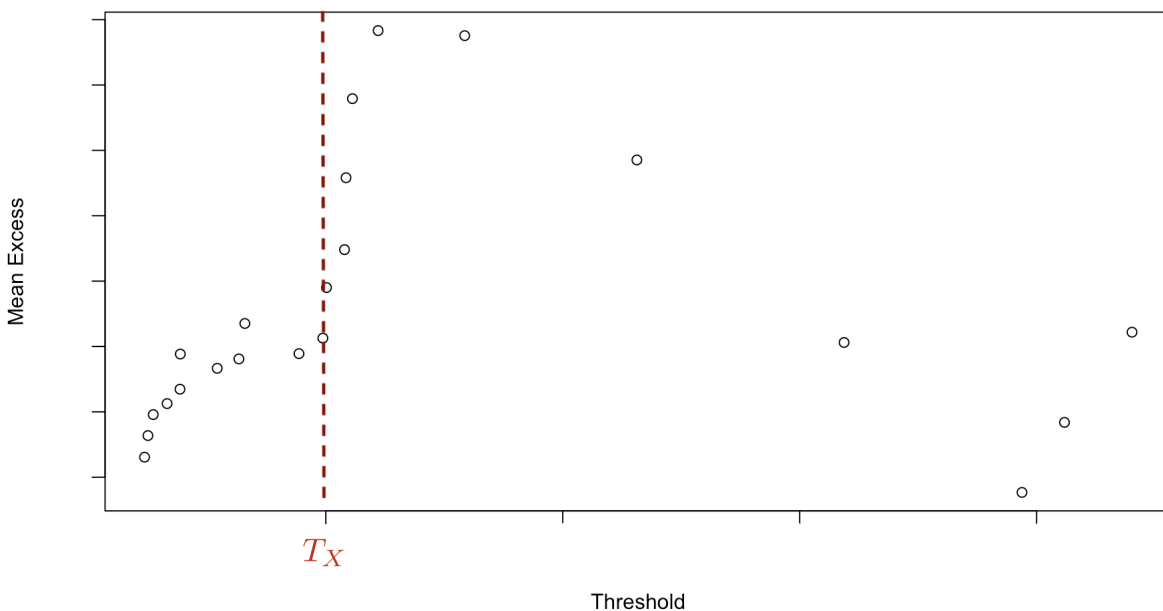


FIGURE 32 – Graphique Mean Excess Plot

Graphiquement parlant, cela revient à choisir le seuil approximatif à partir duquel la fonction semble se stabiliser et devient similaire à une fonction linéaire.

Encadrement de la formule de probabilité utilisée

Il s'agit ici de développer plus en profondeur un point abordé dans notre mémoire, qui est l'encadrement de notre probabilité $\mathbb{P}(\min(X, PL_j) > y | \min(X, PL_j) > T_S)$ par rapport à notre paramètre z . Pour rappel, on a :

$$\mathbb{P}(\min(X, PL_j) > y | \min(X, PL_j) > T_S) = \begin{cases} \left(\frac{y}{T_S}\right)^{\log(1+z,2)-1} & \text{si } y \leq PL_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sachant que $z \in]0, 1[$, on a :

$$0 < z < 1 \iff 0 < \log(1+z) < \log(2) \iff -1 < \frac{\log(1+z)}{\log(2)} - 1 < 0$$

Alors, avec $\frac{y}{T_S} > 1$:

$$\left(\frac{y}{T_S}\right)^{-1} < \left(\frac{y}{T_S}\right)^{\log(1+z,2)-1} < \left(\frac{y}{T_S}\right)^0$$

D'où l'aboutissement à la relation :

$$0 < \left(\frac{y}{T_S}\right)^{\log(1+z^-,2)-1} \leq \left(\frac{y}{T_S}\right)^{\log(1+z,2)-1} \leq \left(\frac{y}{T_S}\right)^{\log(1+z^+,2)-1} < 1$$

avec z^- la valeur minimale que peut être amené à prendre le z ($z^- \rightarrow 0^+$), et z^+ la valeur maximale ($z^+ \rightarrow 1^-$).

Généralisation de notre approche à d'autres affaires

Les graphiques ci-dessous présentent les taux commerciaux obtenus suite à l'application de notre approche sur trois affaires du marché Asie, accompagnés des taux leaders relatifs à l'affaire concernée :

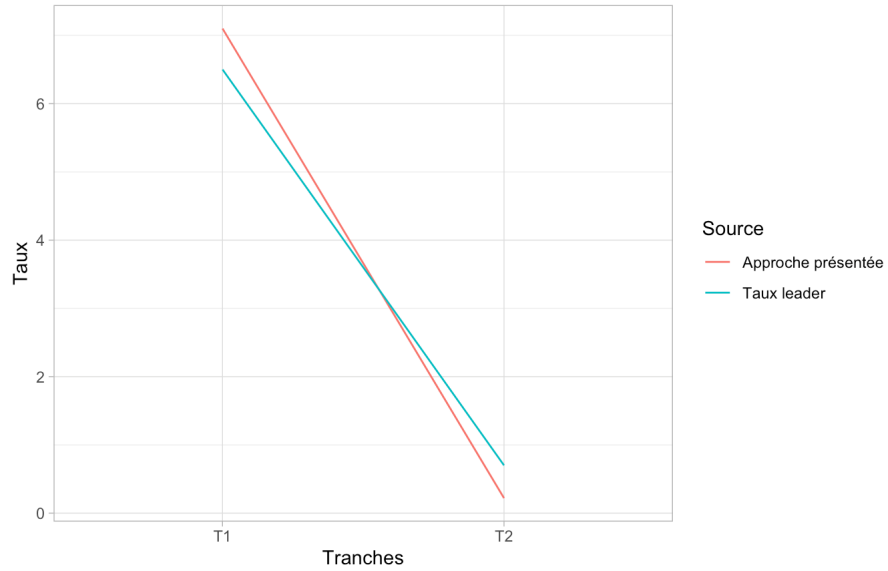


FIGURE 33 – Comparaison du taux commercial par tranche pour l'affaire 1

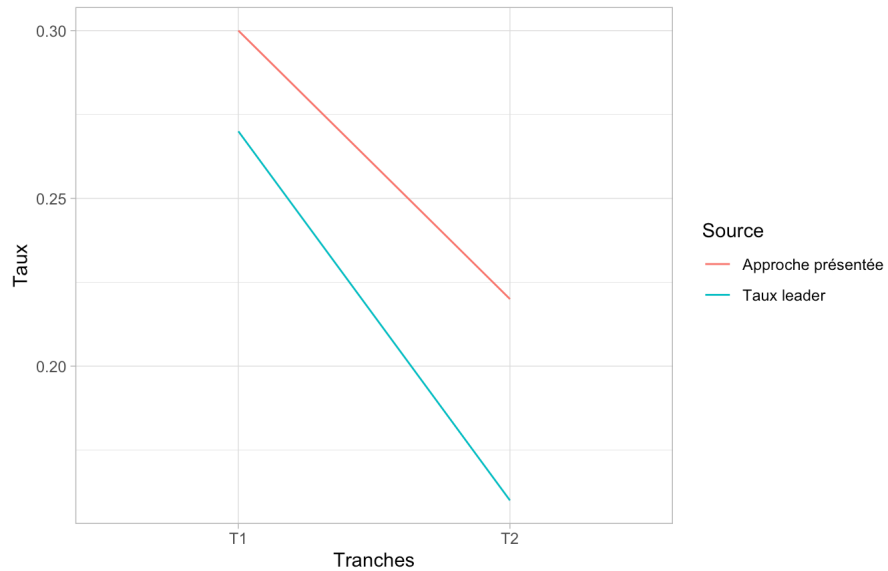


FIGURE 34 – Comparaison du taux commercial par tranche pour l'affaire 2

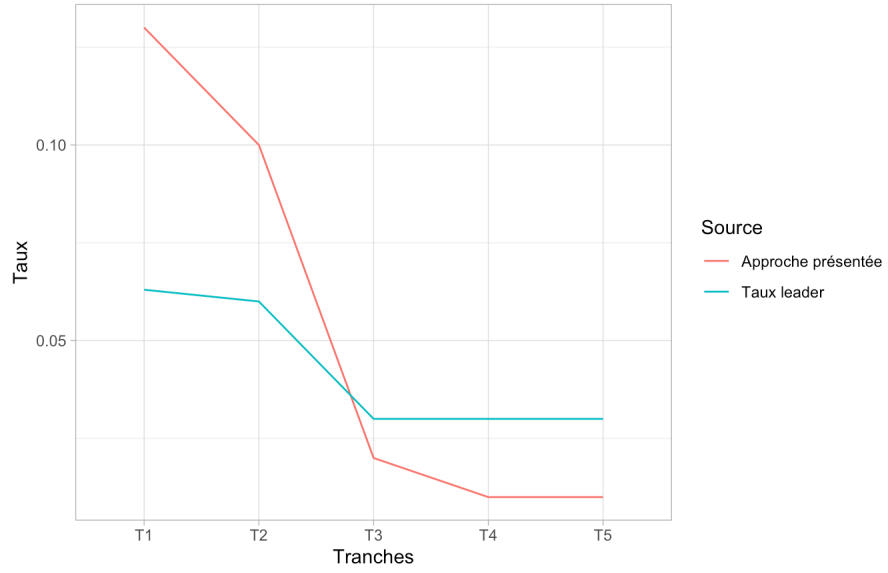


FIGURE 35 – Comparaison du taux commercial par tranche pour l’affaire 3