

**Mémoire présenté le :
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuares**

Par : Mr. LHIOUI ANAS

Titre du mémoire : *Adaptation Market-Consistent de la matrice de corrélation d'un Générateur de Scénarios Economiques risque-neutre sous la réglementation Solvabilité II*

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de la filière :

Signature :

Entreprise :

Nom : Sogecap

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise

Membres présents du jury de l'Institut des Actuares :

Signature :

Nom : Daller Thomas

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :



Signature du candidat :



Résumé

Dans le cadre de la réglementation Solvabilité II, la valorisation du bilan Actif-Passif d'une compagnie d'assurance vie est faite de manière Market-Consistent. Les options et garanties incluses dans les polices d'assurance donnent naissance à des interactions Actif-Passif nécessitant une évaluation stochastique pour calcul du *Best Estimate*. Ainsi, la compagnie d'assurance utilise le Générateur de Scénarios Economiques (GSE) pour évaluer le coût de ces options et garanties.

Dans un premier temps, nous introduirons l'environnement du GSE risque-neutre de Moody's, la théorie mathématique et financière des différents processus de diffusions utilisés par le GSE pour projeter les scénarios économiques des indices financiers modélisant le portefeuille des actifs de la compagnie d'assurance.

En deuxième partie, nous présenterons la matrice de corrélation dite de «Marché» entre les différents indices financiers. Cette matrice, appelée aussi matrice « Cible », est calculée sur la base de l'historique dont dispose la compagnie d'assurance et à laquelle nous viserons à tendre en moyenne lors de la projection des indices financiers moyennant le GSE risque-neutre Moody's. En insérant la matrice de corrélation de marché à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's, nous ne sommes malheureusement pas Market-Consistent dans le sens où nous n'obtenons pas à la sortie dudit GSE et en moyenne la même matrice de corrélation que celle du marché. Il est alors intéressant que nous calibrons en amont les coefficients de corrélation entre les différents vecteurs browniens guidant les différents processus de diffusion stochastique des indices financiers à l'entrée dudit GSE. Or, la relation n'est pas directe entre la matrice de corrélation des vecteurs browniens et celle simulée en moyenne lors de la projection des indices financiers. Ainsi, nous mettrons en exergue une approche linéaire de la relation entre les deux matrices pour que la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's soit la plus proche possible de la matrice de corrélation cible.

En troisième partie, nos travaux vont porter sur l'évaluation de la qualité de la table des scénarios économiques suite à l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation à l'entrée dudit GSE. Nous reconduirons le test de martingalité des différents indices financiers et le test Market-Consistent des volatilités implicites des instruments financiers utilisés par la compagnie d'assurance. Finalement, nous quantifierons l'impact de notre démarche d'optimisation sur les différents indicateurs Solvabilité II (Fonds propres disponibles et éligibles, Best-Estimate, SCR, ratio de couverture du SCR) en scénario central et après stress des conditions de marchés (courbe des taux solvabilité II, prix Action).

Mots clés : *Solvabilité II, Best-Estimate, SCR, Générateur de scénarios économiques, Market-Consistency, Univers risque-neutre, LMM+, SVJD, Black & Scholes, Simulation de Monté-Carlo, Test de martingalité et market-consistency, Matrice de Corrélation, Algorithme de HIGHAM, Décomposition de Cholesky, Régression linéaire, Programme SQLP.*

Abstract

Within the framework of Solvency II regulation, the valuation of a life insurance company's Asset-Liability balance sheet is done in a market-consistent manner. The options and guarantees included in the insurance policies give rise to Asset-Liability interactions requiring a stochastic valuation of the Best Estimate. Thus, the insurance company uses the Economic Scenario Generator (ESG) to evaluate the cost of these options and guarantees

First, we will introduce the environment of Moody's risk-neutral ESG, the mathematical and financial theory of different diffusion processes used by ESG to project the economic scenarios of the financial indices modeling the insurance company's asset portfolio.

In the second part, we will present a matrix called "Market" correlation matrix used to correlate the different financial indices. This matrix, also called the "Target" matrix, is calculated on the basis of the historical data available to the insurance company and which at the average we aim to tend by projecting the previous financial indices through Moody's risk-neutral ESG. By putting the market correlation matrix at the entry of the Moody's risk-neutral ESG, we are unfortunately not Market-Consistent as we do not obtain at the exit of the ESG and on average the same correlation matrix. So, it is interesting that we calibrate upstream correlation coefficients between the different Brownian vectors guiding the different stochastic diffusion processes of the financial indices. However, the relationship is not straightforward between the Brownian correlation matrix and the one simulated on average all along the projection span of financial indices. Thus, we will emphasize a linear approach of relationship between the two matrices so that the correlation matrix simulated on average by Moody's risk-neutral ESG is as close as possible to the target correlation matrix.

In the third part, we will evaluate the quality of economic scenario table after optimizing Market-Consistently correlation matrix between Brownian vectors at the entrance of ESG. To do so, we will apply martingality test of different financial indices and Market-Consistent test of implied volatilities regarding financial instruments used by the insurance company. Finally, we will quantify the impact of our optimization approach on the different Solvency II indicators (Available and eligible capital, Best-Estimate, SCR, SCR coverage ratio) in a central scenario and after stressing the market conditions (Solvency II yield curve, stock price).

Keywords : *Solvency II, Best-Estimate, Solvency Capital Requirement, Economic Scenario Generator, Market-Consistency, Risk-Neutral Universe, LMM+, SVJD, Black & Scholes, Monte-Carlo Simulation, Martingality & Market-Consistency Test, Correlation Matrix, HIGHAM Algorithm, Decomposition of Cholesky, Linear Regression, SQLP Programm.*

Note de Synthèse

Le Générateur de Scénarios Economiques (GSE) est un modèle structurel économique à plusieurs périodes fondé sur des hypothèses économiques notamment la structure de dépendance clé entre les différents indices observée réellement. Concrètement et pour une évaluation Market-Consistent, le GSE risque-neutre Moody's utilise à l'entrée une structure de dépendance linéaire (matrice de corrélation) entre les différents vecteurs browniens guidant les différents indices financiers (Action, taux, immobilier...).

Partie I du mémoire :

La matrice de la corrélation entre les différents rendements des indices financiers de Marché serait notre cible à laquelle nous voudrions tendre en moyenne lors de la projection des scénarios économiques. Son calcul est basé dans notre étude sur un historique de 5 ans donné par Bloomberg et qui se présente comme suit :

$$\begin{array}{l}
 \text{CAC40} \\
 \text{Euro50} \\
 \text{Immo} \\
 \text{HF} \\
 \text{PE} \\
 \text{Tx-nom-cT} \\
 \text{Tx-reel-cT}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 \text{CAC40} & \text{Euro50} & \text{Immo} & \text{HF} & \text{PE} & \text{Tx-nom-cT} & \text{Tx-reel-cT} \\
 \left(\begin{array}{cccccccc}
 1 & 0.980 & 0.298 & 0.761 & 0.505 & -0.126 & -0.061 \\
 0.980 & 1 & 0.310 & 0.768 & 0.444 & -0.124 & -0.050 \\
 0.298 & 0.310 & 1 & 0.291 & 0.139 & -0.307 & 0.106 \\
 0.761 & 0.768 & 0.291 & 1 & 0.722 & -0.327 & 0.056 \\
 0.505 & 0.444 & 0.139 & 0.722 & 1 & 0.455 & -0.373 \\
 -0.126 & -0.124 & -0.307 & -0.327 & 0.455 & 1 & -0.183 \\
 -0.061 & -0.05 & 0.106 & 0.056 & -0.373 & -0.183 & 1
 \end{array} \right)
 \end{pmatrix}$$

Avec :

- HF : Hedge Fund.
- PE : Private Equity.
- Tx-nom-cT : Taux nominal à court terme.
- Tx-reel-cT : Taux réel à court terme.

Dans notre étude, l'information de la dépendance est portée par le vecteur dW_t avec W est le mouvement brownien multidimensionnel utilisé dans la dynamique des différents indices financiers.

$$\Sigma_2 dt = \begin{array}{l}
 dW_1^{\text{CAC40}} \\
 dW_2^{\text{Euro50}} \\
 dW_3^{\text{Immo}} \\
 dW_4^{\text{HF}} \\
 dW_5^{\text{PE}} \\
 dW_6^{\text{Tx-nom-cT}} \\
 dW_7^{\text{Tx-reel-cT}}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 dW_1^{\text{CAC40}} & dW_2^{\text{Euro50}} & dW_3^{\text{Immo}} & dW_4^{\text{HF}} & dW_5^{\text{PE}} & dW_6^{\text{Tx-nom-cT}} & dW_7^{\text{Tx-reel-cT}} \\
 \left(\begin{array}{cccccccc}
 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{15} & \rho_{16} & \rho_{17} \\
 \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{25} & \rho_{26} & \rho_{27} \\
 \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} & \rho_{35} & \rho_{36} & \rho_{37} \\
 \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 & \rho_{45} & \rho_{46} & \rho_{47} \\
 \rho_{51} & \rho_{52} & \rho_{53} & \rho_{54} & 1 & \rho_{56} & \rho_{57} \\
 \rho_{61} & \rho_{62} & \rho_{63} & \rho_{64} & \rho_{65} & 1 & \rho_{67} \\
 \rho_{71} & \rho_{72} & \rho_{73} & \rho_{74} & \rho_{75} & \rho_{76} & 1
 \end{array} \right) dt
 \end{pmatrix}$$

Une méthode simpliste est d'assimiler la matrice de corrélation des vecteurs browniens ci-haut, qui est à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's, à la matrice de corrélation cible desdits indices. Sous cette hypothèse, nous retrouvons une nouvelle matrice de corrélation simulée entre les rendements des indices financiers et calculée comme une moyenne sur tout l'horizon de projection (**30 ans**) et ce pour **1000** itérations. Notre matrice simulée, présentée ci-dessous, s'écarte de la matrice de corrélation de marché qui est notre cible :

	CAC40	Euro50	Immo	HF	PE	Tx-nom-cT	Tx-reel-cT
CAC40	1	0.907	0.210	0.537	0.353	0.027	-0.001
Euro50	0.907	1	0.220	0.536	0.332	0.025	0.001
Immo	0.210	0.220	1	0.318	0.160	0.140	0.057
HF	0.537	0.536	0.318	1	0.678	0.113	0.040
PE	0.353	0.332	0.160	0.678	1	0.173	-0.019
Tx-nom-cT	0.027	0.025	0.140	0.113	0.173	1	0.217
Tx-reel-cT	-0.001	0.001	0.057	0.040	-0.019	0.217	1

Partie II du mémoire :

L'objectif est d'optimiser la matrice de corrélation entre les vecteurs browniens pour faire en sorte que la matrice simulée par le GSE soit la plus proche possible de la matrice de corrélation cible. Les approches développées tout au long de ce mémoire ont été diverses pour assurer une adaptation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens. Nous retiendrons à la fin la méthode d'approximation linéaire corrigée appelée "**hybride**" qui nous rapprochera le plus de la matrice cible. Il est à noter que la relation n'est pas directe car il faut traduire la matrice de corrélation cible issue de l'univers historique à une matrice de corrélation entre vecteurs browniens, qui est à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's.

Grâce à l'approximation linéaire, nous nous attendons qu'en moyenne, l'optimisation permettra à notre matrice de corrélation simulée entre rendements des indices d'atteindre la matrice cible. Dans le cadre de la réglementation Solvabilité II, nous projetons nos flux Actif-Passif en run-off sur un horizon de **30 ans**. Nous analyserons en moyenne les résultats d'optimisation sur cet horizon de projection.

Après optimisation puis transformation en une matrice semi-définie positive (PSD) de la matrice de corrélation à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's moyennant l'Algorithme de HIGHAM, la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's obtenue sur l'horizon de projection se présente comme suit :

	CAC40	Euro50	Immo	HF	PE	Tx-nom-cT	Tx-reel-cT
CAC40	1	0.955	0.278	0.643	0.438	0.026	-0.014
Euro50	0.955	1	0.286	0.662	0.403	0.023	-0.009
Immo	0.278	0.286	1	0.364	0.074	0.135	0.059
HF	0.643	0.662	0.364	1	0.562	0.111	-0.021
PE	0.438	0.403	0.074	0.562	1	0.175	-0.089
Tx-Nom-cT	0.023	0.135	0.111	0.175	0.455	1	0.127
Tx-reel-cT	-0.014	-0.009	0.059	-0.021	-0.089	0.127	1

Les écarts quadratiques (SE) obtenus entre les corrélations simulées en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's avant/après optimisation de la matrice de corrélation des browniens et les corrélations du marché sont comme suit :

Index	Corrélation traitée		Market(1)	Simulée avant optim.(2)	SE (((1)-(2)) ²)	Simulée après optim.(3)	SE (((1)-(3)) ²)
	Variable 1	Variable 2					
1	CAC40	Euro50	0.980	0.907	0.53%	0.955	0.06%
2	CAC40	Immo	0.298	0.210	0.77%	0.278	0.04%
3	CAC40	HF	0.761	0.537	5%	0.643	1.38%
4	CAC40	PE	0.505	0.353	2.31%	0.438	0.45%
5	CAC40	tx nom cT	-0.126	0.027	2.33%	0.026	2.30%
6	CAC40	tx réel cT	-0.061	-0.001	0.37%	-0.014	0.22%
7	Euro50	Immo	0.310	0.220	0.8%	0.286	0.06%
8	Euro50	HF	0.768	0.536	5.36%	0.662	1.13%
9	Euro50	PE	0.444	0.332	1.26%	0.403	0.17%
10	Euro50	tx nom cT	-0.124	0.025	2.20%	0.023	2.16%

11	Euro50	tx réel cT	-0.05	0.001	0.26%	-0.009	0.17%
12	Immo	HF	0.291	0.318	0.07%	0.364	0.52%
13	Immo	PE	0.139	0.160	0.05%	0.074	0.42%
14	Immo	tx nom cT	-0.307	0.140	19.92%	0.135	19.52%
15	Immo	tx réel cT	0.106	0.0057	0.24%	0.059	0.22%
16	HF	PE	0.722	0.678	0.19%	0.562	2.55%
17	HF	tx nom cT	-0.327	0.113	19.35%	0.111	19.22%
18	HF	tx réel cT	0.056	0.040	0.03%	-0.021	0.59%
19	PE	tx nom cT	0.455	0.173	7.95%	0.175	7.86%
20	PE	tx réel cT	-0.373	-0.019	12.49%	-0.089	8.06%
21	tx nom cT	tx réel cT	-0.183	0.217	15.97%	0.127	9.56%
Total	-	-	-	-	97.4%	-	64.9%

TABLE 1 – Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et celle simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's avant et après optimisation.

Nous remarquons une amélioration de presque toutes les corrélations entre les rendements des indices financiers après optimisation de la matrice de corrélation des browniens. Les écarts de corrélations qui restent importants, malgré l'optimisation, sont ceux concernant respectivement la corrélation du taux nominal à court terme avec l'indice Immobilier puis avec l'indice "Hedge Fund" avec des écarts respectifs de 19.52% et 19.22%.

Étant donné que la compagnie d'assurance est plus sensible aux actifs ayant la plus grande part dans son portefeuille notamment ceux tributaires des indices actions, Immobilier et taux, nous préconisons alors que ces corrélations, après optimisation, soient plus proches des corrélations initiales du marché, ce qui est bien vérifié comme l'illustre le tableau ci-dessus.

Partie III du mémoire :

Par ailleurs, la conversion en une matrice PSD est un sujet majeur. Nous pouvons utiliser deux types de conversion : une simpliste (HIGHAM) modifiant tous les coefficients de corrélation, une plus élaborée (outil PSD Moody's) permettant de modifier certains coefficients. Pour comprendre quels coefficients impactent le plus la compagnie d'assurance, des sensibilités ont été effectuées en choquant de -0.1 chacune des corrélations entre browniens séparément. Nous obtenons la surface de sensibilités du Best Estimate (BE) suivante :

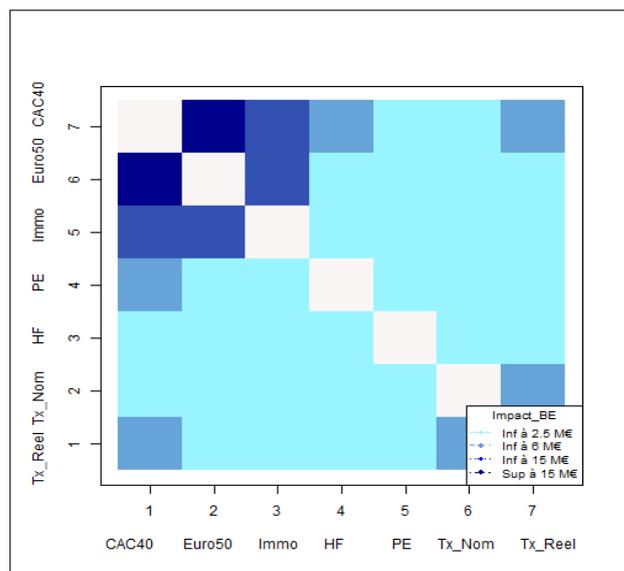


Fig. 1 – Matrice de surfaces des sensibilités du Best Estimate aux corrélations des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's (en Millions €)

Nous observons que ce sont les indices CAC40, Eurostoxx50, indice immobilier et les taux courts auxquels la compagnie d'assurance est la plus sensible avec des surfaces plus foncées comme l'illustre la figure 1. Le tableau suivant donne des résultats synthétiques en termes de somme des erreurs quadratiques (SSE) entre la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et celle du marché : après usage de l'algorithme de HIGHAM ou après usage de l'outil PSD de Moody's à l'entrée, en comparant la matrice de corrélation du Marché avec celle simulée par le GSE risque-neutre de Moody's en moyenne empirique simple ou en moyenne pondérée par poids de Provisions Mathématiques (PM), puis avant et après optimisation de la matrice de corrélation des browniens :

	Algorithme de HIGHAM				Outil PSD Moody's			
	Simul.Moyenne normale		Simul.Moyenne pondérée		Simul.Moyenne normale		Simul.Moyenne pondérée	
	Etat Actuel	Après optimisation	Etat Actuel	Après optimisation	Etat Actuel	Après optimisation	Etat Actuel	Après optimisation
SSE	97.4%	76.6%	86.6%	64.9%	97.6%	75.7%	86.8%	63.9%

TABLE 2 – Somme des écarts quadratiques (SSE) entre la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et la matrice de marché cible.

Nous remarquons que l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens a réduit la SSE entre la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et celle du marché. En pondérant par la PM, nous construisons un indicateur qui semble davantage pertinent et qui est également meilleur après optimisation. L'usage de l'outil Moody's a permis d'améliorer légèrement la SSE après optimisation comme illustré dans le tableau 2 tout en soulignant la même tendance de la SSE avec ou sans outil Moody's après optimisation. Par ailleurs, nous avons mis en place un indicateur en vision modèle ALM qui suppose une relation linéaire entre le Best Estimate et les corrélations des browniens et qui se base sur les sensibilités préalablement déduites dans la figure 1 ($BE = \sum_{1 \leq i < j \leq 7} \frac{\partial BE}{\partial Z_{i,j}} \cdot Z_{i,j}$). Suite à la conversion de la matrice de corrélation des browniens optimisée en une matrice PSD (et donc perturbation des coefficients de corrélation selon l'algorithme de Higham ou l'outil PSD de Moody's), la tendance du BE est la suivante :

	Algorithme de HIGHAM	Outil Moody's
ΔBE	4.62	-4.64

TABLE 3 – Indicateur en vision Modèle ALM suite à la conversion de la matrice de corrélation des browniens, à l'entrée du GSE risque neutre Moody's, en une matrice PSD après optimisation (en Millions €)

L'indicateur en vision Modèle ALM nous a permis de dégager une tendance intéressante du Best Estimate suite à la conversion en une matrice PSD de la matrice de corrélation des browniens : l'outil Moody's tend à baisser le Best Estimate de **4.64 M€**, soit aux alentours de **-0.004%** du Best Estimate de Sogecap (reste négligeable certes mais c'est la tendance qui nous intéresse le plus), ce qui est tout à fait une tendance opposée à celle lors de l'usage de l'algorithme de Higham.

Ainsi, l'outil Moody's prend en compte la sensibilité du Best Estimate aux coefficients de corrélation (structurants de Sogecap) entre browniens et améliore légèrement l'erreur quadratique comme illustré dans le tableau 2. Par conséquent, cette solution serait celle élue pour les étapes suivantes.

Par ailleurs et afin de veiller sur la qualité de notre table de scénarios économiques et la valider statistiquement, des tests de martingalité et de Market-Consistency sont généralement effectués et qui ne doivent pas être dégradés suite à l'optimisation de la matrice de corrélation des browniens.

En commençant par les tests de martingalité, ces derniers visent à ce que les prix projetés par le GSE risque-neutre Moody's et actualisés suivent bien une martingale ; en d'autres termes les prix du marché à $t=0$ soient inclus dans la bande de confiance de niveau 95% comme illustré dans les figures 2 et 3 ci-dessous. En prenant l'exemple des prix des obligations ZC (Zéro-Coupon), l'intervalle de confiance de niveau 95% se présente comme suit :

$$[\hat{P}_T^{ZC} \pm q_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot (\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}})],$$

tel que : \hat{P}_T^{ZC} est le prix ZC de maturité T estimé par le GSE risque-neutre Moody's comme moyenne des prix projetés des scénarios économiques et actualisés, n est le nombre de scénarios économiques, $\hat{\sigma}$ l'écart type estimé à partir des scénarios générés et $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile de la loi normale $N(0, 1)$ de niveau $1 - \frac{\alpha}{2}$.

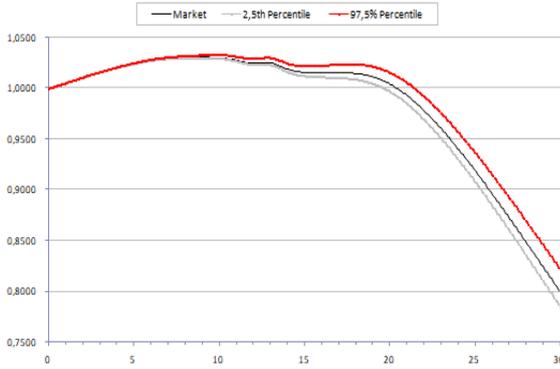


Fig. 2 – Test de martingalité du prix de l'obligation ZC à chaque maturité T avant optimisation.

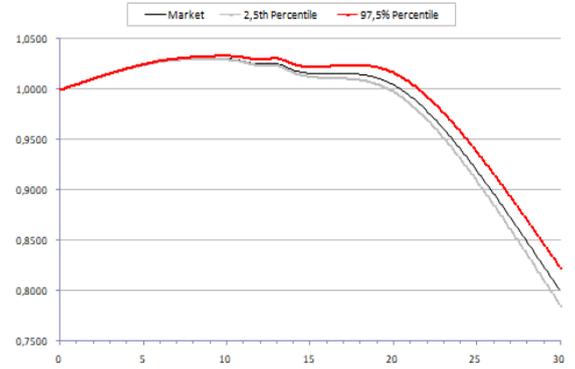


Fig. 3 – Test de martingalité du prix de l'obligation ZC à chaque maturité T après optimisation.

Nous remarquons que l'optimisation de la matrice de corrélation des browniens n'a pas d'impact sur le test de passage à la bande de confiance de niveau 95% du prix ZC . Concrètement, nous calculons les erreurs à chaque pas mensuel entre le prix de marché à $t=0$ et la moyenne des prix projetés des différents indices financiers. Une grandeur plus exhaustive serait l'erreur moyenne sur l'horizon de projection du GSE risque-neutre Moody's qui se présente comme suit :

	Obligation ZC	Obligation ZC indexée	CAC40	Euro50	Immo	HF	PE
Etat Actuel	0.18%	0.18%	0.85%	0.63%	0.05%	0.07%	0.02%
Etat optimisé (algo Higham)	0.22%	0.20%	0.86%	0.53%	0.06%	0.06%	0.03%
Etat optimisé (Outil Moody's)	0.21%	0.18%	0.91%	0.55%	0.04%	0.05%	0.03%

TABLE 4 – Erreurs Moyennes constatées des indices financiers modélisés par le GSE risque-neutre Moody's

Nous remarquons qu'il n'y a pas une forte variation des erreurs moyennes des indices financiers qui sont parfois à la hausse parfois à la baisse. Le plus grand rebond de l'erreur moyenne a été enregistré chez le CAC40 qui a augmenté de 0.06% lors de l'usage de l'outil Moody's pour convertir la matrice de corrélation des browniens optimisée à l'entrée du GSE risque neutre Moody's mais qui reste négligeable.

Le test Market-Consistency est un test de cohérence en espérance qui vise à s'assurer que les volatilités implicites des instruments dérivés projetées par le GSE risque-neutre Moody's soient en phase avec les volatilités implicites de marché. Ces instruments dérivés sont ceux sur lesquels nous calibrons nos processus de diffusion des différents indices financiers. Le tableau suivant explicite l'erreur moyenne calculée entre les volatilités implicites du marché et les volatilités implicites à la sortie du GSE risque-neutre Moody's calculées sur l'horizon de projection dudit GSE :

	Call CAC40		Call Eurostoxx50		Swaption Euro	
	ATM	Away-from-the-money	ATM	Away-from-the-money	ATM	Away-from-the-money
Etat Actuel	0.90%	1.33%	0.91%	0.89%	0.019%	0.016%
Etat optimisé (algo Higham)	0.75%	1.30%	0.85%	0.93%	0.02%	0.02%
Etat optimisé (Outil Moody's)	0.76%	1.31%	0.84%	0.95%	0.02%	0.02%

TABLE 5 – Erreurs Moyennes des volatilités implicites des instruments dérivés après projection des scénarios économiques par le GSE risque-neutre Moody's.

Nous remarquons dans le tableau 5 qu'en général nous avons une amélioration de l'erreur moyenne suite à l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's, surtout celle du Call Cac40 ATM avec un repli de 0.15 % par rapport à l'état sans optimisation. Pour appuyer notre constat, nous avons déroulé le test de passage à la bande de confiance de niveau 95% comme ce qui a été fait dans le cadre du test de martingalité. En prenant l'exemple de swaption Euro ATM de tenor 10 ans, nous obtenons le résultat suivant :

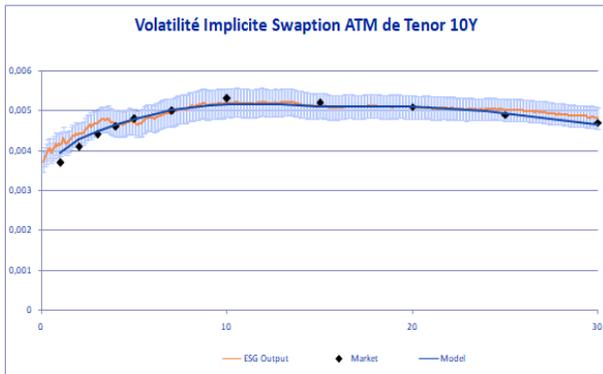


Fig. 4 – Test Market-Consistency de niveau 95% des volatilités implicites d'une Swaption Euro ATM de Tenor 10 ans avant optimisation.

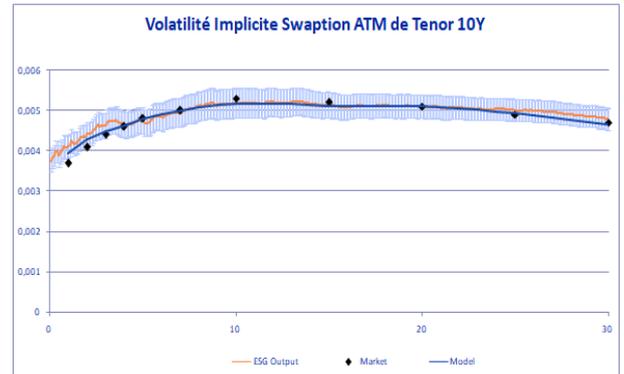


Fig. 5 – Test Market-Consistency de niveau 95% des volatilités implicites d'une Swaption Euro ATM de Tenor 10 ans après optimisation.

Nous remarquons que l'optimisation de la matrice de corrélation des browniens n'a pas d'impact sur le test de passage à la bande de confiance de niveau 95% des volatilités implicites de la swaption Euro de Tenor 10 ans et à la monnaie, ce qui rejoint le même résultat obtenu dans le cadre du test de martingalité préalablement présenté.

Afin de quantifier l'impact de l'optimisation Market-Consistent sur les résultats Solvabilité II, nous avons suivi les indicateurs suivants :

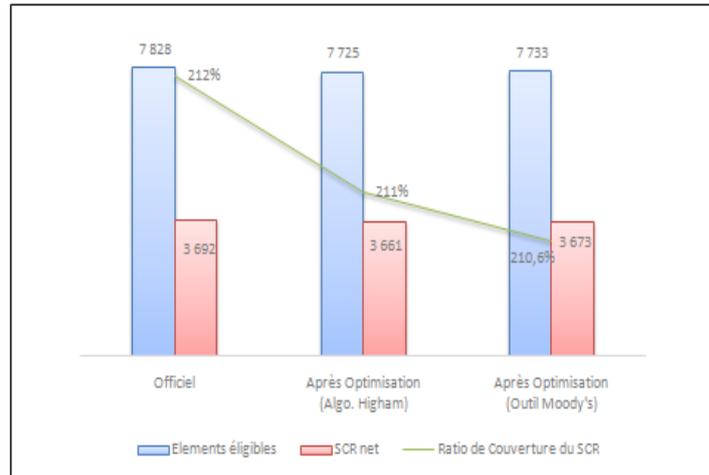


Fig. 6 – Impact de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens sur les indicateurs Solvabilité II (en Millions €)

Nous remarquons qu'il y a une baisse de 1 point du ratio de couverture du SCR après optimisation de la matrice de corrélation des browniens et de 1.4 points si nous utilisons l'outil Moody's, ce qui reste tolérable par la compagnie d'assurance. Nous avons une baisse simultanée des éléments éligibles (avec plus d'ampleur) et du SCR comme illustré dans la figure 6.

Nous expliquons la baisse des éléments éligibles par le recul des marges futures de 0.07% du BE après optimisation. L'analyse des 1000 scénarios stochastiques après optimisation, ressort une légère hausse des scénarios extrêmes négatifs des NAV (Actif net réévalué ou marges futures) et donc un léger repli de la masse de scénarios de NAV positives comme l'illustre la densité de la NAV suivante :

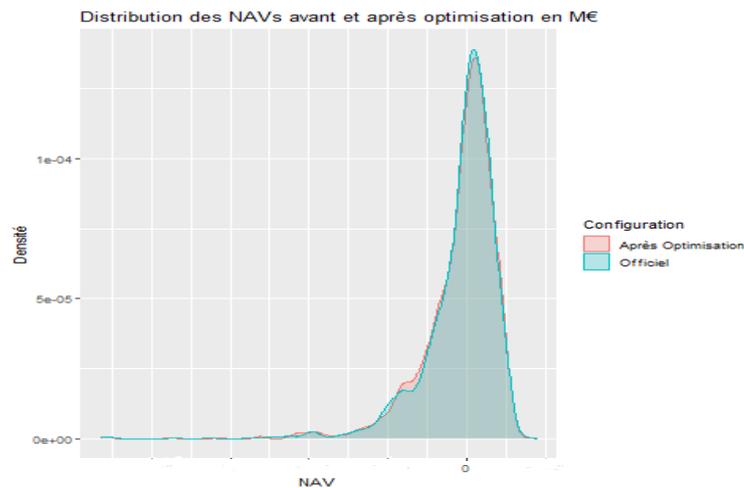


Fig. 7 – Distribution de la NAV avant et après optimisation

Cette tendance est expliquée par une légère perturbation des scénarios économiques qui a fait apparaître un peu plus de scénarios extrêmes dégradés des prix des indices financiers projetés comme illustré dans les figures 8 et 9 (l'intervalle des prix $[0,1]$), et a légèrement augmenté la volatilité desdits scénarios comme illustré dans la figure 7. Nous avons pris comme exemple d'analyse, avant et après optimisation, les indices financiers : CAC40, Eurostoxx50 vu leur part importante représentée dans l'actif de la compagnie d'assurance :

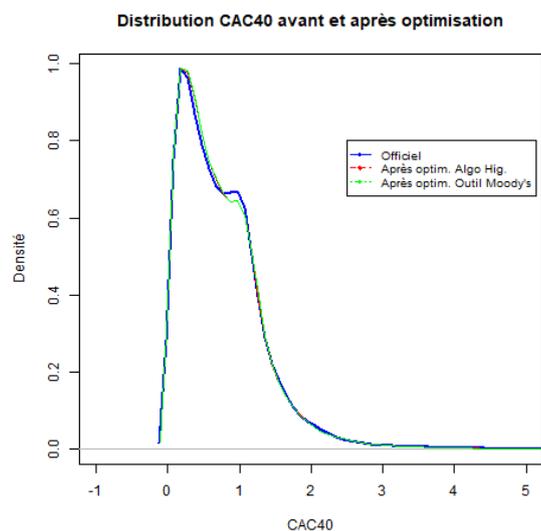


Fig. 8 – Distribution des scénarios économiques de l'indice CAC40 avant et après optimisation

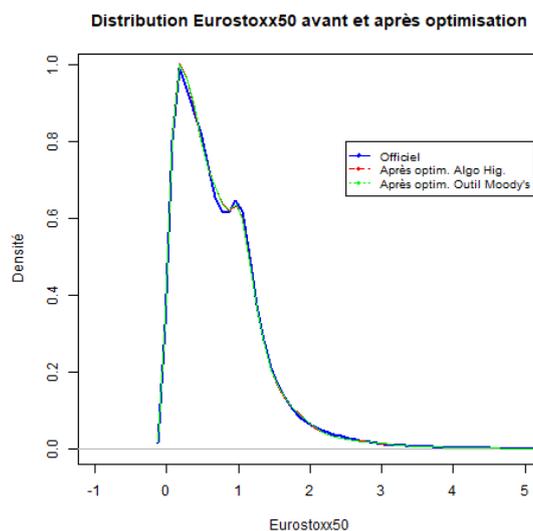


Fig. 9 – Distribution des scénarios économiques de l'indice Eurostoxx50 avant et après optimisation.

Par ailleurs, nous expliquons l'évolution du SCR principalement par la baisse de l'ajustement FDB (Future Discretionary Benefits). En effet, suite à la légère baisse des marchés (comme illustré dans les figures 8 et 9), les comportements des assurés sont modifiés en raison de leur aversion au risque. Nous observons une hausse des arbitrages du support Unité de Compte (UC) vers l'Euro et une baisse des arbitrages du support Euro vers l'UC, ce qui augmente l'encours Euro de la compagnie d'assurance et donc fait monter sa PB (Participation aux bénéfices) future de +0.8% et même baisser sa marge qui est déjà négative au 31/12/2020. De fait, l'absorption des assurés est réduite et pénalise le SCR.

Comme dernier axe d'analyse, nous avons testé la robustesse du caractère Market-Consistent de l'optimisation de la matrice de corrélation des browniens après choc des indicateurs du marché à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's. Dans cette perspective, nous avons baissé la courbe des taux solvabilité II de 50 bps et l'Action (CAC40, Eurostoxx50, Private Equity et Hedge Fund) de 25% comme scénarios extrêmes dans un contexte supposé de forte volatilité du marché. En prenant l'exemple du premier choc, nous avons évalué son impact sur la SSE et avons convenu que l'optimisation reste valable et apporte un bon résultat comme l'illustre le tableau suivant :

	Officiel	Après choc de -50 BPS	
		Avant optimisation	Après optimisation
SSE	97.4%	97.7%	76.0%

TABLE 6 – Somme des écarts quadratiques (SSE) entre la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et la matrice de marché cible après baisse de la courbe des taux S2 de 50 BPS

Puis nous avons évalué l'impact sur les indicateurs solvabilité II comme suit :

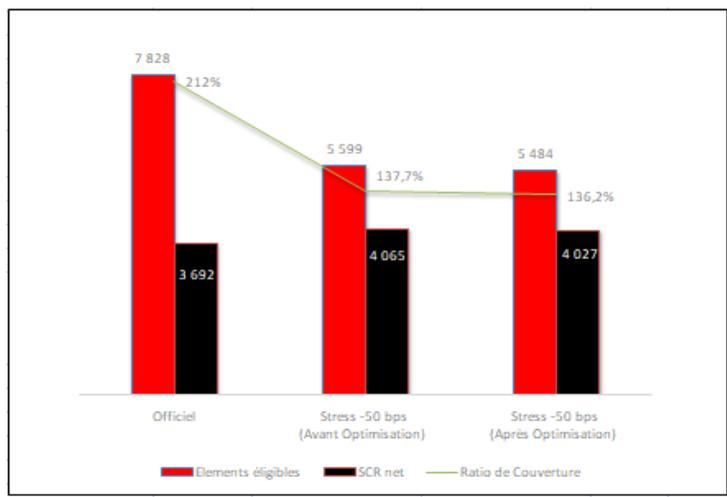


Fig. 10 – Impact croisé du choc -50 Bps de la courbe des taux S2 et de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens sur les indicateurs Solvabilité II (en Millions €)

Dans cette situation stressée et après optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens, nous avons remarqué une légère baisse du ratio de couverture du SCR d'environ 1.5 points. Ceci est expliqué par la faible baisse de la NAV de la compagnie d'assurance en raison de la légère perturbation causée aux scénarios économiques de la compagnie d'assurance comme mentionné dans le scénario central (Figures 8 et 9).

De plus, nous avons remarqué une légère baisse du SCR due principalement à la baisse de l'ajustement FDB qui est due à la hausse de la PB future expliquée par la hausse de l'encours Euro de la compagnie d'assurance comme préalablement analysé.

Comme conclusion, notre préconisation est d'adopter le modèle hybride d'optimisation de la matrice de corrélation des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's en raison d'amélioration du caractère Market-Consistent de ladite matrice, et les impacts négligeables sur les tests et les résultats sous Solvabilité II. L'utilisation de l'outil Moody's de conversion en une matrice PSD est préconisée aussi en raison des faibles erreurs quadratiques obtenues.

Executive Summary

The Economic Scenarios Generator (ESG) is a multi-period economic structural model based on economic assumptions, including the key dependency structure between the different indices actually observed. In concrete terms, for a market-consistent evaluation, Moody's risk-neutral ESG uses a linear dependency structure (correlation matrix) between the various Brownian vectors guiding the various financial indices (equity, interest rate, real estate, etc).

Part I of the memorandum :

Correlation matrix between different returns of financial market indices would be our target to which we would like to tend on average when projecting the economic scenarios. Its calculation is based in our study on a 5-year history given by Bloomberg. We depict this matrix as follows

$$\begin{array}{c}
 \text{CAC40} \\
 \text{Euro50} \\
 \text{Immo} \\
 \text{HF} \\
 \text{PE} \\
 \text{Tx-nom-cT} \\
 \text{Tx-reel-cT}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 \text{CAC40} & \text{Euro50} & \text{Immo} & \text{HF} & \text{PE} & \text{Tx-nom-cT} & \text{Tx-reel-cT} \\
 \left(\begin{array}{cccccccc}
 1 & 0.980 & 0.298 & 0.761 & 0.505 & -0.126 & -0.061 \\
 0.980 & 1 & 0.310 & 0.768 & 0.444 & -0.124 & -0.050 \\
 0.298 & 0.310 & 1 & 0.291 & 0.139 & -0.307 & 0.106 \\
 0.761 & 0.768 & 0.291 & 1 & 0.722 & -0.327 & 0.056 \\
 0.505 & 0.444 & 0.139 & 0.722 & 1 & 0.455 & -0.373 \\
 -0.126 & -0.124 & -0.307 & -0.327 & 0.455 & 1 & -0.183 \\
 -0.061 & -0.05 & 0.106 & 0.056 & -0.373 & -0.183 & 1
 \end{array} \right)
 \end{pmatrix}$$

With :

- HF : Hedge Fund.
- PE : Private Equity.
- Tx-nom-cT : nominal short-term rate.
- Tx-reel-cT : real short-term rate.

In our study, the dependence information is carried by the vector dW_t where W is the multidimensional Brownian motion used in the dynamics of different financial indices.

$$\Sigma_2 dt = \begin{pmatrix}
 dW_1^{\text{CAC40}} & dW_2^{\text{Euro50}} & dW_3^{\text{Immo}} & dW_4^{\text{HF}} & dW_5^{\text{PE}} & dW_6^{\text{Tx-nom-cT}} & dW_7^{\text{Tx-reel-cT}} \\
 \left(\begin{array}{cccccccc}
 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{15} & \rho_{16} & \rho_{17} \\
 \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{25} & \rho_{26} & \rho_{27} \\
 \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} & \rho_{35} & \rho_{36} & \rho_{37} \\
 \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 & \rho_{45} & \rho_{46} & \rho_{47} \\
 \rho_{51} & \rho_{52} & \rho_{53} & \rho_{54} & 1 & \rho_{56} & \rho_{57} \\
 \rho_{61} & \rho_{62} & \rho_{63} & \rho_{64} & \rho_{65} & 1 & \rho_{67} \\
 \rho_{71} & \rho_{72} & \rho_{73} & \rho_{74} & \rho_{75} & \rho_{76} & 1
 \end{array} \right) dt
 \end{pmatrix}$$

A simplistic method is to equalize the correlation matrix of the Brownian vectors above, which is at the entrance of the Moody's risk-neutral ESG, to the target correlation matrix of the indices above. Under this assumption, we find a new simulated correlation matrix between the returns of the financial indices and calculated as an average over the entire projection span (**30 years**) for **1000** iterations. Our simulated matrix, shown below, deviates from the market correlation matrix that is our target :

	CAC40	Euro50	Immo	HF	PE	Tx-nom-cT	Tx-reel-cT
CAC40	1	0.907	0.210	0.537	0.353	0.027	-0.001
Euro50	0.907	1	0.220	0.536	0.332	0.025	0.001
Immo	0.210	0.220	1	0.318	0.160	0.140	0.057
HF	0.537	0.536	0.318	1	0.678	0.113	0.040
PE	0.353	0.332	0.160	0.678	1	0.173	-0.019
Tx-nom-cT	0.027	0.025	0.140	0.113	0.173	1	0.217
Tx-reel-cT	-0.001	0.001	0.057	0.040	-0.019	0.217	1

Part II of the memorandum :

The objective is to optimize the correlation matrix between the Brownian vectors to ensure that the matrix simulated by the ESG is as close as possible to the target correlation matrix. Various approaches have been developed throughout this thesis to ensure a Market-Consistent fit of the Brownian correlation matrix. In the end, we will retain the corrected linear approximation method called "**hybrid**" which will bring us closest to the target matrix. Note that the relationship is not straightforward because we need to translate the target correlation matrix from the historical universe to a correlation matrix between Brownian vectors, which is the input to the Moody's risk-neutral ESG.

Thanks to the linear approximation, we expect that, on average, the optimization will allow our simulated correlation matrix between index returns to reach the target matrix. In the context of Solvency II regulation, we project our Asset-Liability flows in run-off over a time span of **30 years**. We will analyze the optimization results on average over this projection span.

After optimization and transformation of Brownian correlation matrix into a positive semi-definite matrix (PSD) at the entrance of the Moody's risk-neutral ESG using the HIGHAM Algorithm, the correlation matrix simulated on average by the Moody's risk-neutral ESG obtained over the projection span is as follows :

	CAC40	Euro50	Immo	HF	PE	Tx-nom-cT	Tx-reel-cT
CAC40	1	0.955	0.278	0.643	0.438	0.026	-0.014
Euro50	0.955	1	0.286	0.662	0.403	0.023	-0.009
Immo	0.278	0.286	1	0.364	0.074	0.135	0.059
HF	0.643	0.662	0.364	1	0.562	0.111	-0.021
PE	0.438	0.403	0.074	0.562	1	0.175	-0.089
Tx-Nom-cT	0.023	0.135	0.111	0.175	0.455	1	0.127
Tx-reel-cT	-0.014	-0.009	0.059	-0.021	-0.089	0.127	1

The squared deviations (SE) obtained between the simulated correlations averaged by the Moody's risk-neutral ESG before/after optimization of the Brownian correlation matrix and the market correlations are as follows :

Index	Treated Correlation		Market(1)	Simulated before optim.(2)	SE (((1)-(2)) ²)	Simulated after optim.(3)	SE (((1)-(3)) ²)
	Variable 1	Variable 2					
1	CAC40	Euro50	0.980	0.907	0.53%	0.955	0.06%
2	CAC40	Immo	0.298	0.210	0.77%	0.278	0.04%
3	CAC40	HF	0.761	0.537	5%	0.643	1.38%
4	CAC40	PE	0.505	0.353	2.31%	0.438	0.45%
5	CAC40	tx nom cT	-0.126	0.027	2.33%	0.026	2.30%
6	CAC40	tx réel cT	-0.061	-0.001	0.37%	-0.014	0.22%
7	Euro50	Immo	0.310	0.220	0.8%	0.286	0.06%
8	Euro50	HF	0.768	0.536	5.36%	0.662	1.13%
9	Euro50	PE	0.444	0.332	1.26%	0.403	0.17%
10	Euro50	tx nom cT	-0.124	0.025	2.20%	0.023	2.16%
11	Euro50	tx réel cT	-0.05	0.001	0.26%	-0.009	0.17%
12	Immo	HF	0.291	0.318	0.07%	0.364	0.52%

13	Immo	PE	0.139	0.160	0.05%	0.074	0.42%
14	Immo	tx nom cT	-0.307	0.140	19.92%	0.135	19.52%
15	Immo	tx réel cT	0.106	0.0057	0.24%	0.059	0.22%
16	HF	PE	0.722	0.678	0.19%	0.562	2.55%
17	HF	tx nom cT	-0.327	0.113	19.35%	0.111	19.22%
18	HF	tx réel cT	0.056	0.040	0.03%	-0.021	0.59%
19	PE	tx nom cT	0.455	0.173	7.95%	0.175	7.86%
20	PE	tx réel cT	-0.373	-0.019	12.49%	-0.089	8.06%
21	tx nom cT	tx réel cT	-0.183	0.217	15.97%	0.127	9.56%
Total	-	-	-	-	97.4%	-	64.9%

TABLE 7 – Quadratic difference between market correlation matrix and the one simulated on average by the Moody’s risk-neutral ESG before and after optimization.

We notice an improvement of almost all correlations between returns of financial indices after optimization of brownian correlation matrix. The correlation gaps that remain significant, despite the optimization, are those concerning respectively the correlation of the short-term nominal rate with the real estate index and with the Hedge Fund index with respective gaps of 19.52% and 19.22%.

Since the insurance company is more sensitive to the assets with the largest share in its portfolio, especially those dependent on equity, real estate and interest rate indices, we recommend that these correlations, after optimization, be closer to the initial market correlations, which is well verified as illustrated in the table above.

Part III of the memorandum :

Furthermore, the conversion into a PSD matrix is a major issue. We can use two types of conversion : a simplistic one (HIGHAM) modifying all the correlation coefficients or a more elaborate one (Moody’s PSD tool) allowing to modify some coefficients. To understand which coefficients impact the insurance company the most, sensitivities were performed by shocking each of the correlations between Brownian vectors separately by -0.1. We obtain the following Best Estimate(BE) sensitivities surface :

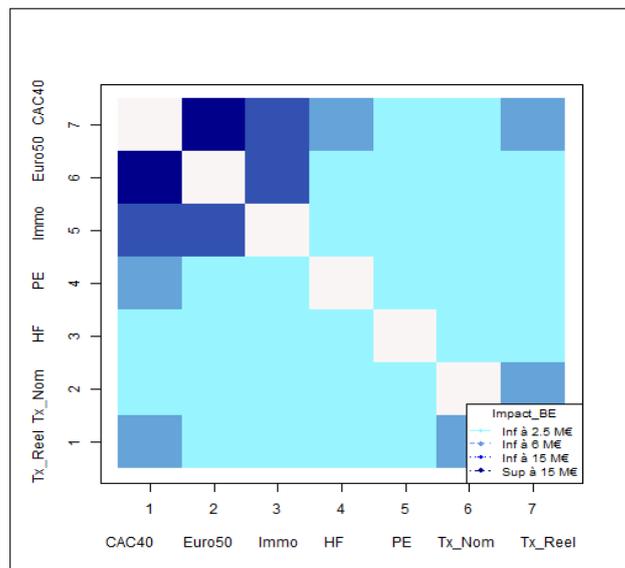


Fig. 11 – Matrix of the Best Estimate’s sensitivities to brownian correlations at the entrance of the Moody’s risk-neutral ESG (in Millions €)

We observe that it is the CAC40, Eurostoxx50, real estate index and short rates to which the insurance company is most sensitive with darker areas as illustrated in Figure 1. The following table gives synthetic results in terms of sum of squared errors (SSE) between the correlation matrix simulated on average by Moody's risk-neutral ESG and that of the market : After using the HIGHAM algorithm or after using the Moody's PSD tool at the input, comparing the Market correlation matrix with the one simulated by the Moody's risk-neutral ESG as a simple empirical average or as a weighted average by Mathematical Provisions (MP), and then before and after optimizing the Brownian correlation matrix :

	HIGHAM Algorithm				Moody's PSD tool			
	Simul.normal average		Simul.weighted average		Simul.normal average		Simul.weighted average	
	Current state	After optimization	Current state	After optimization	Current state	After optimization	Current state	After optimization
SSE	97.4%	76.6%	86.6%	64.9%	97.6%	75.7%	86.8%	63.9%

TABLE 8 – Sum of squared deviations (SSE) between correlation matrix simulated on average by the Moody's risk-neutral ESG and target market matrix.

We note that the Market-Consistent optimization of the Brownian correlation matrix reduced the SSE between the correlation matrix simulated on average by the Moody's risk-neutral ESG and that of the market. By weighting by MP, we construct an indicator that seems more relevant and is also better after optimization. The use of the Moody's tool gives a slight improvement of SSE after optimization as shown in Table 2 while highlighting the same trend in SSE with or without the Moody's tool after optimization. In addition, we implemented an ALM model indicator that assumes a linear relationship between the Best Estimate and the Brownian correlations and is based on the sensitivities previously deduced in Figure 1 ($BE = \sum_{1 \leq i < j \leq 7} \frac{\partial BE}{\partial Z_{i,j}} \cdot Z_{i,j}$). Following the conversion of the optimized Brownian correlation matrix into a PSD matrix (and thus perturbation of the correlation coefficients according to Higham's algorithm or Moody's PSD tool), the BE trend is as follows :

	HIGHAM's Algorithm	Moody's Tool
ΔBE	4.62	-4.64

TABLE 9 – ALM model indicator after conversion of the Brownian correlation matrix, at the entrance of Moody's risk neutral ESG, into a PSD matrix after optimization (in Millions €)

ALM model indicator allowed us to identify an interesting trend of Best Estimate following the conversion of Brownian correlation matrix into a PSD matrix : Moody's tool tends to lower the Best Estimate by **4.64 M€**, which is almost **-0.004%** of Sogecap's Best Estimate (remains negligible certainly but it's the tendency which interests us most), and quite an opposite tendency to that when using Higham's algorithm.

Thus, the Moody's tool takes into account the sensitivity of the Best Estimate to the key correlation coefficients of Sogecap and slightly improves the squared error as illustrated in Table 2. Therefore, this solution would be the one elected for the following steps.

Besides, in order to ensure the quality of our economic scenario table and to validate it statistically, martingality and market-consistency tests are generally carried out, which must not be degraded after optimization of the Brownian correlation matrix.

Beginning with martingale tests, these tests aim to ensure that the prices projected by the Moody's risk-neutral ESG and discounted follow a martingale ; in other words, that the market prices at t=0 are within the 95% confidence band as illustrated in Figures 2 and 3 below. Taking the example of ZC(Zero-Coupon) bond prices, the 95% confidence interval is as follows :

$$[\hat{P}_T^{ZC} \pm q_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot (\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}})],$$

With : \hat{P}_T^{ZC} is the price ZC with maturity T estimated by Moody's risk-neutral ESG as the average

of the projected prices and discounted, n is the number of economic scenarios, $\hat{\sigma}$ is the standard deviation estimated from economic scenarios and $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ is the quantile of gaussian law $N(0, 1)$ with $1 - \frac{\alpha}{2}$ level.

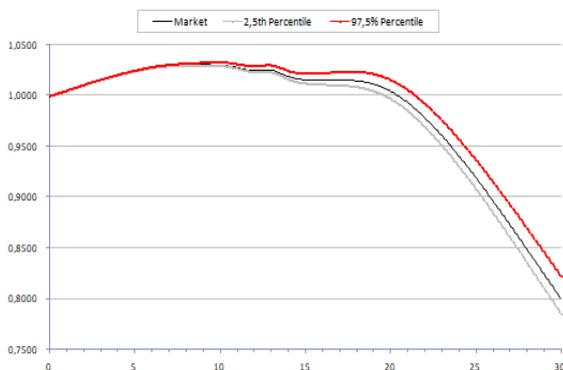


Fig. 12 – Martingality test of ZC bond price at each maturity T before optimization.

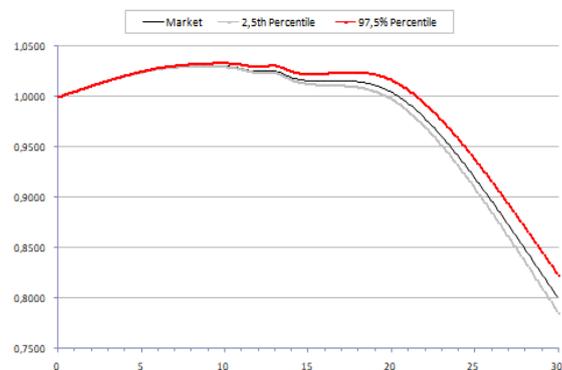


Fig. 13 – Martingality test of ZC bond price at each maturity T after optimization.

We note that the optimization of brownian correlation matrix has no impact on the passing test to the 95% confidence band of the ZC price. In concrete terms, we calculate the errors at each monthly step between the market price at $t=0$ and the average of the projected prices of the different financial indices. A more comprehensive measure would be the average error over the projection span of the Moody's risk-neutral ESG, which is as follows :

	ZC Bond	Indexed ZC Bond	CAC40	Euro50	Immo	HF	PE
Current state	0.18%	0.18%	0.85%	0.63%	0.05%	0.07%	0.02%
optimized state (Higham'algo)	0.22%	0.20%	0.86%	0.53%	0.06%	0.06%	0.03%
optimized state (Moody's tool)	0.21%	0.18%	0.91%	0.55%	0.04%	0.05%	0.03%

TABLE 10 – Average errors of the financial indices modeled by the Moody's risk-neutral ESG

We notice that there is not a strong variation in the average errors of the financial indices, which are sometimes up and sometimes down. The biggest bounce in the average error was recorded in the CAC40 which increased by 0.06% when the Moody's tool was used to convert the brownian correlation matrix optimized at the entrance of the Moody's risk-neutral ESG. We notice that this bounce remains negligible and tolerated by Sogecap.

The Market-Consistency test measures coherence in expectation and aims to ensure that the implied volatilities of derivative instruments projected by the Moody's risk-neutral ESG are in line with the implied market volatilities. These derivatives are the ones on which we calibrate our diffusion processes of the different financial indices. The following table shows the average error calculated between the implied market volatilities and the implied volatilities at the exit of the Moody's risk-neutral ESG calculated over the projection span of the ESG :

	Call CAC40		Call Eurostoxx50		Swaption Euro	
	ATM	Away-from-the-money	ATM	Away-from-the-money	ATM	Away-from-the-money
Current state	0.90%	1.33%	0.91%	0.89%	0.019%	0.016%
optimized state(algo Higham)	0.75%	1.30%	0.85%	0.93%	0.02%	0.02%
optimized state(Outil Moody's)	0.76%	1.31%	0.84%	0.95%	0.02%	0.02%

TABLE 11 – Average errors of implied volatilities of derivative instruments after projection of economic scenarios by Moody’s risk-neutral ESG.

We note in Table 5 that broadly speaking we have an improvement in the average error after Market-Consistent optimization of correlation matrix at the entrance of Moody’s risk-neutral ESG, especially in the case of Call-Cac40 (ATM) with a 0.15% decrease compared to the current state. To support our observation, we have carried out the passing test to confidence band of level 95% as what was done in the martingality test. Taking the example of the Euro ATM swaption with 10 years tenor, we obtain the following result :

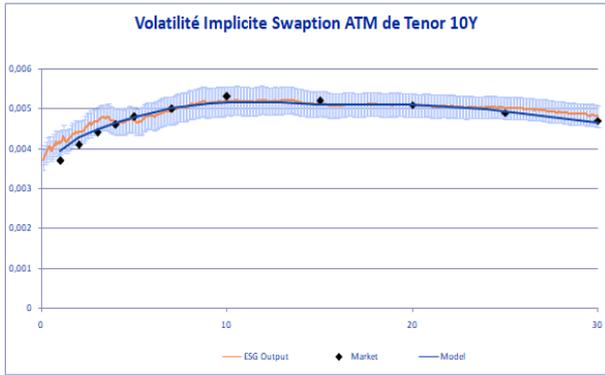


Fig. 14 – Market-Consistency Test with 95% level of implied volatilities of Euro ATM swaption with 10 years tenor before optimization.

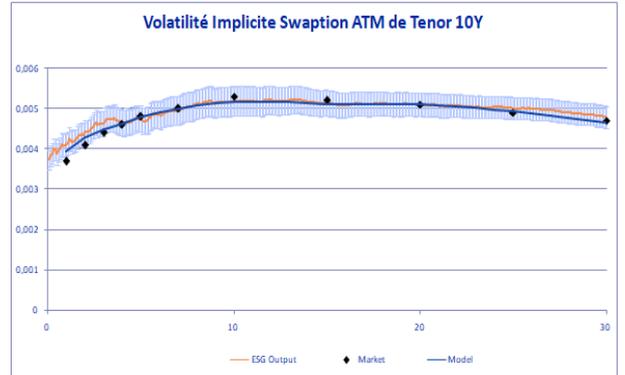


Fig. 15 – Market-Consistency Test with 95% level of implied volatilities of Euro ATM swaption with 10 years tenor after optimization.

We note that the optimization of brownian correlation matrix has no impact on the passing test to the 95% confidence band of implied volatilities for Euro ATM swaption with 10-year Tenor, which join the same result obtained in the martingality test previously presented.

In order to quantify the impact of the Market-Consistent optimization on the Solvency II results, we have monitored the following indicators :

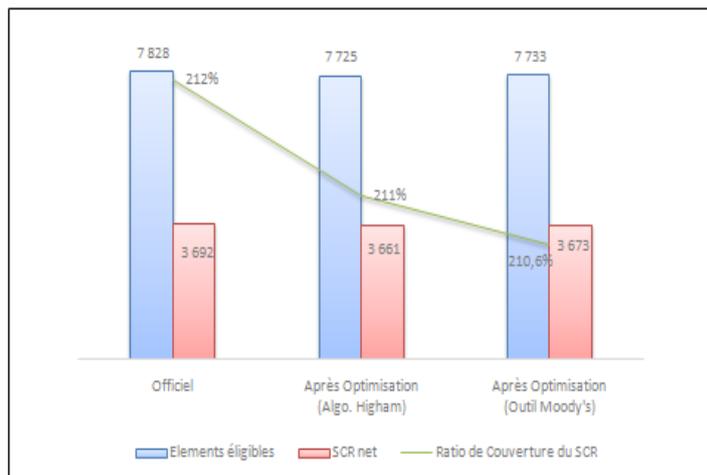


Fig. 16 – Impact of the Market-Consistent optimization of brownian correlation matrix on Solvency II indicators (in Millions €)

We notice that there is a 1 point drop in the SCR coverage ratio after optimization of brownian correlation matrix and 1.4 points if we use the Moody's tool, which is still tolerable by the insurance company. We have a simultaneous decrease of the eligible elements (with more magnitude) and of the SCR as illustrated in figure 6.

We explain the drop in eligible elements by the decline in future margins of 0.07% of the BE after optimization. The analysis of the 1000 stochastic scenarios after optimization shows a slight increase in the extreme negative NAV scenarios (Net Asset Value or future margins) and therefore a slight decrease in the bulk of positive NAV scenarios as illustrated by the following NAV density :

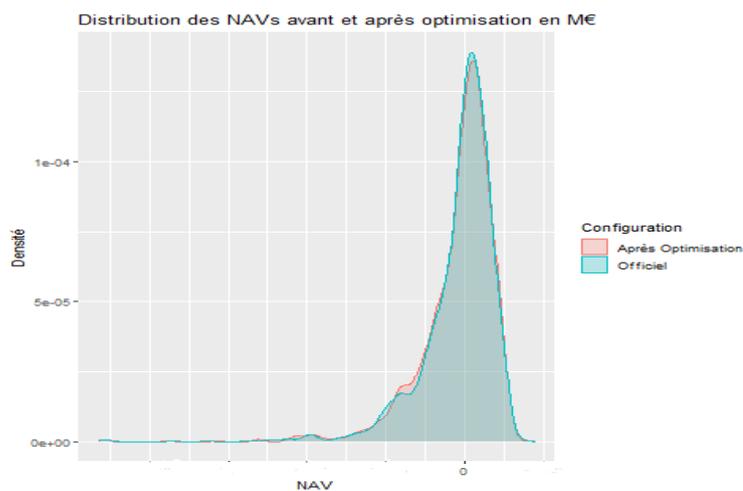


Fig. 17 – NAV distribution before and after optimization

This trend is explained by a slight perturbation of the economic scenarios which has led to a few more extreme scenarios of degraded prices of projected financial indices as illustrated in figures 8 and 9 (the price interval $[0,1]$), and has slightly increased the volatility of these scenarios as illustrated in figure 7. We have taken as an example of analysis, before and after optimization, the financial indices : CAC40, Eurostoxx50 as their important share represented in the assets of the insurance company :

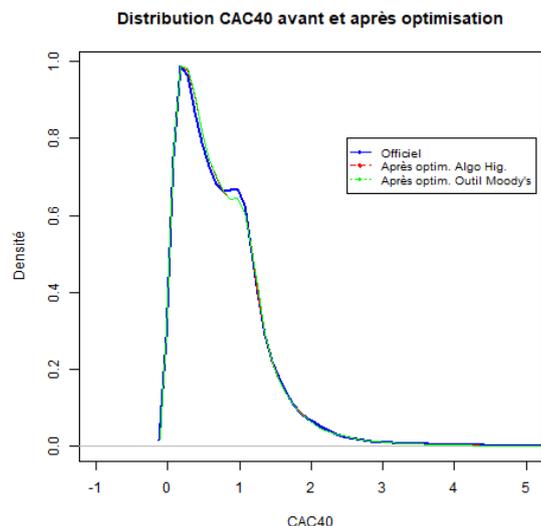


Fig. 18 – Economic scenarios distribution of CAC40 index before and after optimization

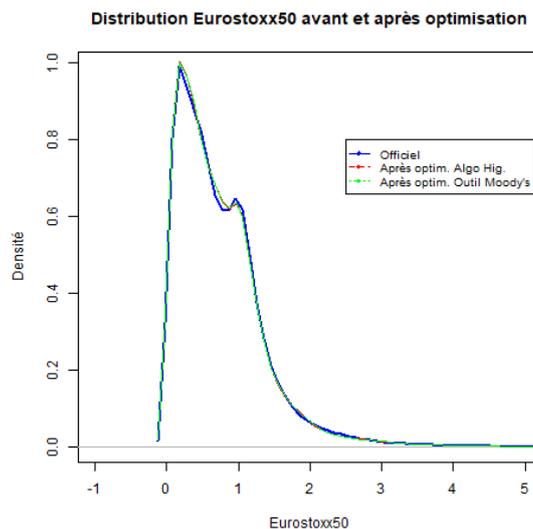


Fig. 19 – Economic scenarios distribution of Eurostoxx50 index before and after optimization.

Furthermore, we explain the evolution of the SCR mainly by the decrease of the FDB (Future Discretionary Benefits) adjustment. Indeed, after the slight drop of market indices (as illustrated in figures 8 and 9), policyholders behavior has changed due to their risk aversion. We observe an increase in arbitrages from the Unit of Account (UA) to the Euro and a decrease in arbitrages from the Euro to the UA, which increases the Euro outstanding of the insurance company and therefore increases its future PS (Profit Sharing) by $+0.8\%$ and even decreases its margin which is already negative at 31/12/2020. In fact, the absorption of policyholders is reduced and penalizes the SCR.

As a final line of analysis, we tested the strength of market-consistent optimization of brownian correlation matrix after shock of market indicators at the entrance of the Moody's risk-neutral ESG. In this perspective, we lowered the Solvency II yield curve by 50 bps and the Equity (CAC40, Eurostoxx50, Private Equity and Hedge Fund) by 25% as extreme scenarios assuming a context of high market volatility. Taking the example of the first shock, we evaluated its impact on the SSE and agreed that the optimization remains valid and brings a good result as illustrated in the following table :

	Official	After shock of -50 bps	
		Before optimization	After optimization
SSE	97.4%	97.7%	76.0%

TABLE 12 – Sum of squared deviations (SSE) between correlation matrix simulated on average by Moody's risk-neutral ESG and target market matrix after lowering the S2 yield curve by 50 bps

Then we assessed the impact on the Solvency II indicators as follows :

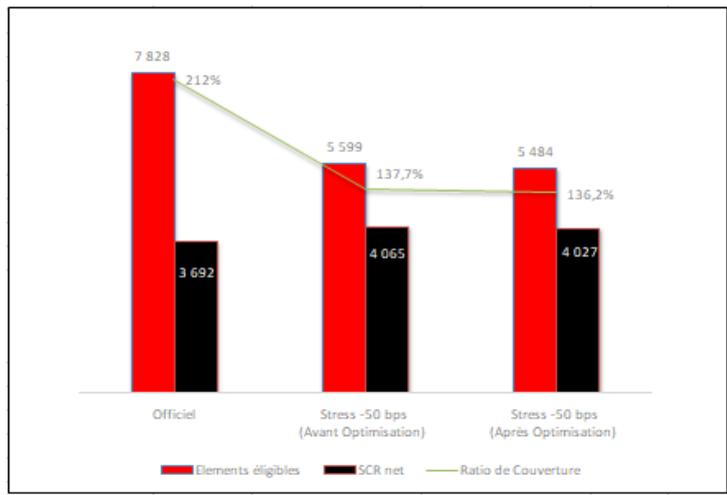


Fig. 20 – Cross impact of the -50 bps shock of S2 yield curve and Market-Consistent optimization of brownian correlation matrix on Solvency II indicators(in Millions €)

In this stressed situation and after Market-Consistent optimization of brownian correlation matrix, we noticed a slight decrease in the SCR coverage ratio of about 1.5 points. This is explained by the small decrease in the insurance company’s NAV due to the slight disruption caused to the insurance company’s economic scenarios as mentioned in the central scenario (Figures 8 and 9).

In addition, we noticed a slight decrease in the SCR mainly due to the decrease in the FDB adjustment which is due to the increase in the future PS explained by the increase in the Euro outstanding of the insurance company as previously analyzed.

As a conclusion, we recommend adopting the hybrid model of brownian correlation matrix’s optimization at the entrance of Moody’s risk-neutral ESG because it improves the Market-Consistent character of this matrix, and has negligible impacts on the tests and the results under Solvency II. The use of Moody’s conversion tool into a PSD matrix is also recommended because of the low squared errors obtained.

Remerciements

Tout d'abord j'aimerais remercier **Sogecap**, en particulier l'équipe ALM-épargne de m'avoir permis de réaliser mon stage et mon alternance dans ces conditions idéales et avec un encadrement de qualité, et de m'accorder confiance dans mes nouvelles fonctions d'actuaire chargé d'étude ALM.

J'exprime une profonde gratitude à mon tuteur en entreprise, Monsieur Thomas Daller, Actuaire Senior en ALM-épargne, pour sa réactivité, recommandations et disponibilité tout au long de ma période de stage suivie d'alternance au sein de la Sogecap. Son savoir-faire m'a permis d'assimiler le sujet et d'appréhender son enjeu dans le contexte réglementaire actuel.

Je tiens à remercier Monsieur Romain Thion, Responsable de l'ALM-épargne à Sogecap, de m'avoir accueilli dans son équipe et toute personne qui a contribué au bon déroulement de mon stage et alternance notamment mes collègues de l'équipe.

Mes remerciements partent aussi à mon tuteur académique, Monsieur Olivier Lopez pour ses conseils et sa vue externe qui m'ont permis d'avoir plus de hauteur sur le sujet traité.

Je tiens à saluer aussi tout le corps professoral et les membres de l'administration de l'ISUP pour la formation de qualité dispensée tout au long de mon Master.

Et puis pour finir, je remercie aussi Charline Mordelet, ancienne collaboratrice dans l'équipe ALM-épargne de Sogecap pour sa disponibilité à échanger autour de diverses problématiques liées au GSE tout au long de mon stage à Sogecap.

Table des Matières

Première Partie : Cadre de l'étude et enjeux	4
1 Cadre Réglementaire : Solvabilité II	4
1.1 Principes généraux	4
1.2 Les trois piliers	4
1.2.1 Pilier-1	5
1.2.2 Pilier-2	10
1.2.3 Pilier-3	10
2 Le Générateur de Scénarios Economiques	11
2.1 Présentation du Générateur de scénarios Économiques	11
2.1.1 Univers risque-neutre & Univers monde réel	11
2.1.2 Socle Financier	13
2.1.3 Changement de numéraire	17
2.2 Les modèles de diffusion des indices Financiers	19
2.2.1 Modèle LMM+ :	19
2.2.2 SVJD :	24
2.2.3 Modèle Black & Scholes (B&S) :	27
2.2.4 Modèle de Vasicek à 1 facteur :	27
2.2.5 GLMM :	28
Deuxième Partie : Optimisation Market Consistent de la matrice de Corrélation	30
3 Matrice de Corrélation du Marché	30
3.1 Données utilisées et estimations	30
3.2 Visualisation des résultats	31
4 Matrice de Corrélation des Browniens	35
4.1 Génération des mouvements Browniens	35
4.1.1 Wichmann & Hill	35
4.1.2 Box-Muller	36
4.1.3 Variables Antithétiques	37
4.1.4 Méthode de corrélation des Browniens	39
4.2 La matrice de corrélation des browniens à l'entrée du GSE	41
5 Matrice de Corrélation simulée par le GSE	43
6 Méthodes d'optimisation Market Consistent de la matrice de corrélation des Browniens	47
6.1 Approche Linéaire	47
6.1.1 Régression Linéaire Simple (RLS)	48
6.1.2 Régression Linéaire Multiple (RLM)	55
6.2 Méthode Heuristique	62
6.3 Méthode Hybride	64
7 Utilisation de l'outil PSD Moody's	66

Troisième Partie : Sensibilités et Etude d'impacts	70
8 Sensibilité du Best Estimate aux corrélations des shock-drivers	70
8.1 Impact Outil Moody's avant optimisation	72
8.2 Impact Outil Moody's après optimisation	73
9 Impact de l'optimisation Market Consistent de la matrice de corrélation sur la qualité de la table des scénarios économiques.	75
9.1 Tests de Martingalité	75
9.2 Tests de Market-Consistency	77
10 Impact de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens sur les résultats sous Solvabilité II	79
10.1 Focus sur la NAV	80
10.2 Analyse du SCR net	83
10.3 Conclusion	86
11 Sensibilité aux changements des conditions économiques	87
11.1 Cas de baisse de la courbe des taux solvabilité II de 50 bps :	87
11.1.1 Market-consistency de la matrice de corrélation	87
11.1.2 Qualité de la table des scénarios économiques	88
11.1.3 Bilan Prudentiel Solvabilité II	89
11.2 Cas de baisse de l'Equity de 25% :	91
11.2.1 Focus sur la NAV :	92
11.2.2 Focus sur le SCR net	93
Bibliographie	96
Annexe A : Matrices de volatilités implicites du marché	103
Annexe B : Notions de base sur les corrélations	105
Annexe C : Théorie des Copules	106
Annexe D : Décomposition de Cholesky	109
Annexe E : Algorithme de HIGHAM	111
Annexe F : Relation linéaire entre la matrice covariance des shocks browniens et celle des rendements d'indices financiers	114
Annexe G : Colinéarité des variables explicatives et analyse des résidus	116
Annexe H : Programme d'optimisation linéaire quadratique sous contrainte d'une matrice semi-définie positive (SQLP)	119
Annexe I : Test de cohérence des prix des indices financiers et instruments dérivés	122

Introduction

Étant donné que le caractère Market-Consistent du bilan actif-passif de la compagnie d'assurance est l'un des impératifs du cadre réglementaire solvabilité II, notre mémoire traite une problématique visant à adapter de façon Market-Consistent la matrice de corrélation des différents shock-drivers des processus de diffusion du GSE risque-neutre Moody's.

Une approche Market-Consistent serait le calibrage d'une matrice de corrélation spot des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's sur les prix de marché des instruments dérivés de façon analogue au calibrage d'un processus de diffusion stochastique d'un indice financier sur les prix des produits dérivés de marché. Cette méthode reste compliquée vu qu'elle nécessitera l'objectivation de la relation entre ces prix et les coefficients de corrélation des différents shock-drivers qui seront à calibrer en plus des paramètres des modèles stochastiques dans l'univers risque-neutre.

La relation entre les différents risk-drivers et leurs shock-drivers n'est pas une relation directe : elle est régie par des équations différentielles stochastiques qui diffèrent selon les indices financiers et leurs spécificités. Chaque indice financier est dédié à la modélisation d'une classe d'actifs du portefeuille de la compagnie d'assurance.

Suite à ces raisons, il est indispensable de passer par des méthodes permettant le mieux possible d'approcher cette relation et donc de remonter à la matrice de corrélation des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's pour que la matrice de corrélation simulée en moyenne tout au long de l'horizon de projection soit la plus proche possible de la matrice de corrélation cible.

Par ailleurs, le calcul de la matrice de corrélation cible (marché) est fait sur la base d'un historique de profondeur de cinq ans récupéré de la plateforme Bloomberg qui nous servira à calculer les rendements des indices financiers puis calculer les coefficients de corrélation comme nous évoquerons dans ce mémoire.

Notre démarche d'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's devrait toujours respecter la qualité de la table des scénarios économiques évaluée en continu moyennant les tests de martingalité et Market-Consistency pendant l'étude des matrices de corrélations.

Après introduction de la problématique, ce mémoire s'articulera autour de trois grandes parties :

Une première partie où nous introduirons la réglementation Solvabilité II, l'environnement général du GSE risque-neutre Moody's, la notion de l'univers risque-neutre puis une description d'un panel des outils financiers indispensables pour définir les dynamiques des modèles de projection utilisés.

Une deuxième partie où nous décrirons la matrice de corrélation cible (Marché), la démarche suivie pour corréler les shock-drivers, la matrice de corrélation simulée par le GSE risque-neutre Moody's, les méthodes développées pour optimiser de manière Market-Consistent la matrice de corrélation étudiée à l'entrée dudit GSE pour choisir l'optimale entre elles.

Enfin une troisième partie où nous ferons une étude d'impact de la méthode d'optimisation choisie sur la qualité de la table des scénarios économiques, le bilan prudentiel Solvabilité II de la compagnie d'assurance puis la sensibilité des résultats obtenus aux changements éventuels des conditions de marché. En d'autres termes, nous veillerons à avoir une assurance raisonnable qu'après optimisation, la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's reste proche de la matrice de corrélation du marché lors des changements de conditions économiques du marché.

Première Partie :
Cadre de l'étude et enjeux

Chapitre 1

Cadre Réglementaire : Solvabilité II

1.1 Principes généraux

La directive Solvabilité II est une réglementation européenne (2009) entrée en vigueur au 1^{er} Janvier 2016 (transposée en droit français) qui vise à « établir un cadre européen sûr et pérenne pour que l'assurance continue à être un vecteur de croissance et de stabilité économique pour l'Europe ». Le but étant de protéger la capacité de l'assureur à honorer ses engagements envers ses assurés.

Les compagnies d'assurance soumises à la réglementation Solvabilité II doivent respecter les conditions suivantes :

- Les primes émises brutes > **5 M.Eur** ;
- Le total des provisions techniques brutes est > **25 M.Eur** ;
- Ne pas être une mutuelle substituée (mutuelle qui transfère ses engagements à une autre mutuelle "substituante") ;

Nous pourrions résumer les grands principaux de la réglementation Solvabilité II comme suit :

1. Approche fondée sur les principes (**principle-based**) plutôt que sur les règles (**rule-based**) ;
2. Meilleure adaptation des exigences de capital au profil de risque (**risk-based**) ; en prenant l'exemple de l'assurance épargne, le capital réglementaire en Solvabilité I est calculé d'une façon forfaitaire à savoir 4% des provisions mathématiques (soit 1% en cas d'UC) alors qu'en Solvabilité II le calcul est fait selon une approche Bottom-up par facteur de risque comme précisé dans la sous-section du pilier I ci-dessous ;
3. Vision « économique » du bilan prudentiel et donc passage d'une vision comptable à une vision « marché ». (Market-Consistency) dans laquelle les actifs et passifs sont évalués à la juste valeur ;
4. Renforcement de la gouvernance et de la gestion des risques ;
5. Amélioration du contrôle des groupes (collèges de superviseurs) ;
6. Harmonisation européenne des normes et pratiques de contrôle ;

1.2 Les trois piliers

La directive Solvabilité II s'articule autour de 3 principaux piliers ayant des finalités différentes mais complémentaires :

Pilier 1 Exigences quantitatives	Pilier 2 Exigences qualitatives	Pilier 3 Reporting prudentiel et information du public
<ul style="list-style-type: none"> • Actif et passif en valeur de marché • Deux exigences de capital : SCR et MCR, basées sur l'utilisation d'une formule standard ou un modèle interne • Règle d'éligibilité et de classement des fonds propres selon leur qualité 	<ul style="list-style-type: none"> • Renforcement de la gouvernance (fonctions clés, « fit and proper ») • Renforcement du contrôle interne et de la gestion des risques au sein de l'entreprise + ORSA • « Principe de personne prudente » applicable aux placements 	<ul style="list-style-type: none"> • Définition d'états prudentiels communs à l'ensemble des contrôleurs européens • Davantage d'informations à destination du public afin de renforcer la transparence et la discipline de marché
-> Etre suffisamment riche	-> Etre bien gouverné	-> Etre transparent

Fig. 1.1 – les trois piliers de la Solvabilité II

1.2.1 Pilier-1

Le pilier 1 vise à s'assurer que le niveau de fonds propres de l'assureur est suffisant pour faire face à une ruine à l'horizon d'1 an dans 99,5% des cas, soit la survenance d'une ruine chaque 200 ans. La notion de ruine économique sous-entend que la valeur de marché des actifs devienne inférieure au BE (Best Estimate) des passifs. De plus, ce pilier établit les règles de constitution du bilan prudentiel de la compagnie d'assurance, à savoir l'évaluation à la valeur de marché des actifs et des passifs tout en prenant en compte les impôts différés dus au changement du référentiel, étant donné que les impôts émanent du résultat comptable qui découlent des états financiers établis dans le cadre des normes sociales.

Les composants du bilan Solvabilité II se ventilent comme suit :

Best Estimate (BE)

le BE correspond à la meilleure estimation de la moyenne pondérée des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente. Cependant, la formule mathématique du BE se présente comme suit :

$$BE = E\left(\sum_{t=1}^T \frac{Flux_t - Cotisation_t + Frais_t}{(1 + R_{(0,t)})^t}\right)$$

avec :

- $Flux_t$: correspond principalement aux cash-flows futurs attendus par la compagnie d'assurance notamment les rachats, prestations Décès, la réserve PPE devant être versés aux assurés à la fin de projection ;
- $Cotisation_t$: qui sont les primes incluses dans la frontière de contrats ;
- $Frais_t$: représente les frais de la compagnie d'assurance liés aux contrats d'assurance ainsi que les placements ;
- $R_{(0,t)}$: est le taux sans risque de maturité t ;

Marge pour risque (RM)

la RM est une couche supplémentaire au BE pour constituer les PT (Provisions techniques) de la compagnie d'assurance, représentant le cout d'immobilisation ou de portage des fonds propres futurs nécessaires pour faire face au risque de ruine lors de la liquidation de la compagnie d'assurance. Cependant, La Directive Européenne 2009/138/CE stipule que la marge pour risque est calculée *de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance.*

$$RM = Coc. \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_t}{(1 + R_{(0,t+1)})^{(t+1)}}$$

avec :

- SCR_t : correspond au Capital de solvabilité requis souscription à l'année t (les Modules : "life", "Non life" et "Health" dans la pieuvre de risques de la figure 1.2) ;
- Coc : Le cout de capital fixé par EIOPA à 6% ;

Capital réglementaire ou Exigence de marge

Le Capital de Solvabilité Requis (SCR) représente le capital nécessaire permettant d'absorber la déformation ou la déviation défavorable d'un facteur de risque (sinistre exceptionnel, choc sur les actifs, etc...) de la pieuvre de risques au quantile 99,5% à un horizon d'un an. Dans le cadre de la formule standard proposée par EIOPA, la pieuvre de risque organise les facteurs de risque par module :

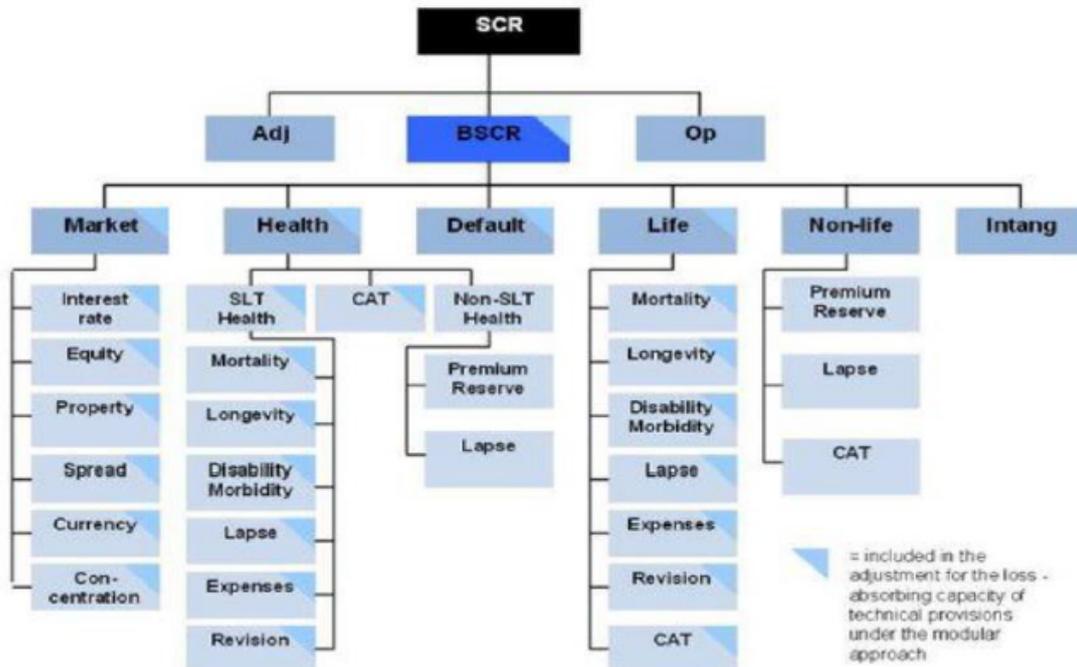


Fig. 1.2 – Pieuvre de risque de la formule standard

Nous pouvons parler de deux approches qui sont proposées par l'EIOPA :

- **Un calcul selon la formule standard** : Une série de chocs à $t = 0$ communiqués par EIOPA qui sont appliqués par les assureurs par risque (et donc SCR par risque) puis agrégés selon une approche Bottum-up. Ces chocs sont calibrés par EIOPA sur un portefeuille européen et représentant la Value-at-risk (Var) de niveau 99,5% de la distribution des pertes en fonds propres économiques à un horizon d'un an. Nous rappelons que pour une variable aléatoire X à valeur dans \mathbb{R} et de fonction de répartition F_X , la $Var_{(X,\alpha)}$ tel que $\alpha \in [0, 1]$:

$$Var_{(X,\alpha)} = \inf\{x | P(X \leq x) \geq \alpha\} = \inf\{x | F_X(x) \geq \alpha\}$$

Le calcul selon l'approche modulaire s'effectue selon les étapes suivantes :

1. **Niveau intra-modulaire** : Pour chaque facteur de risque (actions, taux, longévité, ...) Ce capital économique correspond à la différence en $t = 0$ entre la $NAV_{centrale}$ et la $NAV_{choquée}$; soit :

$$SCR = \Delta NAV = NAV_{centrale} - NAV_{choquée}$$

comme l'illustre la figure suivante :

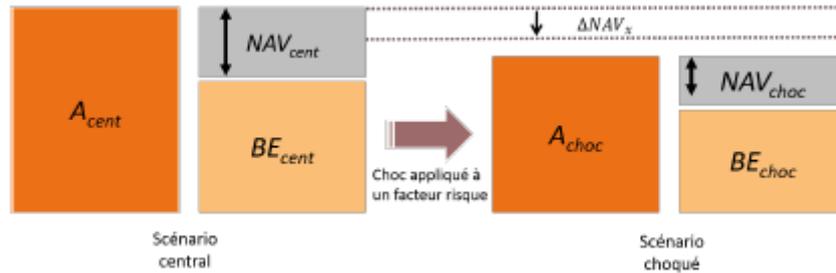


Fig. 1.3 – Calcul du capital de solvabilité requis du risque x

La NAV est par définition la différence entre la valeur de marché des actifs VM et les provisions techniques $PT(BE + RM)$, soit :

$$NAV = VM - PT = VM - (BE + RM)$$

L'agrégation des capitaux au sein de chaque module s'effectue comme suit :

$$SCR_M = \sqrt{\sum_{(i,j) \in M^2} \rho_{(i,j)}^M \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

avec :

- SCR_M : Capital économique du module M des risques ;
- SCR_i : Capital économique du i^{me} risque ;
- $\rho_{(i,j)}^M$: la corrélation entre le risque i et j du module M .(donnée EIOPA)

2. **Niveau inter-modulaire** : A ce niveau, l'agrégation est faite entre les différents modules de la pierre de risques :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{(i,j)} \rho_{(i,j)} \cdot SCR_i \cdot SCR_j + SCR_{intang}} \quad (*)$$

avec :

- SCR_i : Capital économique du i^{me} module ;
- SCR_{intang} : Capital économique associé aux actifs incorporels ;
- $\rho_{(i,j)}$: la corrélation entre le module i et j de la pieuvre de risques. (donnée EIOPA)

le calcul du capital réglementaire global est comme suit :

$$SCR = BSCR + SCR_{op} + Adj$$

avec :

- SCR_{op} : correspond au capital économique permettant de se couvrir contre des risques comme les défaillances au niveau du système informatique, comptable, processus internes ou événements extérieurs. Nous notons que le SCR_{op} s'ajoute à la fin du calcul du SCR vu qu'il n'est pas diversifiable comme le cas des facteurs de risque en chaque module de la pieuvre de risques.
- Adj : représente l'ajustement impôt de la compagnie d'assurance qui est un crédit d'impôt absorbant une partie du BSCR brut à constituer par la compagnie d'assurance pour faire face au risque de ruine, ainsi que l'ajustement FDB (Future Discretionary Benefits) qui est la capacité d'absorption de la PB des assurés des pertes des PT. Sa formule se présente comme suit :

$$Adjustment_{FDB} = -\text{Max}(\text{Min}(BSCR_{Brut} - BSCR_{net}, PB_{future}), 0)$$

avec :

- $BSCR_{Brut}$ désigne le Basic SCR brut des absorptions par les provisions techniques et dont la formule est similaire à (*) sauf que nous faisons appel à des $SCR_{s_{Brut}}$

$$SCR_{Brut} = (VM_{centrale} - VM_{choquée}) - (BEG_{centrale} - BEG_{choquée})$$

- $BSCR_{net}$ désigne le Basic SCR net qui fait appel à des $SCR_{s_{net}}$

$$SCR_{net} = (VM_{centrale} - VM_{choquée}) - (BEL_{centrale} - BEL_{choquée})$$

- la PB_{future} représente la différence entre le $BEL_{centrale}$ (Best Estimate Liability) et le $BEG_{centrale}$ (Best Estimate Guarantee) sur lequel la compagnie d'assurance est engagée quoi qu'il arrive.

Il est à noter que dans le calcul du SCR_{net} la compagnie d'assurance compense une partie des chocs en distribuant moins ses prestations discrétionnaires ce qui absorbe partiellement le choc du facteur de risque traité.

- **Un calcul selon le modèle interne** : cette approche permet à l'assureur de déterminer un SCR représentant une image fidèle de son profil de risque. Il correspond à la projection de l'activité de l'assureur généralement en deux étapes (méthode de simulations dans simulations) : scénario univers réel à un an puis scénarios risque-neutre sur l'horizon solvabilité II, ce qui sous-entend une projection du bilan prudentiel à un an tenant compte des résultats de la première période. Le but étant de calculer la dérive de la valeur économique de l'assureur à un niveau de 99,5% ce qui veut dire l'obtention du quantile au niveau 0,5% de la distribution des fonds propres économiques à l'horizon d'un an et de faire la différence par rapport aux fonds propres actuels afin de constituer le SCR de niveau 99,5%.

il est vrai que c'est une méthode plus précise et adaptée au profil de risque de la compagnie d'assurance, permettant de calculer d'autres indicateurs statistiques permettant de mieux appréhender le risque de l'assureur ($TVAR$, volatilité des Fonds Propres, Skewness, Kurtosis.), mais cette méthode reste couteuse nécessitant un investissement important en ressources humaines et financières tout en soulignant

la durée des calculs lors du changement du profil de risque de la compagnie d'assurance selon par exemple les conditions de marché ou la politique de souscription de l'assureur. Il est à noter que Sogecap utilise le modèle standard pour l'établissement de son bilan prudentiel et calcul de ses indicateurs Solvabilité II, d'où la limitation du mémoire à cette approche lors des calculs d'application.

Par ailleurs, la compagnie d'assurance est tenue de calculer aussi le Minimum Capital Requirement (MCR) représente le niveau minimal de fonds propres en dessous duquel l'ACPR intervient immédiatement.

Ratio de Solvabilité

le calcul du ratio de solvabilité se base sur le calcul des fonds propres éligibles à la couverture du SCR et du MCR. Cependant, nous distinguons trois tiers de fonds propres classifiés selon leur qualité, exigibilité et capacité d'absorption de pertes. Ces tiers devront respecter les conditions suivantes :

- Pour la couverture du SCR :
 - Le tier 1 doit être égal à au moins 50% du SCR.
 - La somme du tier 2 et tier 3 doit être au plus égale à 50% du SCR.
 - Le tier 3 doit être inférieur à 15% du SCR.
 - Les Emprunts Subordonnés doivent être au plus être égaux à 20% du tier 1.
- Pour la couverture du MCR :
 - Le tier 1 doit être égal à au moins 80% du MCR.
 - Les Emprunts Subordonnés doivent être au plus être égaux à 20% du tier 1.
 - Le tier 2 doit être inférieur à 20% du MCR.

Ainsi, nous ne faisons pas appel au tier 3 pour la couverture du MCR.

Ainsi, le calcul des ratios de solvabilité est effectué comme suit :

$$\text{Ratio de couverture du SCR} = \frac{\text{Fonds Propres éligibles au SCR}}{\text{SCR}}$$
$$\text{Ratio de couverture du MCR} = \frac{\text{Fonds propres éligibles au MCR}}{\text{MCR}}$$

Un ratio de couverture du SCR supérieur à 100% équivaut à ce que la compagnie d'assurance dispose d'assez de fonds propres éligibles pour couvrir ses engagements. Il est à noter que la compagnie d'assurance peut se fixer un seuil de ratio de couverture du SCR supérieur à 100% en interne pour plus de sureté et d'assurance à ses assurés et ses investisseurs. Ceci reste un levier de pilotage que la compagnie d'assurance peut adapter selon son appétence aux risques fixée par son conseil d'administration.

Pour finir, nous pouvons résumer la transition de la solvabilité I à II ainsi que le pilier 1 de la solvabilité II dans le schéma suivant :

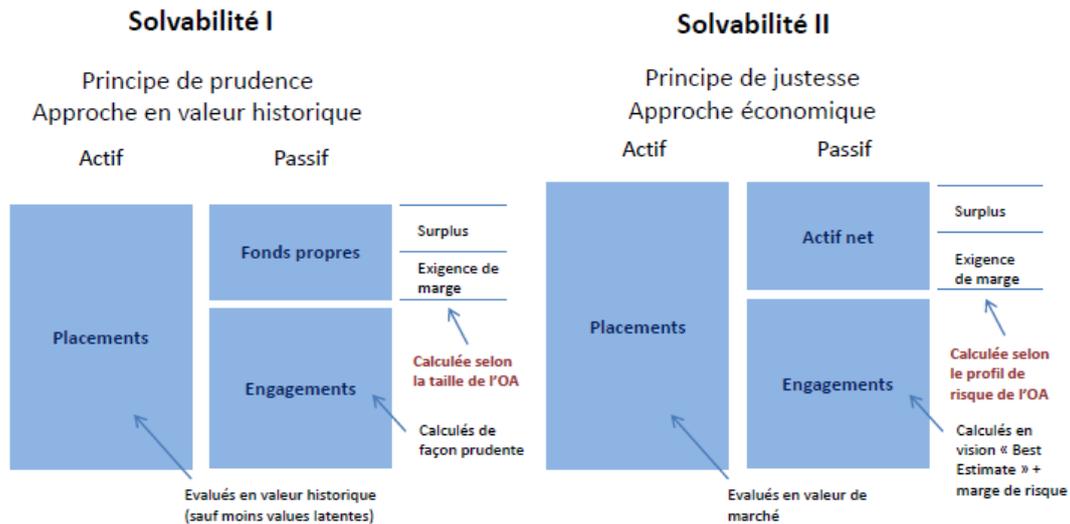


Fig. 1.4 – Transition de la Solvabilité I à la Solvabilité II

1.2.2 Pilier-2

Le pilier 2 régit la gouvernance de la compagnie d'assurance et exige les conditions suivantes :

- Au moins 2 Dirigeants Effectifs (principe des 4 yeux) ;
- 4 fonctions clés (Actuariat / Gestion des risques / Conformité / Audit interne) avec pour chacune d'elle, un responsable de la fonction qui a accès au point le plus haut de l'organisation de la compagnie d'assurance . Il est à noter que le choix de ces responsables se fait selon le principe « **Fit&Proper** » (honorabilité : Casier judiciaire vierge, Compétence) ;
- Un système de gestion des risques et un système de contrôle interne ;
- Des politiques écrites validées par l'AMSB : formalisation importante sur les travaux de tarification et le provisionnement, la rémunération des dirigeants, l'actif-passif, les règles d'investissement,.... ;
- Une évaluation prospective des risques (ORSA –OwnRisk and Solvency Assessment) ;
- Le principe de la personne prudente à respecter pour la gestion des placements ;

1.2.3 Pilier-3

Le pilier 3 vise à assurer plus de transparence financière lors de la transmission des informations se rapportant à la compagnie d'assurance à l'ACPR ou bien au public. Toutefois, deux reportings sont à adresser par la compagnie d'assurance :

- Un rapport pour le contrôleur (RSR) ;
- Un rapport pour le public (SFCR) sur la solvabilité et la situation financière de la compagnie d'assurance ;

Chapitre 2

Le Générateur de Scénarios Economiques

2.1 Présentation du Générateur de scénarios Économiques

Le GSE (Générateur de Scénarios Economiques) est un modèle structurel économique à plusieurs périodes utilisé par la compagnie d'assurance pour projeter l'ensemble des indices financiers et économiques modélisant son actif et ce en plusieurs itérations (1000 itérations pour notre étude) et sur un horizon fixé à l'avance (30 ans pour notre cas). La table de scénarios économiques qui en découle est une entrée indispensable du modèle ALM de la compagnie d'assurance visant à modéliser ses interactions Actif-Passif afin de calculer sa valeur économique et établir son bilan prudentiel sous Solvabilité II. Nous citons comme facteurs de risques projetés par le GSE : le taux d'intérêt nominal, le taux d'inflation, le rendement action, immobilier....

Au sein du GSE mis à la disposition de la compagnie d'assurance par la société Moody's Analytics, chaque classe d'actifs est modélisée par indice financier régi par sa propre dynamique et peut être diffusé indépendamment des autres. Le lien entre les classes d'actifs est assuré en introduisant une matrice de corrélation considérée comme l'un des points d'ancrage à l'entrée du GSE Moody's (Modèle Composite). La matrice de corrélation mesurera la structure de dépendance entre les différents mouvements browniens guidant la dynamique des différents rendements financiers (Cf. Section 2.2), et qui sont des processus à accroissements indépendants et de distribution gaussienne : $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$. Dans ce mémoire, ils seront appelés browniens ou shock-drivers de la dynamique des rendements financiers.

Par ailleurs, la réglementation Solvabilité II prévoit une valorisation Market-Consistent du Best Estimate de la compagnie d'assurance ce qui implique une évaluation Mark-to-Model du cout des options et garanties (taux garanti, garantie plancher, arbitrage...) incluses dans les contrats d'assurance de la compagnie. Ces dernières donnent naissance à des interactions Actif-Passif d'où l'importance du GSE Moody's pour une évaluation stochastique de ces options et garanties et donc du Best Estimate.

Ainsi, le GSE Moody's calibrera les différents processus de diffusion sur les prix de marché des instruments dérivés (Swaption Euro, Call CAC40) pour projeter les différents indices financiers susmentionnés (Cf.section 2.2)

2.1.1 Univers risque-neutre & Univers monde réel

Univers risque-neutre

L'univers risque-neutre est un univers fictif dans lequel tous les actifs rapportent en moyenne le taux sans risque (Équation (*) ci-dessous). En d'autres termes, le processus des prix actualisés des actifs risqués $(S_t)_{(t \geq 0)}$ est une martingale sous une unique probabilité Q appelée « probabilité risque-neutre » qui diffère de la probabilité historique et donc les scénarios sont probabilisés différemment que dans le monde réel.

Nous rappelons qu'un processus F_t - adapté est dit une martingale si pour un intervalle de temps $[0, T]$ et une filtration F_t qui code l'information jusqu'à l'instant t , le processus $(\hat{S}_t)_{(t \geq 0)}$ vérifie l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}^Q(\hat{S}_t/F_s) = \hat{S}_s \quad (*)$$

Avec :

- $\hat{S}_t = \frac{S_t}{(1+r)^t}$ dans le cas du temps discret ;
- r représente le taux sans risque supposé constant dans ce cas de figure ;
- Q probabilité risque-neutre ;

Dans cet univers, les investisseurs sont neutres face au risque, et donc n'exigent pas de prime de risque, ce qui n'est pas le cas dans le monde réel. Par conséquent, La probabilité de survenance des événements défavorables est alors majorée afin de refléter l'aversion au risque des investisseurs.

L'univers risque-neutre est utilisé principalement pour déterminer une valeur des options et garanties futures de façon à ce qu'elle soit consistante avec les prix d'options dérivées cotées par le marché et ce dans le cadre de la réglementation Solvabilité II. L'objectif d'utiliser l'univers risque-neutre est de faciliter le pricing des garanties incluses dans les contrats d'assurance. L'actualisation se fait au taux sans risque, ce qui nécessite la modélisation du taux nominal afin de déterminer les déflateurs.

Univers monde réel

C'est un univers qui est généralement utilisé dans une optique de pilotage de la compagnie d'assurance de ses indicateurs de solvabilité. Il est régi par une probabilité dite historique qui permet d'avoir une distribution historique et donc de probabiliser les trajectoires futures des actifs qui sont d'une réalité "physique". Il est à noter que la distribution historique dépend fortement de la profondeur de l'historique choisi par la compagnie d'assurance.

Ainsi et à l'opposé de l'univers risque-neutre, le rendement des indices financiers est majoré d'une prime de risque pour prendre en compte les risques pris. Cette prime de risque peut varier d'un actif à l'autre ce qui laisse les déflateurs et donc la valorisation diffère d'un actif à l'autre.

Dans ce cadre, Sogecap utilise un GSE risque-neutre de Moody's afin d'assurer une valorisation Market-Consistent et Martingale des options et garanties de ses contrats d'assurance et donc du Best Estimate. La figure suivante résume l'environnement global du GSE Moody's :

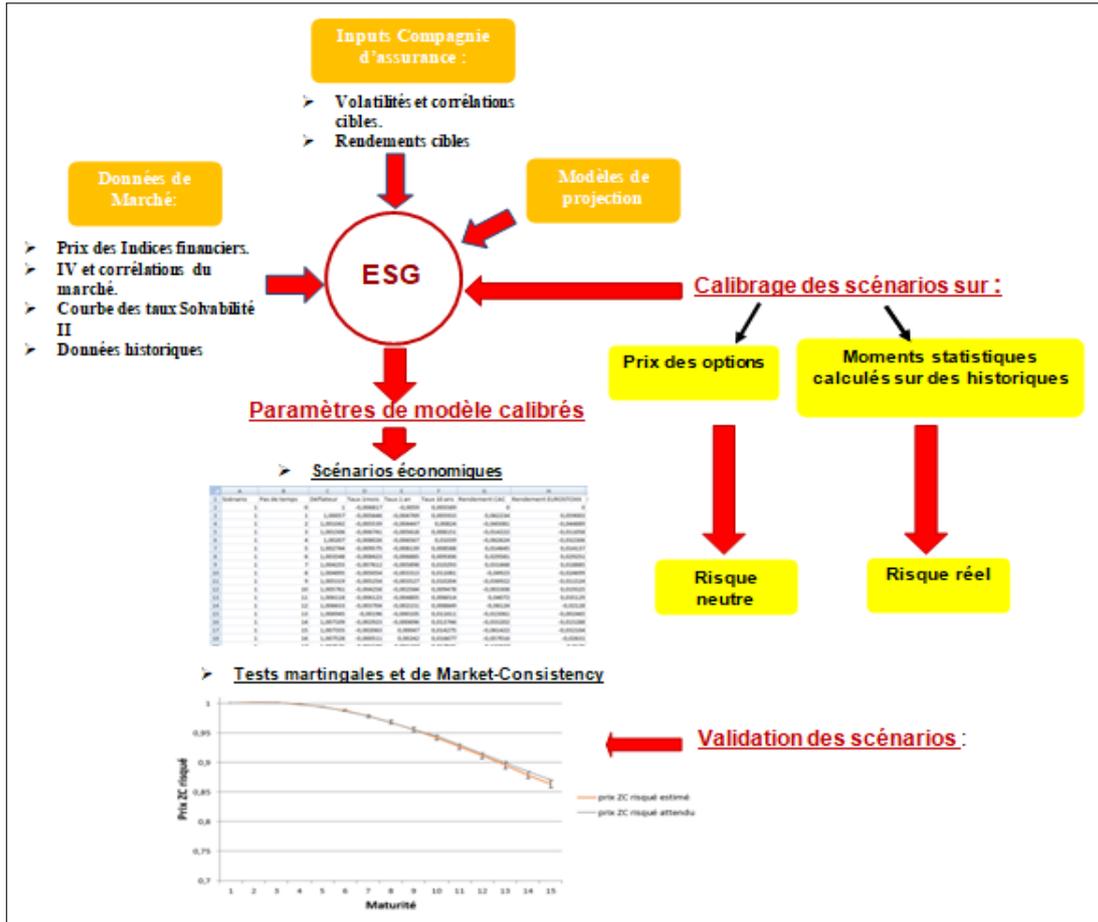


Fig. 2.1 – Environnement du Générateur de Scénarios Économiques de Moody’s

Il est à noter que les tests de martingalité et Market-Consistency ci-haut visent à contrôler la qualité des tables de scénarios économiques et donc la robustesse de la modélisation dans l’univers risque-neutre, ce qui serait bien détaillé dans la partie 3 du présent mémoire.

2.1.2 Socle Financier

Dans cette sous-section, l’objectif est de présenter les notions fondamentales pour comprendre les modèles stochastiques de diffusion et la logique de leurs calibrages, comme ce qui a été présenté à [Bon16]

Définition 1 (Cash ou Compte du marché monétaire) : Le cash correspond à des investissements sans risque où le gain est le taux sans risque du marché à chaque instant. Soit $B(t)$ la valeur d’un tel compte évalué à l’instant t . En supposant que $B(0) = 1$, le compte évolue suivant l’équation différentielle suivante :

$$dB(t) = r_t B(t) dt, B(0) = 1$$

avec r_t une fonction dépendant du temps. L’expression du cash $B(t)$ qui en découle se présente comme suit :

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$$

$B(t)$ est ainsi le montant d’investissement détenu en t et r_t le taux spot sans risque instantané. Ce dernier est appelé le taux court.

Définition 2 (Déflateur) : Le déflateur, ou facteur d'actualisation stochastique, entre t et T , noté $D(t, T)$, est le montant équivalent à l'instant t à une unité monétaire en T . Nous avons alors :

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)$$

Il est courant de supposer que r est déterministe notamment pour le marché des actions. Cependant, pour valoriser des produits financiers dépendant des taux d'intérêt ou des flux de passifs en assurance, il est nécessaire que la dynamique du taux court soit stochastique pour prendre en compte les interactions Actif-Passif.

En temps discret, nous pouvons aussi utiliser le déflateur qu'on nommera le coefficient d'escompte $DF(t, T)$ et qui est défini pour un taux d'intérêt composé $r_{(T-t)}$ comme suit :

$$DF(t, T) = \left(\frac{1}{1 + r_{(T-t)}}\right)^{T-t}$$

Définition 3 (Obligation zéro-coupon) : Une obligation zéro-coupon d'échéance T est un actif qui garantit à son détenteur un pay-off d'une unité de monnaie à T , sans toutefois de paiements intermédiaires. $P(t, T)$ désigne sa valeur au temps $t < T$. En particulier, $P(T, T) = 1$ pour tout T .

Il est à noter que la différence entre le déflateur précédemment défini et le prix d'une obligation zéro-coupon réside dans la nature stochastique du taux court. En effet, si r est déterministe, nous avons pour tout couple $(t, T) : D(t, T) = P(t, T)$. Si r est (\mathcal{F}_t) -adapté et intégrable par rapport au temps, nous avons alors :

$$P(t, T) = \mathbb{E}^Q \left\{ e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t \right\}$$

où Q est la probabilité risque-neutre préalablement mentionnée. Ce résultat provient de la propriété de martingalité des actifs actualisés dans l'univers risque-neutre préalablement évoquée dans la sous-section 2.1.1.

Définition 4 (Taux d'intérêt en composition continue) : Le taux d'intérêt en composition continue, noté $R(t, T)$, est le taux constant à la période $\tau(t, T)$ auquel un investissement de $P(t, T)$ unités monétaires à la date t croit continuellement et permet d'atteindre une unité de monnaie à l'échéance T . En formule mathématique :

$$P(t, T)e^{R(t, T)\tau(t, T)} = 1$$

Nous avons ainsi :

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{\tau(t, T)}$$

Définition 5 (Taux d'intérêt en composition simple) : Le taux d'intérêt en composition simple, noté $L(t, T)$, est le taux constant auquel un investissement de $P(t, T)$ unités monétaires à la date t croit proportionnellement au temps et rapporte une unité de monnaie à T . Ainsi, nous avons :

$$P(t, T)(1 + L(t, T)\tau(t, T)) = 1$$

d'où :

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)}$$

Définition 6 (Taux instantané) : Le taux court à l'instant t ou instantané, noté $r(t)$, peut être défini comme la limite quand $T \rightarrow t^+$ du taux d'intérêt en composition continue préalablement mentionné :

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T)$$

Taux Forward :

En général, les taux forwards sont caractérisés par trois dates : t la date de calcul dudit taux, T la date d'expiration et S la maturité tel que $t \leq T \leq S$.

Définition 7 (Taux Forward en composition simple) le taux Forward en composition simple à la date t , noté par $F(t, T, S)$, est défini comme suit :

$$F(t, T, S) = \frac{P(t, T) - P(t, S)}{\tau(T, S) \cdot P(t, S)} \quad (*)$$

Définition 8 (Taux Forward instantané) le taux Forward instantané, noté $f(t, T)$, est défini comme la limite du taux Forward en composition simple quand la maturité S tend vers son expiration T . Ainsi, nous avons :

$$f(t, T) = \lim_{S \rightarrow T^+} F(t, S, T) = -\frac{\delta \ln(P(t, T))}{\delta T}$$

Nous avons donc :

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}$$

Taux Swap :

Avant d'aborder la définition du taux swap, il serait intéressant de définir le cas général.

Définition 9 (Contrat swap forward) Soit une suite de dates $T_i, i \in \{0, \dots, M\}$, avec $T_0 = t \leq T_1 \dots \leq T_M$. Soit α et β tels que $0 \leq \alpha < \beta \leq M$. Nous notons $\mathcal{T} = \{T_\alpha, \dots, T_\beta\}$ et $\tau_1 = T_1 - T_{1-1}, i \in \{\alpha + 1, \beta\}$. Le contrat swap forward receveur, de nominal N , de maturité T_α et de tenor $T_\beta - T_\alpha$, évalué en t , noté RFS (t, T, K) , est un contrat payant à son détenteur un flux fixe $\tau_1 K$, aussi appelé jambe fixe, contre un flux variable $\tau_1 L(T_{i-1}, T_i)$, aussi dénommé jambe variable, à chaque date $T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$. La jambe variable pour le cadre de la compagnie d'assurance est le taux Euribor. La valeur actualisée d'un tel contrat est :

$$\begin{aligned} \text{RFS}(t, T, N, K) &= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i (K - F(t, T_{i-1}, T_i)) \\ &= NP(t, T_\beta) - NP(t, T_\alpha) + N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} K \tau_i P(t, T_i) \quad (\text{usage de la formule } (*)) \end{aligned}$$

Par analogie, un contrat swap forward payeur paie la jambe fixe et reçoit la jambe variable. Sa valeur actualisée est alors donnée par :

$$\text{PFS}(t, T, N, K) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i (F(t, T_{i-1}, T_i) - K)$$

Définition 10 (Taux forward swap) Le taux forward swap, évalué à l'instant t , noté $S_{\alpha, \beta}(t)$, pour le calendrier de dates \mathcal{T} , est le taux fixe qui annule la valeur du contrat swap, soit $\text{RFS}(t, T, S_{\alpha, \beta}(t)) = 0$. Nous obtenons alors :

$$S_{\alpha, \beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}$$

Définition 11 (Taux swap) Le taux swap, évalué à l'instant t , noté $S_\beta(t)$, est le taux swap forward défini pour $T_\alpha = t$. Ainsi, nous parlons que de deux dates importantes : t et T_β . L'expression du taux Swap est la suivante :

$$S_\beta(t) = \frac{1 - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}$$

En supposant un calendrier de dates annuelles ($\tau_i = 1$), nous pouvons se ramener à une expression en fonction des coefficients d'escompte $DF(t, T_i)$ vu que les taux intérêts sont déterministes. L'expression précédente du taux swap $S_\beta(t)$ devient alors :

$$S_\beta(t) \cdot \sum_{i=1}^{\beta} DF(t, T_i) + DF(t, T_\beta) = 1$$

Nous remarquons bien que le taux swap n'est d'autre que le taux fixe d'un instrument financier (assimilé au Swap de taux "plain Vanilla") dont les cash-flows sont actualisés à l'aide de la courbe des taux ZC (Zéro-Coupon) avec un nominal de 1 et une valeur actualisée à $t=0$ qui est de 1.

Structure par terme des taux d'intérêt

La structure par terme des taux d'intérêt ou la courbe des taux est une fonction qui associe à une date donnée et à chaque maturité les taux d'intérêt correspondants. La compagnie d'assurance dispose en général de la *courbe de marché* qui est obtenue directement à partir des cotations de marché. L'exemple concret est celui de la courbe des taux SWAP Euribor qui représente les taux swap entre banques européennes.

La courbe des taux ZC est construite à partir de la courbe des taux swap Euribor couponnée selon mécanisme qui associe à chaque taux swap de maturité n noté $S(n)$ le taux d'intérêt ZC noté $r_{ZC}(n)$. Ce mécanisme repose sur les opérations prêt (sur n années) et emprunt (sur $n - 1$ années) intermédiaires pour avoir à la fin un instrument ZC comme l'illustre le tableau suivant :

Date	Emprunt	Prêt	Synthèse
0	$\sum_{i=1}^{n-1} S(n) / (1 + r_{ZC}(i))^i$	-1	$\sum_{i=1}^{n-1} c_n / (1 + r_{ZC}(i))^i - 1$
1	$-S(n)$	$S(n)$	0
2	$-S(n)$	$S(n)$	0
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	0	$1 + S(n)$	$1 + S(n)$

TABLE 2.1 – Étapes de conversion du taux swap au taux ZC

En actualisant les flux de la synthèse, du tableau susmentionné, à la date $t = 0$, nous trouvons :

$$\sum_{i=1}^{n-1} S(n) / (1 + r_{ZC}(i))^i - 1 + \frac{1 + S(n)}{(1 + r_{ZC}(n))^n} = 0$$

$$\text{Soit } r_{ZC}(n) = \left(\frac{1 + S(n)}{1 - \sum_{i=1}^{n-1} S(n) / (1 + r_{ZC}(i))^i} \right)^{1/n} - 1$$

En utilisant les coefficients d'escomptes $DF(0, i)_{1 \leq i \leq n-1}$, nous obtenons le résultat suivant :

$$r_{ZC}(n) = \left(\frac{1 + S(n)}{1 - \frac{S(n)}{S(n-1)} * (1 - DF(0, n-1))} \right)^{1/n} - 1$$

Instruments dérivés

Afin de calibrer ses processus de diffusion stochastiques (Cf. Chapitre 2, section 2) dans l'univers risqué-neutre, la compagnie d'assurance utilise les instruments dérivés les plus liquides sur le marché. Nous définirons les deux produits dérivés utilisés comme suit :

Définition 12 (Call Européen) Une option d'achat européenne est un produit dérivé qui octroie à son détenteur le droit et non l'obligation d'acheter un actif, dit "sous-jacent" de prix de marché S_t , avec un prix strike noté K et ce à la maturité T . Le pay-off d'un tel actif dérivé à la maturité T est de $(S_T - K)^+$. Son prix à la date t se présente comme suit :

$$C_t = D(t, T) \cdot E^Q \left((S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right)$$

Il est à noter que le prix du call européen C_t ne peut jamais être au-dessus du prix de l'actif sous-jacent S_t sinon il y aura une opportunité d'arbitrage en vendant le call européen et en achetant l'actif sous-jacent.

Définition 13 (Swaption) Une swaption payeuse est un contrat qui donne le droit à son détenteur d'entrer dans un swap payeur de strike K , à la date T_α , appelée maturité du swaption. La durée du swap $T_\beta - T_\alpha$ est appelée tenor. Le payoff actualisé d'une swaption payeuse est :

$$ps(t, T_\alpha, T_\beta, K) = D(t, T_\alpha) \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+$$

De manière analogue, une swaption est receveuse si le détenteur exerçant son option reçoit le taux fixe, son payoff actualisé est alors :

$$rs(t, T_\alpha, T_\beta, K) = D(t, T_\alpha) \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (K - F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i)) \right)^+$$

Par ailleurs, Nous définissons trois types de *Moneyness* des instruments dérivés utilisés pour le calibrage des processus de diffusion :

- Dans la monnaie (ITM) : Une option est dite dans la monnaie si l'exercice immédiat de l'option rapporte un cash-flow positif pour le détenteur. Ainsi, une option payeuse (respectivement receveuse) est donc dite dans la monnaie si le prix de l'actif sous-jacent est supérieur (respectivement inférieur) au strike.
- En dehors de la monnaie (OTM) : Une option est dite en dehors de la monnaie si l'exercice immédiat de l'option rapporte un cash-flow négatif pour le détenteur. Ainsi, une option payeuse (respectivement receveuse) est donc dite en dehors de la monnaie si le prix de l'actif sous-jacent est inférieur (respectivement inférieur) au strike. Nous parlons d'une option AFM (*Away-from-the money*) si elle est ITM ou OTM.
- A la monnaie (ATM) : Une option est dite à la monnaie si l'exercice immédiat de l'option rapporte un cash-flow nul pour le détenteur. Ainsi, une option payeuse ou receveuse est donc dite à la monnaie si le prix de l'actif sous-jacent est égal au strike.

Il est à noter qu'il y a un certain rapprochement entre une swaption et le contrat swap forward. La grande différence c'est le caractère obligatoire d'exécution du contrat swap forward alors qu'une swaption octroie le droit et non pas l'obligation d'exécution à son détenteur, ce qui laisse le payoff de cette dernière actualisée de manière stochastique jusqu'à la date T_α puis de façon déterministe entre t et T_α alors que pour le contrat swap forward l'actualisation est faite de façon stochastique jusqu'à la date t .

2.1.3 Changement de numéraire

Après avoir introduit les notions fondamentales financières qui nous servira après pour la définition des différents processus en particulier le modèle LMM+, il serait intéressant d'introduire la notion de changement de numéraire facilitant l'évaluation et la détermination des formules fermées des prix des produits dérivés.

Par définition, un numéraire est n'importe quel actif strictement positif ne payant pas de flux dans les dates intermédiaires en fonction duquel un instrument financier $S_{(t)}$ peut être exprimé au lieu des unités monétaires. Par exemple, le compte bancaire ou le cash $B_{(t)}$ (Sous-section 2.1.2), ainsi que l'obligation zéro-coupon $P(t, T)$, évaluée en t , de maturité T , peuvent être considérés comme des numéraires.

Théorème (Changement de numéraire)

Si nous supposons qu'il existe un numéraire N et une probabilité Q^N équivalente à la probabilité historique P telle que le prix de n'importe quel instrument financier sans paiement intermédiaire S rapporté à N soit une martingale sous Q^N , nous avons alors :

$$\frac{S_t}{N_t} = \mathbb{E}^{Q^N} \left[\frac{S_T}{N_T} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T \quad (**)$$

Soit U un numéraire choisi arbitrairement. Alors il existe une probabilité Q^U équivalente à P telle que le prix de n'importe quel instrument financier Y rapporté à U soit une martingale sous Q^U , i.e. :

$$\frac{Y_t}{U_t} = \mathbb{E}^{Q^U} \left[\frac{Y_T}{U_T} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T$$

Nous définissons la densité de Radon-Nikodym associée à la probabilité Q^U comme suit :

$$\frac{dQ^U}{dQ^N} = \frac{U_T}{U_0} \frac{N_0}{N_T}$$

Ainsi, par la densité de Radon-Nikodym, nous pouvons passer d'un univers à un autre (changement de numéraire) comme l'illustre la formule suivante :

$$\mathbb{E}^{Q^N} \left[\frac{S_T}{N_T} \right] = \mathbb{E}^{Q^U} \left[\frac{U_0 S_T}{N_0 U_T} \right]$$

Par conséquent, le prix de n'importe quel instrument financier divisé par un numéraire est une martingale sous la probabilité associée à ce numéraire. Le choix du numéraire permet de définir l'univers de pricing de l'instrument financier. Pour notre cas d'études, nous définirons le cadre de l'univers risque-neutre.

Univers risque-neutre :

Par construction, l'univers risque-neutre est l'univers dont le numéraire est le compte du marché monétaire $B(t)$.

Considérons le processus $(S_t/B(t))_{t \geq 0}$. Nous rappelons que pour tout $t \geq 0$, $B(t) = e^{\int_0^t r_s ds}$ tout en supposant que $B(0) = 1$. La valeur dudit processus s'exprime alors comme suit :

$$\frac{S_t}{B(t)} = e^{-\int_0^t r_s ds} . S_t$$

L'équation (**) devient alors dans le cadre de l'univers risque-neutre et en se plaçant à $t=0$:

$$S_0 = \mathbb{E}^{Q^B} \left[e^{-\int_0^T r_t dt} . S_T \right]$$

En posant $\bar{r} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T r_t dt$, nous avons alors :

$$S_0 = \mathbb{E}^{Q^B} \left[e^{-\bar{r} \cdot T} . S_T \right]$$

Cette équation montre que, pour un instrument dérivé de taux par exemple, nous pouvons se placer dans l'univers risque-neutre et simuler le taux sans risque. À chaque valeur du taux simulé, le payoff est calculé à la maturité T et actualisé selon le taux sans risque moyen de la trajectoire considérée, ce qui rend la valorisation dudit instrument plus explicite.

2.2 Les modèles de diffusion des indices Financiers

Dans cette partie, nous introduirons les modèles de projection des divers indices financiers servant à établir la table de scénarios économiques de la compagnie d'assurance à chaque date d'arrêté et par conséquent à modéliser ses interactions Actif-Passif après usage du modèle ALM (Cf.Chapitre 8).

2.2.1 Modèle LMM+ :

Le *Libor Market Model plus* (LMM+) est un modèle multifactoriel de la structure par terme modélisant les taux forwards $f_k(t) = F(t, T_k, T_{k+1})$ des taux nominaux tout au long de l'horizon de projection du GSE risque-neutre Moody's. L'équation différentielle stochastique de ce modèle se présente comme suit ([Ana17]) :

$$\frac{df_k(t)}{f_k(t) + \delta} = drift + \sqrt{V(t)} \cdot g_k(t) \sum_i \beta_k^i \cdot dW_t^i$$

Avec :

- δ est le facteur de déplacement, ce paramètre contrôle la forme de la distribution et permet la génération de taux négatifs. Plus ce paramètre est important plus nous tendons vers une distribution normale. De plus, il permet de contrôler la relation entre le niveau des taux forwards et leurs volatilités.

- la volatilité stochastique $V(t)$ permet de capturer les volatilités implicites des différents strikes de la Swaption Euro (Cf. Annexe A) et gère la volatilité sur les queues de distribution (Prise en compte de l'effet Smile). Elle est régie par le modèle CIR : $dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \epsilon\sqrt{V(t)}dZ_t$, tel que :

- κ est la vitesse de retour à la moyenne du modèle CIR
- θ est la moyenne à long-terme de $V(t)$.
- ϵ est la volatilité, du modèle CIR, de $V(t)$.

- $g_k(t)$ est la volatilité déterministe qui dépend de la durée restante jusqu'à l'échéance $T_k - t$, elle est modélisée en utilisant la forme d'une fonction de Rebonato. Le rôle de cette fonction est de lisser la transition des volatilités de chaque pas de temps à l'autre et d'avoir une baisse de la volatilité pour atteindre celle qui est cible (fixée en amont). Les nappes de volatilités des swaptions Euro tendent à la baisse quand nous augmentons la maturité que ceci soit à la monnaie ou hors la monnaie (Cf. Annexe A). La fonction de Rebonato permet de reproduire de nombreuses formes selon ses quatre paramètres (a, b, c et d) : $g_k(t) = (a + b(T_k - t)) e^{-c(T_k - t)} + d$.

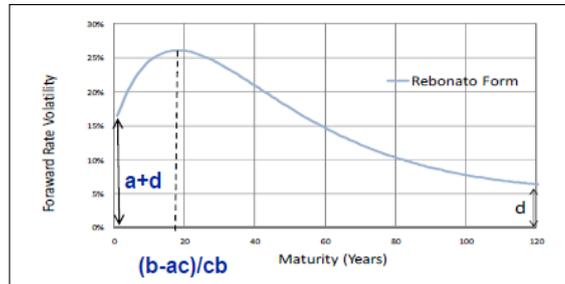


Fig. 2.2 – Allure de la fonction de Rebonato de la volatilité déterministe

-les "Factor loadings" β_k^i représentent l'exposition des taux forwards nominaux aux shock-drivers guidant leurs dynamiques. L'utilité de ces facteurs réside dans la simplification du calcul de la corrélation entre les différents taux forwards des différentes maturités. En effet, En prenant $i \in \{1, 2, 3\}$, nous obtenons une corrélation qui ne dépend ni de la volatilité stochastique ni celle déterministe (propriété de non-corrélation des composantes principales dans l'ACP ci-dessous) :

$$\rho_{kl} = \beta_k^1(t) \cdot \beta_l^1(t) + \beta_k^2(t) \cdot \beta_l^2(t) + \beta_k^3(t) \cdot \beta_l^3(t)$$

En théorie, nous devons prendre en considération autant de facteurs que nous avons de taux forwards nominaux ; soit pour notre cas 12 facteurs. L'étude de la structure de dépendance entre les différentes maturités montrera qu'une réduction de rang à trois facteurs n'entraînera pas une différence remarquable sur la matrice de corrélation des taux forwards nominaux. Ainsi nous résumerons l'incertitude du Modèle LMM+ en 3 facteurs ou shock-drivers.

Réduction des facteurs (ACP) :

l'ACP (Analyse en composantes principales) est une méthode de réduction de dimension permettant de passer à un nouvel espace avec moins de facteurs non corrélés et donc d'avoir un modèle plus interprétable. Il s'agit alors d'une approche par laquelle nous synthétisons l'information contenue dans l'ensemble des variables initiales corrélées entre elles.

Cette méthode consiste à utiliser le théorème spectral pour diagonaliser la matrice de covariance γ dans une base orthonormée, en supposant que la matrice de covariance est PSD (symétrique semi-définie positive).

$$\gamma = P.D.P^T$$

Avec D une matrice diagonale composée des valeurs propres λ de γ et P est la matrice des vecteurs propres correspondant à ces valeurs propres. Étant donné que γ est PSD (Cf. Annexe D), nous pouvons également écrire :

$$\gamma = P.\sqrt{D}(P.\sqrt{D})^T = A.A^T$$

Le principe de l'ACP est de retenir uniquement les d valeurs propres de D qui expliquent le plus la variance et leurs vecteurs propres. Les $n - d$ valeurs propres restantes sont égales à 0 et leurs vecteurs propres associés sont nuls au sens vectoriel. D^d représente ainsi la matrice diagonale composée des nouvelles valeurs propres et P^d la matrice des vecteurs propres qui lui est associée. En notant $B = P^d.\sqrt{D^d}$, nous obtenons une nouvelle matrice $\gamma^d = B.B^T$ avec $\text{rang}(\gamma^d) = d \leq n$, et n est la dimension de la matrice carré γ .

γ^d est une bonne approximation de la matrice γ par l'ACP ([BEN17]). En choisissant $d = 3$ et un historique journalier de 5 ans des taux swap Euribor, nous avons la somme des trois premières valeurs propres qui représente un pourcentage d'inertie de 99.6% de la somme des valeurs propres et donc l'ACP permet d'expliquer 99.6% de la variance totale. Nous rappelons que la somme de la variance des variables initiales corrélées de marché est égale à la somme de la variance des composantes principales non corrélées prises en totalité. Nous présentons les résultats obtenus dans le tableau synthétique suivant :

Valeur propre	1 ^{ere}	2 ^{eme}	3 ^{eme}	Total
en valeur	$8.91e^{-5}$	$1.19e^{-5}$	$1.36e^{-6}$	$1.02e^{-4}$
en %	86.6%	11.6%	1.3%	99.6%

TABLE 2.2 – Résultats de l'ACP

Les trois facteurs expliquant le plus la variabilité des taux d'intérêts nominaux se présentent comme suit :

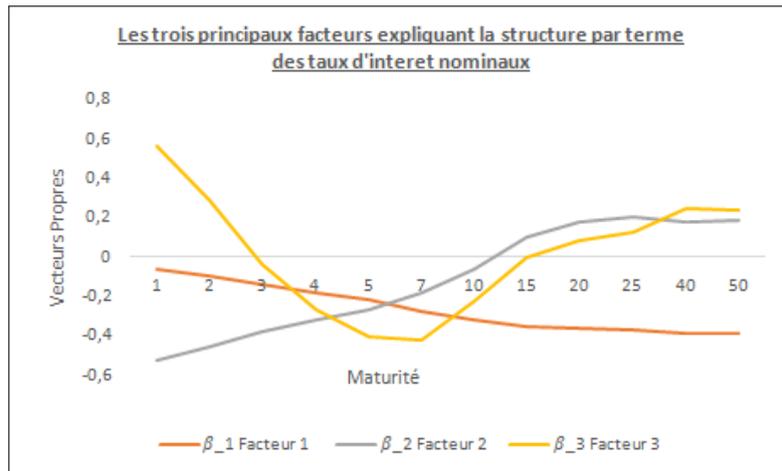


Fig. 2.3 – Les trois facteurs les plus importants régissant la structure par terme des taux d’intérêts nominaux

La figure 2.3 représente les "factor loadings" définis comme étant les expositions ou les sensibilités des taux d’intérêts forwards des différentes maturités par rapports aux trois facteurs les plus importants. Pour le facteur 1, nous remarquons qu’une variation positive de ce facteur entraine une baisse de tous les taux considérés, il s’agit du facteur **niveau**. Pour le deuxième facteur, sa variation positive entraine une baisse des taux à court terme et une hausse des taux à long terme; nous parlons du facteur **pente**. Le dernier facteur caractérise la **courbure** de la structure par terme des taux d’intérêts car quand il augmente les taux à court et long terme augmentent alors que les taux à moyen terme baissent.

En se basant sur la formule de calcul des corrélations de Pearson dans l’Annexe B, nous obtenons respectivement ρ et ρ^d qui sont respectivement les matrices de corrélation avant et après usage de l’ACP et qui se présentent comme suit :

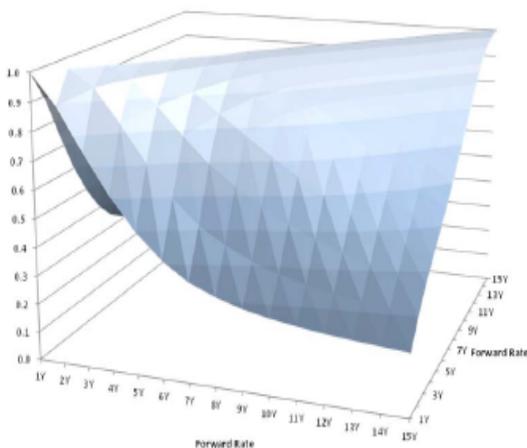


Fig. 2.4 – Matrice de corrélation historique.

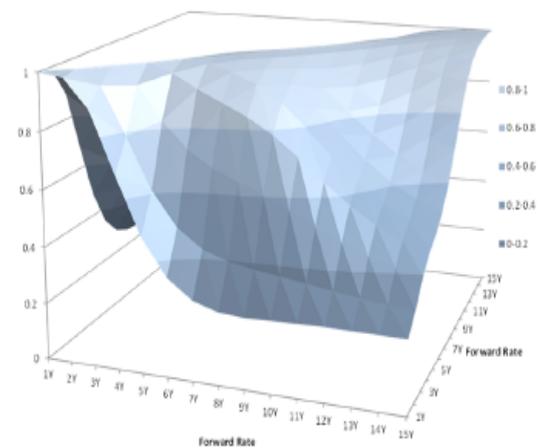


Fig. 2.5 – Matrice de corrélation après ACP.

Nous remarquons qu’il y a un grand rapprochement entre les deux matrices de corrélations sauf que la nappe des corrélations après usage de l’ACP est légèrement moins lissée au niveau du contour et au niveau de quelques surfaces (figure 2.5). Par ailleurs, l’analyse de la corrélation historique des différentes maturités ZC montre que les taux à court terme et à long terme ne sont parfaitement corrélés (faibles valeurs enregistrées comme illustré dans la figure 2.4) et donc il est pertinent de ne pas se servir d’une seule volatilité, mais plutôt de modéliser les différents facteurs avec différentes volatilités, ce qui est bien respecté par le modèle LMM+. Ainsi, nous résumons les raisons appuyant l’usage du modèle LMM+ :

- Modèle réaliste qui reproduit bien la courbe des taux initiale vu qu'il prend en compte plusieurs paramètres ($V(t)$, $g_{\bar{k}}(t)$, $\delta \dots$).
- Modèle multifactoriel qui reproduit bien la corrélation imparfaite entre les différentes maturités, ce qui n'est pas le cas des modèles des taux courts ou la corrélation est parfaite entre les taux des différentes maturités, les paramètres ne sont nombreux et la volatilité par maturité, tenor ou strike n'est pas facilement captée.

Courbe des taux solvabilité II

Constituant l'un des points d'ancrage du GSE risque-neutre Moody's, la courbe des taux solvabilité II ou zéro-coupon réglementaire doit être répliquée le mieux possible par le processus de diffusion stochastique choisi par la compagnie d'assurance pour les taux nominaux. Comme précédemment mentionné, le LMM+ reproduit bien cette courbe vu ses propriétés susmentionnées. Cette courbe est communiquée par EIOPA mensuellement et est construite à partir de la courbe des taux swap Euribor à laquelle viennent s'appliquer :

- l'ajustement pour risque de crédit appelé CRA (*Credit Risk Adjustment*) : représente le spread de crédit présent dans la courbe des taux swap Euribor et correspond à la différence entre le taux Euribor 3 mois (taux calculé au jour le jour représentant les transactions interbancaires pour une maturité de 3 mois) et le taux *OIS* 3 mois (il s'agit d'un Swap où le taux fixe est échangé contre la moyenne géométrique du taux *overnight* qui est l'*EONIA* pour l'union européenne pendant 3 mois). Actuellement, le CRA est de 10 bps.
- l'ajustement pour volatilité ou *Volatility Adjustment* (VA) : correspond à une prime appliquée à l'ensemble de la courbe des taux visant à neutraliser l'effet des spreads d'illiquidité des actifs obligataires du bilan prudentiel.

La maturité 20 ans pour les taux swap Euribor est considérée comme le dernier point liquide de la courbe ou *Last Liquid Point* (LLP). À partir du LLP, la courbe des taux est extrapolée sur une période de 40 ans par la méthode de *Smith Wilson* avec une convergence vers l'*Ultimate Forward Rate* (UFR) calculé chaque année et estimé à 3,6% pour l'exercice 2021.

La courbe des taux swap Euribor est découponnée après pour obtenir une structure par terme des taux d'intérêt ZC (Cf.sous-section 2.1.2) définie par EIOPA.

Calibrage du modèle :

Afin de calibrer le Modèle LMM+, les paramètres à fitter sont les suivants :

- Les paramètres de la fonction de Rebonato régissant la volatilité déterministe : a, b, c, d calibrés trimestriellement par Moody's.
- Les paramètres de la volatilité stochastique : κ, θ, ϵ calibrés de manière biennale par Moody's.
- La corrélation ρ entre le brownien à court terme du processus LMM+ et celui de la volatilité stochastique. Ce paramètre est calibré aussi de manière biennale par Moody's et sert à contrôler la volatilité de la Swaption Euro en situation AFM.

Pour un calcul Market-Consistent, le calibrage consiste à minimiser la grandeur suivante :

$$\arg \min_{\phi} \left[\sum_{i=1} w_i \cdot h \left(\sigma_i^{Market}, \sigma_i^{\text{estimé}}(\phi) \right) \right]$$

Avec :

- h est la fonction d'écart devant être choisie pour définir l'erreur que nous visons à minimiser. Dans notre cas de figure, nous choisirons l'erreur quadratique absolue et donc $h(x, y) = (x - y)^2$.
- w_i correspond au poids associé à chaque swaption Euro selon maturité, strike ou tenor choisi. Ce poids sert principalement à prendre en compte la liquidité des swaptions Euro qui sont de moins en moins liquide quand nous nous plaçons en situation AFM. Afin de contextualiser le calibrage dans le cadre solvabilité II, nous pourrions utiliser comme pondération la sensibilité de l'Actif net réévalué (NAV) de la compagnie d'assurance à chaque volatilité implicite ou par surface desdites volatilités. Dans notre cas, nous supposons que ces poids sont unitaires.
- $\phi = (a, b, c, d, \kappa, \theta, \epsilon, \rho)$ représente la séquence des paramètres à estimer.
- $\sigma_i^{\text{estimé}}$ sont les volatilités implicites estimées suite à l'usage du modèle LMM+ pour les taux nominaux forwards.
- σ_i^{Market} sont les volatilités implicites spot du marché des swaptions Euro que l'Annexe A représente et dont l'allure est comme suit :

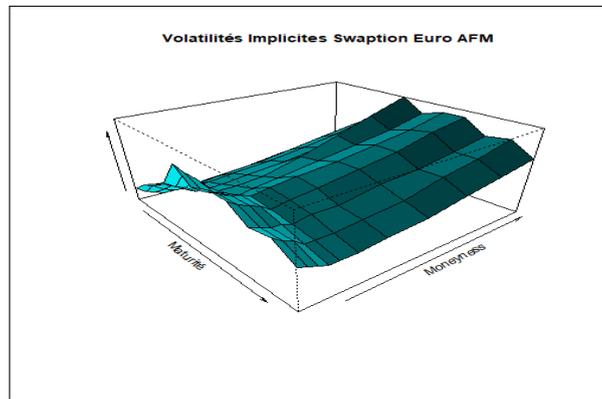


Fig. 2.6 – Volatilités Implicites de la Swaption Euro AFM

Nous pouvons bien remarquer dans la figure 2.6 qu'il y a une déformation de la volatilité implicite (tendance haussière) quand les swaptions sont AFM, une tendance légèrement baissière quand nous augmentons la maturité, d'où l'intérêt de l'utilisation du modèle LMM+ qui capte cet effet Smile.

Par ailleurs, pour se ramener aux volatilités implicites, il existe une bijection entre lesdites volatilités et les prix des instruments dérivés sur le marché que nous pouvons modéliser par plusieurs processus. Cette bijection utilise la formule de Bachelier qui suppose une distribution gaussienne dudit actif :

Modèle de Bachelier :

Nous supposons que sous Q la probabilité risque-neutre l'actif $\{S_t, t \geq 0\}$ satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma dW_t$$

où r est le taux sans risque supposé constant pour simplification, σ est la volatilité constante, et $\{W_t, t \geq 0\}$ est le mouvement brownien. Pour $0 \leq t \leq T$:

$$S_T = S_t e^{r(T-t)} + \sigma \int_t^T e^{r(T-s)} dW_s$$

Donc,

$$\begin{aligned} S_T | S_t &\sim N \left(S_t e^{r(T-t)}, \frac{\sigma^2}{2r} (e^{2r(T-t)} - 1) \right) \\ &\sim S_t e^{r(T-t)} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2r} (e^{2r(T-t)} - 1)} \xi \end{aligned}$$

tel que ξ est une variable de loi normale centrée et réduite.

L'actif sous-jacent dans notre cas de figure est le taux forward nominal. Grace au modèle de Bachelier et selon la définition 13 de la sous-section 2.1.2, la valeur actualisée d'une swaption Euro (receveuse par exemple) de maturité T_α et de Tenor $T_\beta - T_\alpha$ peut-être exprimée comme suit :

Pour $T \in [T_\alpha, T_\beta]$:

$$RS_t = E^Q (rs(t, T_\alpha, T_\beta, K) | \mathcal{F}_t) = RS_t(T_\alpha, T_\beta, \sigma, r, K)$$

Ainsi, en ayant le prix de marché de la swaption Euro et pour des paramètres K, r, T_α, T_β connus, nous pouvons bien remarquer une bijection entre les prix et volatilités implicites de l'instrument dérivé en question.

Après présentation et analyse du modèle LMM+, il est à noter que l'optimisation Market-Consistent qui portera sur la matrice de corrélation des vecteurs browniens guidant la dynamique des différents indices financiers ne prendra pas en compte la corrélation entre les taux nominaux des différentes maturités. Ainsi, la dynamique des taux nominaux sera présentée seulement par le brownien à court terme du modèle LMM+ dans la matrice de corrélation. Ce choix est justifié par la part importante d'information incorporée par ce vecteur brownien suite à l'analyse ACP faite et aussi pour avoir une approche plus simplifiée qui sera mise à plat dans la deuxième partie.

2.2.2 SVJD :

Le Modèle SVJD(Stochastic Volatility Jump Diffusion) est utilisé pour la modélisation des indices respectifs CAC40 et Eurostoxx50. Il est la combinaison du modèle de **Heston à volatilité stochastique** et le modèle à **sauts de Merton**. Ce modèle vient pour corriger les limites du modèle de B&S à savoir :

- Effet Smile de la volatilité : L'observation des volatilités implicites sur le marché action montre une déformation des dites volatilités en situation AFM (Cf. Annexe A), alors que le modèle de B&S suppose une volatilité constante. Le modèle SVJD capte bien cet effet Smile.
- La distribution des rendements des actions est asymétrique décalée à gauche (skewness négatif) alors que la distribution des rendements qui découle du modèle B&S est gaussienne.
- La distribution des rendements des actions est leptokurtique (plus pointue avec des queues plus épaisses que la distribution gaussienne).
- L'observation de l'historique des prix des actions montre un comportement erratique avec de fortes variations par rapport à la moyenne alors que le modèle B&S suppose une distribution gaussienne et donc des prix qui ne s'écartent que peu de leur moyenne.

Modèle de Heston

En notant ce premier processus par S_t^{SV} , ce dernier vise à capturer la volatilité stochastique des prix de l'indice action. Son expression est comme suit :

$$\frac{dS_t^{SV}}{S_t^{SV}} = \left(\mu - \frac{v(t)}{2} \right) dt + \sqrt{v(t)} dW_1$$

Avec :

- μ prime de risque qui vaut 0 en univers risque-neutre ;
- W_1 le mouvement brownien qui guide la dynamique du rendement de l'indice action (CAC40 et Eurostoxx50) ;
- $v(t)$ variance stochastique du processus S_t^{SV} , qui suit un processus de retour à la moyenne de type Cox-Ingersoll-Ross (CIR) :

$$dv(t) = a(b - v(t)) + \varepsilon\sqrt{v(t)}dW_2$$

Avec :

- a vitesse de retour à la moyenne de $v(t)$
- b moyenne long terme de $v(t)$
- ε volatilité du processus de diffusion $v(t)$ ($v(0)$ est une donnée importante pour le calibrage du modèle SVJD)

Les deux mouvements browniens W_1 et W_2 sont corrélés négativement ($\rho \leq 0$) pour prendre en considération l'effet de levier de volatilité qui consiste à supposer que quand le prix indice action monte la volatilité baisse et vis-versa, ce qui laisse les investisseurs s'attendre à un risque plus important après lors de la hausse de la volatilité.

Modèle de Merton

En notant ce deuxième processus par S_t^{JD} , ce dernier vise à prendre en compte à la fois les sauts du prix de l'indice action modélisés par une loi lognormale et le nombre d'occurrence des de ces sauts moyennant un processus de Poisson. Son expression est comme suit :

$$d \ln (S_t^{JD}) = -\lambda \bar{\mu} dt + \ln(J)dN(t)$$

Avec :

- λ représente la fréquence des sauts ;
- $N(t)$ le nombre aléatoire de sauts sur l'intervalle $[0, t]$. Le nombre N suit une loi de Poisson de paramètre λt ;
- J est une variable aléatoire qui suit une loi log-normale de moyenne μ_J et de variance σ_J^2 , c'est-à-dire $\ln(J) \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$;
- $\bar{\mu} = \exp\left(\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}\right) - 1$.

Ainsi, le prix de l'indice action est modélisé selon le processus SVJD comme suit :

$$S_t = S_t^{SV} * S_t^{JD}$$

Avec $S_0^{SV} = S_0$ et $S_0^{JD} = 1$.

La figure suivante illustre les deux processus préalablement mentionnés et met en valeur le rôle de chacun dans la modélisation de l'indice action :

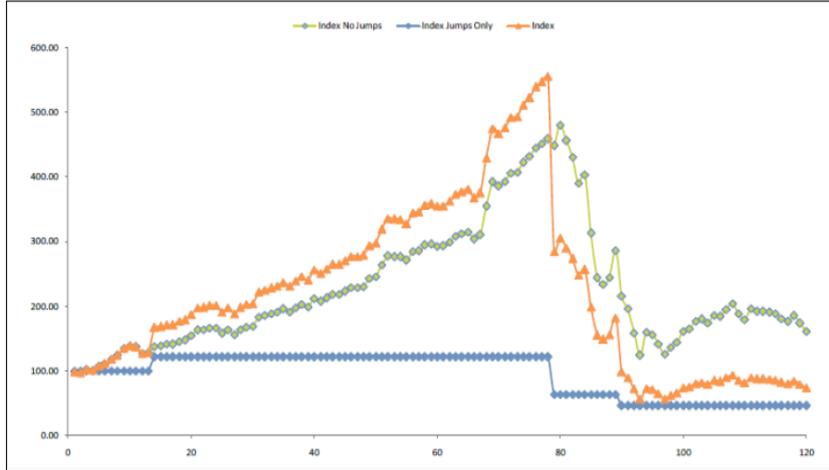


Fig. 2.7 – Les processus de diffusion de l'indice Action (Modèle SVJD)

Il est à noter que lors de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's dans la deuxième partie du présent mémoire, les indices actions CAC40 et Eurostoxx50 seront présentés respectivement par les browniens guidant la dynamique de leurs rendements sans toutefois prendre en compte le brownien du processus CIR vu qu'ils sont les principaux browniens mais aussi pour avoir une approche plus simplifiée.

Calibrage du modèle :

De façon analogue au modèle LMM+ préalablement analysé, calibrer le modèle SVJD revient à fitter la séquence des paramètres $\Gamma = (a, b, \varepsilon, \rho, \lambda, \mu_J, \sigma_J)$. Pour être Market-Consistent, ceci revient à minimiser la grandeur suivante :

$$\arg \min_{\Gamma} \left[\sum_{i=1} w_i \cdot (\sigma_i^{Market} - \sigma_i^{\text{estimé}}(\Gamma))^2 \right]$$

Avec :

- $\sigma_i^{\text{estimé}}$ sont les volatilités implicites estimées suite à l'usage du modèle SVJD pour l'indice action.
- σ_i^{Market} sont les volatilités implicites spot du marché du call d'actif sous-jacent l'indice Action (CAC40 ou Eurostoxx50) et qui sont présentées dans l'Annexe A.

D'après la définition 12 de la sous-section 2.1.2, la valeur actualisée d'une option d'achat européenne peut-être exprimée comme suit :

$$C_t = e^{-r(T-t)} E^Q \left((S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right) = C_t(K, r, \sigma, T)$$

Avec σ est la volatilité de l'actif sous-jacent qui est constante et r est le taux sans risque supposé constant aussi.

Ainsi, en utilisant la bijection entre les volatilités implicites et les prix du marché connus du Call européen et pour des paramètres K, r, T connus aussi, nous pouvons estimer les volatilités implicites du Call Européen.

2.2.3 Modèle Black & Scholes (B&S) :

Le modèle de Black & Scholes (B&S) est un modèle log-normal à volatilité constante utilisé par la compagnie d'assurance pour la diffusion de certains indices financiers : immobilier, "Private Equity" et "Hedge Fund". Soit $\{I(t), 0 \leq t \leq T\}$ le cours de l'indice à l'instant t . Le modèle de B&S suppose une dynamique régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dI_t = \mu I_t dt + \sigma I_t dB_t$$

avec $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard sous la probabilité risque-neutre. En appliquant le lemme d'Itô au processus $\ln(I_t)$, nous obtenons :

$$\ln\left(\frac{I_t}{I_0}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t$$

Avec μ rendement espéré (taux sans risque), σ volatilité de l'indice.

Ainsi, les rendements logarithmiques (y compris loyer ou dividende) de I entre 0 et $t \in [0, T]$ sont de tendance $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ et de coefficient de diffusion σ . Par définition du mouvement brownien standard, pour $0 \leq s < t \leq T$, $(\ln(I_t) - \ln(I_s))$ suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - s), \sigma^2(t - s)\right)$.

Dans ce cas de figure, le calibrage du modèle est fait sur les données historiques de profondeur 5 ans et non sur des instruments dérivés du marché comme le cas du modèle LMM+ et SVJD qui restent des modèles spécifiques et la nature de leur paramétrisation permet un tel calibrage pour être Market-Consistent.

2.2.4 Modèle de Vasicek à 1 facteur :

Le logarithme du dividende d'un indice action, immobilier, Private Equity ou Hedge Fund suit un processus de diffusion stochastique avec retour à la moyenne de type Vasicek à 1 facteur :

$$d \ln(y_t) = \alpha (\beta - \ln(y_t)) dt + \gamma dB_t$$

Avec :

- α vitesse de retour à la moyenne du processus de diffusion $\ln(y_t)$;
- β moyenne long terme de $\ln(y_t)$;
- γ volatilité du processus de diffusion $\ln(y_t)$.

Pour l'indice action, la compagnie d'assurance récupère les paramètres estimés de Moody's, alors que pour les autres indices, le calibrage est fait sur l'historique de 5 ans chaque trimestre sauf pour le paramètre β qui est une moyenne long terme sur 25 ans revue chaque fin d'année.

2.2.5 GLMM :

La modélisation des taux réels est faite moyennant le modèle GLMM (Gaussian Libor Market Model) mensuel qui est compatible avec un calibrage Market-Consistent et permet une diffusion des taux négatifs ce qui répond à la réalité économique. Son équation différentielle stochastique se présente comme suit :

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T) + \frac{1}{\Delta}} = drift + \psi(t, T) \cdot \sum_i \beta_i(t, T) \cdot dW_t^i$$

avec :

- $\frac{1}{\Delta}$ représente le "Displacement Parameter" du modèle, avec Δ est le tenor du taux forward $F(t, T)$;
- $\psi(t, T)$ représente la volatilité tout au long de l'intervalle $[t, T]$;
- $\beta_i(t, T)$ est le Factor loading qui représente l'exposition du taux forward $F(t, T)$ au risk driver dW_t^i ;

La compagnie d'assurance n'utilise pas directement les taux réels dans le modèle ALM (Cf.chapitre 8), mais leur modélisation sert à calculer le taux d'inflation qui est la différence entre le taux nominal à court terme et le taux réel à court terme.

De façon analogue au Modèle LMM+, les taux réels seront représentés par un seul mouvement brownien dW_t^1 dans la matrice de corrélation des browniens à optimiser à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's (Cf.Partie 2).

Le calibrage du modèle GLMM mensuel est fait moyennant la minimisation de l'erreur quadratique absolue entre les taux générés par le GSE risque-neutre Moody's et les taux historiques qui sont calculés comme différence entre les taux nominaux (les taux swap Euribor) et l'inflation.

Deuxième Partie :

Optimisation Market-Consistent de la
matrice de Correlation

Chapitre 3

Matrice de Corrélation du Marché

L'utilisation de la corrélation comme mesure de dépendance entre les différents indices financiers est une approche très courante dans les modèles financiers notamment dans le générateur de scénarios économiques risque-neutre. L'Annexe B du présent mémoire définit avec plus de détails le principe et le fondement de cette grandeur.

Cependant, notre problématique consiste à objectiver une matrice de corrélation instantanée spot calibrée sur les prix du marché. La difficulté réside dans le fait de trouver une fonction objective qui lie les prix du marché, la matrice de corrélation instantanée spot des indices financiers et les paramètres des processus de diffusion stochastiques de chacun desdits indices.

C'est ainsi que nous nous penchons vers une approche dans l'univers historique en estimant la valeur des corrélations du marché à partir d'un historique de données, ce qui est la pratique la plus adoptée dans le monde de l'assurance.

3.1 Données utilisées et estimations

Les indices modélisés doivent être représentatifs du portefeuille de la compagnie d'assurance. Pour les calibrer et définir une matrice de corrélation marché, nous disposons des données de la plateforme "Bloomberg" dont nous avons pris une fenêtre de temps de 5 ans de profondeur arrêtée au 31/12/2020 :

- Le **CAC 40** y compris dividende, que nous noterons après $S_{(t)}^1$, qui est déterminé à partir des cours de quarante actions cotées en continu sur Euronext Paris. Cet indice reflète en principe la tendance globale de l'économie des grandes entreprises françaises et leur liste est revue régulièrement pour maintenir cette représentativité.
- L'**Euro Stoxx 50** y compris dividende, que nous noterons après $S_{(t)}^2$, constitue la référence des indices boursiers au sein de la zone euro. Il est constitué de 50 sociétés en se basant sur leur capitalisation boursière au sein de la zone euro.
- L'indice Immobilier, que nous noterons après $P_{(t)}$, est calculé comme étant une moyenne pondérée de l'indice **SIIC** (Société d'investissement immobilier cotée) et l'indice **EHDEC IEIF** (Institut d'épargne immobilière et foncière), qui mesure la performance des transactions des fonds immobiliers non cotés, par les poids respectifs des investissements en immobilier coté et non coté de la compagnie d'assurance.
- L'indice **HFRX** (Global Hedge Fund), que nous noterons après $HF_{(t)}$, qui est un indice universel calculé comme moyenne, tenant en compte tous les hedges funds, pondérée respectivement par leurs actifs.
- L'indice **PrEQIn** (Private Equity Quarterly Index), que nous noterons après $PE_{(t)}$, est un indice qui mesure la performance des transactions de 3900 fonds Private Equity agrégés, ce qui permet aux investisseurs de comparer la performance de leur investissement en PE avec celle du portefeuille du marché.
- Le taux nominal à court terme, que nous noterons après $R_{(t)}^n$, est calculé sur la base du taux Swap **Euribor** (European Interbank Offered rate). Le taux Euribor est diffusé quotidiennement pour diverses échéances et calculé à partir d'un taux moyen auquel un échantillon de grandes banques établies en Europe échangent. Pour notre analyse, nous nous baserons sur l'échéance d'un mois.

- Le taux réel à court terme, que nous noterons après $R_{(t)}^r$, est calculé comme différence entre le taux nominal à court terme et le taux d'inflation **EHPIEU** donné par Bloomberg représentant le niveau d'inflation dans la zone Euro.

L'étude vise à mesurer la corrélation entre rendements d'indices vu qu'ils permettent de mieux estimer la sensibilité des variations d'un indice par rapport aux variations d'un autre. Nous noterons par T nombre d'observations durant la fenêtre de l'historique des données jusqu'au 31/12/2020. Les séries de rendements suivantes sont déterminées :

- $(\ln(\frac{X_{k+1}}{X_k}))_{k \in \{0, \dots, T-1\}}$, représente les log-rendements des indices respectifs CAC40, Euro50, Immobilier, HF et PE.
- $(X_{(k+1)} - X_{(k)})_{k \in \{0, \dots, T-1\}}$, représente les variations des taux respectives pour les taux nominaux et réels court terme.

Ainsi, nous calculons l'estimateur du coefficient de corrélation linéaire de Pearson (Cf. Annexe B) deux à deux des différentes grandeurs susmentionnées (soit X et Y deux variables aléatoires représentant les grandeurs ci-haut) :

$$\hat{\rho}_{XY} = \frac{\hat{\sigma}_{XY}}{\hat{\sigma}_X \cdot \hat{\sigma}_Y}$$

, avec :

- $\hat{\sigma}_{XY} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T (x_i - \bar{X}) \cdot (y_i - \bar{Y})$, estimateur empirique de la covariance entre les deux variables aléatoires X et Y
- $\hat{\sigma}_X = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T (x_i - \bar{X})^2}$, estimateur empirique de l'écart-type de la variable aléatoire X
- $\hat{\sigma}_Y = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T (y_i - \bar{Y})^2}$, estimateur empirique de l'écart-type de la variable aléatoire Y
- $\bar{X} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T x_i$, moyenne empirique de la variable aléatoire X
- $\bar{Y} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T y_i$, moyenne empirique de la variable aléatoire Y

Nous obtenons une matrice de Corrélations de marché se présentant comme suit :

	CAC40	Euro50	Immo	HF	PE	Tx-nom-cT	Tx-reel-cT
CAC40	1	0.980	0.298	0.761	0.505	-0.126	-0.061
Euro50	0.980	1	0.310	0.768	0.444	-0.124	-0.050
Immo	0.298	0.310	1	0.291	0.139	-0.307	0.106
HF	0.761	0.768	0.291	1	0.722	-0.327	0.056
PE	0.505	0.444	0.139	0.722	1	0.455	-0.373
Tx-nom-cT	-0.126	-0.124	-0.307	-0.327	0.455	1	-0.183
Tx-reel-cT	-0.061	-0.05	0.106	0.056	-0.373	-0.183	1

3.2 Visualisation des résultats

Afin de mettre en valeur les résultats obtenus avant, un focus a été effectué sur les corrélations des rendements des indices de marché suivants :

Les grandes lignes à souligner se déclinent comme suit :

- Une forte corrélation est remarquée entre le CAC40 et Euro50, ce qui est traduit par une forte concentration des observations autour de la droite de régression linéaire (le scatter plot situé au 2^{me} quadrant en bas à gauche) ;
- La distribution empirique des deux indices CAC40 et Euro50 est proche d'une loi normale avec une faible présence des outliers ;

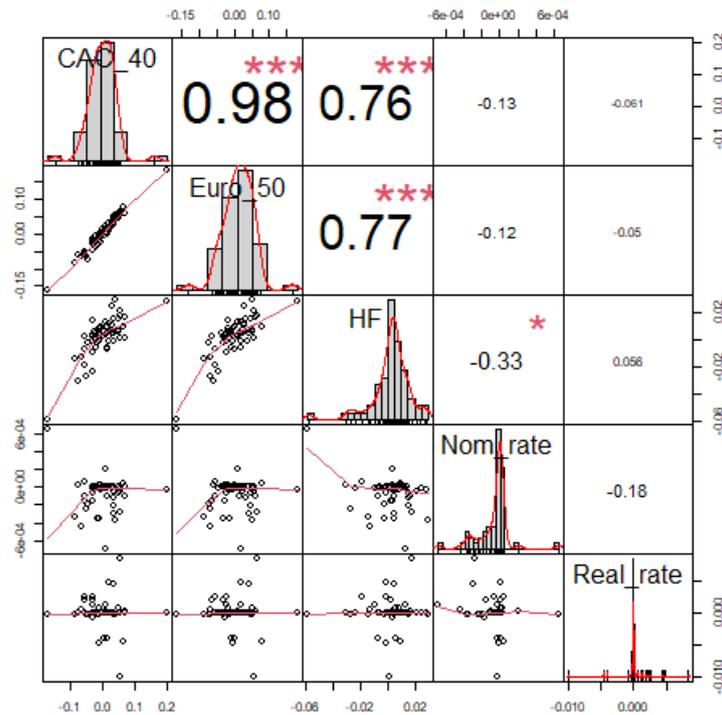


Fig. 3.1 – Analyse descriptive de la matrice de Corrélation Marché

- Une droite de régression linéaire légèrement déformée dans la plupart des scatter plots restants due à la présence de plus d’observations extrêmes et donc plus de dispersion ;
- Une faible corrélation du taux nominal (respectivement taux réel) à court terme avec les indices restants ;
- Une faible corrélation entre le taux nominal et le taux réel à court terme (-0.18) ;

Focus CAC40-Euro50 :

Afin de mieux évaluer la structure de dépendance entre les indices étudiés du marché, nous avons enrichi notre data visualisation par une analyse bvariée des indices respectifs CAC40 et Eurostoxx50. Ce choix est justifié par la part considérable des actifs dépendant de ces indices dans le portefeuille de la compagnie d’assurance mais aussi de la forte sensibilité du Best Estimate de ladite compagnie à la corrélation des shock-drivers des deux indices (Cf.Chapitre 8).

Pour ce faire, nous avons étendu l’historique de données tout en partant du 31/12/2009 jusqu’au 31/12/2020 pour une analyse plus exacte et appropriée. Nous avons tracé le "**rank scatter correlation**" qui renseigne sur la nature de dépendance entre les deux log-rendements des indices étudiés, tout en tirant de chaque observation $(r_k = \ln(\frac{X_k}{X_{k-1}}))_{k \in \{1, \dots, T\}}$ de chaque indices son ordre $(O_k)_{k \in \{1, \dots, T\}}$ parmi tous les $(r_j)_{j \in \{1, \dots, T\}}$. L’utilité de cette statistique est de calculer des pseudo-observations $(u_k = \frac{O_k}{T+1})_{k \in \{1, \dots, T\}}$ représentant une transformation uniforme des log-rendements qui servent comme input de la copule (Cf. Annexe C) avec laquelle nous allons ajuster la loi jointe des deux indices. Le "**rank scatter correlation**" se présente comme suit :

Nous pouvons remarquer une faible dispersion au niveau central de la distribution jointe, il en est de même au niveau des queues à gauche et à droite tout en soulignant une dépendance considérable et un aspect symétrique des deux queues. Ainsi et parmi le panel de copules dont nous disposons, nous pouvons élire comme candidats les copules gaussiennes et students (Annexe C) vu la symétrie de leurs queues et propriétés statistiques.

De ce fait, nous nous sommes basés sur le critère AIC (Annexe C) pour élire la copule qui fitte le

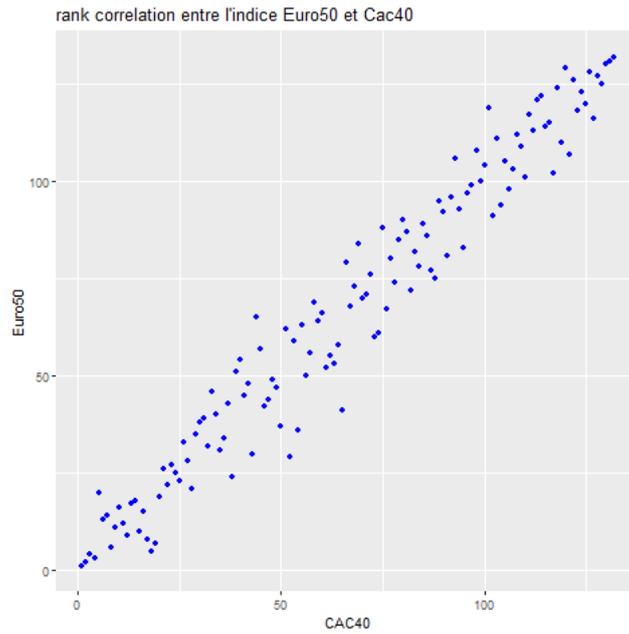


Fig. 3.2 – Rank Scatter Plot des log-rendements CAC40 et Euro50

mieux notre structure de dépendance, et qui était la copule gaussienne de paramètre $\rho = 0.97$ (coefficient de corrélation linéaire sur l'historique d'étude). Les figures ci-dessous présentent respectivement les densités des copules respectives "Gaussienne" et de "Student" :

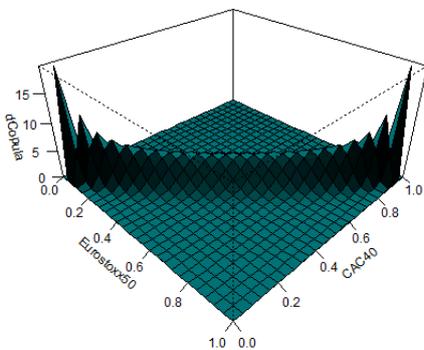


Fig. 3.3 – densité de la copule Gaussienne de paramètre $\rho = 0.97$

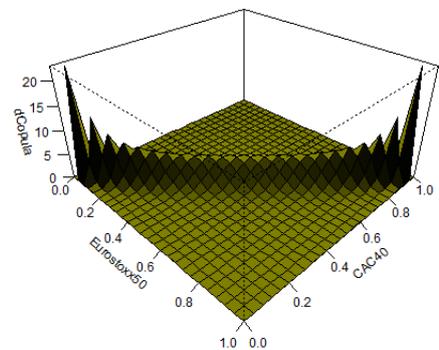


Fig. 3.4 – densité de la copule de Student de paramètre ($\rho = 0.97, \nu = 8$)

3.2. VISUALISATION DES RÉSULTATS

Nous pouvons remarquer une grande similitude de la tendance des deux densités surtout au niveau central tout en précisant qu'il y'a un peu plus de lourdeur de la densité de la copule de student au niveau des queues de distribution, ce qui est attendu vu que la copule de student est la plus adaptée à la modélisation des lois jointes avec des queues lourdes.

Le tableau suivant compare la copule gaussienne qui est l'optimale pour notre cas avec la copule de student comme candidate que nous avons estimé aussi :

	Paramètre (ρ)	ddl(n)	log-vraisemblance	AIC
Copule Gaussienne	0.97	-	188.4503	-374.9006
Copule Student	0.97	8	188.7667	-373.5334

TABLE 3.1 – Comparaison des copules Gaussienne et Student calibrées sur l'historique CAC40 et Euro50

Nous pouvons remarquer un grand rapprochement des deux log-vraisemblances au point de dire que la copule de Student qui s'ajuste le mieux, mais le critère AIC qui prend en compte le nombre de paramètres de chaque copule (1 pour la copule gaussienne et 2 pour la copule de Student) laisse la balance se pencher en faveur de la copule Gaussienne avec un AIC légèrement plus petit.

Afin de mesurer la lourdeur des queues de la distribution jointe, nous avons calculé empiriquement les grandeurs respectives Λ_l et Λ_u (Annexe C) pour différentes valeurs de α puis nous avons tracé leurs évolutions respectives comme suit :

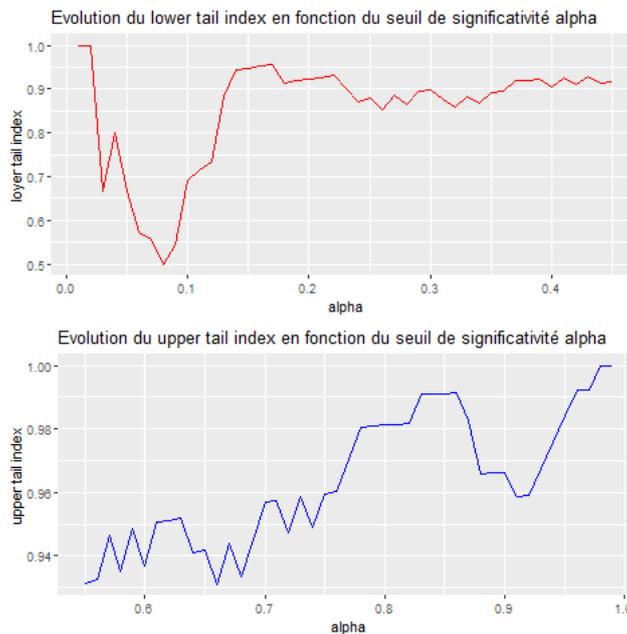


Fig. 3.5 – Evolution de Λ_l et Λ_u selon la valeur du seuil de significativité α

Ainsi, nous obtenons des Λ_l et Λ_u qui tendent vers 1 et donc une dépendance au niveau des queues de la distribution jointe du CAC40 et Euro 50.

Dans la suite et comme le GSE risque-neutre de Moody's l'adopte dans son modèle, la copule gaussienne multivariée serait le mécanisme de génération des différents mouvements browniens indépendants des risks drivers qui seront corrélés après, à chaque pas de temps, moyennant la décomposition de Cholesky (Cf. Annexe D).

Chapitre 4

Matrice de Corrélation des Browniens

4.1 Génération des mouvements Browniens

Étant des Shock-drivers des différents processus de diffusions du GSE, les mouvements browniens sont générés en utilisant une technique de simulation de **Monté-Carlo** qui est une méthode de tirage d'une variable aléatoire d'intérêt X obtenant un nombre fini de scénarios et donc soumise à une erreur d'échantillonnage que nous viserons à réduire. Pour ce faire, le GSE se base sur : un générateur pseudo-aléatoire appelé **Wichmann & Hill** vu qu'il y a une forte sensibilité des résultats du GSE (et donc des résultats de la Solvabilité II) quand nous changeons le jeu de données, une transformation de **Box-Muller** des nombres uniformes indépendants à des nombres gaussiens indépendants, une technique de réduction de variance des scénarios moyennant les variables antithétiques et un procédé de corrélation des browniens obtenus moyennant la décomposition de Cholesky (Cf. Annexe D).

4.1.1 Wichmann & Hill

Il s'agit d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires qui a bien évidemment été développé par Wichmann & Hill en 1982. L'algorithme se base sur trois générateurs de structure définie par congruence produisant chacun une suite de nombres entiers ([*BEN20*]) :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 171 \cdot x_n \text{ mod } 30269 \\ y_{n+1} = 172 \cdot y_n \text{ mod } 30307 \\ z_{n+1} = 170 \cdot z_n \text{ mod } 30323 \end{cases}$$

Une graine qui représente les trois états initiaux sert comme initiation de l'algorithme. Les nombres aléatoires qui vont être générés (u_n) seront obtenus par la partie décimale de la somme renormalisée des trois termes : $(\frac{x_n}{30269} + \frac{y_n}{30307} + \frac{z_n}{30323})$

les u_n appartiennent à $[0, 1]$ représente une séquence uniforme mais qui est tributaire à la graine insérée initialement.

Cependant, cette séquence de nombres pseudo-aléatoires uniformes est générée en suivant l'ordre des modèles de diffusion contenus dans le GSE (de gauche à droite dans le tableau 4.1) et selon l'axe de l'horizon de projection (du haut au bas dans le tableau 4.1) et ce par itération comme l'illustre le tableau suivant :

itération	Période	Variable 1	...	Variable n
1	1	X	...	X
1	2	X	...	X
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	360	X	...	X
2	1	X	...	X
2	2	X	...	X
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2	360	X	...	X
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1000	1	X	...	X
1000	2	X	...	X
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1000	360	X	...	X

TABLE 4.1 – Canevas de la table de scénarios économiques du GSE

nous pouvons exploiter le générateur pseudo-aléatoire Wichmann & Hill moyennant diverses méthodes, à savoir :

- Générer n séquences de nombres pseudo-aléatoires indépendantes à partir de n graines différentes. L'enjeu ici est de trouver la combinaison des graines qui étaient derrière les différents scénarios économiques du GSE.
- Générer une grande séquence de nombres pseudo-aléatoires sur la base d'une graine et la diviser en n sous-séquences qui seront par conséquent indépendantes. C'est une méthode qui reste sensible au changement de l'horizon de projection et à l'ajout d'une nouvelle variable car nous changerons l'ordre initial des nombres pseudo-aléatoires construits

4.1.2 Box-Muller

Par construction, les modèles utilisent des mouvements browniens $(W_t)_{t \geq 0}$ qui sont à accroissements indépendants et suivent une loi normale tel que : $(W_t - W_s) \xrightarrow{L} N(0, t - s)$. La méthode Box-Muller vise à transformer les nombres uniformes générés par Wichmann & Hill à des nombres suivant une loi gaussienne $N(0, 1)$.

En prenant deux variables aléatoires X et Y indépendantes suivant une loi $N(0, 1)$ représentées dans un plan cartésien, nous pouvons redéfinir les observations desdites variables en coordonnées polaires (\mathbb{R}, θ) tel que l'ensemble des observations sont situées dans un cercle de Rayon \mathbb{R} et dirigées par l'angle θ . Ainsi, nous pouvons exprimer l'angle θ en fonction de $U_1 \xrightarrow{L} Unif(0, 1)$ tel que $\theta = 2.\pi.U_1$.

$$\begin{cases} X = \mathbb{R} \cdot \cos(\theta) = \mathbb{R} \cdot \cos(2.\pi.U_1) \\ Y = \mathbb{R} \cdot \sin(\theta) = \mathbb{R} \cdot \sin(2.\pi.U_1) \\ X^2 + Y^2 = \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

De plus, nous avons \mathbb{R}^2 est une somme de deux variables aléatoires de loi χ^2 à un degré de liberté qui sont indépendantes, sa loi est donc une χ^2 à deux degrés de liberté, qui est une loi $Exp(\frac{1}{2})$. Nous savons qu'une loi exponentielle peut-être exprimée en fonction du logarithme d'une variable uniforme, et donc nous posons $\mathbb{R}^2 = -2.\log(U_2)$ tel que $U_2 \xrightarrow{L} Unif(0, 1)$.

Nous avons comme résultat définitif des variables gaussiennes indépendantes X et Y exprimées en fonction de variables uniformes U_1 et U_2 :

$$\begin{cases} X = \sqrt{-2 \cdot \log(U_2)} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot U_1) = X(U_1, U_2) \\ Y = \sqrt{-2 \cdot \log(U_2)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot U_1) = Y(U_1, U_2) \end{cases}$$

4.1.3 Variables Antithétiques

La simulation de Monte Carlo ([Ana19]) utilise une technique de tirage aléatoire ayant pour but la construction d'un estimateur d'une variable aléatoire inconnue, par exemple la probabilité de défaut de la compagnie d'assurance, le BE ou la valeur actuelle du n^{me} quantile de la distribution de Capital. Une statistique particulière à laquelle nous prêtons attention est $V = E(X)$.

Afin d'estimer l'espérance, l'estimateur trivial utilisé pour n simulations ou scénarios (X_i) i.i.d générés moyennant Monte-Carlo serait $\hat{V} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Il s'agit d'un estimateur bien évidemment sans biais, consistant ($\hat{V} \xrightarrow{p.s} V$ selon le SLLN) et qui est asymptotiquement Normal pour un grand nombre de simulations n , selon le TCL :

$$\frac{\hat{V} - V}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{L} \mathbb{N}(0, 1)$$

avec σ qui représente l'écart-type de la variable d'intérêt X . Ceci dit un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ de notre grandeur V tel que :

$$IC_{1-\alpha}(V) = [\hat{V} \pm q_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot (\frac{\sigma}{\sqrt{n}})] \quad (*)$$

avec $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile de la loi normale $N(0, 1)$ de niveau $1 - \frac{\alpha}{2}$.

Afin d'améliorer la qualité de notre simulation et donc avoir un estimateur plus efficace qui converge plus rapidement et donc des IC qui s'étrécissent à une vitesse plus importante, nous pouvons agir sur deux facteurs :

- le facteur n : Nous remarquons bien dans la formule (*) que la vitesse de rétrécissement de l'IC est de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, qui n'est pas très grande mais il est clair qu'augmenter le nombre de scénarios permet de rétrécir l'IC et donc augmenter l'efficacité de l'estimateur. Il est à noter qu'en général la compagnie d'assurance est contrainte à limiter le nombre d'itérations pour réduire le temps de calcul, c'est pour cela qu'il faut toujours veiller à ce que les tests de martingalité et Market-Consistency ne soient pas dégradés.
- le facteur σ : Nous remarquons bien que moins est l'écart-type de la variable d'intérêt X plus est l'efficacité de notre estimateur. C'est dans ce sens que les variables antithétiques vont être utilisées tout en construisant un nouvel estimateur.

Principe :

La méthode des variables antithétiques consiste en une génération des nombres aléatoires (ou pseudo-aléatoires) par paires : le deuxième paquet serait composé de nombres opposés au premier. Un exemple concret pour notre cas de figure serait le cas du prix actualisé d'un actif de notre portefeuille X (régi par un processus de diffusion en amont), notre grandeur à estimer serait V qui est égale à l'espérance des prix projetés et actualisés à chaque pas de temps qu'on estimera en utilisant \hat{V} la moyenne empirique mais en générant un premier paquet des browniens dZ et un deuxième $-dZ$ (vu la symétrie de la loi normale). Ceci nous permettra d'avoir deux estimateurs respectifs \hat{V}_{p1} et \hat{V}_{p2} . Ainsi, notre estimateur est défini comme suit : $\hat{V} = \frac{1}{2} \cdot (\hat{V}_{p1} + \hat{V}_{p2})$.

La variance de ce nouvel estimateur est comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{1}{2} \cdot (\hat{V}_{p1} + \hat{V}_{p2})\right) &= \frac{1}{4} \cdot (\text{var}(\hat{V}_{p1}) + \text{var}(\hat{V}_{p2}) + 2 \cdot \text{cov}(\hat{V}_{p1}, \hat{V}_{p2})) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \text{var}(\hat{V}_{p1}) (1 + \text{cor}(\hat{V}_{p1}, \hat{V}_{p2})) \end{aligned}$$

Etant donné que la $\text{cor}(\hat{V}_{p1}, \hat{V}_{p2})$ ne peut être plus de 1, il est clair qu'on a bien réduit la variance en utilisant le nouvel estimateur \hat{V} . De plus, si les deux estimateurs \hat{V}_{p1} et \hat{V}_{p2} sont parfaitement en corrélation négative, la variance serait réduite à zéro.

Concrètement, ceci se traduit par la génération d'un premier paquet de $\frac{n}{2}$ scénarios et un deuxième de $\frac{n}{2}$ scénarios opposés qui ne seront pas indépendants. Nous exprimons notre estimateur comme suit :

$$\hat{V} = \frac{1}{\frac{n}{2}} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2} * (X_i^{p1} + X_i^{p2})$$

En notant que les $\frac{1}{2} \cdot (X_i^{p1} + X_i^{p2})$ sont i.i.d, nous pouvons alors calculer la variance de l'estimateur \hat{V} comme suit :

$$\text{Var}(\hat{V}) = \frac{1}{\frac{n}{2}} \cdot \text{Var}\left(\frac{1}{2} \cdot (X_i^{p1} + X_i^{p2})\right)$$

Comme illustration, nous avons effectué une comparaison de la diffusion des browniens du taux nominal à court terme avant et après utilisation des variables antithétiques pour 100 itérations comme l'illustre le graphe suivant :

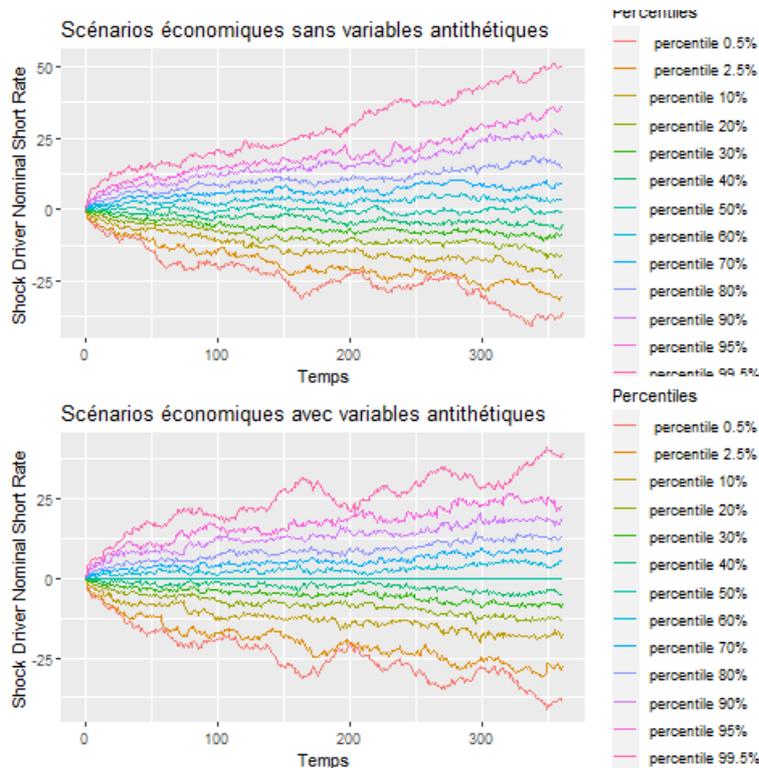


Fig. 4.1 – Evolution du mouvement Brownien avant et après usage des variables antithétiques

Grace aux variables antithétiques, nous avons une symétrie des scénarios projetés, stabilité du scénario médian, moins de volatilité tout en soulignant une instabilité dans les deux cas des browniens vu qu'on n'a pas

utilisé un très grand nombre d'itérations. Par ailleurs, nous pouvons remarquer qu'avec les variables antithétiques, nous avons une saveur risque-neutre qui se traduit par une stabilité de l'espérance empirique tout au long de l'horizon de projection comme l'évoque les figures suivantes :

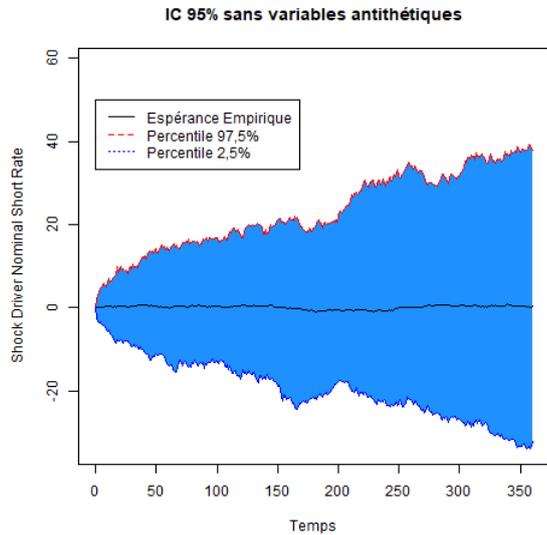


Fig. 4.2 – Nappe de scénarios du Mouvement Brownien Taux nominal sans variables antithétiques

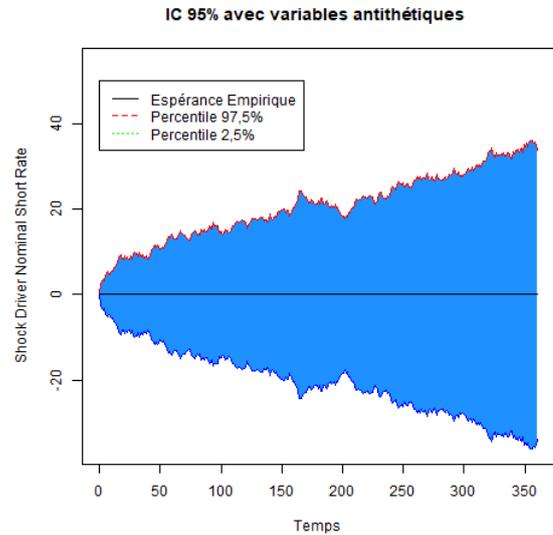


Fig. 4.3 – Nappe de scénarios du Mouvement Brownien Taux nominal avec variables antithétiques

4.1.4 Méthode de corrélation des Browniens

Après avoir généré les échantillons gaussiens indépendants pour chaque risk driver du GSE, l'étape qui suit est d'introduire leur information de dépendance contenue dans la matrice de corrélation input du GSE risque-neutre Moody's que nous viserons à optimiser dans le cadre de ce mémoire. Pour ce faire, nous utilisons la décomposition de Cholesky ([Ana18]) de ladite matrice de corrélation pour produire des browniens corrélés en adéquation avec cette matrice. Il est à noter que cette matrice de corrélation doit être semi-définie positive (PSD : toutes les valeurs propres sont supérieures ou égales à 0) pour qu'elle soit éligible à cette décomposition, d'où l'utilisation d'un algorithme dit de HIGHAM (Cf. Annexe E).

En amont le GSE risque-neutre Moody's corrèle, moyennant la décomposition de Cholesky, les vecteurs browniens générés suite au processus préalablement annoncé et qui guident la dynamique des différents indices financiers simulés par ledit GSE. Ces vecteurs sont générés sur un horizon de 30 ans et pour 1000 itérations. Ainsi, tout au long du mémoire, nous ferons allusion aux vecteurs browniens malgré que nous parlerons de la matrice de corrélation des browniens ou shock-drivers.

En supposant que la matrice de corrélation des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's est celle du Marché (correspond à la matrice de corrélation cible aussi), cette dernière doit être transformée en une matrice PSD selon l'algorithme préalablement dicté. Nous obtenons le résultat suivant :

	CAC40	Euro50	Immo	HF	PE	Tx-nom-cT	Tx-reel-cT
CAC40	1	0.979	0.298	0.763	0.502	-0.125	-0.062
Euro50	0.979	1	0.307	0.747	0.463	-0.137	-0.044
Immo	0.298	0.307	1	0.299	0.132	-0.302	0.104
HF	0.763	0.747	0.299	1	0.672	-0.293	0.041
PE	0.502	0.463	0.132	0.672	1	0.424	-0.359
Tx-nom-cT	-0.125	-0.137	-0.302	-0.293	0.424	1	-0.192
Tx-reel-cT	-0.062	-0.044	0.104	0.041	-0.359	-0.192	1

4.1. GÉNÉRATION DES MOUVEMENTS BROWNIENS

En faisant le lien avec les différents processus de diffusion énoncés dans le chapitre 2, les browniens respectifs des indices financiers CAC40 et Eurostoxx 50 sont ceux qui guident directement les rendements desdits indices ; soit les shock-drivers du *modèle de Heston* qui capturent la volatilité stochastique prévue par le modèle *SVJD*. Tandis que pour les taux respectifs nominaux et réels à court terme, nous prenons le brownien à court terme qui représente les maturités jusqu'à 1 an pour lesquelles le brownien à long terme est presque négligeable et donc d'un faible impact sur la structure de la matrice de corrélation. Cependant, les indices financiers restants notamment l'indice immobilier, Hedge Fund et Private Equity sont guidés que par un seul brownien chacun comme prévu par le modèle Black & Scholes.

La prise en compte que de ces browniens est justifiée car ceci nous permet de simplifier l'analyse de la problématique mais aussi de prendre en compte les principaux shock-drivers des différents indices financiers tout en notant que lors de la projection des scénarios économiques, le GSE risque-neutre Moody's prend en compte tous les paramètres des processus de diffusion y compris la corrélation entre la volatilité stochastique et le rendement des indices financiers, qui est présente dans le processus *LMM+* et *SVJD*.

Par ailleurs, l'algorithme de HIGHAM n'a pas amplement fait varier les coefficients de la matrice de corrélation des browniens ci-haut à l'exception de quelques-uns à savoir celle entre HF et PE et entre HF et le taux nominal à court terme pour un SSE total de 0.631% ventilé comme suit :

Index	Corrélation traitée		Market(1)	Market (PSD)(2)	SE (((1) - (2)) ²)
	Variable 1	Variable 2			
1	CAC40	Euro50	0.980	0.979	0.000%
2	CAC40	Immo	0.298	0.298	0.000%
3	CAC40	HF	0.761	0.763	0.001%
4	CAC40	PE	0.505	0.502	0.001%
5	CAC40	tx nominal cT	-0.126	-0.125	0.000%
6	CAC40	tx réel cT	-0.061	-0.062	0.000%
7	Euro50	Immo	0.310	0.307	0.001%
8	Euro50	HF	0.768	0.747	0.044%
9	Euro50	PE	0.444	0.463	0.036%
10	Euro50	tx nominal cT	-0.124	-0.137	0.018%
11	Euro50	tx réel cT	-0.05	-0.044	0.004%
12	Immo	HF	0.291	0.299	0.006%
13	Immo	PE	0.139	0.132	0.004%
14	Immo	tx nominal cT	-0.307	-0.302	0.002%
15	Immo	tx réel cT	0.106	0.104	0.000%
16	HF	PE	0.722	0.672	0.249%
17	HF	tx nominal cT	-0.327	-0.293	0.116%
18	HF	tx réel cT	0.056	0.041	0.023%
19	PE	tx nominal cT	0.455	0.424	0.098%
20	PE	tx réel cT	-0.373	-0.359	0.019%
21	tx nominal cT	tx réel cT	-0.183	-0.192	0.009%
Total	-				<u>0.631%</u>

TABLE 4.2 – Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et sa transformation PSD

Il est à noter que, comme nous le verrons plus tard, nous sommes plus sensible aux actifs qui ont la plus grande part dans le portefeuille de la compagnie d'assurance à savoir ceux tributaires des indices actions, Immobilier et les taux, et donc nous préconisons que les corrélations des browniens desdits indices, après transformation en matrice PSD, soient les plus fiables et proches de la matrice initiale de marché (ce qui est le cas comme l'illustre le tableau précédent).

En prenant une itération des différents browniens des indices projetés moyennant la simulation de Monté Carlo, et en utilisant l'équation C.1 de l'Annexe D à chaque pas de temps, nous obtenons le résultat suivant :

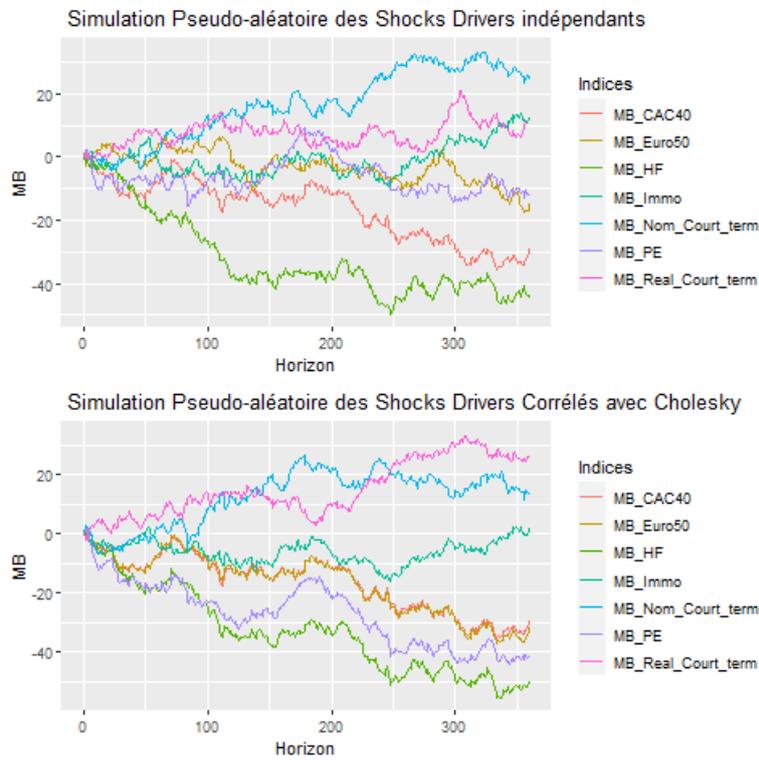


Fig. 4.4 – Corrélacion des mouvements browniens avec la méthode de Cholesky

Grace à la méthode de Cholesky, les différents browniens suivent des sens dictés par les coefficients de corrélacions utilisés. Par exemple les browniens respectifs du CAC40 et Euro50 se sont parfaitement alignés vu que leur corrélacion est de 0.98, les browniens respectifs de l'indice immobilier et le taux réel à court terme se sont éloignés car leur corrélacion est de 0.104.

4.2 La matrice de corrélacion des browniens à l'entrée du GSE

En effet, la vraie matrice de corrélacion des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's est composée de la matrice de corrélacion des browniens préalablement présentée mais aussi des corrélacions des browniens à long terme des processus des taux respectifs nominal et réel. Dans le cadre Market Consistent, ces browniens (dB) sont indépendants de ceux à court terme et sont pondérés par des "loadings factors" comme précisé dans les modèles LMM+ et GLMM (Cf.Chapitre 2).

Plus concrètement, les corrélacions des shock-drivers à long terme avec ceux des autres indices financiers sont calibrées par Moody's de telle sorte à ce que les corrélacions simulées par le GSE risque-neutre Moody's convergent à l'ultime vers les corrélacions historiques ciblées et calculées par Moody's. Ceci dit que le GSE risque-neutre Moody's calcule les rendements des indices financiers simulés et les corrèle de telle façon à ce que leurs corrélacions tendent à l'ultime vers les corrélacions ciblées.

De plus, Moody's assimile les "loadings factors" du brownien à long terme à l'exposition des taux nominaux forwards au taux de maturité 10 ans vu qu'à cette maturité, le facteur ou le vecteur brownien à court terme est négligeable (Cf.Chapitre 2) et donc celui à long terme serait celui qui impacte le plus la structure des corrélations. De façon analogue, le vecteur brownien à court terme représente l'information du taux forward nominal de maturité 1 an car tous les taux de maturité inférieure ou égale à 1 an auront des expositions à long terme négligeables et donc le vecteur brownien à court terme est celui qui impacte le plus la structure des corrélations. Il est à noter que les taux nominaux forwards de maturité entre 1 an et 10 ans ainsi que les taux de maturité supérieure à 10 ans seront expliqués à la fois par les deux facteurs.

Ainsi, nous consolidons une matrice de corrélation totale composée d'une part des corrélations calculées à notre niveau entre les différents browniens des indices financiers (qui fera objet d'optimisation Market Consistent) et les corrélations données par Moody's comme évoqué avant. L'étape suivante est de convertir ladite matrice de telle sorte à ce qu'elle soit PSD, selon l'algorithme de Higham (Annexe E), comme l'exige le GSE risque-neutre de Moody's.

il est à noter que la matrice de corrélation qu'on optimiserait serait celle des différents browniens des 7 indices préalablement mentionnés sans inclure les corrélations des browniens à long terme pour simplifier le problème mais aussi parce que les browniens à court terme incorporent la part d'information la plus importante comme analysé dans le modèle LMM+ (Cf.Chapitre 2). De plus, la matrice de corrélation consolidée à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's n'inclura pas :

- la corrélation entre le brownien à court terme du processus principal du LMM+ et le brownien du processus CIR de la volatilité stochastique (Cf.Chapitre 2).
- la corrélation entre le brownien du processus principal du SVJD de l'indice Action (Modèle de Heston) et le brownien du processus CIR de la volatilité stochastique (Cf.Chapitre 2).

Ces corrélations, certes, ne sont pas prises en compte dans la matrice de corrélation consolidée à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's, mais restent des paramètres incontournables prises en compte dans chaque modèle stochastique à part pour la construction de la table des scénarios économiques.

Chapitre 5

Matrice de Corrélation simulée par le GSE

Lors de la projection des scénarios économiques, le GSE risque-neutre Moody's corrèle à chaque pas de temps les différents risk-drivers en se basant en amant sur la matrice de corrélation des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's. Comme évoqué dans le chapitre précédent, nous supposons que les corrélations entre les shock-drivers sont celles du marché converties en une matrice PSD comme exigence du GSE risque-neutre Moody's. Cependant, la moyenne simple des matrices de corrélation simulées par le GSE risque-neutre Moody's sur 360 mois et 1000 itérations se présente comme suit :

	CAC40	Euro50	Immo	HF	PE	Tx-nom-cT	Tx-reel-cT
CAC40	1	0.907	0.210	0.537	0.353	0.027	-0.001
Euro50	0.907	1	0.220	0.536	0.332	0.025	0.001
Immo	0.210	0.220	1	0.318	0.160	0.140	0.0057
HF	0.537	0.536	0.318	1	0.678	0.113	0.040
PE	0.353	0.332	0.160	0.678	1	0.173	-0.019
Tx-nom-cT	0.027	0.025	0.140	0.113	0.173	1	0.217
Tx-reel-cT	-0.001	0.001	0.0057	0.040	-0.019	0.217	1

En moyenne simple, nous pouvons remarquer que divers coefficients de corrélation se sont décalés par rapport à la matrice de corrélation des browniens comme détaillé d'avantage dans le tableau en bas (Cf. Table 5.1). Pour enrichir notre étude, nous avons suivi l'évolution des coefficients de corrélations des risk-drivers tout au long de l'horizon de projection tout en mettant l'accent sur les corrélations entre les indices desquels les actifs de la compagnie d'assurance dépendent et qui ont la grande part dans son portefeuille :

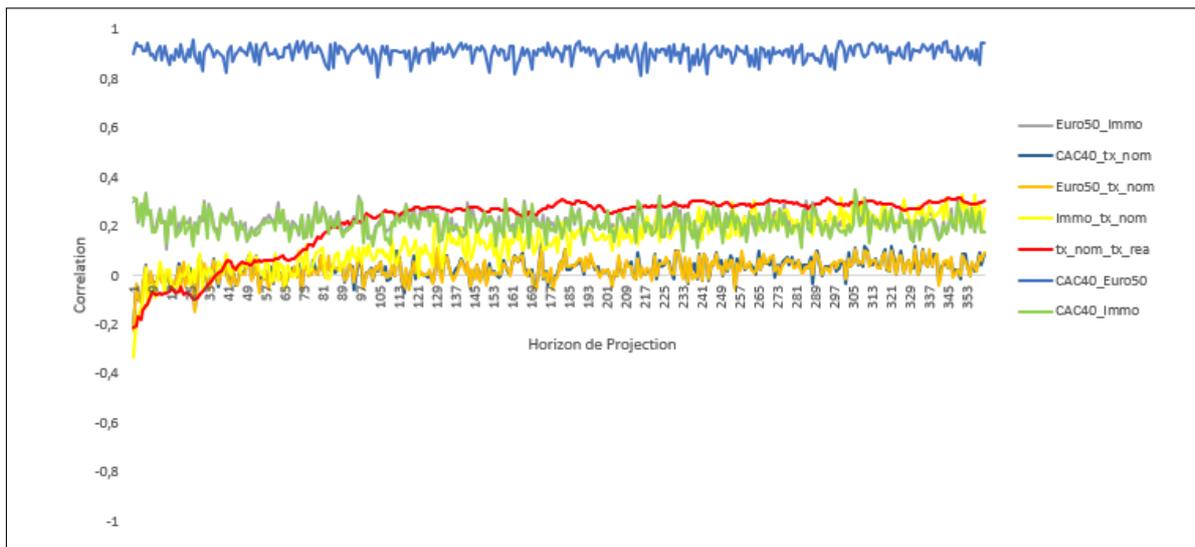


Fig. 5.1 – Evolution des coefficients de corrélation du GSE risque-neutre sur 30 ans à pas mensuel

Nous pouvons tirer les grandes lignes suivantes :

- Nous sommes plus Market Consistent dans la première année pour les différents coefficients de corrélation, tout en soulignant une forte oscillation des processus ;
- la plupart des corrélations représentent des processus temporels à effet de retour à la moyenne sauf un cas flagrant de corrélation entre le taux nominal à court terme et le taux réel à court terme qui est un processus à effet de tendance croissante comme l'illustre le tableau 5.1 en moyenne (colonne 4 et 5).

Pour cette corrélation, il est clair qu'il serait intéressant de baisser ladite corrélation à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's afin d'avoir en moyenne un coefficient de corrélation qui est proche du marché. Ceci serait constaté dans le chapitre suivant où nous viserons à optimiser la matrice de corrélation entre les browniens pour être en moyenne plus Market Consistent.

Focus corrélation taux nominal et taux réel à court terme :

L'évolution du processus temporel de la corrélation entre le taux nominal et le taux réel à court terme est dictée par un calibrage de Moody's de la corrélation entre les browniens respectifs des taux nominaux et réels à court terme pour converger à long terme (100 ans) vers la corrélation (Real world) de **0.58**. La figure 5.1 montre qu'à l'horizon de 30 ans, nous sommes aux alentours de 0.3. À l'entrée du GSE risque-neutre Moody's, la compagnie d'assurance utilise une corrélation de -0.192 comme précisé dans le chapitre 4, différente de celle calibrée de Moody's ; soit 0.69.

Afin de justifier ce constat, nous avons essayé de changer la corrélation cible Real World de Moody's en corrélation de marché calculée par la compagnie d'assurance (-0.19) ainsi que celle des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's (de -0.19 à 0.69). Nous avons obtenu le résultat suivant :

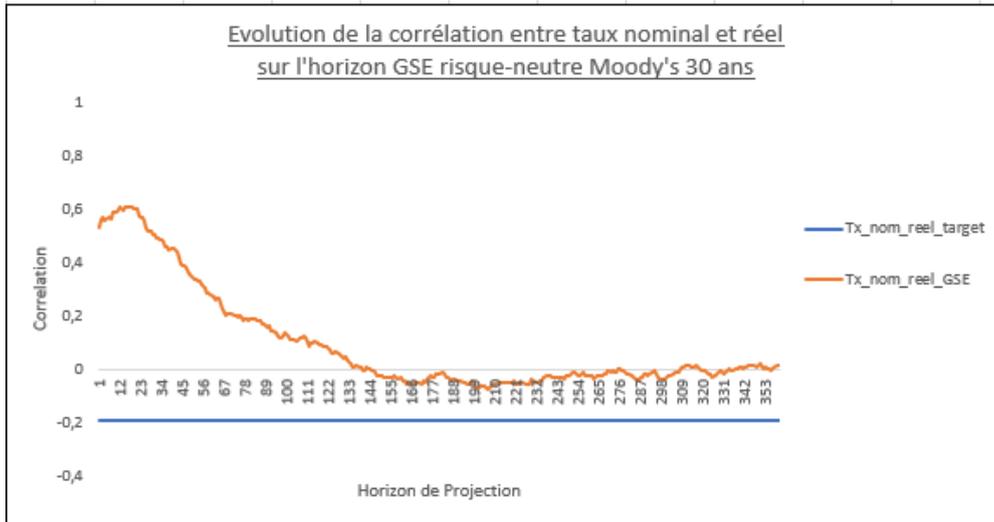


Fig. 5.2 – Evolution de la corrélation entre le taux nominal et réel à court terme simulée par le GSE risque-neutre Moody's.

Nous remarquons qu'il y a une décroissance considérable du coefficient de corrélation simulé par le GSE risque-neutre Moody's qui tend de plus en plus vers la corrélation de -0.19 cible mise dans notre cas d'étude, ce qui confirme bien notre interprétation et justifie la tendance remarquée de la corrélation entre le taux nominal et réel à court terme dans la figure 5.1

Usage de la pondération Provisions Mathématiques

L'idée est de cadrer notre analyse dans le contexte Solvabilité II. Les versements libres n'étant pas intégrés à la frontière des contrats, nous observons une décroissance de la Provision Mathématique (PM) tout au long de l'horizon de projection suite aux opérations de rachats, décès, écoulement des frais de la compagnie d'assurance liés aux contrats d'assurance, aux placements. L'idée est de calculer une matrice de corrélation moyenne pondérée par les poids des PMs à maille annuelle et donner plus d'importance aux années avec plus d'engagements de la compagnie d'assurance. L'évolution des PMs est comme suit :

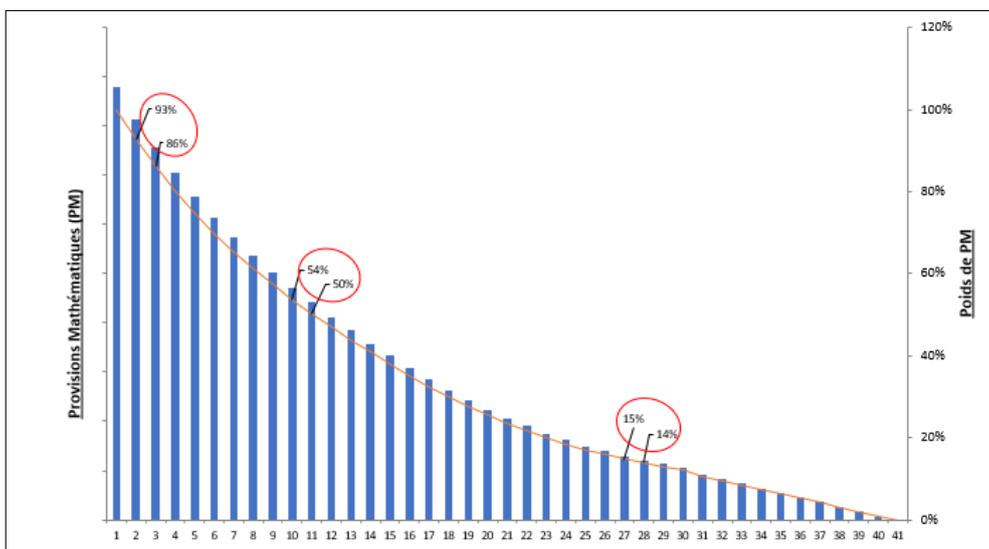


Fig. 5.3 – Ecoulement des PM de la compagnie d'assurance sur les années de projection.

Nous remarquons qu'il y a une chute importante des PMs dans les 10 premières années (presque 50%). De plus, il y a bien une baisse de pente de la courbe des $(\frac{PM_t}{PM_0})_{i \in \{\text{horizon S2}\}}$ d'une année à l'autre ce qui veut dire que nous aurons tendance à attribuer plus de poids aux premières années (7% pour l'année 2 et 3 vu que nous passons de 100% à 93% puis à 86%) que les dernières années (1% pour la 28^{ème} année) comme l'illustre le graphe ci-haut.

la matrice de corrélation simulée en moyenne par poids de PM est présentée dans le tableau suivant qui résume les écarts quadratiques (SE) par indice par rapport à la matrice de corrélation Marché :

Index	Corrélation traitée		Market(1)	Simulée sans poids de PM.(2)	SE $((1)-(2))^2$	Simulée avec poids de PM.(3)	SE $((1)-(3))^2$
	Variable 1	Variable 2					
1	CAC40	Euro50	0.980	0.907	0.532%	0.907	0.532%
2	CAC40	Immo	0.298	0.210	0.77%	0.210	0.763%
3	CAC40	HF	0.761	0.537	5%	0.538	4.934%
4	CAC40	PE	0.505	0.353	2.31%	0.353	2.28%
5	CAC40	tx nom cT	-0.126	0.027	2.33%	0.014	1.96%
6	CAC40	tx réel cT	-0.061	-0.001	0.37%	-0.006	0.301%
7	Euro50	Immo	0.310	0.220	0.8%	0.220	0.8%
8	Euro50	HF	0.768	0.536	5.36%	0.537	5.34%
9	Euro50	PE	0.444	0.332	1.26%	0.332	1.26%
10	Euro50	tx nom cT	-0.124	0.025	2.20%	0.014	1.9%
11	Euro50	tx réel cT	-0.05	0.001	0.26%	-0.003	0.21%
12	Immo	HF	0.291	0.318	0.07%	0.310	0.036%
13	Immo	PE	0.139	0.160	0.05%	0.148	0.009%
14	Immo	tx nom cT	-0.307	0.140	19.92%	0.090	15.781%
15	Immo	tx réel cT	0.106	0.057	0.24%	0.041	0.418%
16	HF	PE	0.722	0.678	0.19%	0.674	0.23%
17	HF	tx nom cT	-0.327	0.113	19.35%	0.076	16.27%
18	HF	tx réel cT	0.056	0.040	0.03%	0.028	0.07%
19	PE	tx nom cT	0.455	0.173	7.95%	0.126	10.804%
20	PE	tx réel cT	-0.373	-0.019	12.49%	-0.043	10.89%
21	tx nom cT	tx réel cT	-0.183	0.217	15.97%	0.160	11.80%
Total	-	-	-	-	97.4%	-	86.6%

TABLE 5.1 – Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et celle simulée en moyenne par le GSE avec et sans poids de PM

Nous retenons les constats suivants :

- la somme des erreurs quadratiques entre les coefficients de corrélation simulés en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et ceux de l'input (du marché pour notre cas de figure) est passée de **97.4%** à **86.6%** lorsque nous avons pondéré par les poids de PM ;
- l'erreur quadratique(SE) du coefficient de corrélation du taux nominal et réel à court terme s'est amplement améliorée. Nous pouvons justifier ceci par un effet croisé du fait que ladite corrélation est un processus temporel à effet de tendance croissante et donc nous sommes plus Market Consistent dans les premières années, et de la pondération par poids de PM qui est plus importante dans les premières années (Cf. Fig 5.4) ;

Chapitre 6

Méthodes d'optimisation Market Consistent de la matrice de corrélation des Browniens

Dans ce chapitre, l'objectif est de sélectionner la méthode qui nous permettra d'être plus Market Consistent que la démarche actuelle où nous corrélons les différents shock-drivers Z moyennant la matrice de corrélation du Marché (retraitée pour être PSD). Les Z -corrélations avec les différents paramètres des modèles de diffusion des indices définissent la distribution définitive des différents indices financiers modélisés et donc la corrélation entre les différents rendements (Cf.Chapitre 3) de ces indices que nous noterons par X -corrélations.

La relation liant les X -corrélations avec la matrice de corrélation des browniens Z -corrélations et les autres paramètres n'est pas une relation directe vu que chaque indice financier est un processus régi par sa propre équation différentielle stochastique et guidé par ses propres vecteurs browniens (Cf.Chapitre 2).

6.1 Approche Linéaire

Il est vrai qu'il est possible de fitter une fonction ou un proxy pour estimer la relation non linéaire entre X -corrélations et Z -corrélations, cependant l'approche linéaire a sa part de raison vu que la corrélation est une mesure de dépendance linéaire entre les actifs et donc tend à négliger la partie non-linéaire de cette relation, comme analysé dans [Ana20].

Nous posons $Y(t)$ le vecteur des indices modélisés par le GSE risque-neutre Moody's qui peut représenter CAC40, Euro50, Indice immobilier, taux nominal court terme...A chaque pas de temps, nous supposons la relation suivante :

$$Y(t) = P.Y(t-1) + Q.Z(t) + U(t) \quad (1)$$

avec $U(t)$ chope l'erreur résiduelle due à la relation non linéaire non prise par la corrélation (en général c'est plus compliqué que l'équation(1)). Soit S_{uu} sa matrice de covariance.

Nous noterons P et Q qui sont des matrices déterminées par une régression linéaire de $Y(360)$ sur $Y(359)$ et $Z(359)$. La relation (1) peut être vue comme une relation autoregressive de degré 1 représentant un modèle simple discret des processus stochastiques des risk-drivers vus dans la partie 1. La régression au 360^{ème} est justifiée vu qu'elle détient l'information accumulée tout au long de l'horizon de projection du GSE risque-neutre Moody's supposée de 360 mois.

Afin de calculer les matrices P et Q , nous utiliserons 20.000 simulations pour avoir une estimation plus précise et exhaustive, tout en injectant comme input du GSE risque-neutre Moody's la matrice de corrélation des shock-drivers qui est celle du marché calibrée historiquement et retraitée pour être PSD. Les matrices P ,

Q et S_{uu} dépendent étroitement de la structure et du calibrage des modèles de chaque risk-driver alors que la corrélation entre indices du vecteur $Y(t)$ serait déterminée par la matrice de covariance des browniens que nous noterons S_{zz} .

Pour notre cas, le but est de calculer la corrélation entre les rendements des indices simulés par le GSE risque-neutre Moody's. Pour tous les indices hors les taux nominaux et réels à court terme, nous utilisons des log-rendements tandis que pour les 2 derniers taux des variations de taux (Cf. Chapitre **Matrice de corrélation de Marché**). Ces rendements, notés $X(t)$, vont être exprimés comme suit :

$$X(t) = C.Y(t) + R.C.Y(t-1) \quad (2)$$

avec C représente une transformation linéaire de $Y(t)$ et R une matrice qui est de valeurs nulles sauf la diagonale égale à 1 pour assurer un calcul de variation de $C.Y$.

Afin d'adapter cette modélisation à notre contexte, nous prendrons $C = R = I_7$ (I_7 est la matrice identité de dimension 7) et Y serait le logarithme des indices hors taux nominaux et réels pour se ramener à des log-rendements desdits indices (équation (2)), puis serait aussi les taux à court terme sans changement opéré. À partir de l'équation (1) et (2) nous déduisons le résultat suivant :

$$X(t) = (C.P - R.C).Y(t-1) + C.Q.Z(t) + C.U(t) \quad (3)$$

Dans la suite, nous noterons S_{xx} et S_{zz} les matrices de covariances respectives des rendements $X(t)$ et browniens $Z(t)$. L'Annexe F détaille la démonstration partant de l'équation (3) à l'équation linéaire (4) des matrices de covariances :

$$vec(S_{xx}) = H.vec(S_{zz}) + K \quad (4)$$

avec :

$$H = [(C \otimes C) + (E \otimes E).(I - P \otimes P)^{-1}].(Q \otimes Q),$$

$$K = [(C \otimes C) + (E \otimes E).(I - P \otimes P)^{-1}].vec(S_{uu}),$$

$$E = C.P - R.C$$

$vec(M)$ est la forme vecteur de la matrice $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ avec toutes les colonnes qui sont concaténées une après l'autre pour avoir un vecteur $\in \mathbb{R}^{n^2}$, \otimes est le produit de Kronecker, M^{-1} est l'inverse de la matrice M .

Ainsi, cette relation linéarisée entre S_{xx} et S_{zz} peut être utilisée pour fitter la relation entre X -corrélations et Z -corrélations. Par conséquent, la relation entre les Z -corrélations et la somme des différences quadratiques entre les X -corrélations et leurs cibles (Matrice de corrélation de Marché) est quadratique. Pour ce faire, nous utiliserons un programme d'optimisation quadratique (SQLP) sous contrainte que nous avons une matrice PSD qui est la matrice Z - corrélations comme détaillé dans la sous-section de la RLM.

6.1.1 Régression Linéaire Simple (RLS)

Il s'agit d'une approche où nous supposons que chaque indice financier au pas t est expliqué par son évolution au pas $t-1$ et le brownien généré au pas t , ce qui laisse l'équation (1) prendre la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \log(S_t^1) \\ \log(S_t^2) \\ \log(P_t) \\ \log(HF_t) \\ \log(PE_t) \\ R_t^n \\ R_t^r \end{pmatrix} = P. \begin{pmatrix} \log(S_{t-1}^1) \\ \log(S_{t-1}^2) \\ \log(P_{t-1}) \\ \log(HF_{t-1}) \\ \log(PE_{t-1}) \\ R_{t-1}^n \\ R_{t-1}^r \end{pmatrix} + Q. \begin{pmatrix} Z_{S_t}^1 \\ Z_{S_t}^2 \\ Z_{P_t} \\ Z_{HF_t} \\ Z_{PE_t} \\ Z_{R_t}^n \\ Z_{R_t}^r \end{pmatrix} + U(t) \quad (5)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} \log(S_t^1) \\ \log(S_t^2) \\ \log(P_t) \\ \log(HF_t) \\ \log(PE_t) \\ R_t^n \\ R_t^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{77} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \log(S_{t-1}^1) \\ \log(S_{t-1}^2) \\ \log(P_{t-1}) \\ \log(HF_{t-1}) \\ \log(PE_{t-1}) \\ R_{t-1}^n \\ R_{t-1}^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{77} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_{S_t}^1 \\ Z_{S_t}^2 \\ Z_{P_t} \\ Z_{HF_t} \\ Z_{PE_t} \\ Z_{R_t}^n \\ Z_{R_t}^r \end{pmatrix} + U(t) \quad (5)$$

Ces matrices sont diagonales formées des éléments qui vont être construits à partir des RLS que nous effectuerons conformément à cette approche. Mais avant, il est intéressant de souligner qu'un outil a été implémenté pour récupérer les indices financiers au dernier et avant-dernier pas de temps de chaque scénario des 20.000 simulations de la table construite par le GSE risque-neutre Moody's :



Fig. 6.1 – Outil de collecte de données simulées par le GSE risque-neutre de Moody's à t=30 ans

En utilisant cet outil, le format final de la table éligible à l'approche linéaire en général, à la RLS en particulier est comme suit :

itération	S_t^1	S_{t-1}^1	...	R_t^r	R_{t-1}^r	$Z_{S_t}^1$...	$Z_{R_t}^r$
1	X	X	...	X	X	X	...	X
2	X	X	...	X	X	X	...	X
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20.000	X	X	...	X	X	X	...	X

TABLE 6.1 – Canevas de la table des données collectées à t=30 ans

Validation du Modèle

Avant de calculer les matrices P , Q et S_{uu} , une étape importante serait de tester la robustesse du modèle. En premier lieu, nous avons veillé à ce qu'il n'y a pas de colinéarité entre les variables explicatives de

chaque indice tout en calculant le VIF (facteur d'inflation de la variance abordé en Annexe G) comme l'illustre le tableau suivant :

	$\log(S_{t-1}^1)/Z_{S_t}^1$	$\log(S_{t-1}^2)/Z_{S_t}^2$	$\log(P_{t-1})/Z_{P_t}$	$\log(HF_{t-1})/Z_{HF_t}$	$\log(PE_{t-1})/Z_{PE_t}$	$R_{t-1}^n/Z_{R_t}^n$	$R_{t-1}^r/Z_{R_t}^r$
VIF	1.00004	1.00009	1.00001	1.000003	1.00001	1.000002	1.00002

TABLE 6.2 – VIF des variables explicatives dans le cadre d'une RLS

Si nous prenons la première case affichant 1.0004, ce résultat est interprété comme suit : la régression de la variable $\log(S_{t-1}^1)$ sur $Z_{S_t}^1$ nous donne un coefficient de détermination \mathbb{R}^2 (détaillé dans la sous-section suivante "Les paramètres du modèle") presque nul (C.f Annexe G). En général, nous remarquons bien une absence de colinéarité des variables explicatives de tous les modèles vu que les VIFs sont très proches de 1. Par ailleurs et afin d'analyser les résidus des modèles, une première étape est de tester la non-corrélation du couple $(\hat{Y}_j, \hat{U}_j)_{1 \leq j \leq 7}$ qui sont respectivement le $j^{ème}$ indice financier estimé par son modèle linéaire et son erreur estimée associée (C.f Annexe G). Durant cette analyse, nous afficherons nos résultats pour l'indice CAC40 tout en notant que la même étude a été menée pour les autres indices tout ayant presque les mêmes conclusions.

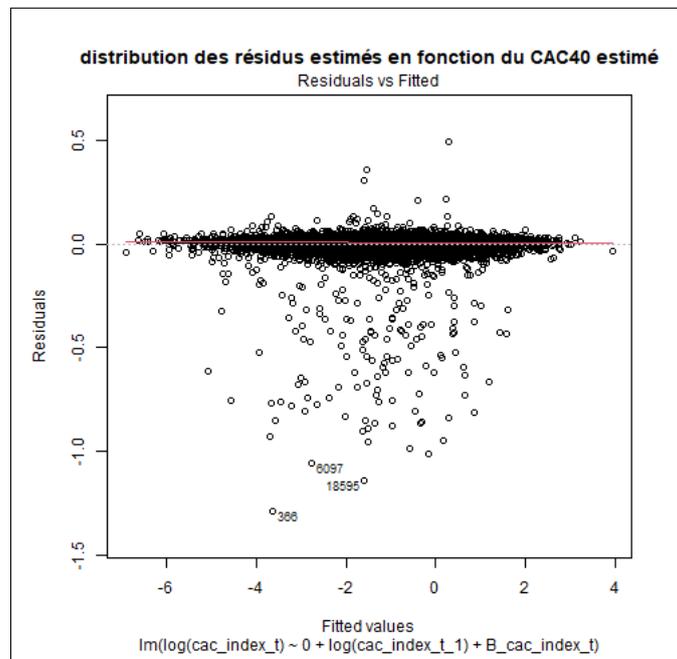


Fig. 6.2 – Répartition des résidus estimés en fonction des valeurs du CAC40 estimées

nous remarquons qu'il n'y a pas une structure particulière qui se dégage malgré une forte concentration autour de l'axe des abscisses (20.000 observations) et donc il n'y a pas une corrélation ressentie entre les erreurs et les observations estimées du CAC40 tout en soulignant un centrage du nuage de point (C.f Annexe G). De plus, pour tester la qualité d'ajustement et la normalité des erreurs, qui sert surtout aux études d'inférence à savoir les tests d'hypothèses et construction des intervalles de confiance, nous avons tracé la répartition des résidus standardisés t_i et studentisés t_i^* (C.f Annexe G) qui théoriquement devraient tendre, pour un grand nombre d'observations, vers une loi normale et avec une part des valeurs aberrantes de α % du nombre total des observations :

La figure 6.3 ci-dessous montre bien une forte présence des valeurs aberrantes des deux résidus (29%) malgré qu'ils soient centrés, alors que pour avoir une qualité d'ajustement acceptable en théorie il faut avoir un pourcentage proche de 5%. La figure 6.4 montre davantage que les queues de la distribution des erreurs studentisées s'écartent de la bande de confiance gaussienne aplatie de niveau 95%. Ainsi, nous concluons que l'hypothèse de normalité des erreurs n'est pas satisfaite, pourtant nous testerons l'hypothèse de nullité des paramètres des modèles des indices financiers. Nous rappelons que nous avons obtenu la non-corrélation des erreurs et le fait qu'elles soient centrées.

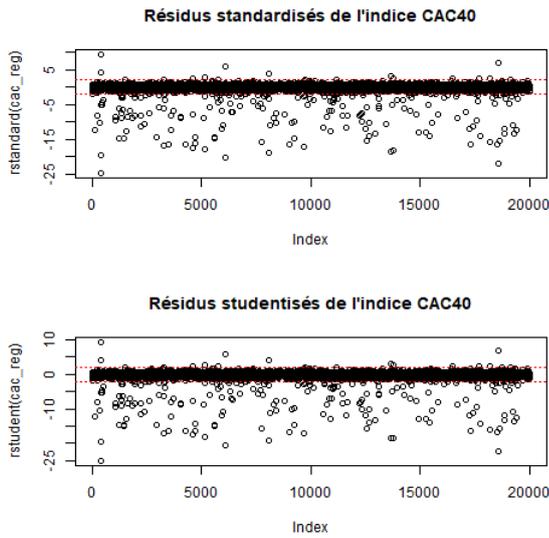


Fig. 6.3 – Répartition des erreurs standardisées et studentisées du CAC40

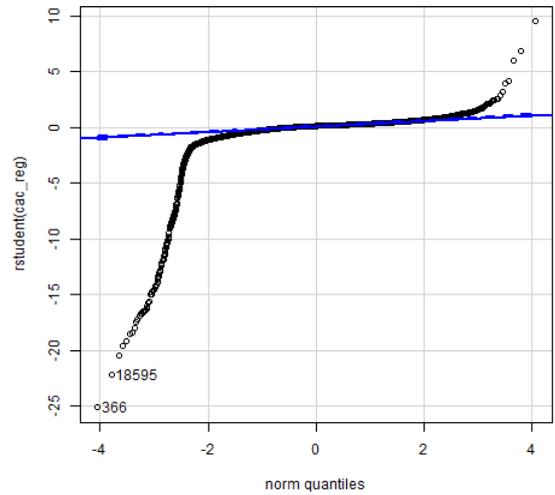


Fig. 6.4 – QQ-Plot des erreurs studentisées du CAC40

Les paramètres du modèle

Dans cette étape, nous testons si les paramètres des modèles sont significativement différents de zéro au niveau $\alpha = 5\%$. Pour cela, nous effectuerons un test de student en comparant la valeur absolue de chacun des paramètres estimés avec sa variance. Ainsi, si la valeur absolue du paramètre est plus grande que 1.96 l'écart-type du paramètre, alors nous rejetons, au risque $\alpha = 0.05$, l'hypothèse de nullité du paramètre. En d'autres termes, si la p_{value} du paramètre est inférieure à 0.05, nous rejetons alors au risque $\alpha = 5\%$, l'hypothèse de nullité des paramètres. Les résultats se présentent comme suit :

Indice	paramètre $p_{i,i}$	p_{value}	paramètre $q_{i,i}$	p_{value}	R_a^2
CAC40	1.001	$< 2e^{-16}$	0.038	$< 2e^{-16}$	0.999
Euro50	1.000	$< 2e^{-16}$	0.04	$< 2e^{-16}$	0.999
Immo	1.001	$< 2e^{-16}$	$1.06e^{-02}$	$< 2e^{-16}$	1
HF	1.002	$< 2e^{-16}$	$1.37e^{-02}$	$< 2e^{-16}$	1
PE	1.002	$< 2e^{-16}$	$9.32e^{-03}$	$< 2e^{-16}$	1
tx-nom-cT	1.003	$< 2e^{-16}$	$6.7e^{-05}$	$< 2e^{-16}$	1
tx-réel-cT	0.989	$< 2e^{-16}$	$4.41e^{-03}$	$< 2e^{-16}$	0.999

TABLE 6.3 – Paramètres des modèles linéaires adoptés pour les indices financiers

avec $R_a^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p}(1 - R^2)$, représente le R^2 ajusté qui tient au compte le nombre de paramètres ($p = 2$ dans notre cas) dans le modèle linéaire alors que le R^2 (le coefficient de détermination qui renseigne sur la part de variabilité expliquée par le modèle) augmente lorsque le nombre de paramètres p augmente. Nous rappelons que :

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

avec $SSE = \|Y - \hat{Y}\|_2^2$ et $SST = \|Y - \bar{Y}\|_2^2$

Nous remarquons que tous les paramètres des modèles linéaires sont significatifs au seuil de 5% avec un R_a^2 qui est très proche de 1 et donc un modèle qui ajuste très convenablement la variabilité des indices financiers. La matrice des covariances des erreurs estimées des modèles pour calculer le vecteur $K \in \mathbb{R}^{49}$ est comme suit :

$$\begin{pmatrix} 2.72e^{-3} & 2.36e^{-3} & 5.67e^{-6} & 4.75e^{-6} & 5.03e^{-6} & 2.24e^{-8} & 1.36e^{-7} \\ 2.36e^{-3} & 2.76e^{-3} & 6.11e^{-6} & 5.11e^{-6} & 5.36e^{-6} & -4.56e^{-8} & 2.40e^{-7} \\ 5.67e^{-6} & 6.11e^{-6} & 5.26e^{-6} & 4.41e^{-6} & 4.69e^{-6} & -4.62e^{-8} & 1.47e^{-7} \\ 4.75e^{-6} & 5.11e^{-6} & 4.41e^{-6} & 4.11e^{-6} & 4.11e^{-6} & -1.61e^{-8} & 1.31e^{-7} \\ 5.03e^{-6} & 5.36e^{-6} & 4.69e^{-6} & 4.11e^{-6} & 4.37e^{-6} & -1.36e^{-8} & 1.46e^{-7} \\ 2.24e^{-8} & -4.56e^{-8} & -4.62e^{-8} & -1.61e^{-8} & -1.36e^{-8} & 5.37e^{-8} & 1.66e^{-7} \\ 1.36e^{-7} & 2.40e^{-7} & 1.47e^{-7} & 1.31e^{-7} & 1.46e^{-7} & 1.66e^{-7} & 2.20e^{-7} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons tirer quelques constats à savoir une variance (respectivement covariance) plus importante des erreurs issues des modèles CAC40 et Euro50 que les autres indices mais qui reste faible en général.

Application du modèle

Après avoir eu tous les paramètres, nous avons calculé les matrices respectives $H \in \mathbb{M}_{49}(\mathbb{R})$ qui est diagonale dans le cadre linéaire simple (vu que P et Q le sont) et $K \in \mathbb{R}^{49}$. En injectant $vec(S_{zz})$ qui est la forme vecteur de la matrice de covariance des browniens S_{zz} prise actuellement celle du marché, nous pouvons ressortir une matrice de covariance entre les indices estimée à partir de l'équation (4), soit S_{xx} . La matrice de corrélation associée à S_{xx} peut être comparée à celle obtenue actuellement en moyenne par le GSE et celle au pas 360 comme l'illustre le tableau suivant :

Index	Corrélation traitée		Simulée RLS(1)	Simulée en Moyenne (2)	SE $((1)-(2))^2$	Simulée à la fin (3)	SE $((1)-(3))^2$
	Variable 1	Variable 2					
1	CAC40	Euro50	0.861	0.907	0.21%	0.945	0.71%
2	CAC40	Immo	0.048	0.210	2.64%	0.181	1.77%
3	CAC40	HF	0.047	0.537	24%	0.440	15.39%
4	CAC40	PE	0.048	0.353	9.3%	0.287	5.74%
5	CAC40	tx nom cT	0.002	0.027	0.06%	0.089	0.76%
6	CAC40	tx réel cT	0.005	-0.001	0.00%	-0.008	0.02%
7	Euro50	Immo	0.051	0.220	2.86%	0.180	1.66%
8	Euro50	HF	0.051	0.536	23.61%	0.423	13.90%
9	Euro50	PE	0.051	0.332	7.91%	0.261	4.43%
10	Euro50	tx nom cT	-0.004	0.025	0.08%	0.094	0.96%
11	Euro50	tx réel cT	0.01	0.001	0.01%	-0.005	0.02%
12	Immo	HF	0.945	0.318	39.32%	0.389	30.86%
13	Immo	PE	0.975	0.160	66.43%	0.282	48.06%
14	Immo	tx nom cT	-0.087	0.140	5.13%	0.272	12.85%
15	Immo	tx réel cT	0.136	0.057	0.63%	0.107	0.09%
16	HF	PE	0.964	0.678	8.20%	0.701	6.94%
17	HF	tx nom cT	-0.034	0.113	2.16%	0.235	7.24%
18	HF	tx réel cT	0.136	0.040	0.93%	-0.001	1.89%
19	PE	tx nom cT	-0.028	0.173	4.05%	0.308	11.29%
20	PE	tx réel cT	0.147	-0.019	2.77%	-0.011	2.49%
21	tx nom cT	tx réel cT	0.152	0.217	0.43%	0.302	2.27%
Total	-	-	-	-	200%	-	169%

TABLE 6.4 – Ecart quadratique entre la matrice de corrélation obtenue par la RLS et celle simulée par le GSE en moyenne et à la fin de l'horizon de projection

Théoriquement, la matrice simulée S_{xx} selon l'approche linéaire serait proche ou vers laquelle la matrice simulée par le GSE convergera à l'ultime (pour notre cas le dernier pas de l'horizon de projection). Certes, la SSE a baissé tout en passant de 200% à 169% mais nous remarquons que l'écart reste quand même important. D'autre part, pas d'amélioration marquante des écarts de corrélations concernant les indices desquels dépendent les actifs ayant la plus grande part dans le portefeuille de la compagnie d'assurance (CAC40, Euro50, Immobilier, taux nominal et réel).

Optimisation de la matrice de corrélation des Browniens

L'optimisation de la matrice de corrélation des browniens repose sur la minimisation de la distance quadratique exprimée en fonction de la norme de Frobenius (Cf. Annexe E) : $\|A - X\|_F^2$, tel que A est la matrice de corrélation du marché (cible) et X représente la matrice de corrélation des indices issue de l'approche linéaire et associée à la matrice de covariance estimée S_{xx} . Cette minimisation doit être faite sous contrainte que la matrice Z -corrélations est une matrice de corrélation (PSD et les éléments de la diagonale soit égaux à 1). En développant la norme, nous avons :

$$\|A - X\|_F^2 = \|(a_{(i,j)})_{1 \leq i,j \leq 7} - \left(\frac{(S_{xx})_{i,j}}{\sigma_{x(i)} \cdot \sigma_{x(j)}}\right)_{1 \leq i,j \leq 7}\|_F^2 \quad (*)$$

avec $\sigma_{x(i)}$ représente l'écart-type tiré de la diagonale de la matrice de covariance S_{xx}

En application de l'équation (4) nous obtenons une expression linéaire de $(S_{xx})_{i,j}$:

$$(S_{xx})_{(i,j)} = \sum_{l=1}^{49} h_{(7 \cdot (j-1) + i, l)} \cdot \text{vec}(S_{zz})_l + k_{7(j-1) + i}$$

avec $H = (h_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 49}$ et $K = (k_i)_{1 \leq i \leq 49}$.

L'indice $7 \cdot (j-1) + i$ des éléments de la matrice H est justifié par une concaténation de la matrice S_{xx} en un vecteur ce qui laisse l'indice de chaque ligne de $\text{vec}(S_{xx})$ exprimable en fonction d'une colonne j et une ligne i de la matrice initiale S_{xx} ($\text{vec}(S_{xx})_{7 \cdot (j-1) + i} = S_{xx}(i,j)$). Par analogie, nous avons :

$$\text{vec}(S_{zz})_l = (S_{zz})_{(i',j')}, \quad l = 7(j'-1) + i'$$

Ainsi, nous sommes capables d'exprimer une fonction des éléments de la matrice de corrélation Z -corrélations que nous noterons par $(Z_{(i,j)})_{1 \leq i,j \leq 7}$ tel que :

$$\begin{aligned} (S_{xx})_{i,j} &= \sum_{1 \leq i',j' \leq 7} h_{(7 \cdot (j-1) + i, 7 \cdot (j'-1) + i')} \cdot (S_{zz})_{(i',j')} + k_{7(j-1) + i} \\ &= \sum_{1 \leq i',j' \leq 7} h_{(7(j-1) + i, 7(j'-1) + i')} \cdot Z_{(i',j')} \cdot \sigma_{z(i')} \cdot \sigma_{z(j')} + k_{7(j-1) + i} \\ &= f_{i,j}((Z_{(i',j')})_{1 \leq i',j' \leq 7}) \end{aligned}$$

avec $\sigma_{z(i')}$ représente l'écart-type tiré de la diagonale de la matrice de covariance S_{zz}

Étant donné que nous travaillons avec des matrices PSD, nous nous focaliserons sur le triangle supérieur de la matrice de corrélation de marché cible. Ainsi, la formule finale de (*) devint :

$$\begin{aligned} \min_{Z_{(i',j')}} F(Z_{(i',j')}) &:: \sum_{1 \leq i \leq j \leq 7} \left(a_{(i,j)} - \frac{f_{i,j}((Z_{(i',j')}))}{\sigma_{x(i)} \cdot \sigma_{x(j)}} \right)^2 \quad (**) \\ \text{Sc} : \tilde{\lambda} &\geq 0.005 \end{aligned}$$

avec $\tilde{\lambda}$ les valeurs propres de la matrice de corrélation des browniens $(Z_{(i',j')})_{1 \leq i',j' \leq 7}$

la résolution de l'équation (**) fera appel en théorie au programme d'optimisation dit SQLP (Semi-definite Quadratic Linear Program) qui sera développé dans la section de la RLM. Dans notre cas de figure, la matrice H est diagonale et ceci simplifie l'expression de $(S_{xx})_{i,j}$ qui devint :

$$(S_{xx})_{i,j} = h_{(7.(j-1)+i,7.(j-1)+i)} \cdot (S_{zz})_{(i,j)} + k_{7(j-1)+i}, \quad 1 \leq i, j \leq 7$$

Nous remarquons que dans ce cas de figure, la covariance de deux rendements d'indices financiers respectifs X_i et X_j n'est expliquée que par la covariance des browniens qui sont associés auxdits indices. Cette approche plus simplifiée nous laisse une piste qui est d'adopter une approche plug-in plutôt de résoudre l'équation (**). En effet, l'approche plug-in repose sur l'injection directe de la matrice de covariance de marché cible S_{aa} calculée sur l'historique dans l'égalité simplifiée en haut et permet de déduire un par un les covariances des browniens estimées (\hat{S}_{zz}) :

$$(\hat{S}_{zz})_{(i,j)} = ((S_{aa})_{i,j} - k_{7(j-1)+i}) / h_{(7.(j-1)+i,7.(j-1)+i)}, \quad 1 \leq i, j \leq 7$$

En application de cette équation, la matrice de covariance estimée des browniens n'est pas PSD, et donc en utilisant l'algorithme de HIGHAM (C.f Annexe E) qui permet de chercher la matrice PSD la plus proche de la matrice covariance obtenue par le modèle linéaire simple, nous obtenons une matrice de covariance dont la matrice de corrélation associée "Z-corrélations estimées" est la suivante :

$$\begin{matrix} & dW_1^{\text{CAC40}} & dW_2^{\text{Euro50}} & dW_3^{\text{Immo}} & dW_4^{\text{HF}} & dW_5^{\text{PE}} & dW_6^{\text{Tx-nom-cT}} & dW_7^{\text{Tx-reel-cT}} \\ \begin{matrix} dW_1^{\text{CAC40}} \\ dW_2^{\text{Euro50}} \\ dW_3^{\text{Immo}} \\ dW_4^{\text{HF}} \\ dW_5^{\text{PE}} \\ dW_6^{\text{Tx-nom-cT}} \\ dW_7^{\text{Tx-reel-cT}} \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 1 & 0.88 & 0.36 & 0.88 & 0.72 & 0.41 & -0.14 \\ 0.88 & 1 & 0.39 & 0.86 & 0.67 & 0.35 & -0.10 \\ 0.36 & 0.39 & 1 & 0.35 & -0.05 & -0.30 & 0.11 \\ 0.88 & 0.86 & 0.35 & 1 & 0.56 & 0.21 & 0.60 \\ 0.72 & 0.67 & -0.05 & 0.56 & 1 & 0.88 & -0.55 \\ 0.41 & 0.35 & -0.30 & 0.21 & 0.88 & 1 & -0.64 \\ -0.14 & -0.10 & 0.11 & 0.60 & -0.55 & -0.64 & 1 \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

Conformément au chapitre 2 de la présente partie, l'algorithme de HIGHAM (Cf. Annexe E) est appliqué à la matrice de corrélation d'entrée totale du GSE composée de la matrice de corrélation des browniens ci-haut et les corrélations faisant appel aux browniens à long terme des modèles respectifs LMM+ et GLMM. Après, nous lançons 1000 scénarios économiques des différents risk-drivers moyennant le GSE risque-neutre de Moody's, nous retrouvons une nouvelle matrice de corrélation simulée en moyenne sur l'horizon de projection comme l'illustre le tableau suivant dans la colonne 7 :

Index	Corrélation traitée		Market(1)	Simulée sans optim de l'input GSE.(2)	SE (((1) - (2)) ²)	Simulée après optim de l'input GSE.(3)	SE (((1) - (3)) ²)
	Variable 1	Variable 2					
1	CAC40	Euro50	0.980	0.907	0.532%	0.732	6.13%
2	CAC40	Immo	0.298	0.210	0.77%	0.252	0.21%
3	CAC40	HF	0.761	0.537	5%	0.613	2.18%
4	CAC40	PE	0.505	0.353	2.31%	0.496	0.01%
5	CAC40	tx nom cT	-0.126	0.027	2.33%	0.033	2.53%
6	CAC40	tx réel cT	-0.061	-0.001	0.37%	-0.013	0.24%
7	Euro50	Immo	0.310	0.220	0.8%	0.279	0.10%
8	Euro50	HF	0.768	0.536	5.36%	0.629	1.92%
9	Euro50	PE	0.444	0.332	1.26%	0.472	0.08%
10	Euro50	tx nom cT	-0.124	0.025	2.20%	0.031	2.40%
11	Euro50	tx réel cT	-0.05	0.001	0.26%	-0.009	0.17%
12	Immo	HF	0.291	0.318	0.07%	0.369	0.60%
13	Immo	PE	0.139	0.160	0.05%	-0.018	2.46%
14	Immo	tx nom cT	-0.307	0.140	19.92%	0.141	20.09%

15	Immo	tx réel cT	0.106	0.057	0.24%	0.052	0.30%
16	HF	PE	0.722	0.678	0.19%	0.574	2.19%
17	HF	tx nom cT	-0.327	0.113	19.35%	0.121	20.08%
18	HF	tx réel cT	0.056	0.040	0.03%	0.037	0.04%
19	PE	tx nom cT	0.455	0.173	7.95%	0.180	7.60%
20	PE	tx réel cT	-0.373	-0.019	12.49%	-0.063	9.60%
21	tx nom cT	tx réel cT	-0.183	0.217	15.97%	0.120	9.17%
Total	-	-	-	-	97.4%	-	88%

TABLE 6.5 – Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et celle simulée par le GSE en moyenne avant et après optimisation linéaire simple

Étant intéressé plus par les indices CAC40, Euro50, Immobilier et les taux nominaux et réels, nous remarquons lors de l'optimisation par exemple de la corrélation (CAC40,Euro50), une dilution est opérée de cette corrélation tout en passant de **0.886** à **0.732**, qui est due au saut de volatilité du processus SVJD des deux indices. Par conséquent, ceci a augmenté l'écart quadratique de l'indice en question avec la corrélation du marché. Mais au global nous retenons une amélioration de l'écart global avec la matrice de corrélation du marché tout en passant de 97.4% à 88%.

Malheureusement, nous n'avons pas eu l'opportunité de challenger le modèle AR(1) adopté dans le cadre de l'approche linéaire mais nous avons testé sa robustesse (colinéarité et analyse de résidus). Ce modèle peut-être interprété comme une discrétisation simple du cadre général des processus de diffusions des indices financiers qui sont plus complexes comme évoqué dans ce mémoire vu que la finalité est de modéliser les corrélations qui sont une mesure de dépendance linéaire négligeant la partie non linéaire dans la relation entre lesdits indices.

6.1.2 Régression Linéaire Multiple (RLM)

Cette approche constitue une généralisation du cadre de la RLS abordée dans la sous-section précédente où nous expliquerons l'évolution des indices au pas t par l'observation de tous les indices au pas $t - 1$ et leurs browniens générés au pas t , ce qui laisse les matrices $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq 7}$ et $Q = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq 7}$ abordées dans l'équation (5) non diagonales mais pleines.

Validation du Modèle

Par analogie avec l'étude menée dans le cadre de la RLS, il est indispensable d'analyser la colinéarité entre les variables explicatives avant le calcul des paramètres du modèle de RLM pour être statistiquement juste. Conformément à l'Annexe G où nous détaillons le calcul de la VIF (facteur d'inflation de variance), nous avons procédé par une élimination descendante des variables ayant les VIFs plus de 5 pour ne retenir à la fin que les variables explicatives précisées à l'étape 5 de la table ci-dessous :

VIF	$\log(S_{t-1}^1)$	$\log(S_{t-1}^2)$	$\log(P_{t-1})$	$\log(HF_{t-1})$	$\log(PE_{t-1})$	R_{t-1}^n	R_{t-1}^r	$Z_{S_t}^1$	$Z_{S_t}^2$	Z_{P_t}	Z_{HF_t}	Z_{PE_t}	$Z_{R_t}^n$	$Z_{R_t}^r$
étape 1	9.44	9.88	7.92	123.82	124.79	4.40	1.14	34.89	39.26	1.31	7.87	9.36	2.31	2.29
étape 2	9.35	9.50	6.52	13.41	-	4.37	1.11	34.89	39.26	1.31	7.87	9.36	2.31	2.29
étape 3	9.35	9.50	6.52	13.41	-	4.36	1.11	1.99	-	1.07	4.82	4.94	1.74	1.67
étape 4	9.20	9.46	1.64	-	-	1.17	1.06	1.99	-	1.07	4.82	4.98	1.74	1.67
étape 5	1.70	-	1.60	-	-	1.15	1.05	1.99	-	1.07	4.82	4.98	1.74	1.67

TABLE 6.6 – VIF des variables explicatives dans le cadre d'une RLM

Au bout de 5 étapes, nous gardons 10 des 14 variables explicatives. Pour chaque indice financier, nous procéderons par une élimination descendante desdites variables pour retenir à la fin que les variables explicatives significatives au seuil de 5% de chaque indice financier. Avant d'afficher les résultats, nous déroulerons une analyse des résidus qui ressortent des modèles appliqués. Dans cette partie, nous prendrons comme exemple d'analyse l'indice **Eurostoxx 50**. La première étape est de tester la non-corrélation du couple $(\hat{Y}_j, \hat{U}_j)_{1 \leq j \leq 7}$ qui sont respectivement le $j^{\text{ème}}$ indice financier estimé par son modèle linéaire et son erreur estimée associée (C.f Annexe G).

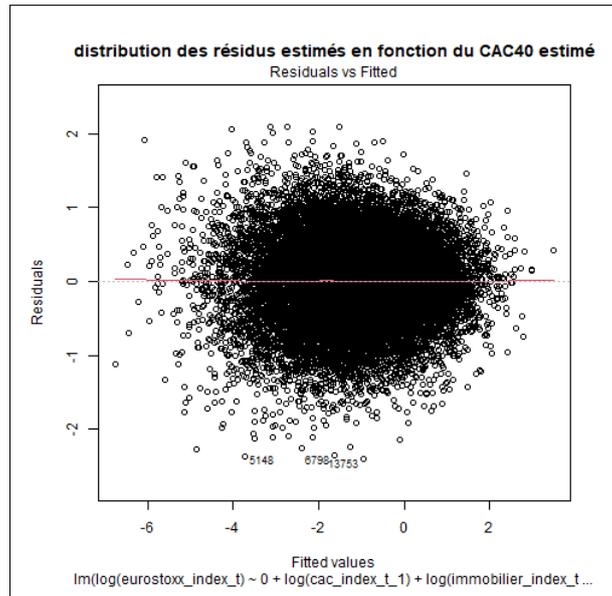


Fig. 6.5 – Répartition des résidus estimés en fonction des valeurs de l’Euro50 estimées

Nous remarquons qu’il n’y a pas une structure particulière qui se dégage avec une dispersion considérable du nuage de point qui reste centré. De plus, pour le test de qualité d’ajustement et de la normalité des erreurs, nous nous baserons sur les résidus standardisés t_i et studentisés t_i^* qui théoriquement devraient tendre, pour un grand nombre d’observations, vers une loi normale et avec une part des valeurs aberrantes de α % du nombre total des observations :

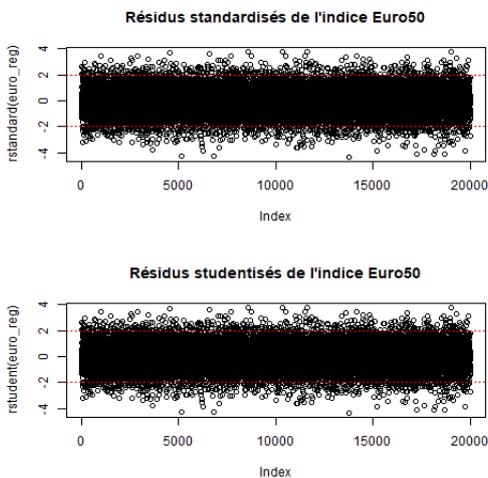


Fig. 6.6 – Répartition des erreurs standardisées et studentisées de l’Euro50

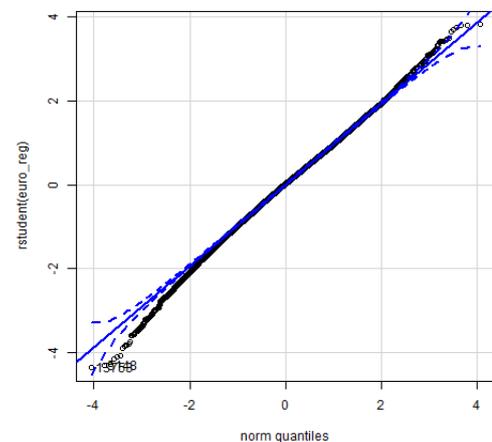


Fig. 6.7 – QQ-Plot des erreurs studentisées de l’Euro 50

La figure 6.6 montre bien une forte présence des valeurs aberrantes des deux résidus (48%) malgré qu'ils sont centrés, alors que pour avoir une qualité d'ajustement acceptable en théorie il faut avoir un pourcentage proche de 5%. De plus nous pouvons remarquer qu'il n'y a pas des valeurs aussi extrêmes que dans le cadre de l'étude de la RLS, qui reste malgré tout proches de la bande de confiance de niveau 95%. Pourtant ce n'est pas d'une bonne qualité d'ajustement comme le prévoit le cadre théorique. La figure 6.7 montre que la queue de distribution des erreurs studentisées faibles s'écarte légèrement de la bande de confiance gaussienne aplatie de niveau 95% alors que celle des erreurs studentisées fortes est située dans ladite bande de confiance. Ainsi, nous concluons que l'hypothèse de normalité des erreurs peut-être partiellement acceptée tout en soulignant la non-corrélation des erreurs et le fait qu'elles soient centrées.

Les paramètres du modèle

Par analogie avec l'étude faite en RLS, nous testons si les paramètres des modèles sont significativement différents de zéro au seuil de $\alpha = 5\%$. En d'autres termes, si la p_{value} de chacun des paramètres est inférieure à 0.05 pour rejeter l'hypothèse de nullité des paramètres. Nous obtenons alors les matrices P et Q de l'équation (5) qui se présentent comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} 1.007.e^0 & 0 & 3.09.e^{-3} & 0 & 0 & 3.85.e^{-2} & 0 \\ 9.39.e^{-1} & 0 & 1.47.e^{-1} & 0 & 0 & -1.25.e^0 & -1.01.e^0 \\ 4.87.e^{-5} & 0 & 1.001.e^0 & 0 & 0 & 5.14.e^{-2} & 0.004.e^0 \\ 1.76.e^{-1} & 0 & 2.25.e^0 & 0 & 0 & -2.27.e^1 & 3.95.e^0 \\ 9.04.e^{-2} & 0 & 1.86.e^0 & 0 & 0 & -1.54.e^1 & 1.84.e^0 \\ 0 & 0 & -1.04.e^{-4} & 0 & 0 & 1.002.e^0 & 0.00.e^0 \\ -2.83.e^{-5} & 0 & 9.85.e^{-5} & 0 & 0 & 3.e^{-4} & 0.99.e^0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 3.80.e^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.18.e^{-4} & 0 \\ 3.20.e^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01.e^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.43.e^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.31.e^{-5} & 0 & 0 & 1.01.e^{-5} & 0 & 6.85.e^{-5} & 0 \\ -6.41.e^{-5} & 0 & 0 & 5.06.e^{-5} & 0 & 0 & 0.004.e^0 \end{pmatrix}$$

Nous remarquons bien que les indices financiers **Eurostoxx 50**, **Hedge Fund** et **Private Equity** au pas $t - 1$ ne sont significatifs pour tous les indices au pas t , item pour leurs mouvements browniens à l'exception du **Hedge fund** qui reste légèrement explicatif pour les taux nominaux et réels. De plus, la matrice des covariances des erreurs estimées des modèles pour calculer le vecteur $K \in \mathbb{R}^{49}$ dans l'équation (4) est comme suit :

$$\begin{pmatrix} 2.71e^{-3} & 2.04e^{-3} & 1.98e^{-7} & 1.47e^{-4} & 3.30e^{-5} & 1.52e^{-7} & -1.20e^{-9} \\ 2.04e^{-3} & 3.02e^{-1} & 5.37e^{-6} & 2.43e^{-2} & 4.23e^{-3} & 7.53e^{-7} & -7.86e^{-6} \\ 1.98e^{-7} & 5.37e^{-6} & 3.21e^{-7} & 2.92e^{-4} & 2.25e^{-4} & 2.44e^{-8} & 3.46e^{-8} \\ 1.47e^{-4} & 2.43e^{-2} & 2.92e^{-4} & 4.24e^{-1} & 3.10e^{-1} & 2.48e^{-5} & 4.20e^{-5} \\ 3.30e^{-5} & 4.23e^{-3} & 2.25e^{-4} & 3.10e^{-1} & 2.66e^{-1} & -1.35e^{-5} & 4e^{-5} \\ 1.52e^{-7} & 7.53e^{-7} & 2.45e^{-8} & 2.48e^{-5} & 1.35e^{-5} & 4.88e^{-8} & 1.84e^{-8} \\ -1.20e^{-9} & -7.86e^{-6} & 3.46e^{-8} & 4.20e^{-5} & 4e^{-5} & 1.85e^{-8} & 2.15e^{-7} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons constater par exemple que la variance des erreurs estimées des indices respectifs **Eurostoxx 50**, **Hedge Fund** et **Private Equity** est plus importante que les autres erreurs estimées, surtout celles des taux nominaux et réels à court terme, mais qui restent faibles en général.

Il est à noter que la structure des matrices définie ci-haut définira complètement le modèle linéaire des matrices de covariance notamment les matrices H et K dans l'équation (4).

Application du modèle

Après avoir établi tous les paramètres, nous avons calculé les matrices respectives $H \in \mathbb{M}_{49}(\mathbb{R})$ qui dans le cas linéaire multiple ne sera pas diagonale mais qui aura des colonnes de zéros notamment les colonnes liées aux covariances des browniens des indices respectifs **Eurostoxx50** et **Private Equity** (vu que P et Q n'incorporent pas de paramètres ou poids liés à ces 2 indices) et $K \in \mathbb{R}^{49}$. Comme interprétation de ce résultat,

lesdites covariances ne seront pas explicatives des covariances de tous les indices financiers conformément à l'équation (4). En injectant $vec(S_{zz})$ du marché dans la même équation, nous pouvons ressortir une matrice de covariance entre les indices estimée, soit S_{xx} . La matrice de corrélation associée à S_{xx} peut être comparée à celle obtenue actuellement en moyenne par le GSE et celle au pas 360 comme l'illustre le tableau suivant :

Index	Corrélation traitée		Simulée RLM(1)	Simulée en Moyenne (2)	SE $((1)-(2))^2$	Simulée à la fin (3)	SE $((1)-(3))^2$
	Variable 1	Variable 2					
1	CAC40	Euro50	0.051	0.907	73.37%	0.945	80.05%
2	CAC40	Immo	0.008	0.210	4.10%	0.181	2.99%
3	CAC40	HF	0.003	0.537	28.52%	0.440	19.05%
4	CAC40	PE	0.001	0.353	12.38%	0.287	8.22%
5	CAC40	tx nom cT	0.013	0.027	0.02%	0.089	0.57%
6	CAC40	tx réel cT	-0.001	-0.001	0.00%	-0.008	0.01%
7	Euro50	Immo	0.012	0.220	4.33%	0.180	2.82%
8	Euro50	HF	0.068	0.536	21.95%	0.423	12.64%
9	Euro50	PE	0.015	0.332	10.03%	0.261	6.05%
10	Euro50	tx nom cT	0.004	0.025	0.04%	0.094	0.81%
11	Euro50	tx réel cT	-0.022	0.001	0.05%	-0.005	0.03%
12	Immo	HF	0.561	0.318	5.93%	0.389	2.96%
13	Immo	PE	0.552	0.160	15.38%	0.282	7.31%
14	Immo	tx nom cT	0.191	0.140	0.27%	0.272	0.64%
15	Immo	tx réel cT	0.123	0.057	0.43%	0.107	0.03%
16	HF	PE	0.922	0.678	5.98%	0.701	4.92%
17	HF	tx nom cT	0.122	0.113	0.01%	0.235	1.28%
18	HF	tx réel cT	0.099	0.040	0.34%	-0.001	1.00%
19	PE	tx nom cT	0.083	0.173	0.81%	0.308	5.05%
20	PE	tx réel cT	0.119	-0.019	1.91%	-0.011	1.68%
21	tx nom cT	tx réel cT	0.179	0.217	0.15%	0.302	1.53%
Total	-	-	-	-	186%	-	160%

TABLE 6.7 – Ecart quadratique entre la matrice de corrélation obtenue par la RLM et celle simulée par le GSE en moyenne et à la fin de l'horizon de projection

Il est clair que la SSE a baissé en passant de la comparaison avec la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's (soit 186%) à la comparaison avec la matrice simulée par le GSE risque-neutre Moody's à la fin de l'horizon de projection (soit 160%). De plus, l'écart quadratique total SSE selon l'approche RLM s'est amélioré par rapport à l'approche RLS mais ce qui est marquant c'est le fait que nous ne captions pas la corrélation entre les deux indices actions (CAC40 et Euro50) qui est l'une des plus importantes vu la part considérable des actions dans le portefeuille de la compagnie d'assurance. Ainsi, nous retenons une amélioration de presque tous les écarts quadratiques par rapport à l'approche RLS mais une forte dégradation de la corrélation entre indices actions.

Optimisation de la matrice de corrélation des Browniens

À l'opposé de la méthode utilisée dans le cadre de la RLS, l'optimisation se ferait en passant par l'algorithme d'optimisation linéaire conique **SQLP** (C.f Annexe H). En utilisant l'équation (*), nous avons :

$$\|A - X\|_F^2 = \|(a_{(i,j)})'_{1 \leq i,j \leq 7} - \left(\frac{(S_{xx})'_{i,j}}{\sigma_x(i) \cdot \sigma_x(j)}\right)_{1 \leq i,j \leq 7}\|_F^2 \quad (***)$$

avec

- $(a_{(i,j)})' = (a_{(i,j)}) - \frac{k_{7(j-1)+i}}{\sigma_x(i) \cdot \sigma_x(j)}$,
- $(S_{xx})'_{i,j} = \sum_{1 \leq i',j' \leq 7} h_{(7(j-1)+i, 7(j'-1)+i')} \cdot Z_{(i',j')} \cdot \sigma_z(i') \cdot \sigma_z(j')$

L'algorithme **SQLP** n'utilise que la partie triangulaire supérieure de la matrice cible qui est pour notre étude maintenant $(a_{(i,j)})'_{1 \leq i,j \leq 7}$. Il en est de même pour la matrice de corrélation des browniens $(Z_{(i',j')})_{1 \leq i',j' \leq 7}$ que nous viserons à optimiser. L'idée est donc de reformuler l'expression de $(S_{xx})'_{i,j}$ de telle sorte à ce que nous exploitons que la partie supérieure de la matrice $(Z_{(i',j')})_{1 \leq i',j' \leq 7}$. Nous obtenons la formule suivante pour $i \leq j$:

$$(S_{xx})'_{i,j} = \sum_{1 \leq i' \leq j' \leq 7} h'_{(\sum_{k=1}^{j-1} k+i, \sum_{k=1}^{j'-1} k+i')} \cdot Z_{(i',j')} \cdot \sigma_z(i') \cdot \sigma_z(j'), \quad (i \leq j)$$

tel que :

- $h'_{(\sum_{k=1}^{j-1} k+i, \sum_{k=1}^{j'-1} k+i')} = h_{(7(j-1)+i, 7(j'-1)+i')} + h_{(7(j-1)+i, 7(j'-1)+j')}$, si $i' < j'$
- $h'_{(\sum_{k=1}^{j-1} k+i, \sum_{k=1}^{j'-1} k+i')} = h_{(7(j-1)+i, 7(j'-1)+i')}$, sinon

L'équation (***) devient alors :

$$\|A - X\|_F^2 = 2 \cdot \|\text{svec}(A') - H'' \cdot \text{svec}(Z)\|^2 \quad (I)$$

tel que :

A' est la matrice des éléments $(a_{(i,j)})'_{1 \leq i,j \leq 7}$ et H'' est une matrice $\in \mathbb{M}_{28}(\mathbb{R})$ constituée des éléments $(h''_{(\sum_{k=1}^{j-1} k+i, \sum_{k=1}^{j'-1} k+i')})_{1 \leq i \leq j \leq 7, 1 \leq i' \leq j' \leq 7}$ définis comme suit :

$$h''_{(\sum_{k=1}^{j-1} k+i, \sum_{k=1}^{j'-1} k+i')} = \frac{h'_{(\sum_{k=1}^{j-1} k+i, \sum_{k=1}^{j'-1} k+i')} \cdot \sigma_z(i') \cdot \sigma_z(j')}{\sigma_x(i) \cdot \sigma_x(j)}, \quad i \leq j \quad \& \quad i' \leq j'$$

L'opérateur *svec* permet de récupérer la partie triangulaire supérieure de la matrice en question et concatène les colonnes pour obtenir un vecteur colonne comme détaillé à (l'Annexe H).

Avant de procéder à l'optimisation de la fonction dans l'équation (I) et pour mieux assimiler ladite équation, nous avons analysé cette dernière en dimension 3 en prenant 2 corrélations de la matrice des browniens :

- $Z_{(CAC40, Immo)}$: représente la corrélation entre le brownien du CAC40 et l'indice immobilier
- $Z_{(CAC40, Tx-nom-cT)}$: représente la corrélation entre le brownien du CAC40 et le taux nominal à court terme

ainsi, l'équation (I) se simplifie pour devenir ce qui suit :

$$2 \cdot \sum_{1 \leq i \leq j \leq 7} \left(a'_{(i,j)} - h''_{(\sum_{k=1}^{j-1} k+i, 4)} \cdot Z_{(CAC40, Immo)} - h''_{(\sum_{k=1}^{j-1} k+i, 16)} \cdot Z_{(CAC40, Tx-nom-cT)} \right)^2$$

Il s'agit d'une fonction convexe (carré de la norme 2) qui admet alors un minimum global. Le graphe de cette fonction se présente comme suit :

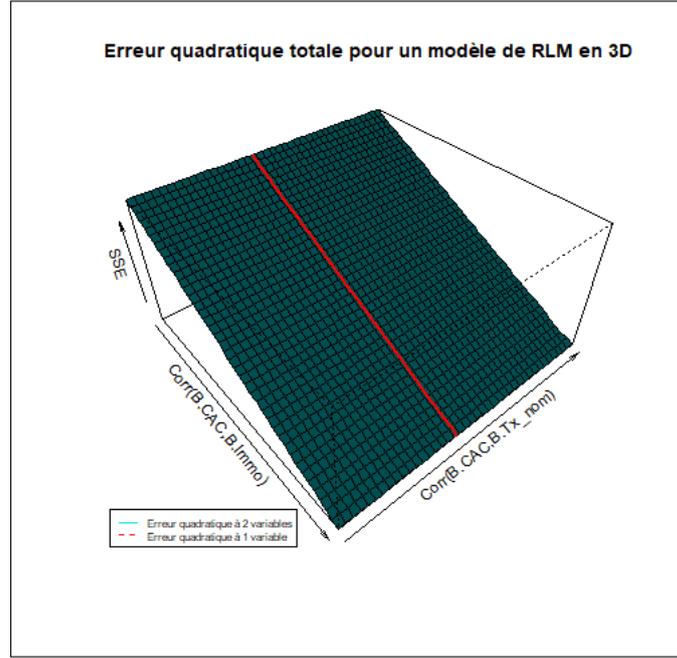


Fig. 6.8 – Somme des erreurs quadratiques entre la matrice de corrélation cible et modélisée par la RLM en 3D

Nous remarquons bien que la somme SSE décroît quand nous augmentons la corrélation entre le CAC40 et l'indice immobilier tout en soulignant qu'elle n'est quasi pas sensible à la corrélation entre le CAC40 et le taux nominal à court terme. De plus, nous avons tracé l'évolution de la somme SSE en fonction de la corrélation $Z_{(CAC40, Immo)}$ tout en fixant la corrélation $Z_{(CAC40, Tx-nom-cT)}$ à sa valeur de marché, soit -0.183 (courbe en rouge) pour se ramener au cas de 2 dimensions, qui appuie notre constat que le minimum global existe et que nous sommes plus proche quand la corrélation $Z_{(CAC40, Immo)}$ augmente.

En revenant au cadre général représenté par l'équation (I), et en réajustant l'algorithme **SQLP** (C.f Annexe H) à notre cadre d'étude, nous obtenons l'algorithme de la forme suivante :

$$\underset{e^*, Z}{\text{minimize}} \quad \langle C^s, Z \rangle + \langle C^q, e^* \rangle$$

S.c :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^s)^\top \text{svec}(\mathbf{Z}) + (\mathbf{A}^q)^\top \mathbf{e}^* &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Z} &\in \mathcal{S}^7 \\ \mathbf{e}^* &\in \mathcal{Q}^{29} \end{aligned}$$

tel que $C^q = [1, 0_{28}]^T$ vecteur $\in \mathbb{R}^{29}$, $C^s = \mathbb{O}_7$ la matrice des zéros de dimension 7×7 et :

$$\mathbf{A}^s = [\mathbf{A}_1^s, \mathbf{A}_2^s]$$

$$\mathbf{A}^q = [\mathbf{A}_1^q, \mathbf{A}_2^q]$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2]$$

avec :

$$\mathbf{A}_1^s = (\mathbf{H}'')^T,$$

$$\mathbf{A}_2^s = [\text{svec}(\mathbf{A}_1), \dots, \mathbf{A}_n], \text{ (isolation des éléments de la diagonale de } Z \text{ devant être égaux à 1 : voir Annexe H)}$$

$$\mathbf{A}_1^q = [0, I_{28}]^T$$

$$\mathbf{A}_2^q = \mathbb{O}_{29}$$

$$\mathbf{b}_1 = \text{svec}(\mathbf{A}')$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{1}_7$$

Nous rappelons que la matrice H de l'équation (4) de laquelle découle H'' contient des zéros dans les colonnes pondérant les corrélations en liaison avec **Eurostoxx50** et **Private Equity**, il en est de même pour la matrice des poids H'' .

L'application de cet algorithme ressort les résultats suivants :

- $pobj = e_0 = 1.95$, ceci dit que la somme des écarts quadratiques dans l'équation (I) concernant que les éléments du triangle supérieur est inférieure ou égale à 1.95^2 ;
- le vecteur e^* des écarts quadratiques des éléments du triangle supérieur de la matrice cible et la matrice estimée et pondérée par l'algorithme **SQLP** ;
- la matrice de corrélation des browniens optimisée Z^* qui se présente comme suit :

$$\begin{matrix}
 dW_1^{CAC40} \\
 dW_2^{Euro50} \\
 dW_3^{Immo} \\
 dW_4^{HF} \\
 dW_5^{PE} \\
 dW_6^{Tx-nom-cT} \\
 dW_7^{Tx-reel-cT}
 \end{matrix}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0.99 & -0.99 & 0 & -0.99 & -0.99 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0.99 & 0 & 1 & -0.99 & 0 & -0.99 & -0.99 \\
 -0.99 & 0 & -0.99 & 1 & 0 & 0.99 & 0.99 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -0.99 & 0 & -0.99 & 0.99 & 0 & 1 & 0.99 \\
 -0.99 & 0 & -0.99 & 0.99 & 0 & 0.99 & 1
 \end{pmatrix}$$

Malheureusement, l'algorithme ne capte pas les corrélations des browniens des indices respectifs **Eurostoxx50** et **Private Equity** ce qui est expliqué par la structure de la matrice H'' qui dépend de celle des matrices de poids P et Q dans le modèle initial des indices (équation (1)) où nous ne prenons pas en compte lesdits indices au pas $t - 1$ à l'issue de l'étude de colinéarité et significativité des variables explicatives. De plus, l'algorithme plafonne toutes les autres corrélations pour minimiser le plus possible les écarts quadratiques avec la matrice cible $(a_{(i,j)})'_{1 \leq i, j \leq 7}$ surtout avec des petits coefficients $(h''_{(\sum_{k=1}^{j-1} k+i, \sum_{k=1}^{j'-1} k+i')})_{1 \leq i \leq j \leq 7, 1 \leq i' \leq j' \leq 7}$ dépendant des matrices P et Q (Cf.sous-section des paramètres du modèle), ce qui biaise le résultat et le rend non réaliste.

Dans un autre contexte économique, nous pouvions avoir des résultats satisfaisants : un modèle avec des variables **Eurostoxx50** et **Private Equity** significatifs au niveau 95% ou des poids

$(h''_{(\sum_{k=1}^{j-1} k+i, \sum_{k=1}^{j'-1} k+i')})_{1 \leq i \leq j \leq 7, 1 \leq i' \leq j' \leq 7}$ plus importants ce qui aurait été un bon candidat du modèle linéaire simple.

Malgré ce résultat drastique nous avons pris le soin d'injecter la matrice de corrélation ci-haut à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's et les corrélations des browniens à long terme des modèles respectifs LMM+ et GLMM. Après, nous avons transformé cette matrice en une nouvelle PSD (algorithme de HIGHAM). De façon analogue à la démarche faite en RLS, nous lançons 1000 scénarios économiques des différents risk-drivers moyennant le GSE risque-neutre de Moody's, nous retrouvons une nouvelle matrice de corrélation simulée en moyenne sur l'horizon de projection comme l'illustre le tableau suivant dans la colonne 7 :

Index	Corrélation traitée		Market(1)	Simulée sans optim de l'input GSE.(2)	SE $((1) - (2))^2$	Simulée après optim de l'input GSE.(3)	SE $((1) - (3))^2$
	Variable 1	Variable 2					
1	CAC40	Euro50	0.980	0.907	0.532%	0.008	94.54%
2	CAC40	Immo	0.298	0.210	0.77%	0.677	14.39%
3	CAC40	HF	0.761	0.537	5%	-0.667	203.86%
4	CAC40	PE	0.505	0.353	2.31%	0.006	24.84%
5	CAC40	tx nom cT	-0.126	0.027	2.33%	0.011	1.87%
6	CAC40	tx réel cT	-0.061	-0.001	0.37%	-0.114	0.28%
7	Euro50	Immo	0.310	0.220	0.8%	0.003	9.46%
8	Euro50	HF	0.768	0.536	5.36%	0.008	57.81%

9	Euro50	PE	0.444	0.332	1.26%	0.006	19.20%
10	Euro50	tx nom cT	-0.124	0.025	2.20%	0.026	2.23%
11	Euro50	tx réel cT	-0.05	0.001	0.26%	0.010	0.37%
12	Immo	HF	0.291	0.318	0.07%	-0.952	154.55%
13	Immo	PE	0.139	0.160	0.05%	0.031	1.15%
14	Immo	tx nom cT	-0.307	0.140	19.92%	0.123	18.47%
15	Immo	tx réel cT	0.106	0.057	0.24%	-0.124	5.29%
16	HF	PE	0.722	0.678	0.19%	0.024	48.66%
17	HF	tx nom cT	-0.327	0.113	19.35%	0.135	21.33%
18	HF	tx réel cT	0.056	0.040	0.03%	0.226	2.89%
19	PE	tx nom cT	0.455	0.173	7.95%	0.169	8.19%
20	PE	tx réel cT	-0.373	-0.019	12.49%	0.068	19.47%
21	tx nom cT	tx réel cT	-0.183	0.217	15.97%	0.465	41.96%
Total	-	-	-	-	97.4%	-	750%!!!

TABLE 6.8 – Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et celle simulée par le GSE en moyenne avant et après optimisation linéaire Multiple

Après modélisation du problème selon l’approche linéaire conique (**SQLP**), malheureusement nous n’aboutissons pas à de résultats satisfaisants surtout que nous avons des gros écarts qui sont créés notamment pour les corrélations des indices (CAC40,Euro50), (CAC40,HF) et (Immo, HF). Par conséquent, cette méthode ne sera pas candidate de la méthode développée avant ou celles des sous-sections qui viennent après.

6.2 Méthode Heuristique

Lors de l’utilisation directe de la matrice de corrélation du marché comme input du GSE risque-neutre Moody’s (après sa transformation en une matrice PSD comme condition du GSE), nous avons remarqué qu’il y a une baisse d’une part importante des corrélations surtout celles des indices financiers modélisant les actifs ayant la part la plus importante dans le portefeuille de la compagnie d’assurance comme l’illustre les colonnes 4 et 5 du tableau 6.8 ci-haut. En prenant l’exemple de l’indice CAC40 avec Eurostoxx50, nous avons une tendance baissière de ladite corrélation passant d’un input de **0.980%** à **0.907%** comme l’illustre le tableau 6.8 ci-haut. Cette dilution est expliquée par les sauts de volatilité du processus SVJD régissant chacun des risk-drivers, ce qui rajoute de l’aléa et l’incertitude et ne permet d’atteindre directement le coefficient de corrélation du marché.

L’idée de cette approche est de supposer une matrice de corrélation à l’entrée du GSE risque-neutre de Moody’s augmentée par l’écart qui existe entre la matrice simulée en moyenne par le GSE et la matrice de corrélation des browniens actuelle insérée à l’entrée et donc en prenant en compte directement les perturbations causées à cette matrice. Les écarts obtenus évoluent différemment de chaque indice à l’autre tout en soulignant d’importantes valeurs pour les indices respectifs Private Equity et le taux nominal à court terme :

$$\begin{matrix}
 dW_1^{CAC40} \\
 dW_2^{Euro50} \\
 dW_3^{Immo} \\
 dW_4^{HF} \\
 dW_5^{PE} \\
 dW_6^{Tx-nom-cT} \\
 dW_7^{Tx-reel-cT}
 \end{matrix}
 \begin{pmatrix}
 dW_1^{CAC40} & dW_2^{Euro50} & dW_3^{Immo} & dW_4^{HF} & dW_5^{PE} & dW_6^{Tx-nom-cT} & dW_7^{Tx-reel-cT} \\
 - & 0.072 & 0.088 & 0.226 & 0.149 & -0.152 & -0.061 \\
 - & - & 0.087 & 0.211 & 0.131 & -0.162 & -0.045 \\
 - & - & - & -0.019 & -0.028 & -0.442 & 0.047 \\
 - & - & - & - & -0.006 & -0.406 & 0.001 \\
 - & - & - & - & - & 0.251 & -0.340 \\
 - & - & - & - & - & - & -0.409 \\
 - & - & - & - & - & - & -
 \end{pmatrix}$$

La nouvelle matrice de corrélation des browniens que nous mettrons à l’entrée du GSE risque-neutre

6.2. MÉTHODE HEURISTIQUE

Moody's se présente comme suit :

$$\begin{matrix}
 dW_1^{\text{CAC40}} \\
 dW_2^{\text{Euro50}} \\
 dW_3^{\text{Immo}} \\
 dW_4^{\text{HF}} \\
 dW_5^{\text{PE}} \\
 dW_6^{\text{Tx-nom-cT}} \\
 dW_7^{\text{Tx-reel-cT}}
 \end{matrix}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0.9979 & 0.3787 & 0.9323 & 0.6451 & -0.2853 & -0.1239 \\
 0.9979 & 1 & 0.3789 & 0.9389 & 0.6046 & -0.3261 & -0.0942 \\
 0.3787 & 0.3789 & 1 & 0.379 & 0.0151 & -0.6434 & 0.1405 \\
 0.9323 & 0.9389 & 0.379 & 1 & 0.5043 & -0.4726 & 0.035 \\
 0.6451 & 0.6046 & 0.015 & 0.5043 & 1 & 0.4619 & -0.6884 \\
 -0.2853 & -0.3261 & -0.6434 & -0.4726 & 0.4619 & 1 & -0.6215 \\
 -0.1239 & -0.0942 & 0.1405 & 0.035 & -0.6884 & -0.6215 & 1
 \end{pmatrix}$$

A l'instar de cette modification, nous injectons cette matrice de corrélation des browniens modifiée et nous lançons 1000 scénarios économiques des différents risk-drivers moyennant le GSE risque-neutre de Moody's, nous retrouvons une nouvelle matrice de corrélation simulée en moyenne sur l'horizon de projection comme l'illustre le tableau suivant dans la colonne 7 :

Index	Corrélation traitée		Market(1)	Simulée sans optim de l'input GSE.(2)	SE (((1) - (2)) ²)	Simulée après optim de l'input GSE.(3)	SE (((1) - (3)) ²)
	Variable 1	Variable 2					
1	CAC40	Euro50	0.980	0.907	0.532%	0.961	0.04%
2	CAC40	Immo	0.298	0.210	0.77%	0.268	0.09%
3	CAC40	HF	0.761	0.537	5%	0.665	1.12%
4	CAC40	PE	0.505	0.353	2.31%	0.454	0.26%
5	CAC40	tx nom cT	-0.126	0.027	2.33%	0.025	2.27%
6	CAC40	tx réel cT	-0.061	-0.001	0.37%	-0.01	0.27%
7	Euro50	Immo	0.310	0.220	0.8%	0.273	0.14%
8	Euro50	HF	0.768	0.536	5.36%	0.673	0.91%
9	Euro50	PE	0.444	0.332	1.26%	0.434	0.01%
10	Euro50	tx nom cT	-0.124	0.025	2.20%	0.023	2.15%
11	Euro50	tx réel cT	-0.05	0.001	0.26%	-0.007	0.19%
12	Immo	HF	0.291	0.318	0.07%	0.393	1.03%
13	Immo	PE	0.139	0.160	0.05%	0.047	0.83%
14	Immo	tx nom cT	-0.307	0.140	19.92%	0.133	19.33%
15	Immo	tx réel cT	0.106	0.057	0.24%	0.057	0.24%
16	HF	PE	0.722	0.678	0.19%	0.519	4.13%
17	HF	tx nom cT	-0.327	0.113	19.35%	0.11	19.07%
18	HF	tx réel cT	0.056	0.040	0.03%	0.033	0.05%
19	PE	tx nom cT	0.455	0.173	7.95%	0.173	7.96%
20	PE	tx réel cT	-0.373	-0.019	12.49%	-0.088	8.12%
21	tx nom cT	tx réel cT	-0.183	0.217	15.97%	0.123	9.34%
Total	-	-	-	-	97.4%	-	77.5%

TABLE 6.9 – Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et celle simulée par le GSE en moyenne avant et après optimisation selon la méthode heuristique

Nous remarquons une amélioration du total des erreurs quadratiques passant de **97.4%** à **77.5%**, une réduction du SE de la plupart des corrélations surtout celles des indices financiers phares desquels les actifs

ayant la plus grande part dépendent. Cette méthode simpliste a l'avantage d'être facile d'utilisation et s'avère donc précieuse pour optimiser les simulations. Il est alors intéressant de la combiner avec les travaux précédents, dans le but d'étudier et de déterminer une solution encore plus robuste.

6.3 Méthode Hybride

Cette méthode consiste à la sélection des différents coefficients de corrélation des browniens, qui ont permis la réduction de l'erreur quadratique entre la matrice de corrélation des indices financiers simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et la matrice de corrélation du marché, parmi les méthodes développées avant à savoir l'approche linéaire simple, méthode heuristique et aussi la méthode actuelle (qui consiste à assimiler la matrice de corrélation entre browniens à celle du marché transformée en une matrice PSD). Ainsi, la matrice de corrélation des browniens optimisée est hybride, construite par blocs tel que chaque bloc est associé aux coefficients de corrélations entre browniens d'une des trois méthodes qui a le mieux réduit les erreurs quadratiques préalablement mentionnées dans ce bloc (l'optimal des Tableaux 5.1, 6.5 et 6.9 du présent mémoire).

$$\begin{matrix}
 dW_1^{\text{CAC40}} \\
 dW_2^{\text{Euro50}} \\
 dW_3^{\text{Immo}} \\
 dW_4^{\text{HF}} \\
 dW_5^{\text{PE}} \\
 dW_6^{\text{Tx-nom-cT}} \\
 dW_7^{\text{Tx-reel-cT}}
 \end{matrix}
 \begin{pmatrix}
 dW_1^{\text{CAC40}} & dW_2^{\text{Euro50}} & dW_3^{\text{Immo}} & dW_4^{\text{HF}} & dW_5^{\text{PE}} & dW_6^{\text{Tx-nom-cT}} & dW_7^{\text{Tx-reel-cT}} \\
 1 & 0.9979 & 0.3787 & 0.9323 & 0.710 & -0.2853 & -0.142 \\
 0.9979 & 1 & 0.389 & 0.9389 & 0.6046 & -0.3261 & -0.103 \\
 0.3787 & 0.389 & 1 & 0.299 & 0.132 & -0.6434 & 0.1405 \\
 0.9323 & 0.9389 & 0.299 & 1 & 0.672 & -0.4726 & 0.041 \\
 0.710 & 0.6046 & 0.132 & 0.672 & 1 & 0.877 & -0.6884 \\
 -0.2853 & -0.3261 & -0.6434 & -0.4726 & 0.877 & 1 & -0.636 \\
 -0.142 & -0.103 & 0.1405 & 0.041 & -0.6884 & -0.636 & 1
 \end{pmatrix}$$

En noir les coefficients de corrélation de la méthode actuelle qui se résument en quatre valeurs (du triangle supérieur vu la symétrie de la matrice), en rouge les coefficients de corrélation issus de la méthode RLS se résumant en six valeurs, alors que la méthode heuristique nous ressort le meilleur résultat avec onze coefficients de corrélations optimisés, comprenant la part la plus importante des coefficients structurantes de la compagnie d'assurance.

La méthode Hybride nous ressort un résultat intéressant : la plupart des coefficients de corrélation optimisés susmentionnés sont supérieurs au niveau des corrélations de marché afin de prendre en compte l'effet de dilution des coefficients de corrélation au niveau du GSE risque-neutre Moody's que nous expliquons par l'effet de sauts de volatilités qui est plus prononcé dans le processus SVJD des indices actions (CAC40 et Eurostoxx50). Le tableau suivant résume les résultats qui découlent de l'insertion de la matrice hybride à l'entrée dudit GSE :

Index	Corrélation traitée		Market(1)	Simulée sans optim de l'input GSE.(2)	SE (((1) - (2)) ²)	Simulée après optim de l'input GSE.(3)	SE (((1) - (3)) ²)
	Variable 1	Variable 2					
1	CAC40	Euro50	0.980	0.907	0.532%	0.955	0.06%
2	CAC40	Immo	0.298	0.210	0.77%	0.278	0.04%
3	CAC40	HF	0.761	0.537	5%	0.643	1.38%
4	CAC40	PE	0.505	0.353	2.31%	0.438	0.45%
5	CAC40	tx nom cT	-0.126	0.027	2.33%	0.026	2.30%
6	CAC40	tx réel cT	-0.061	-0.001	0.37%	-0.014	0.22%
7	Euro50	Immo	0.310	0.220	0.8%	0.286	0.06%
8	Euro50	HF	0.768	0.536	5.36%	0.662	1.13%
9	Euro50	PE	0.444	0.332	1.26%	0.403	0.17%
10	Euro50	tx nom cT	-0.124	0.025	2.20%	0.023	2.16%
11	Euro50	tx réel cT	-0.05	0.001	0.26%	-0.009	0.17%
12	Immo	HF	0.291	0.318	0.07%	0.364	0.52%

13	Immo	PE	0.139	0.160	0.05%	0.074	0.42%
14	Immo	tx nom cT	-0.307	0.140	19.92%	0.135	19.52%
15	Immo	tx réel cT	0.106	0.057	0.24%	0.059	0.22%
16	HF	PE	0.722	0.678	0.19%	0.562	2.55%
17	HF	tx nom cT	-0.327	0.113	19.35%	0.111	19.22%
18	HF	tx réel cT	0.056	0.040	0.03%	-0.021	0.59%
19	PE	tx nom cT	0.455	0.173	7.95%	0.175	7.86%
20	PE	tx réel cT	-0.373	-0.019	12.49%	-0.089	8.06%
21	tx nom cT	tx réel cT	-0.183	0.217	15.97%	0.127	9.56%
Total	-	-	-	-	97.4%	-	76.6%

TABLE 6.10 – Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et celle simulée par le GSE risque-neutre Moody's en moyenne avant et après optimisation selon la méthode hybride

En combinant les trois méthodes, nous avons obtenu une solution plus robuste au sens de l'erreur quadratique, qui conserve les avantages de la méthode linéaire simple. Les grandes remarques à retenir après présentation du tableau ci-haut se présentent comme suit :

- Une légère amélioration des erreurs quadratiques et de leur total par rapport à la méthode heuristique (**76.6%** au lieu de **77.5%**) ;
- La corrélation qui s'est le plus améliorée par rapport à la méthode Heuristique est celle entre le rendement de l'indice Hedge Fund et l'indice Private Equity tout en passant d'une erreur quadratique de **4.13%** à **2.55%**

Chapitre 7

Utilisation de l’outil PSD Moody’s

Dans ce chapitre, l’objectif est de mesurer l’impact de l’adoption de l’outil Moody’s permettant de convertir la matrice de corrélation des browniens à l’entrée du GSE risque-neutre Moody’s en une matrice PSD(semi-définie positive) tout en ne fixant que les corrélations auxquelles la compagnie d’assurance est la plus sensible comme il sera détaillé dans la partie 3. La figure suivante donne un aperçu sur cet outil notamment la matrice de contraintes :

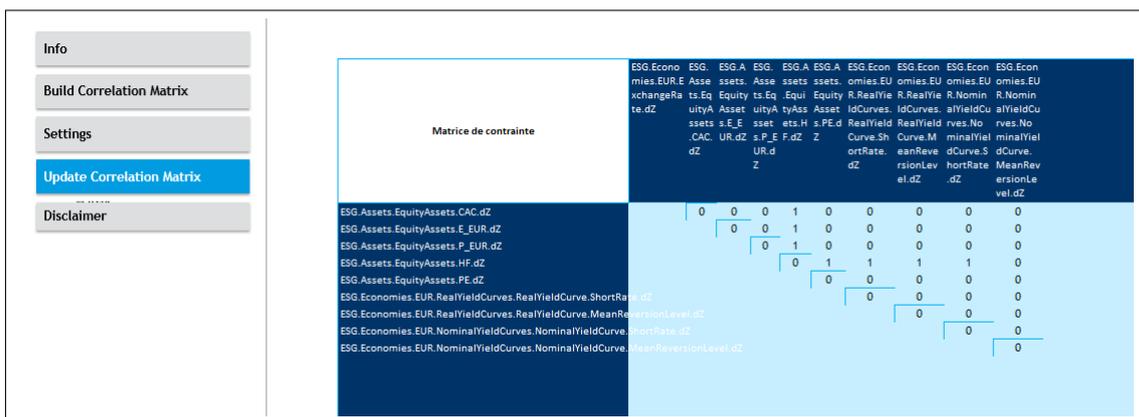


Fig. 7.1 – Outil Moody’s de conversion en une matrice PSD

La matrice de contraintes de l’outil Moody’s contient des valeurs de 1 pour les corrélations que nous souhaitons faire varier et 0 pour celles que nous voudrions fixer. Lors de la phase préliminaire de l’étude de sensibilités, nous attribuerons les valeurs de 1 aux corrélations en relation avec le brownien du Hedge Fund vu sa faible part du portefeuille des actifs de la compagnie d’assurance ($\approx 0.1\%$). L’idée est de perturber le moins possible les corrélations structurantes de Sogecap en agissant sur les autres corrélations pour rendre la matrice PSD, ce qui n’est pas le cas de l’algorithme de Higham qui fait souvent varier tous les coefficients de corrélation pour avoir une matrice PSD.

Par ailleurs il est important de rappeler que l’usage des poids de PM lors du calcul de la matrice de corrélation moyenne simulée par le GSE risque-neutre Moody’s avant optimisation nous a permis de réduire le total des erreurs quadratiques (SSE) avec la matrice de corrélation du marché tout en passant de **97,4%** à **86,6%** (C.f chapitre 5). L’utilisation des poids de PM après optimisation de la matrice de corrélation des browniens à l’entrée du GSE risque-neutre Moody’s nous ressort un écart plus faible et pertinent. Le tableau suivant résume nos résultats obtenus :

	Algorithme de HIGHAM			
	Simul.Moyenne normale		Simul.Moyenne pondérée	
	Etat	Après	Etat	Après
	Actuel	optimisation	Actuel	optimisation
SSE	97.4%	76.6%	86.6%	64.9%

TABLE 7.1 – Impact de l'utilisation des poids de PM sur la SSE entre la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et la matrice de corrélation du marché avant et après optimisation.

Le tableau 7.2 détaille la SSE après optimisation et usage de la pondération par poids de PM de la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's. Les grands écarts constatés restent ceux en relation avec les indices Private Equity, Hedge Fund, taux nominal et réel mais qui ont été optimisés (colonne 7 du tableau 7.2). Pour résumer, nous améliorons notre écart global tout en passant de **97.4%** à **64.9%**; soit une baisse de **33.3%** de l'écart global obtenu sans usage de la technique d'optimisation détaillée dans le chapitre 6 et sans pondération par poids de PM.

Index	Corrélation traitée		Market(1)	Simulée sans optim de l'input GSE.	Simulée après optim de l'input GSE.	Simulée après optim et pondération poids de PM.(2)	SE ((1) – (2)) ²
	Variable 1	Variable 2					
1	CAC40	Euro50	0.980	0.907	0.955	0.956	0.058%
2	CAC40	Immo	0.298	0.210	0.278	0.278	0.04%
3	CAC40	HF	0.761	0.537	0.643	0.646	1.31%
4	CAC40	PE	0.505	0.353	0.438	0.440	0.418%
5	CAC40	tx nom cT	-0.126	0.027	0.026	0.012	1.912%
6	CAC40	tx réel cT	-0.061	-0.001	-0.014	-0.022	0.154%
7	Euro50	Immo	0.310	0.220	0.286	0.285	0.06%
8	Euro50	HF	0.768	0.536	0.662	0.662	1.11%
9	Euro50	PE	0.444	0.332	0.403	0.403	0.163%
10	Euro50	tx nom cT	-0.124	0.025	0.023	0.011	1.83%
11	Euro50	tx réel cT	-0.05	0.001	-0.009	-0.015	0.123%
12	Immo	HF	0.291	0.318	0.364	0.356	0.42%
13	Immo	PE	0.139	0.160	0.074	0.062	0.575%
14	Immo	tx nom cT	-0.307	0.140	0.135	0.0815	15.39%
15	Immo	tx réel cT	0.106	0.057	0.059	0.045	0.367%
16	HF	PE	0.722	0.678	0.562	0.555	2.76%
17	HF	tx nom cT	-0.327	0.113	0.111	0.075	16.190%
18	HF	tx réel cT	0.056	0.040	-0.021	-0.037	0.875%
19	PE	tx nom cT	0.455	0.173	0.175	0.130	10.55%
20	PE	tx réel cT	-0.373	-0.019	-0.089	-0.11	6.48%
21	tx nom cT	tx réel cT	-0.183	0.217	0.127	0.02	4.14%
Total	-	-	-	-	-	-	64.9%

TABLE 7.2 – Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et celle simulée par le GSE risque-neutre Moody's en moyenne après optimisation selon la méthode hybride et usage des poids de PM.

Après avoir présenté les différentes matrices exploitées dans le GSE risque-neutre Moody's à savoir celle calculée sur l'historique du marché, entre les shock-drivers ou simulée en moyenne par ledit GSE, nous avons mis à plat un panel de méthodes pour une adaptation market-consistent de la matrice de corrélation entre browniens pour parvenir en moyenne sur l'horizon du GSE à réduire l'écart quadratique avec la matrice de corrélation de marché. La méthode Hybride est celle qui s'ajuste le mieux vu le résultat robuste au sens de la SSE comme résumé dans le tableau suivant :

	Sans optimisation	Avec Optimisation			
		RLS	RLM	Heuristique	Hybride
SSE	97.4%	88%	non exploitable	77.5%	76.6%

TABLE 7.3 – Résultats finaux en termes de SSE des méthodes d'optimisation de la matrice de corrélation des shock-drivers.

Pour finir cette partie, un outil de Moody's de conversion en une matrice PSD a été introduit visant à perturber moins les coefficients de corrélation structurants de Sogecap, ce qui sera utile pour enrichir l'étude de sensibilité à la troisième partie du présent mémoire. Il est à noter que nous retiendrons la méthode Hybride tout au long de l'étude de sensibilité dans ladite partie.

Troisième Partie :
Sensibilités et Etude d'impacts

Chapitre 8

Sensibilité du Best Estimate aux corrélations des shock-drivers

Dans une perspective de fixer les corrélations auxquelles la compagnie d'assurance est la plus sensible dans la projection des flux Actif-Passif moyennant l'outil Moody's, l'objectif est d'avoir une idée sur l'impact d'un choc appliqué à chacune des corrélations entre browniens à part sur le Best Estimate. Ainsi, nous construirons une matrice de sensibilités du Best Estimate de Sogecap suite à une baisse de **0.1** de chacune des dites corrélations.

Cependant, il serait important de rappeler le cadre général du modèle ALM servant au calcul du Best Estimate de la compagnie d'assurance.

Le Modèle ALM

Il s'agit d'un modèle qui prend en compte les interactions entre l'actif et le passif de la compagnie d'assurance vu la spécificité de son activité à savoir l'étroite relation entre :

- La performance financière de son actif.
- Ses engagements envers ses assurés contenant le cout des options et garanties contractuelles (taux garantis, rachats, arbitrages...).

L'estimation du cout des options et garanties passe par une modélisation stochastique des indices financiers du marché ; soit la table des scénarios économiques constituant l'output du GSE risque-neutre Moody's. Notre projection des flux est faite dans un univers risque-neutre (Cf.Chapitre 2) avec une valorisation Market-Consistent qui est un impératif de la réglementation Solvabilité II imposant l'évaluation du passif de l'assureur en prenant en compte toutes les éventuelles possibilités.

Concrètement, le modèle ALM procèdera à la projection en 1000 itérations des flux Actif-Passif sur un horizon de 30 ans afin de modéliser le bilan prudentiel Solvabilité II donné au régulateur (ACPR). Les principaux inputs du Modèle ALM sont les suivants :

- la table de scénarios économiques qui sert à projeter les rendements des actifs du portefeuille de la compagnie d'assurance.
- les fonds dans lesquels la compagnie d'assurance a effectué ses investissements avec détail ligne par ligne (actifs obligataires et assimilés, actions et assimilés puis les produits dérivés) transparisés comme l'impose la réglementation Solvabilité II pour le calcul des capitaux réglementaires (SCR) liés au module Marché de la pieuvre des risques solvabilité II (C.f chapitre 1).
- Hypothèses concernant les assurés notamment les lois biométriques (décès, morbidité...) et lois de comportement (rachats structurels et dynamiques, arbitrages...).

- Hypothèses assureurs : futures décisions de gestion notamment la stratégie de PB et les dépenses (frais et commissions).

Matrice de sensibilités du Best Estimate

Après choc de **-0.1** de chacune des corrélations des browniens guidant la dynamique des rendements des actifs financiers, nous obtenons les surfaces de sensibilités (en valeur absolue) suivantes :

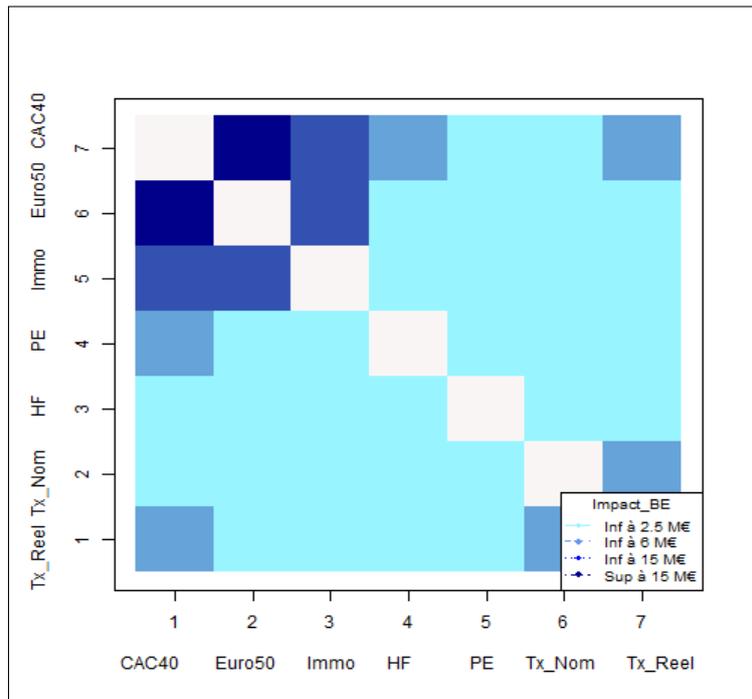


Fig. 8.1 – Matrice de surfaces des sensibilités du Best Estimate aux corrélations des browniens à l’entrée du GSE risque-neutre Moody’s (en Millions €)

Comme attendu, nous avons plus de sensibilité des flux Actif-Passif aux corrélations des browniens drivant les indices CAC40, Eurostoxx50 et immobilier. Comme l’illustre la figure 8.1 ci-haut, l’impact sur ces indices est estimé à plus de **6 M€**, ce qui reste très petit par rapport au Best Estimate Sogecap mais important par rapport aux autres surfaces de sensibilité. En prenant l’exemple de la corrélation CAC40 et Eurostoxx50 (2 carreaux en bleu très foncé en haut à gauche), l’impact n’est estimé qu’à **-0.02%** du Best Estimate après choc de **-0.1** de ladite corrélation. La diagonale est en couleur blanche référant à la diagonale unitaire de la matrice de corrélation standard. Il est alors utile de fixer un seuil au-dessus duquel la sensibilité est considéré comme une des plus importantes pour Sogecap. Au vu des chiffres précédents, nous établissons ce seuil à **2.5M€**. Il vient alors que 6 corrélations dépassent ce seuil et sont considérés comme les plus importantes pour Sogecap : $\text{cor}(dW_1^{\text{CAC40}}, dW_2^{\text{Euro50}})$, $\text{cor}(dW_2^{\text{Euro50}}, dW_3^{\text{Immo}})$, $\text{cor}(dW_1^{\text{CAC40}}, dW_3^{\text{Immo}})$, $\text{cor}(dW_1^{\text{CAC40}}, dW_4^{\text{HF}})$, $\text{cor}(dW_1^{\text{CAC40}}, dW_7^{\text{Tx-reel-cT}})$ et $\text{cor}(dW_6^{\text{Tx-nom-cT}}, dW_7^{\text{Tx-reel-cT}})$.

Impact de l’outil PSD Moody’s sur le résultat

Dans ce qui suit, nous mettrons en valeur la nouvelle matrice de corrélation des browniens PSD suite à l’usage de l’outil PSD Moody’s, puis nous chiffrerons l’impact de l’usage de cet outil en SSE entre la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody’s et celle de marché, puis en un indicateur en vision modèle ALM, et ce avant et après optimisation de la matrice de corrélation des browniens à l’entrée dudit GSE.

8.1 Impact Outil Moody's avant optimisation

Matrice de corrélation des browniens :

Dans ce cas de figure et comme précisé dans le chapitre 4, la matrice de corrélation du Marché (qui était assimilée à la matrice de corrélation des browniens dans cette vision) était presque PSD et l'impact de l'algorithme de Higham était en SSE petit ; soit **0.631%**. Il en est presque de même pour l'impact de l'usage de l'outil PSD Moody's qui est de **0.632%** malgré la fixation de 6 corrélations des browniens auxquelles la compagnie d'assurance est la plus sensible.

Matrice de corrélation simulée :

En termes de somme des erreurs quadratiques (SSE) entre la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et la matrice de corrélation du marché, nous avons remarqué qu'avant optimisation l'impact n'est pas ressenti après usage de l'outil Moody's lors de la projection et donc la SSE devint **97.6%** alors qu'elle était de **97.4%** (Cf. Tableau 7.1) lors de l'utilisation de l'algorithme de HIGHAM. Dans le même sens, la pondération par poids de PM de la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's n'a pas trop changé le résultat acquis auparavant et la SSE est devenue **86.8%** alors qu'elle était de **86.6%** (Cf. Tableau 7.1).

Indicateur en vision Modèle ALM :

Afin de tirer profit des sensibilités du Best Estimate aux corrélations entre browniens établies avant, nous avons construit un indicateur de tendance du Best Estimate suite à l'application de l'outil Moody's qui fait bouger quelques corrélations susmentionnées. Dans cette perspective simplifiée, nous expliquons l'évolution du Best Estimate seulement par les corrélations entre browniens et nous assimilons ceci à une relation linéaire pour but de suivre de la tendance du Best Estimate. En d'autres termes, nous supposons la relation suivante tout en focussant sur les 21 corrélations des browniens du triangle supérieur de la matrice de corrélation :

$$BE = \sum_{1 \leq i < j \leq 7} \frac{\partial BE}{\partial Z_{i,j}} \cdot Z_{i,j} \quad (*)$$

En appliquant la formule (*) aux variations des corrélations entre les browniens $(\Delta Z_{(i,j)})_{1 \leq i < j \leq 7}$ suite à l'application des méthodes respectives Higham et outils de Moody's vues avant, nous obtenons les variations ΔBE suivantes :

	Algorithme de HIGHAM	Outil Moody's
ΔBE	-0.05	0.1

TABLE 8.1 – Indicateur en vision Modèle ALM suite à la conversion de la matrice de corrélation des browniens input du GSE risque neutre Moody's en une matrice PSD avant optimisation (en Millions €)

Ainsi, avant optimisation ou adaptation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens à l'entrée dudit GSE, l'impact de la conversion en une matrice PSD de ladite matrice reste très petit sur le Best Estimate et ce pour les deux méthodes.

8.2 Impact Outil Moody's après optimisation

Dans cette sous-section, nous avons pris le soin de détailler directement l'impact de l'utilisation de l'algorithme de Higham et l'outil Moody's sur la matrice de corrélation des browniens optimisée, moyennant la méthode hybride, à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's comme l'illustre le tableau suivant :

Index	Corrélation traitée		avant conversion (1)	Algorithme de Higham.(2)	SE (((1) – (2)) ²)	Outil Moody's.(3)	SE (((1) – (3)) ²)
	Variable 1	Variable 2					
1	CAC40	Euro50	0.998	0.996	0.00%	0.998	0.00%
2	CAC40	Immo	0.379	0.393	0.02%	0.379	0.00%
3	CAC40	HF	0.932	0.916	0.03%	0.932	0.00%
4	CAC40	PE	0.710	0.622	0.78%	0.596	1.30%
5	CAC40	tx nom cT	-0.285	-0.225	0.36%	-0.238	0.23%
6	CAC40	tx réel cT	-0.142	-0.159	0.03%	-0.142	0.00%
7	Euro50	Immo	0.389	0.397	0.01%	0.389	0.00%
8	Euro50	HF	0.939	0.924	0.02%	0.936	0.00%
9	Euro50	PE	0.605	0.560	0.20%	0.554	0.25%
10	Euro50	tx nom cT	-0.326	-0.293	0.11%	-0.286	0.16%
11	Euro50	tx réel cT	-0.103	-0.113	0.01%	-0.109	0.00%
12	Immo	HF	0.299	0.349	0.25%	0.355	0.31%
13	Immo	PE	0.132	0.043	0.80%	0.043	0.79%
14	Immo	tx nom cT	-0.643	-0.552	0.84%	-0.551	0.86%
15	Immo	tx réel cT	0.141	0.148	0.00%	0.149	0.01%
16	HF	PE	0.672	0.549	1.53%	0.568	1.08%
17	HF	tx nom cT	-0.473	-0.318	2.38%	-0.307	2.73%
18	HF	tx réel cT	-0.293	-0.259	0.11%	-0.233	0.36%
19	PE	tx nom cT	0.877	0.569	9.47%	0.565	9.74%
20	PE	tx réel cT	-0.688	-0.693	0.00%	-0.689	0.00%
21	tx nom cT	tx réel cT	-0.636	-0.618	0.03%	-0.636	0.00%
Total	-	-	-	-	17.0%	-	17.8%

TABLE 8.2 – Ecart quadratique entre la matrice de corrélation optimisée des browniens avant et après conversion en une matrice PSD

Nous remarquons que l'écart global SSE est quasi le même, et qu'en fixant les 6 corrélations entre browniens auxquelles nous sommes les plus sensibles, l'outil Moody's bouge en général un peu plus les autres corrélations comme précisé dans le tableau 8.2 (dernière colonne des écarts quadratiques) pour avoir une matrice de corrélation PSD.

Matrice de corrélation simulée :

Suite à l'usage de l'outil Moody's et après optimisation, la somme des erreurs quadratiques (SSE) entre la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et la matrice de corrélation du marché a faiblement baissé tout en passant de **76.6%** (Cf.Tableau 7.1) à **75.7%**. En prenant l'exemple de la corrélation entre CAC40 et Euro50 à laquelle la compagnie d'assurance est le plus sensible, l'écart quadratique a baissé de **0.06%** à **0.03%**. De plus, la pondération par poids de PM de la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's a aussi légèrement baissé tout en passant de **64.9%** (Cf.Tableau

7.1) à **63.9%**. Toujours l'exemple de la corrélation entre le CAC40 et Euro50, l'écart quadratique est passé de **0.058%** à **0.03%** suite à l'usage de l'outil Moody's. Ce qui est à retenir aussi c'est que contrairement à l'étape avant optimisation, l'usage de l'outil Moody's a baissé la SSE malgré sa faible ampleur.

Indicateur en vision Modèle ALM :

En utilisant la formule (*) pour chiffrer l'impact de variation de la corrélation entre browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's sur le Best Estimate, nous obtenons les résultats suivants pour chacune des deux méthodes :

	Algorithme de HIGHAM	Outil Moody's
ΔBE	4.62	-4.64

TABLE 8.3 – Indicateur en vision Modèle ALM suite à la conversion de la matrice de corrélation des browniens à l'entrée du GSE risque neutre Moody's en une matrice PSD après optimisation(en Millions €)

L'indicateur en vision Modèle ALM nous a permis de dégager une tendance intéressante du Best Estimate suite à la conversion en une matrice PSD de la matrice de corrélation entre browniens : l'outil Moody's a fait baisser le Best Estimate de **4.64 M€**, soit aux alentours de -0.004% du Best Estimate de Sogecap (reste négligeable).

Synthèse

Afin de consolider tous les résultats obtenus, le tableau suivant synthétise les impacts en SSE des 2 approches : Algorithme de Higham et outils Moody's :

	Algorithme de HIGHAM				Outil PSD Moody's			
	Simul.Moyenne normale		Simul.Moyenne pondérée		Simul.Moyenne normale		Simul.Moyenne pondérée	
	Etat Actuel	Après optimisation	Etat Actuel	Après optimisation	Etat Actuel	Après optimisation	Etat Actuel	Après optimisation
SSE	97.4%	76.6%	86.6%	64.9%	97.6%	75.7%	86.8%	63.9%

TABLE 8.4 – Somme des écarts quadratiques entre la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et la matrice de marché cible.

Il est clair que l'outil PSD de Moody's change peu les bons résultats de l'optimisation de la matrice de corrélation des browniens selon les 2 indicateurs regardés (moyenne normale et moyenne pondérée par poids de PM) mais ceci reste amélioratif pour la compagnie d'assurance. En prenant l'exemple de la SSE après optimisation de la matrice de corrélation des browniens et selon l'indicateur de la moyenne par poids de PM, elle a baissé de **64.9%** à **63.9%** après l'usage de l'outil PSD de Moody's. De plus, le fait que l'outil PSD de Moody's prenne en considération la sensibilité du Best Estimate aux corrélations entre browniens oriente notre choix vers cet outil après adaptation Market Consistent de la matrice de corrélation des browniens en attendant de voir la qualité de la table des scénarios économiques qui en découle ainsi que l'impact sur les flux Actif-Passif du bilan Solvabilité II.

Chapitre 9

Impact de l'optimisation Market Consistent de la matrice de corrélation sur la qualité de la table des scénarios économiques.

Dans ce chapitre, nous viserons à avoir une assurance raisonnable de la non-dégradation de la qualité de la table de scénarios économiques en sortie du GSE risque-neutre Moody's et du respect de certaines propriétés en espérance. Ainsi, nous décrirons les différents tests effectués : **tests de Martingalité** et **tests de Market-Consistency**.

9.1 Tests de Martingalité

Ce test consiste à évaluer la martingalité des prix actualisés dans l'univers risque-neutre, en d'autres termes les prix des actifs à $t=0$ (P_0) doivent être inclus dans la bande de confiance suivante :

$$[\hat{P}_t \pm q_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot (\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}})],$$

tel que : \hat{P}_t est le prix estimé par le GSE risque-neutre Moody's comme moyenne des prix projetés à la date t lors des scénarios économiques et actualisés, n est le nombre de scénarios économiques, $\hat{\sigma}$ l'écart type estimé à partir des scénarios générés et $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile de la loi normale $N(0,1)$ de niveau $1 - \frac{\alpha}{2}$ (on prendra $\alpha=0.05$ et donc un intervalle de confiance de niveau 95%). Ce qui revient à l'hypothèse H_0 que nous testons avec la statistique suivante :

$$\frac{\hat{P}_t - P_0}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{L} N(0,1) \quad (*)$$

En théorie \hat{P}_t est une espérance du prix de l'actif en question déflaté. Pour approcher ce résultat, le GSE risque-neutre de Moody's utilise la simulation de Monté-Carlo comme détaillé dans le chapitre 4 moyennant une somme discrète. Par ailleurs, le tableau suivant résume les indices ainsi que les tests de martingalité à dérouler :

Indice	Test Martingale
Prix Zéro-Coupon	$\mathbb{E}(D(0, t).P(t, T)) = P(0, T)$
Prix ZC indexé sur inflation	$\mathbb{E}(D(0, t).P_I(t, T)) = P_I(0, T)$
CAC40	$\mathbb{E}(D(0, t).S_{(t)}^1) = S_{(0)}^1$
Eurostoxx50	$\mathbb{E}(D(0, t).S_{(t)}^2) = S_{(0)}^2$
Immobilier	$\mathbb{E}(D(0, t).P_{(t)}) = P_{(0)}$
Hedge Fund	$\mathbb{E}(D(0, t).HF_{(t)}) = HF_{(0)}$
Private Equity	$\mathbb{E}(D(0, t).PE_{(t)}) = PE_{(0)}$

TABLE 9.1 – Tests de Martingalité à dérouler pour les indices financiers modélisés par le GSE risque-neutre Moody's

Avec $D(0, t)$ représente le déflateur ou facteur d'actualisation stochastique entre la date 0 et t (Cf. Chapitre 2).

Les obligations ZC indexées sur l'inflation sont importants à tester vu que la compagnie d'assurance détienne des OATIs (Obligations assimilées aux trésors indexées sur l'inflation) mais aussi pour veiller sur le caractère risque-neutre (et donc Market-Consistent) de la modélisation du Best Estimate notamment le Best Estimate des frais de la compagnie d'assurance, Cf.Chapitre 1).

Les erreurs moyennes obtenues (numérateur de la formule (*) ci-haut) des différents indices financiers modélisés suite au calcul des erreurs à chaque pas mensuel de l'horizon de projection du GSE risque-neutre Moody's se présentent comme suit :

	Obligation ZC	Obligation ZC indexée	CAC40	Euro50	Immo	HF	PE
Etat Actuel	0.18%	0.18%	0.85%	0.63%	0.05%	0.07%	0.02%
Etat optimisé (algo Higham)	0.22%	0.20%	0.86%	0.53%	0.06%	0.06%	0.03%
Etat optimisé (Outil Moody's)	0.21%	0.18%	0.91%	0.55%	0.04%	0.05%	0.03%

TABLE 9.2 – Erreurs Moyennes constatées des indices financiers modélisés par le GSE risque-neutre Moody's

Nous remarque qu'il n'y a pas une forte variation des erreurs moyennes des indices financiers parfois à la hausse parfois à la baisse. le plus grand rebond de l'erreur moyenne a été enregistré chez le CAC40 qui a augmenté de 0.06% lors de l'usage de l'outil Moody's suite à la conversion de la matrice de corrélation des browniens optimisée à l'entrée du GSE risque neutre Moody's mais qui reste négligeable.

Pour mettre en valeur nos résultats, nous avons focussé sur les indices auxquelles la compagnie d'assurance est la plus sensible : Obligation ZC, CAC40, Eurostoxx50, Immobilier (Cf.Chapitre 8) surtout que les actifs qui en dépendent ont la plus grande part dans le portefeuille de la compagnie d'assurance. Ainsi, nous avons évalué l'impact de l'optimisation de la matrice de corrélation des browniens et le choix de l'outil de Moody's comme approche de conversion de ladite matrice en une matrice PSD sur le test de passage à la bande de confiance de niveau 95% qui indique en principe la part des prix du marché à t=0 inclus dans ladite bande comme illustré dans l'annexe I du présent mémoire.

Le choix de l'outil PSD de Moody's lors du contrôle d'impact sur le test de passage à la bande de confiance de niveau 95% des différents indices financiers est justifié par les bons résultats au sens de l'erreur quadratique comme illustré dans le chapitre 8, mais aussi par la prise en compte de la sensibilité du Best Estimate aux coefficients de corrélation structurants de Sogecap. L'annexe I montre davantage que l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's n'a presque pas d'impact sur le test de martingalité des indices financiers préalablement mentionnés.

9.2 Tests de Market-Consistency

Il s'agit d'un test de cohérence de la valorisation des instruments financiers avec leurs prix de marché pour que les scénarios économiques puissent respecter les conditions de Market-Consistency. Le fait que les prix des indices financiers respectent les conditions de martingalité, ceci implique leur caractère Market-Consistent. Ainsi nous testons la même hypothèse annoncée dans le test de martingalité de la section précédente. Les instruments financiers évalués se présentent comme suit :

Instruments Dérivés
Swaption Euro
Call CAC40
Call Eurostoxx50

TABLE 9.3 – Liste des produits dérivés pour calibrage des processus de diffusion et test de Market-Consistency

Comme précisé dans le chapitre 2, nous ne calibrons pas sur les volatilités implicites spot des instruments dérivés pour les indices immobilier, Hedge Fund et Private Equity mais plutôt sur des volatilités historiques c'est pour ceci que nous nous contenterons que de ces instruments.

Après construction des bandes de confiance de niveau 95% des prix de marché des instruments financiers ainsi que les prix estimés par le GSE risque-neutre Moody's, ils sont convertis en volatilités implicites (Cf. Chapitre 2). Ainsi, nous obtenons les erreurs moyennes entre les volatilités du marché (Cf. Annexe A) et les volatilités à la sortie du GSE risque-neutre Moody's calculées sur l'horizon de projection dudit GSE. Notre objectif étant de quantifier l'impact de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens sur le test Market-Consistency notamment les erreurs moyennes qui se présentent comme suit :

	Call CAC40		Call Eurostoxx50		Swaption Euro	
	ATM	Away-from-the-money	ATM	Away-from-the-money	ATM	Away-from-the-money
Etat Actuel	0.90%	1.33%	0.91%	0.89%	0.019%	0.016%
Etat optimisé (algo Higham)	0.75%	1.30%	0.85%	0.93%	0.02%	0.02%
Etat optimisé (Outil Moody's)	0.76%	1.31%	0.84%	0.95%	0.02%	0.02%

TABLE 9.4 – Erreurs Moyennes des volatilités implicites des instruments dérivés après projection des scénarios économiques par le GSE risque-neutre Moody's.

Avant d'interpréter les résultats susmentionnés, il est important de souligner les remarques suivantes :

- L'erreur moyenne de Swaption Euro "à la monnaie" (ATM) est calculée sur la base de tous les tenors (selon ce que nous disposons dans la matrice de volatilités implicites du marché de l'Annexe A) et les maturités à pas mensuel jusqu'à 30 ans.
- L'erreur moyenne de Swaption Euro "away-from-the-money" (AFM) est calculée pour le tenor 10 ans, pour tous les strikes (Annexe A) sauf strike 0 et sur la base des maturités dont nous disposons dans la matrice de volatilité implicite de marché AFM (Annexe A).
- Pour le cas du Call CAC40 et Eurostoxx50, nous disposons d'une seule matrice de volatilité implicite de marché (Annexe A) chacun et donc quand nous sommes ATM nous nous basons sur la colonne des volatilités implicites du strike 0 alors que quand nous sommes AFM nous nous basons sur les colonnes restantes.

Nous remarquons dans le tableau 9.4 qu'en général nous avons une amélioration de l'erreur moyenne suite à l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's, surtout celle du Call Cac40 ATM avec un repli de 0.15 % par rapport à l'état sans optimisation. Pour appuyer notre constat, nous avons déroulé le test de passage à la bande de confiance de niveau 95% comme ce qui a été fait dans le cadre du test de martingalité, et nous avons obtenu un résultat satisfaisant comme présenté dans l'annexe I.

Nous concluons grâce à ces deux types de tests que le calibrage Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens n'a pas impacté la qualité de la table des scénarios économiques. Ainsi, nous pouvons avoir une matrice de corrélation à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's Market-Consistent et un test de cohérence en espérance des indices et instruments financiers stable.

Chapitre 10

Impact de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens sur les résultats sous Solvabilité II

Tout au long de ce mémoire, nous avons développé un panel de méthodes d'optimisation de la matrice de corrélation des browniens dont nous avons choisi la méthode **Hybride** selon le critère de la SSE, puis nous avons étudié l'impact de cette méthode croisé avec l'outil PSD de Moody's sur la qualité de la table de scénarios économiques.

Dans ce chapitre, nous viserons à étudier l'impact de choix de la méthode d'adaptation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens guidant la dynamique des rendements d'indices financiers et le choix de l'outil de conversion en une matrice PSD sur les indicateurs solvabilité II. Pour ce faire, nous avons déroulé de diverses études de sensibilités tout en se basant sur le Modèle ALM ainsi que les scénarios économiques qui ressortent du GSE risque-neutre Moody's. Nous rappelons que la réglementation solvabilité II a pour finalité la protection des assurés tout en imposant à la compagnie d'assurance un niveau de fonds propres suffisant pour couvrir ses exigences en marge et donc le risque inhérent à son activité (Cf.Chapitre 1).

Dans ce cadre, une comparaison de différents indicateurs sous Solvabilité II avant et après optimisation de la matrice de corrélation des browniens est présentée dans le graphique ci-dessous que nous aurons le soin d'analyser et interpréter tout au long de ce chapitre :

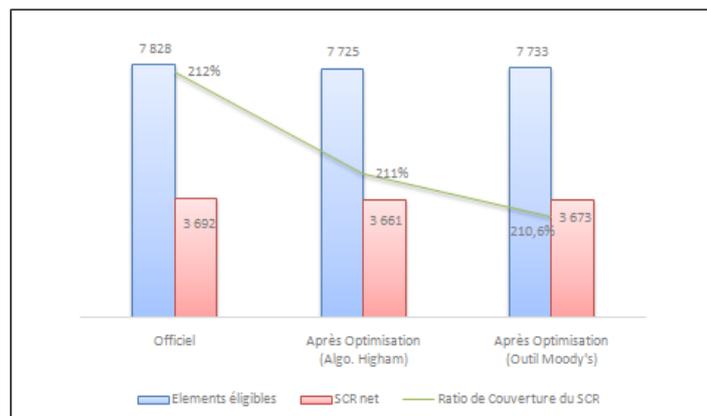


Fig. 10.1 – Impact de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens sur les indicateurs Solvabilité II (en Millions €)

Nous pouvons remarquer qu'il y a une baisse simultanée du SCR net et des fonds propres éligibles due principalement à la tendance des marges futures brutes d'impôts (NAV). En effet, la NAV a continué à se dégrader tout en baissant de 30% après optimisation de la matrice de corrélation des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's (Cf. Tableau 10.1). De plus, la baisse du ratio de couverture du SCR est expliquée par une baisse d'ampleur plus importante des fonds propres éligibles après tiering comme explicité dans le tableau qui suit :

	Officiel	Après optimisation (Algo.Higham)	Après optimisation (Outil Moody's)
Eléments disponibles avant tiering	8139	8073	8075
Fonds Propres	6804	6806	6806
Emprunts Subordonnées	2412	2412	2412
Marges futures brutes d'impôts	-243	-323	-316
Marge pour risque	-1463	-1473	-1478
impôts	629	651	651
Eléments éligibles après tiering	7828	7725	7733

TABLE 10.1 – Ventilation des fonds propres disponibles avant et après optimisation de la matrice de corrélation des browniens (En Millions €).

Nous tirons les conclusions suivantes du tableau susmentionné :

- La plus grande baisse au niveau des fonds propres disponibles avant tiering est celle des marges futures brutes d'impôts, que nous aurons le soin d'analyser dans le sous-chapitre qui suit.
- La marge pour risque baisse aussi en raison de la baisse du SCR souscription notamment le SCR baisse de rachat (Cf. Sous-chapitre analyse de SCR net).
- Hausse des impôts différés suite à la légère dégradation des marges futures brutes d'impôts.

Les impôts différés constituent un mécanisme par lequel la compagnie d'assurance reporte les pertes fiscales de son résultat sur les années futures. Dans notre cas de figure, la compagnie d'assurance a un crédit d'impôt dû aux marges futures négatives (y compris marge pour risque) qui continueront à se dégrader légèrement après optimisation des corrélations des browniens.

10.1 Focus sur la NAV

Afin d'expliquer plus finement les variations de marges futures, nous cherchons à analyser la distribution des 1000 NAV générées. Nous nous contenterons d'étudier ces distributions avant et après optimisation et ce après conversion de la matrice de corrélation des browniens en une matrice PSD en utilisant l'outil Moody's. Notre choix est justifié vu le rapprochement des résultats avec la méthode après usage de l'algorithme de Higham mais surtout que l'outil Moody's donne des résultats meilleurs au sens des erreurs quadratiques (Cf. Chapitre 8). Ainsi, nous présentons la tendance des scénarios stochastiques de la NAV avant optimisation en fonction du taux nominal 10 ans moyen de chaque itération :

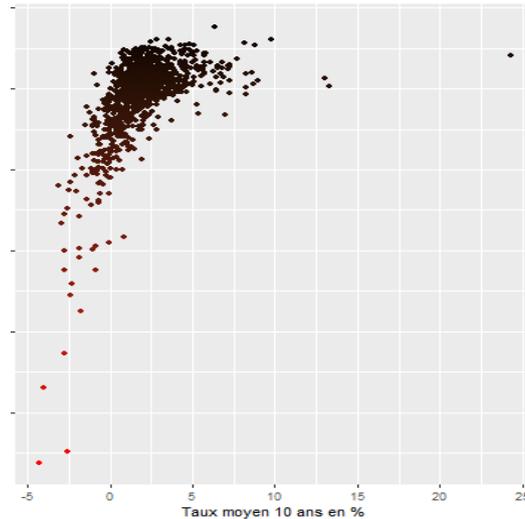


Fig. 10.2 – Distribution de la NAV officielle en fonction du taux nominal 10 ans moyen de chaque scénario économique(en Millions €)

Nous pouvons remarquer une tendance croissante de la NAV en fonction du taux nominal moyen 10 ans ce qui confirme l’aversion des assureurs au contexte de taux bas. Afin d’évaluer l’impact de l’optimisation de la matrice de corrélation sur les scénarios des NAVs, nous avons suivi l’évolution de la variation de la NAV :

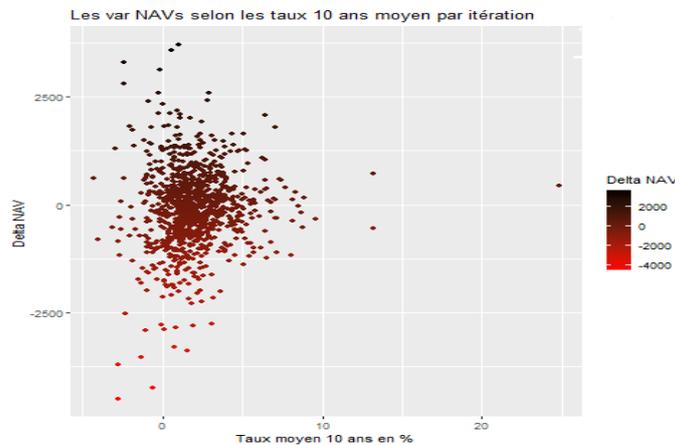


Fig. 10.3 – Distribution de la variation de la NAV en fonction du taux nominal 10 ans moyen de chaque scénario économique(en Millions €)

Nous remarquons que les variations de NAVs négatives sont légèrement plus concentrées que les autres NAVs ; soit 52.5% des cas ce qui prouve que l’optimisation des corrélations a donné naissance à un peu plus de scénarios de NAVs négatifs qu’avant, ce que nous aurons le soin d’analyser juste après. De plus, les écarts de NAVs sont assez importants dans quelques scénarios pouvant aller jusqu’à -4.5 Milliards Euro.

Afin de mettre en relief cette légère déformation de la distribution des NAVs suite à l’optimisation Market-Consistent des corrélations, la figure suivante illustre les densités de distribution des NAVs avant et après optimisation :

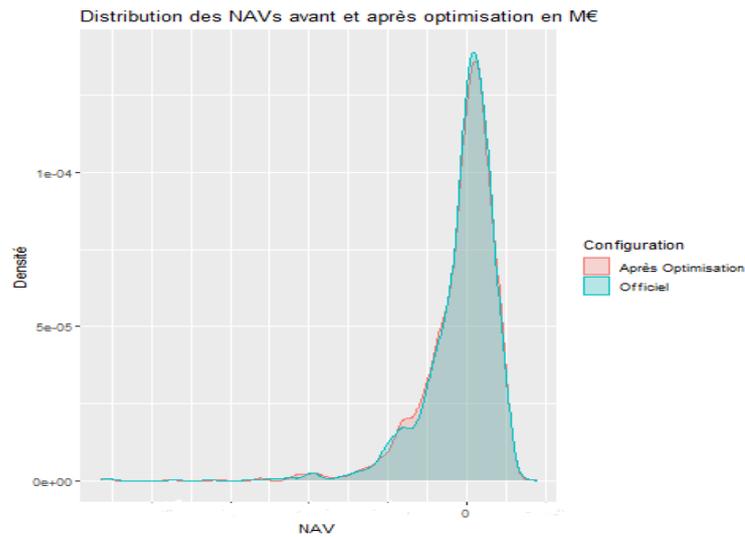


Fig. 10.4 – Distribution de la NAV avant et après optimisation (en Millions €)

Nous pouvons tirer les deux remarques suivantes :

- Une légère baisse de la masse des NAVs positives qui est translatée et ventilée sur les différentes modalités négatives de la NAV après optimisation ;
- Une légère hausse de la volatilité des scénarios économiques après optimisation suite à la hausse de la masse des NAVs négatives, ce qui impacte mal les indicateurs de la compagnie d'assurance notamment ses marges futures.

Afin d'expliquer cette tendance, nous avons pris comme exemple d'analyse, avant et après optimisation, les indices financiers : CAC40, Eurostoxx50 vu leurs parts importantes dans l'actif de la compagnie d'assurance :

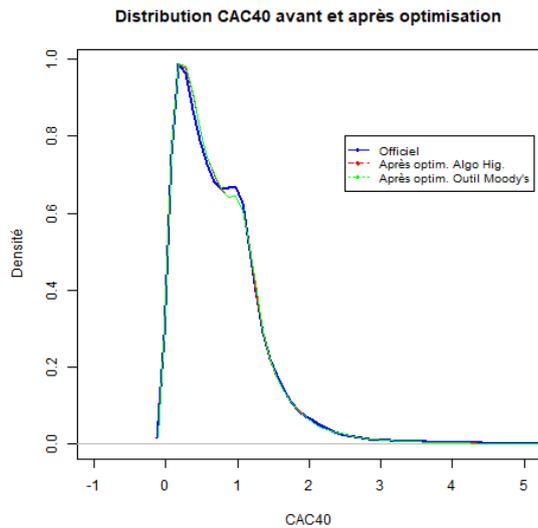


Fig. 10.5 – Distribution des scénarios économiques de l'indice CAC40 avant et après optimisation

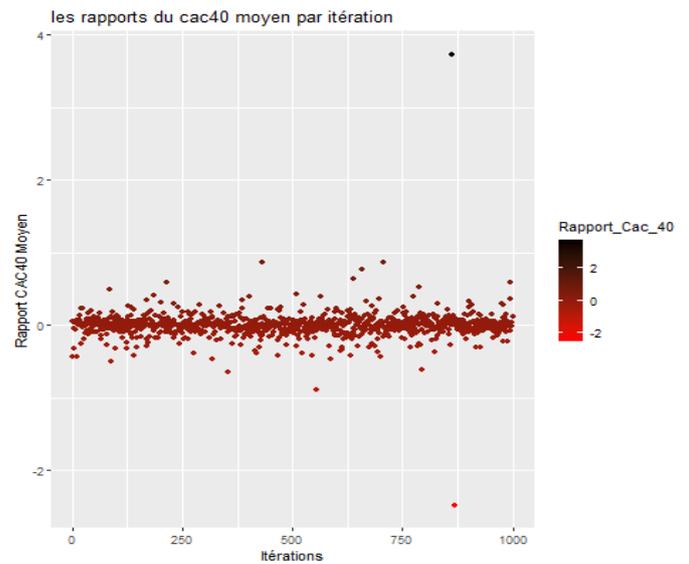


Fig. 10.6 – Rapport entre l'indice CAC40 moyen après et avant optimisation par itération.

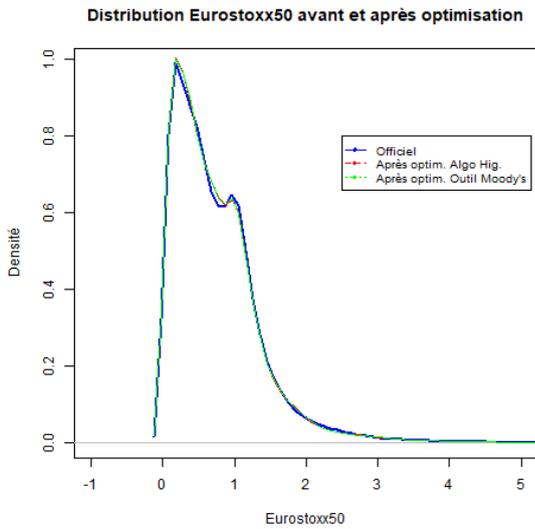


Fig. 10.7 – Distribution des scénarios économiques de l'indice Eurostoxx50 avant et après optimisation.

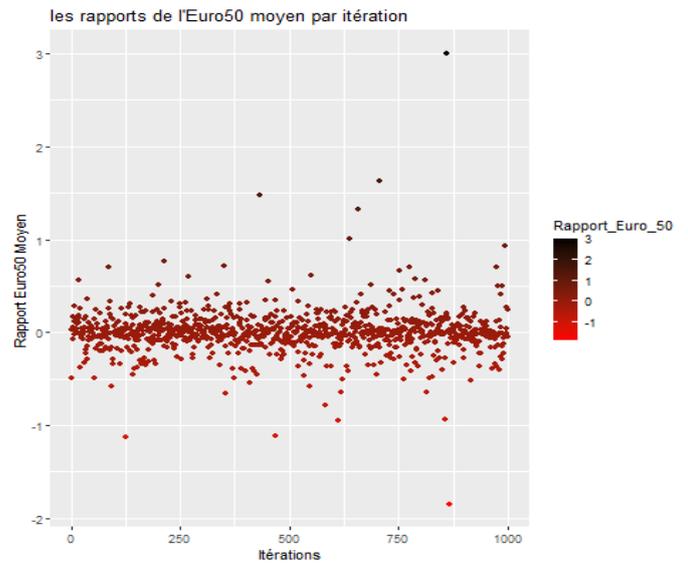


Fig. 10.8 – Rapport entre l'indice Eurostoxx50 moyen après et avant optimisation par itération.

Les figures à gauche ci-dessus nous montre que nous avons un peu plus de densité de scénarios défavorables qu'avant avec une légère translation de la courbe vers le haut entre 0 et 1 ; un intervalle pour lequel nos indices se dégradent vu que nos tables de scénarios économiques sont en base unitaire comme l'exige le format de l'entrée du modèle ALM. Pour l'indice CAC40, il est clair qu'il y a un petit repli de la densité juste après la modalité 1 et donc une translation d'une petite masse des scénarios entre l'intervalle $[0,1]$ et un intervalle ϵ à partir de 1.

A maille itération, les figures à droite montre que nous avons un peu plus de cas où le CAC40 et Eurostoxx50 baissent (presque 52% de cas) tout en soulignant plus de volatilité pour l'Eurostoxx50. Ces tendances viennent pour appuyer notre constat de hausse des scénarios des NAVs négatives ce qui baissera légèrement la NAV moyenne de la compagnie d'assurance comme illustré dans le tableau 10.1.

10.2 Analyse du SCR net

La figure 10.1 montre une tendance baissière du SCR net qui, après usage de l'algorithme de Higham, passe de 3692 M€ à 3661 M€. Afin d'analyser ce léger repli, nous avons suivi l'évolution des différentes briques de cette grandeur comme présenté dans les trois figures suivantes :

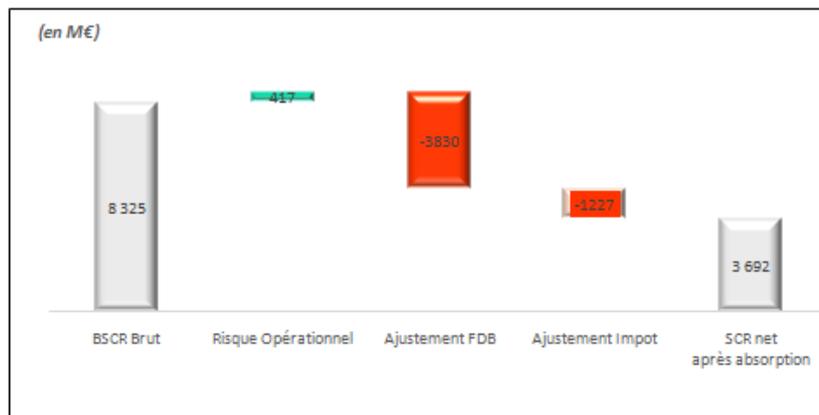


Fig. 10.9 – Décomposition du SCR net avant optimisation



Fig. 10.10 – Décomposition du SCR net après optimisation et usage de l’algorithme de Higham

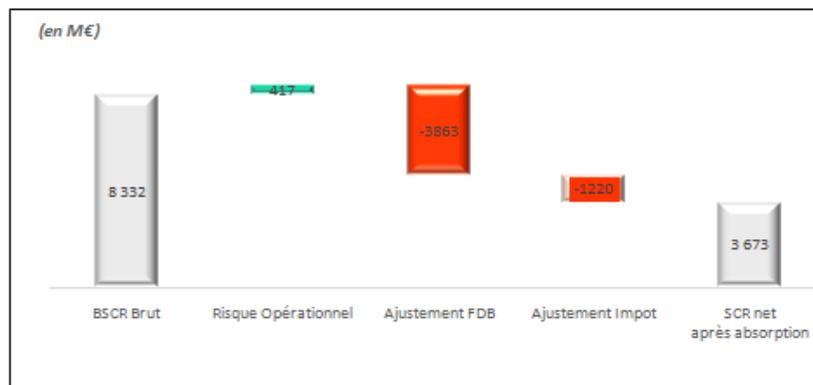


Fig. 10.11 – Décomposition du SCR net après optimisation et usage de l’outil Moody’s

Ajustement FDB :

Nous expliquons l’évolution du SCR net principalement par la baisse de l’ajustement FDB. En effet, suite à la légère baisse des marchés (figures 10.5, 10.6, 10.7 et 10.8), les comportements des assurés sont modifiés en raison de leur aversion au risque. Nous observons une hausse des arbitrages du support UC (Unité de Compte) vers l’Euro et une baisse des arbitrages du support Euro vers l’UC, ce qui augmente l’encours Euro de la compagnie d’assurance et donc fait monter sa PB (Participation aux bénéfices) future de +0.8% et même baisser sa marge qui est déjà négative au 31/12/2020. De fait, l’absorption des assurés est réduite et pénalise le SCR.

SCR Marché

Le SCR Action constitue la plus grande composante du SCR Module Marché, et dont le comportement suite à l’optimisation des corrélations des browniens se résume comme suit :

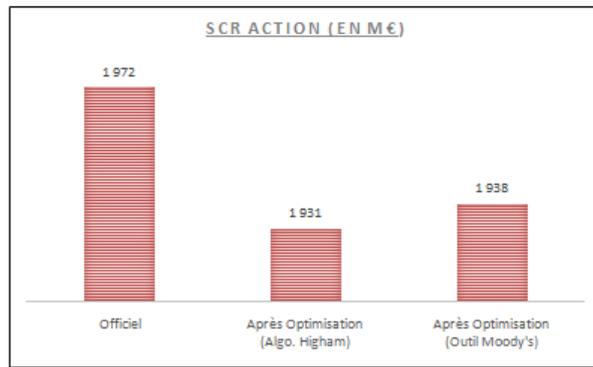


Fig. 10.12 – SCR Action avant et après optimisation

La baisse du rendement des indices financiers CAC40 et Eurostoxx50 suite à la légère hausse des scénarios économiques dégradés a baissé la sensibilité de la compagnie d'assurance au risque action.

SCR Souscription Vie

D'autre part, nous avons recueilli aussi l'impact sur le SCR souscription vie dont le SCR rachat est la composante phare. La compagnie d'assurance est plus sensible à la baisse de rachat car un scénario de baisse de loi de rachat baissera davantage les marges futures des contrats Euro de la compagnie d'assurance qui sont négatives au 31/12/2020. Après optimisation de la matrice de corrélation des browniens et suite la hausse de l'encours Euro à l'issue du mouvement des arbitrages, ceci a diminué les marges et donc a augmenté le SCR Rachat comme l'illustre la figure suivante :

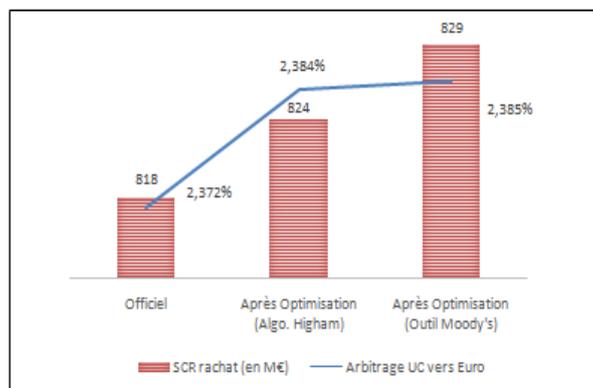


Fig. 10.13 – SCR Rachat et taux d'arbitrage du support UC vers l'Euro avant et après optimisation

Ajustement Impôts

La tendance de l'ajustement impôts est une résultante de celle du BSCR après intégration du SCR opérationnel et ajustement FDB, et représente un mécanisme d'absorption d'une part du BSCR de la compagnie d'assurance (Cf.Chapitre 1).

10.3 Conclusion

Suite à cette analyse axée sur la NAV, comme étant le pilier le plus impacté par l'optimisation au niveau des fonds propres éligibles après tiering, ainsi que le SCR net, nous pouvons conclure ce qui suit :

- Une légère perturbation des scénarios économiques causant une faible croissance des scénarios extrêmes négatifs et augmentant la volatilité desdits scénarios ce qui a encore baissé les marges futures de la compagnie d'assurance (asymétrie de son résultat) ;
- Le modèle ALM a augmenté les arbitrages en entrée du support Euro et a baissé les arbitrages en sortie du support Euro ce qui laisse la compagnie d'assurance avec plus d'assurés et donc plus de dégradation des marges futures déjà négatives, baisse de l'ajustement FDB et hausse du SCR rachat ;
- Une baisse du ratio de couverture du SCR de 1% lors de l'usage de l'algorithme de Higham et de 1.4 % lors de l'usage de l'outil Moody's ;

Il est à noter que l'allocation des actifs du modèle ALM est supposée fixe dans le temps, comme simplification du modèle, ce qui ne biaise pas la comparaison des ratios de couverture du SCR avant et après optimisation. L'impact sur le ratio de couverture aurait pu être plus important avec la complexification du modèle suite à l'utilisation d'une stratégie dynamique dans le temps.

Chapitre 11

Sensibilité aux changements des conditions économiques

Dans ce chapitre, nous évaluerons la robustesse de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens après stress des conditions économiques. Le but est d'avoir une assurance raisonnable que notre matrice de corrélation des browniens optimisée reste valable tout au long de l'année malgré le changement des conditions économiques chaque trimestre, période pendant laquelle la compagnie d'assurance clôture ses comptes et arrête ses chiffres pour établir son bilan prudentiel solvabilité II.

C'est ainsi que nous avons imaginé deux scénarios extrêmes mais possible dans un contexte de forte volatilité des indices financiers : translation de la courbe des taux Solvabilité II de -50 bps et baisse de 25% de l'Equity de la compagnie d'assurance.

Nous évaluerons l'impact de ces deux chocs avant et après optimisation de la matrice de corrélation des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's. La conversion en une matrice PSD de cette matrice est supposée faite moyennant l'outil Moody's vu les bons résultats préalablement obtenus (Cf.Chapitre 8 et 9).

11.1 Cas de baisse de la courbe des taux solvabilité II de 50 bps :

11.1.1 Market-consistency de la matrice de corrélation

La nouvelle courbe des taux solvabilité II choquée sera la nouvelle entrée du GSE risque-neutre Moody's sans toutefois changer la matrice de volatilités implicites ATM et AFM du swaption Euro. Après calibrage du modèle LMM+ et les autres processus de diffusion, le GSE risque-neutre Moody's projette simultanément les scénarios économiques des différents indices financiers sur l'horizon de 30 ans et à 1000 itérations. le tableau suivant résume la SSE (somme des erreurs quadratiques) entre la matrice de corrélation simulée en moyenne équilibrée simple par ledit GSE et la matrice de corrélation de marché et ce avant et après optimisation :

	Officiel	Après choc de -50 BPS	
		Avant optimisation	Après optimisation
SSE	97.4%	97.7%	76.0%

TABLE 11.1 – Somme des écarts quadratiques entre la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et la matrice de marché cible après baisse de la courbe des taux S2 de 50 BPS

Nous remarquons que le stress a légèrement augmenté la SSE mais grâce à l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens, nous avons pu rétablir l'écart pour atteindre 76% et donc

pas d'impact sur l'amélioration apportée par l'optimisation Market-consistent de la matrice de corrélation des browniens comme illustré dans le chapitre 8.

11.1.2 Qualité de la table des scénarios économiques

Par analogie au travail établi dans le chapitre 9, nous avons déroulé le test de martingalité et Market Consistency tout en affichant les erreurs moyennes globales obtenues entre les prix des indices financiers (resp.volatilités implicites des instruments dérivés) à la sortie du GSE et de marché. Les résultats se présentent dans les tableaux suivants :

Test de Martingalité

	Obligation ZC	Obligation ZC indexée	CAC40	Euro50	Immo	HF	PE
Etat Actuel (Officiel)	0.18%	0.18%	0.85%	0.63%	0.05%	0.07%	0.02%
Après choc (Avant optim.)	0.19%	0.15%	0.85%	0.63%	0.05%	0.07%	0.02%
Après choc (Après optim.)	0.23%	0.21%	0.91%	0.55%	0.04%	0.05%	0.03%

TABLE 11.2 – Erreurs Moyennes constatées des prix des indices financiers modélisés par le GSE risque-neutre Moody's après baisse de la courbe des taux S2 de 50 bps

En comparant les résultats après choc et optimisation des corrélations des browniens aux erreurs moyennes après optimisation du tableau 9.2 (ligne concernant "Outil Moody's"), nous remarquons que les erreurs moyennes sont proches avec une légère hausse pour l'obligation ZC et ZC indexée. Ceci veut dire que le choc de -50 bps de la courbe des taux n'a presque pas d'incidence sur le test de martingalité après optimisation.

Test Market-Consistency

	Call CAC40		Call Eurostoxx50		Swaption Euro	
	ATM	Away-from-the-money	ATM	Away-from-the-money	ATM	Away-from-the-money
Etat Actuel (Officiel)	0.90%	1.33%	0.91%	0.89%	0.019%	0.016%
Après Choc (Avant Optim.)	0.90%	1.33%	0.91%	0.89%	0.02%	0.017%
Après Choc (Après Optim.)	0.76%	1.31%	0.85%	0.95%	0.02%	0.02%

TABLE 11.3 – Erreurs Moyennes des volatilités implicites des instruments dérivés après baisse de la courbe des taux S2 de 50 bps .

Avant optimisation, le choc appliqué n'a presque pas d'impact sur les erreurs moyennes des différents tests Market-Consistency des différents instruments dérivés (à la monnaie ou hors la monnaie). Il en est de même après optimisation si nous nous comparons au tableau 9.5 notamment la ligne affichant les résultats après optimisation et usage de l'outil Moody's.

Nous pouvons conclure que le choc de -50 bps de la courbe des taux Solvabilité II n'a pas d'impact sur la qualité de la table des scénarios économiques avant et après optimisation.

11.1.3 Bilan Prudentiel Solvabilité II

Suite au choix de -50 bps de la courbe des taux solvabilité II, les indicateurs du bilan prudentiel ont évolué comme suit :

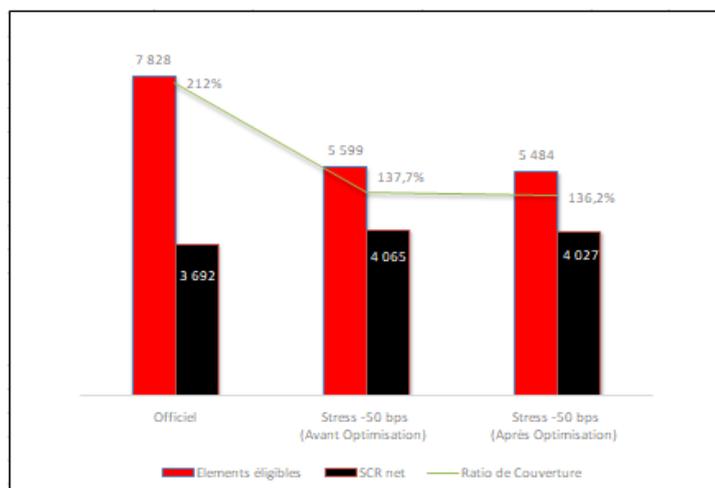


Fig. 11.1 – Impact croisé du choc -50 Bps de la courbe des taux S2 et de l’optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens sur les indicateurs Solvabilité II (en Millions €)

Avant optimisation, nous avons remarqué un repli de 28% des fonds propres éligibles après tiering et une hausse de 10% du SCR net. Cet effet croisé a fait chuter le ratio de couverture du SCR de presque 74%. Après optimisation, cet effet a légèrement persisté pour une baisse de 1.5% du ratio de couverture du SCR.

Focus sur la NAV :

De façon analogue à l’étude du chapitre 10, les fonds propres éligibles ont continué à baisser suite à l’optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens et sa conversion en une matrice PSD moyennant l’outil Moody’s. Afin de mieux cerner cette baisse, nous avons eu le soin de ventiler les fonds propres disponibles avant tiering :

	Officiel	Stress -50 Bps (Avant Optim.)	Stress -50 Bps (Après Optim.)
Éléments disponibles avant tiering	8139	6442	6384
Fonds Propres	6804	6808	6808
Emprunts Subordonnées	2412	2412	2412
Marges futures brutes d’impôts	-243	-1874	-1948
Marge pour risque	-1463	-2081	-2084
Impôts	629	1177	1196
Éléments éligibles après tiering	7828	5599	5484

TABLE 11.4 – Ventilation des fonds propres disponibles après choc de la courbe des taux solvabilité II avant et après optimisation de la matrice de corrélation des browniens (En Millions €).

Nous pouvons bien remarquer que les marges futures ont baissé de -243 Millions € à -1874 Millions € avant optimisation (fort impact du contexte de taux bas) et qui ont continué à se dégrader tout en passant à -1948 Millions € après optimisation. Ceci peut être expliqué de façon analogue au scénario central étudié au

chapitre 10 par la perturbation des scénarios économiques qui cause plus de volatilité et une légère hausse des scénarios extrêmes négatifs de la NAV. De plus, nous remarquons une baisse de la marge pour risque expliquée par la hausse du SCR souscription faisant partie prenante du SCR net mis en relief dans la figure 11.1.

Quant au modèle ALM, il déclenche une baisse du taux d'arbitrage du support Euro vers UC et une hausse des arbitrages du support UC vers l'Euro suite à l'aversion au risque des assurés voulant se prémunir contre la baisse du marché, ce qui augmente l'encours Euro de la compagnie d'assurance et donc dégrade sa marge qui est déjà négative au 31/12/2020. l'évolution des taux d'arbitrages préalablement évoqués suite à l'optimisation se présente comme suit :

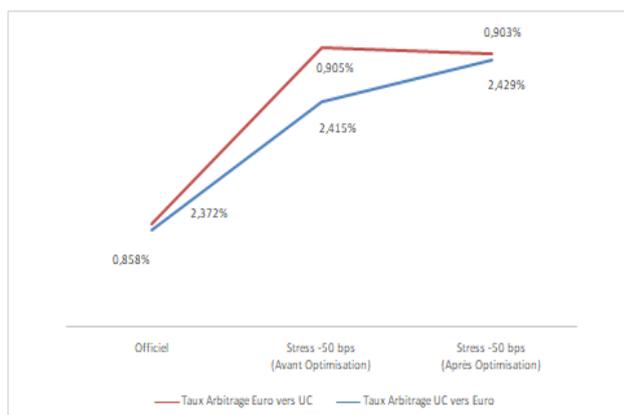


Fig. 11.2 – Impact croisé du choc -50 Bps de la courbe des taux S2 et de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens sur les arbitrages entre Support Euro et UC

Par ailleurs, il est à noter que l'effet du tiering s'est amplifié suite au choc de -50 Bps de la courbe des taux solvabilité II comme illustré dans le tableau 11.4. En effet, avant tiering les fonds propres disponibles ont baissé de 57 Millions € alors qu'après tiering les fonds propres éligibles ont baissé de 115 Millions €, ce qui constitue le double de la baisse avant tiering. Au scénario central, nous sommes passés de -64 Millions avant tiering € à -95 Millions € après tiering (Cf. Tableau 10.1). Nous justifions ceci par la baisse plus prononcée des marges futures de la compagnie d'assurance qui a causé une baisse du tier1 de 96 Millions € malgré la hausse du tier2 de 19 Millions €.

Focus sur le SCR net

Comme deuxième axe de notre analyse, nous avons remarqué une hausse du SCR net suite au choc de -50 bps de la courbe des taux expliquée principalement par le SCR souscription Vie notamment le SCR longévité (une baisse de taux mettra la compagnie d'assurance face au risque de réinvestissement et augmentera ses engagements de rentes de retraite envers ses assurés) et SCR rachat (la baisse de rachat avec baisse de taux dégrade la marge de la compagnie d'assurance ce qui augmente son SCR rachat).

Par ailleurs, notre but est de suivre l'évolution des différentes briques du SCR net suite au choc de la courbe S2 avant et après optimisation comme l'illustre les 2 figures suivantes :

11.2. CAS DE BAISSÉ DE L'EQUITY DE 25% :



Fig. 11.3 – Décomposition du SCR net après choc de -50 bps de la courbe des taux S2 et avant optimisation (en Milliers €)



Fig. 11.4 – Décomposition du SCR net après choc de -50 bps de la courbe des taux S2 et après optimisation (en Milliers €)

Nous remarquons une légère baisse du BSCR expliquée principalement par la baisse du SCR Marché notamment le SCR action, comme illustré dans le chapitre 10, vu la légère hausse des scénarios extrêmes négatifs stochastiques de l'indice action ce qui a baissé son rendement moyen et le SCR action de la compagnie d'assurance.

Le plus grand impact est celui de la baisse l'ajustement FDB qui est due à la hausse de la PB future (Cf.Chapitre 10) qui est due à son tour à la hausse de l'encours Euro de la compagnie d'assurance. Par conséquent, nous avons une légère hausse de l'ajustement des impôts qui absorbe partiellement les capitaux réglementaires BSCR.

11.2 Cas de baisse de l'Equity de 25% :

Dans ce cas de stress, nous avons baissé de 25% notre Equity composé des indices respectifs : actions (CAC40, Eurostoxx50), Hedge Fund et Private Equity. Nous avons fait le choix d'appliquer ce stress à l'entrée du modèle ALM sans toutefois changer la table de scénarios économiques qui prend déjà en compte l'optimisation Market-consistent de la matrice de corrélation des browniens. Notre table de scénarios économiques nous servira à projeter les rendements des indices choqués et donc les flux Actif Passif de la compagnie d'assurance.

Par conséquent, nous avons gardé le même calibrage des processus de diffusion des différents indices financiers susvisés suite à l'optimisation de la matrice de corrélation des browniens à l'entrée dudit GSE.

A l'issue de cette démarche, il n'y aurait impact ni sur la matrice de corrélation simulée en moyenne par ledit GSE ni sur la qualité de la table des scénarios économiques. Nous rappelons que nous sommes en train de

11.2. CAS DE BAISSÉ DE L'EQUITY DE 25% :

quantifier les impacts de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens après sa conversion en une matrice PSD moyennant l'outil Moody's et après choc de -25% de l'Equity de la compagnie d'assurance.

Ainsi, nous sommes passés directement à la collecte des impacts sur les indicateurs solvabilité II comme l'illustre la figure suivante :

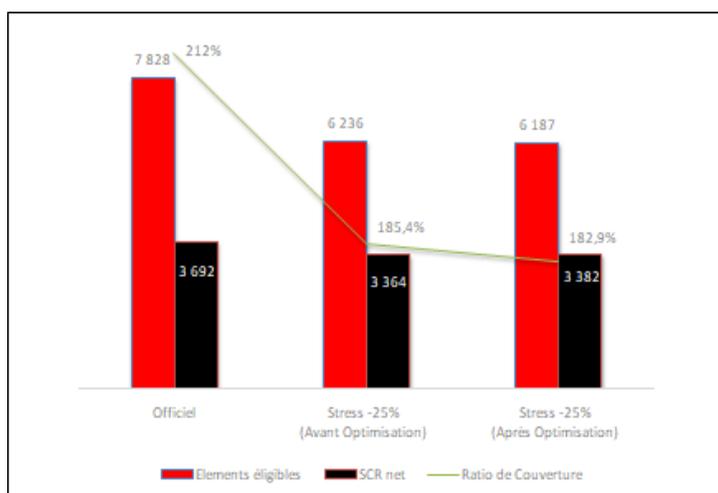


Fig. 11.5 – Impact croisé du choc -25% de l'Equity et de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens sur les indicateurs Solvabilité II (en Millions €)

Avant optimisation, nous remarquons un repli de 20% des fonds propres éligibles après tiering compensée partiellement par une baisse de 9% du SCR net, ce qui a fait chuter le ratio de couverture du SCR de presque 27% (moins que dans le cas de choc de -50 bps de la courbe des taux solvabilité II). Après optimisation, nous avons eu un effet croisé de baisse des fonds propres éligibles et hausse du SCR net ce qui a baissé de 2.4% le ratio de couverture du SCR.

11.2.1 Focus sur la NAV :

Afin de mieux appréhender la baisse des fonds propres éligibles, nous avons eu le soin de ventiler en premier lieu les fonds propres disponibles avant tiering :

	Officiel	Stress -25% (Avant Optim.)	Stress -25% (Après Optim.)
Eléments disponibles avant tiering	8139	7042	6998
Fonds Propres	6804	6808	6808
Emprunts Subordonnées	2412	2412	2412
Marges futures brutes d'impôts	-243	-1602	-1645
Marge pour risque	-1463	-1535	-1552
Impôts	629	960	974
Eléments éligibles après tiering	7828	6236	6187

TABLE 11.5 – Ventilation des fonds propres disponibles après choc de l'Equity et ce avant et après optimisation de la matrice de corrélation des browniens (En Millions €).

11.2. CAS DE BAISSÉ DE L'EQUITY DE 25% :

La variation des fonds propres disponibles, avant optimisation, est expliquée principalement par les composantes suivantes :

- Les marges futures brutes qui ont baissé de plus de cinq fois que dans le cadre officiel, ceci est expliqué par la forte baisse des PMVL (Plus ou Moins Value) dégradant le rendement des actifs et les marges de la compagnie d'assurance. Nous observons également une augmentation des arbitrages de l'UC vers l'Euro avec la baisse des marchés d'actions, ce qui contribue à la baisse de la NAV qui est négative au 31/12/2020.
- baisse de la marge pour risque due à la légère hausse du SCR souscription vie (en particulier le SCR rachat avec la hausse de l'encours euro de la compagnie d'assurance suite à l'accentuation des arbitrages de l'UC vers l'Euro).

Après optimisation, nous avons remarqué une faible baisse de la NAV de la compagnie d'assurance par rapport au cas ci-dessus. En effet, l'optimisation de la matrice de corrélation des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's a légèrement perturbé la projection des scénarios économiques en montant légèrement les scénarios extrêmes négatifs des indices « Action » (Cf.Chapitre 10). L'aversion au risque des assurés augmente les arbitrages de l'UC vers l'Euro. Or, dans le contexte actuel de taux bas, la plupart des contrats Euro génèrent des marges négatives, ce qui veut dire que les marges futures de la compagnie d'assurance continueront à baisser.

11.2.2 Focus sur le SCR net

Dans ce cadre d'études, nous avons remarqué une baisse du SCR net suite au choc de -25% de l'Equity expliquée principalement par le SCR Marché notamment le SCR action, et donc moins de sensibilité de la compagnie d'assurance à ce facteur de risque. Par ailleurs, nous avons suivi l'évolution des différentes étapes de construction du SCR net suite au choc de l'Equity avant et après optimisation comme l'illustre les 2 figures suivantes :



Fig. 11.6 – Décomposition du SCR net après choc de -25% de l'Equity et avant optimisation (en Milliers €)



Fig. 11.7 – Décomposition du SCR net après choc de -25% de l'Equity et après optimisation (en Milliers €)

Nous remarquons une légère hausse du BSCR expliquée principalement par la faible augmentation du SCR rachat car peu d'assurés ont arbitré vers le support Euro, ce qui signifie une légère hausse de l'encours Euro et donc une NAV légèrement dégradée plus qu'elle l'est au 31/12/2020. Par ailleurs, nous remarquons que l'ajustement FDB n'a pas trop bougé car peu d'assurés ont arbitré vers le support Euro et donc faible impact sur la PB future. Par conséquent, nous avons un faible impact sur l'ajustement des impôts qui en principe absorbe une partie des capitaux réglementaires BSCR.

Après choix de la méthode hybride comme meilleure méthode d'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens, nous avons présenté les résultats découlant de l'usage de l'outil PSD Moody's à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's à savoir une matrice de corrélation moyenne simulée par le GSE plus proche de celle du marché au sens de l'erreur quadratique. Au vu de ces résultats et étant donné le fait que c'est une approche qui prend en compte la sensibilité du Best Estimate aux corrélations structurantes de Sogecap, nous avons choisi cette méthode lors de l'étude d'impact sur les résultats sous solvabilité II.

Suite à cette optimisation, nous avons validé la qualité des tables de scénarios économiques ressortissant dudit GSE après avoir abouti à la stabilité des erreurs moyennes et du test de passage à la bande de confiance de niveau 95% des indices financiers et instruments dérivés.

En termes d'impact sous solvabilité II, le ratio de couverture du SCR a baissé d'environ 1 point suite à la baisse simultanée des éléments éligibles et du SCR. Après choc des conditions économiques (-50 bps sur la courbe des taux Solvabilité II et -25% sur les actions), le ratio de couverture du SCR a baissé d'environ 2 points, ce qui reste mesuré et tolérable par Sogecap.

Conclusion

Le sujet de mémoire était transverse, ce qui m'a permis de balayer divers aspects du GSE risque-neutre Moody's, de s'adapter davantage avec son environnement et surtout de mesurer le rôle de la matrice de corrélation des indices financiers comme l'un des points d'ancrage dudit GSE afin de construire la table des scénarios économiques de ces indices modélisant l'Actif de la compagnie d'assurance.

Nous avons mis en œuvre un panel de méthodes de calibrage de la matrice de corrélation des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's. Nous avons pu améliorer les écarts quadratiques que nous remarquons avant entre la matrice de corrélation simulée en moyenne (avec et sans poids de Provisions Mathématiques) et celle du marché. À cet effet, les principales méthodes utilisées se déclinent comme suit :

- La régression linéaire Simple (RLS) qui suppose une relation linéaire entre les indices financiers et les vecteurs browniens vu la négligence de la corrélation de la partie non linéaire de cette relation qui est à l'origine régie par un processus différentiel stochastique. Par conséquent, la relation est aussi linéaire entre les coefficients de corrélations des indices et ceux des browniens sous certaines hypothèses.
- La méthode actuelle qui associe la matrice de corrélation des browniens à celle du marché après conversion en une matrice semi-définie positive (PSD) comme l'exige l'entrée du GSE risque-neutre de Moody's.
- La méthode heuristique qui prend en compte directement les perturbations causées à la matrice de corrélation des browniens tout en prenant l'écart entre les coefficients de corrélation simulés en moyenne par le GSE risque-neutre de Moody's et les coefficients de corrélation à l'entrée dudit GSE.

Nous avons pris enfin de compte la combinaison des trois méthodes pour définir une nouvelle méthode que nous avons nommée hybride. Elle consiste à construire par bloc la matrice de corrélation optimisée des browniens en faisant appel à la meilleure méthode, au sens de l'erreur quadratique, dans chaque bloc.

Après optimisation de la matrice de corrélation des browniens, nos résultats étaient très intéressants après comparaison de la matrice de corrélation des rendements financiers simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's avec celle du marché. Après évaluation de la qualité de la table des scénarios économiques, nous avons remarqué un impact négligeable sur les tests de martingalité et de Market-Consistency. Ensuite nous avons quantifié l'impact sur les indices Solvabilité II pour conclure une faible baisse du ratio de couverture du SCR. Comme dernière étude de sensibilité, nous avons évalué la robustesse de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens suite aux chocs respectifs de -50 bps de la courbe des taux solvabilité II et -25% des actions. Nous retenons qu'il n'y a aucun impact ni sur la somme des erreurs quadratiques (SSE) entre matrices de corrélations ni sur la qualité de la table de scénarios économiques. En termes d'impact sur les indices Solvabilité II, le ratio de couverture du SCR a enregistré une légère baisse suite aux chocs préalablement cités ce qui reste mesuré dans le contexte de fort stress test.

Notre préconisation est d'adopter le modèle hybride d'optimisation de la matrice de corrélation des browniens en raison d'amélioration du caractère Market-Consistent de ladite matrice, et les impacts négligeables sur les tests et les résultats sous Solvabilité II. L'utilisation de l'outil Moody's de conversion en une matrice PSD est préconisée aussi en raison des faibles erreurs quadratiques obtenues.

Bibliographie

- [RL85] BOYLE.J.P & DYKSTRA R.L. “A method for finding projections onto the intersection of convex sets in Hilbert spaces. *Advances in Order Restricted Inference*”. In : *Lecture Notes in Statistics*. Berlin Springer 37 (1985), p. 28-47.
- [JHI02] NICHOLAS J.HIGHAM. “Computing the nearest correlation matrix - a problem from finance”. In : *IMA Journal of Numerical Analysis* 22 (2002), p. 329-343.
- [Mat10] Pierre-André Cornillon & Eric MATZNER-LOBER. “Regression avec R”. In : *Springer* (2010).
- [Bon16] Paul BONNEFOY-CUDRAZ. *Implementation et calibrage d’un Générateur de Scénarios Economiques : Impact sur la volatilité du Solvency Capital Requirement*. 2016.
- [Ana17] Moody’s ANALYTICS. *LMM+ : Derivation, Implementation and MC Calibration Methodology*. 2017.
- [BEN17] Mohammed BENNOUNA. *Calibrage du Libor Market Model dans le cadre d’un Générateur de Scénarios Economiques risque-neutre*. 2017.
- [Ana18] Moody’s ANALYTICS. *ESG MC Model Dependencies*. 2018.
- [Rah18] Adam RAHMAN. “sdpt3r : Semidefinite Quadratic Linear Programming in R”. In : *The R Journal*, ISSN 2073-4859 (2018).
- [Ana19] Moody’s ANALYTICS. *Scenario Generator Methodology Guide*. 2019.
- [Ana20] Moody’s ANALYTICS. *Correlation Calibration Update 2020*. 2020.
- [BEN20] Lokmane BENADJAL. *Optimisation de la qualité des tables de scénarios économiques*. 2020.
- [Pla21] Frédéric PLANCHET. *Modèles Financiers en Assurance et Analyses Dynamiques*. 2021.

Liste des Figures

1	Matrice de surfaces des sensibilités du Best Estimate aux corrélations des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's (en Millions €)	vi
2	<i>Test de martingalité du prix de l'obligation ZC à chaque maturité T avant optimisation.</i>	viii
3	<i>Test de martingalité du prix de l'obligation ZC à chaque maturité T après optimisation.</i>	viii
4	<i>Test Market-Consistency de niveau 95% des volatilités implicites d'une Swaption Euro ATM de Tenor 10 ans avant optimisation.</i>	ix
5	<i>Test Market-Consistency de niveau 95% des volatilités implicites d'une Swaption Euro ATM de Tenor 10 ans après optimisation.</i>	ix
6	Impact de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens sur les indicateurs Solvabilité II (en Millions €)	x
7	Distribution de la NAV avant et après optimisation	x
8	<i>Distribution des scénarios économiques de l'indice CAC40 avant et après optimisation</i>	xi
9	<i>Distribution des scénarios économiques de l'indice Eurostoxx50 avant et après optimisation.</i>	xi
10	Impact croisé du choc -50 Bps de la courbe des taux S2 et de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens sur les indicateurs Solvabilité II (en Millions €)	xii
11	Matrix of the Best Estimate's sensitivities to brownian correlations at the entrance of the Moody's risk-neutral ESG (in Millions €)	xv
12	<i>Martingality test of ZC bond price at each maturity T before optimization.</i>	xvii
13	<i>Martingality test of ZC bond price at each maturity T after optimization.</i>	xvii
14	<i>Market-Consistency Test with 95% level of implied volatilities of Euro ATM swaption with 10 years tenor before optimization.</i>	xviii
15	<i>Market-Consistency Test with 95% level of implied volatilities of Euro ATM swaption with 10 years tenor after optimization.</i>	xviii
16	Impact of the Market-Consistent optimization of brownian correlation matrix on Solvency II indicators (in Millions €)	xix
17	NAV distribution before and after optimization	xix
18	<i>Economic scenarios distribution of CAC40 index before and after optimization.</i>	xx
19	<i>Economic scenarios distribution of Eurostoxx50 index before and after optimization.</i>	xx
20	Cross impact of the -50 bps shock of S2 yield curve and Market-Consistent optimization of brownian correlation matrix on Solvency II indicators(in Millions €)	xxi
1.1	les trois piliers de la Solvabilité II	5
1.2	Pieuvre de risque de la formule standard	6
1.3	Calcul du capital de solvabilité requis du risque x	7
1.4	Transition de la Solvabilité I à la Solvabilité II	10
2.1	Environnement du Générateur de Scénarios Économiques de Moody's	13
2.2	Allure de la fonction de Rebonato de la volatilité déterministe	19
2.3	Les trois facteurs les plus importants régissant la structure par terme des taux d'intérêts nominaux	21
2.4	<i>Matrice de corrélation historique.</i>	21
2.5	<i>Matrice de corrélation après ACP.</i>	21
2.6	Volatilités Implicites de la Swaption Euro AFM	23
2.7	Les processus de diffusion de l'indice Action (Modèle SVJD)	26
3.1	Analyse descriptive de la matrice de Corrélation Marché	32
3.2	Rank Scatter Plot des log-rendements CAC40 et Euro50	33
3.3	<i>densité de la copule Gaussienne de paramètre $\rho = 0.97$</i>	33
3.4	<i>densité de la copule de Student de paramètre ($\rho = 0.97, \nu = 8$)</i>	33

3.5	Evolution de Λ_l et Λ_u selon la valeur du seuil de significativité α	34
4.1	Evolution du mouvement Brownien avant et après usage des variables antithétiques	38
4.2	<i>Nappe de scénarios du Mouvement Brownien Taux nominal sans variables antithétiques</i>	39
4.3	<i>Nappe de scénarios du Mouvement Brownien Taux nominal avec variables antithétiques</i>	39
4.4	Corrélation des mouvements browniens avec la méthode de Cholesky	41
5.1	Evolution des coefficients de corrélation du GSE risque-neutre sur 30 ans à pas mensuel	44
5.2	Evolution de la corrélation entre le taux nominal et réel à court terme simulée par le GSE risque-neutre Moody's.	45
5.3	Ecoulement des PM de la compagnie d'assurance sur les années de projection.	45
6.1	Outil de collecte de données simulées par le GSE risque-neutre de Moody's à t=30 ans	49
6.2	Répartition des résidus estimés en fonction des valeurs du CAC40 estimées	50
6.3	<i>Répartition des erreurs standardisées et studentisées du CAC40</i>	51
6.4	<i>QQ-Plot des erreurs studentisées du CAC40</i>	51
6.5	Répartition des résidus estimés en fonction des valeurs de l'Euro50 estimées	56
6.6	<i>Répartition des erreurs standardisées et studentisées de l'Euro50</i>	56
6.7	<i>QQ-Plot des erreurs studentisées de l'Euro 50</i>	56
6.8	Somme des erreurs quadratiques entre la matrice de corrélation cible et modélisée par la RLM en 3D	60
7.1	Outil Moody's de conversion en une matrice PSD	66
8.1	Matrice de surfaces des sensibilités du Best Estimate aux corrélations des browniens à l'entrée du GSE risque-neutre Moody's (en Millions €)	71
10.1	Impact de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens sur les indicateurs Solvabilité II (en Millions €)	79
10.2	Distribution de la NAV officielle en fonction du taux nominal 10 ans moyen de chaque scénario économique(en Millions €)	81
10.3	Distribution de la variation de la NAV en fonction du taux nominal 10 ans moyen de chaque scénario économique(en Millions €).	81
10.4	Distribution de la NAV avant et après optimisation (en Millions €)	82
10.5	<i>Distribution des scénarios économiques de l'indice CAC40 avant et après optimisation</i>	82
10.6	<i>Rapport entre l'indice CAC40 moyen après et avant optimisation par itération.</i>	82
10.7	<i>Distribution des scénarios économiques de l'indice Eurostoxx50 avant et après optimisation.</i>	83
10.8	<i>Rapport entre l'indice Eurostoxx50 moyen après et avant optimisation par itération.</i>	83
10.9	Décomposition du SCR net avant optimisation	83
10.10	Décomposition du SCR net après optimisation et usage de l'algorithme de Higham	84
10.11	Décomposition du SCR net après optimisation et usage de l'outil Moody's	84
10.12	SCR Action avant et après optimisation	85
10.13	SCR Rachat et taux d'arbitrage du support UC vers l'Euro avant et après optimisation	85
11.1	Impact croisé du choc -50 Bps de la courbe des taux S2 et de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens sur les indicateurs Solvabilité II (en Millions €)	89
11.2	Impact croisé du choc -50 Bps de la courbe des taux S2 et de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens sur les arbitrages entre Support Euro et UC	90
11.3	Décomposition du SCR net après choc de -50 bps de la courbe des taux S2 et avant optimisation (en Milliers €)	91
11.4	Décomposition du SCR net après choc de -50 bps de la courbe des taux S2 et après optimisation (en Milliers €)	91
11.5	Impact croisé du choc -25% de l'Equity et de l'optimisation Market-Consistent de la matrice de corrélation des browniens sur les indicateurs Solvabilité II (en Millions €)	92
11.6	Décomposition du SCR net après choc de -25% de l'Equity et avant optimisation (en Milliers €)	93
11.7	Décomposition du SCR net après choc de -25% de l'Equity et après optimisation (en Milliers €)	94
11.8	Résidus studentisés corrects (figure a) et résidus studentisés avec un individu aberrant(figure b).	118
11.9	<i>Test de martingalité au niveau 95% du prix de l'obligation ZC à chaque maturité T avant optimisation.</i>	122

11.10	<i>Test de martingalité au niveau 95% du prix de l'obligation ZC à chaque maturité T après optimisation.</i>	122
11.11	<i>Test de martingalité au niveau 95% du CAC40 à chaque pas de temps avant optimisation.</i>	123
11.12	<i>Test de martingalité au niveau 95% du CAC40 à chaque pas de temps après optimisation.</i>	123
11.13	<i>Test de martingalité au niveau 95% de l'Eurostoxx50 à chaque pas de temps avant optimisation.</i>	123
11.14	<i>Test de martingalité au niveau 95% de l'Eurostoxx50 à chaque pas de temps après optimisation.</i>	123
11.15	<i>Test de martingalité au niveau 95% de l'indice immobilier à chaque pas de temps avant optimisation.</i>	123
11.16	<i>Test de martingalité au niveau 95% de l'indice immobilier à chaque pas de temps après optimisation.</i>	123
11.17	<i>Test de Market-Consistency au niveau 95% des volatilités implicites du Call CAC40 ATM à chaque pas de temps avant optimisation.</i>	124
11.18	<i>Test de Market-Consistency au niveau 95% des volatilités implicites du Call CAC40 ATM à chaque pas de temps après optimisation.</i>	124
11.19	<i>Test de Market-Consistency au niveau 95% des volatilités implicites du Call Eurostoxx50 ATM à chaque pas de temps avant optimisation.</i>	124
11.20	<i>Test de Market-Consistency au niveau 95% des volatilités implicites du Call Eurostoxx50 ATM à chaque pas de temps après optimisation.</i>	124
11.21	<i>Test de Market-Consistency au niveau 95% des volatilités implicites du Swaption Euro ATM de tenor 10 ans à chaque pas de temps avant optimisation.</i>	125
11.22	<i>Test de Market-Consistency au niveau 95% des volatilités implicites du Swaption Euro ATM de tenor 10 ans à chaque pas de temps après optimisation.</i>	125

Liste des Tableaux

1	Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et celle simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's avant et après optimisation.	vi
2	Somme des écarts quadratiques (SSE) entre la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et la matrice de marché cible.	vii
3	Indicateur en vision Modèle ALM suite à la conversion de la matrice de corrélation des browniens, à l'entrée du GSE risque neutre Moody's, en une matrice PSD après optimisation (en Millions €)	vii
4	Erreurs Moyennes constatées des indices financiers modélisés par le GSE risque-neutre Moody's	viii
5	Erreurs Moyennes des volatilités implicites des instruments dérivés après projection des scénarios économiques par le GSE risque-neutre Moody's.	ix
6	Somme des écarts quadratiques (SSE) entre la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et la matrice de marché cible après baisse de la courbe des taux S2 de 50 BPS	xi
7	Quadratic difference between market correlation matrix and the one simulated on average by the Moody's risk-neutral ESG before and after optimization.	xv
8	Sum of squared deviations (SSE) between correlation matrix simulated on average by the Moody's risk-neutral ESG and target market matrix.	xvi
9	ALM model indicator after conversion of the Brownian correlation matrix, at the entrance of Moody's risk neutral ESG, into a PSD matrix after optimization (in Millions €)	xvi
10	Average errors of the financial indices modeled by the Moody's risk-neutral ESG	xvii
11	Average errors of implied volatilities of derivative instruments after projection of economic scenarios by Moody's risk-neutral ESG.	xviii
12	Sum of squared deviations (SSE) between correlation matrix simulated on average by Moody's risk-neutral ESG and target market matrix after lowering the S2 yield curve by 50 bps	xx
2.1	Étapes de conversion du taux swap au taux ZC	16
2.2	Résultats de l'ACP	20
3.1	Comparaison des copules Gaussienne et Student calibrées sur l'historique CAC40 et Euro50	34
4.1	Canevas de la table de scénarios économiques du GSE	36
4.2	Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et sa transformation PSD	40
5.1	Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et celle simulée en moyenne par le GSE avec et sans poids de PM	46
6.1	Canevas de la table des données collectées à t=30 ans	49
6.2	VIF des variables explicatives dans le cadre d'une RLS	50
6.3	Paramètres des modèles linéaires adoptés pour les indices financiers	51
6.4	Ecart quadratique entre la matrice de corrélation obtenue par la RLS et celle simulée par le GSE en moyenne et à la fin de l'horizon de projection	52
6.5	Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et celle simulée par le GSE en moyenne avant et après optimisation linéaire simple	55
6.6	VIF des variables explicatives dans le cadre d'une RLM	55
6.7	Ecart quadratique entre la matrice de corrélation obtenue par la RLM et celle simulée par le GSE en moyenne et à la fin de l'horizon de projection	58
6.8	Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et celle simulée par le GSE en moyenne avant et après optimisation linéaire Multiple	62

6.9	Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et celle simulée par le GSE en moyenne avant et après optimisation selon la méthode heuristique	63
6.10	Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et celle simulée par le GSE risque-neutre Moody's en moyenne avant et après optimisation selon la méthode hybride	65
7.1	Impact de l'utilisation des poids de PM sur la SSE entre la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et la matrice de corrélation du marché avant et après optimisation.	67
7.2	Ecart quadratique entre la matrice de corrélation de marché et celle simulée par le GSE risque-neutre Moody's en moyenne après optimisation selon la méthode hybride et usage des poids de PM.	67
7.3	Résultats finaux en termes de SSE des méthodes d'optimisation de la matrice de corrélation des shock-drivers.	68
8.1	Indicateur en vision Modèle ALM suite à la conversion de la matrice de corrélation des browniens input du GSE risque neutre Moody's en une matrice PSD avant optimisation (en Millions €)	72
8.2	Ecart quadratique entre la matrice de corrélation optimisée des browniens avant et après conversion en une matrice PSD	73
8.3	Indicateur en vision Modèle ALM suite à la conversion de la matrice de corrélation des browniens à l'entrée du GSE risque neutre Moody's en une matrice PSD après optimisation(en Millions €)	74
8.4	Somme des écarts quadratiques entre la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et la matrice de marché cible.	74
9.1	Tests de Martingalité à dérouler pour les indices financiers modélisés par le GSE risque-neutre Moody's	76
9.2	Erreurs Moyennes constatées des indices financiers modélisés par le GSE risque-neutre Moody's	76
9.3	Liste des produits dérivés pour calibrage des processus de diffusion et test de Market-Consistency	77
9.4	Erreurs Moyennes des volatilités implicites des instruments dérivés après projection des scénarios économiques par le GSE risque-neutre Moody's.	77
10.1	Ventilation des fonds propres disponibles avant et après optimisation de la matrice de corrélation des browniens (En Millions €).	80
11.1	Somme des écarts quadratiques entre la matrice de corrélation simulée en moyenne par le GSE risque-neutre Moody's et la matrice de marché cible après baisse de la courbe des taux S2 de 50 BPS	87
11.2	Erreurs Moyennes constatées des prix des indices financiers modélisés par le GSE risque-neutre Moody's après baisse de la courbe des taux S2 de 50 bps	88
11.3	Erreurs Moyennes des volatilités implicites des instruments dérivés après baisse de la courbe des taux S2 de 50 bps	88
11.4	Ventilation des fonds propres disponibles après choc de la courbe des taux solvabilité II avant et après optimisation de la matrice de corrélation des browniens (En Millions €).	89
11.5	Ventilation des fonds propres disponibles après choc de l'Equity et ce avant et après optimisation de la matrice de corrélation des browniens (En Millions €).	92

Liste des abréviations

- **ACP** :Analyse en Composantes Principales
- **ACPR** :Autorité de Contrôle Prudentiel et Résolution
- **AIC** :Akaike Information Criteria
- **ALM** :Asset Liability Management
- **AMSB** :Administration, Management or Supervisory Body
- **AOA** :Absence d'opportunité d'Arbitrage
- **ATM** :At The Money
- **AFM** :Away-from-The Money
- **BE** :Best Estimate
- **BSCR** :Basic Solvency Capital Requirement
- **CIR** :Cox Ingersoll Ross
- **ddl** :Degré de Liberté
- **EDS** :Equation Différentielle Stochastique
- **EIOPA** :European Insurance and Occupational Pensions Authority
- **Euro50** :Eurostoxx 50
- **FDB** :Future Discretionary Benefits
- **GSE** :Générateur de scénarios économiques
- **HF** :Hedge Fund
- **IC** :Intervalle de Confiance
- **i.i.d** :Indépendants Identiquement distribués
- **Immo** :Indice Immobilier
- **IV** :Implied Volatility
- **MC** :Market-Consistent
- **NAV** :Actif Net Réévalué
- **OA** :Organisme Assureur
- **PB** :Participation aux bénéfices
- **PE** :Private Equity
- **PM** :Provisions Mathématiques
- **PPE** :Provision pour Participation aux Excédents
- **VIF** :Value-In-Force
- **p.s** :presque sûrement
- **PSD** :Positive Semi-definite
- **PT** :Provisions Techniques
- **RC** :Ratio de Couverture
- **RLS** :Régression Linéaire Simple
- **RLM** :Régression Linéaire Multiple
- **RM** :Risk Margin
- **RN** :Risque-Neutre
- **RSR** :Regular Supervisory Report
- **SCR** :Solvency Capital Requirement
- **SE** :Erreur quadratique
- **SFCR** :Solvency and Financial Condition Report
- **LLN** :Strong Law of Large Numbers
- **SQLP** :Semi-definite Quadratic Linear Program
- **SSE** :Somme des erreurs quadratiques
- **SST** :Sum of squared total
- **SVJD** :Stochastic Volatility Jump Diffusion
- **TCL** :Théorème Central Limite
- **Tx-nom-cT** :Taux nominal à court Terme
- **Tx-reel-cT** :Taux réel à court Terme
- **UC** :Unités de Comptes
- **ZC** :Zéro Coupon

Annexe A : Matrices de volatilités implicites du marché

Pour le cas des calls respectifs du CAC40 et Eurostoxx50, on dispose d'une matrice de volatilités implicites avec laquelle on calibre le modèle de diffusion (SVJD). un strike différent de 1 veut dire qu'on est AFM (away-from-the-money) représentant le rapport entre le prix de l'indice financier sous-jacent et le strike du call.

- Matrice de volatilités implicites du call CAC40 (en bps), avec **maturité** en ligne et **moneyness** en colonne :

	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4
0.25																	
0.5																	
0.75																	
1	3580		3160		2750		2360		1980		1690		1530		1480		1490
2																	
3	2760		2520		2300		2100		1920		1780		1670		1600		1560
4																	
5	2550		2370		2210		2060		1930		1810		1730		1670		1640
6																	
7	2470		2310		2180		2050		1950		1850		1780		1730		1690
8																	
9	2440		2280		2150		2040		1950		1880		1820		780		1740
10	2440		2300		2180		2070		1980		1910		1850		1810		1780
25									2090								

- Matrice de volatilités implicites du call Eurostoxx50 (en bps), avec **maturité** en ligne et **moneyness** en colonne :

	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4
0.25																	
0.5																	
0.75																	
1	3540		3120		2710		2300		1920		1640		1530		1500		1510
2																	
3	2870		2600		2360		2130		1930		1770		1660		1600		1570
4																	
5	2630		2420		2230		2070		1940		1830		1760		1710		1690
6																	
7	2520		2350		2210		2080		1970		1880		1820		1770		1740
8																	
9	2470		2340		2230		2120		2030		1950		1890		1840		1800
10	2440		2320		2220		2120		2040		1960		1900		1850		1810
25									2160								

D'autre part, le swaption Euro est caractérisé par deux matrices de volatilités implicites :

-Matrice à la monnaie (en bps), avec **maturité** en ligne et **tenor** en colonne :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1					27					37		45		49
2					32					41		47		50
3					36					44		48		50
4					40					46		49		50
5					43					48		49		50
7					47					50		50		50
10					51					53		51		50
15					51					52		49		47
20					51					51		47		45
25					50					49		45		42
30					49					47		43		40

-Matrice AFM (en bps), avec **maturité** en ligne et **strike** en colonne pour un tenor égal à 10 ans :

	-0.025	-0.020	-0.015	-0.010	-0.005	0.000	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025
1						37					
2						41					
3						44					
4						46					
5	59	56	53	50	48	48	49	52	56	60	64
7						50					
10	57	55	54	53	52	53	54	55	57	59	62
15						52					
20	53	52	51	51	50	51	51	53	54	56	58
25						49					
30	50	49	48	47	47	47	48	49	51	53	55

Il est à noter que dans le cas du swaption Euro, les strikes sont exprimés comme différence entre le taux strike absolu et le taux Swap forward qui évoluent dans l'horizon de projection du GSE risque-neutre Moody's mais tout en gardant le meme gap afin de calculer les volatilités implicites calibrées par le modèle des taux (LMM+) et les volatilités en sortie dudit GSE.

Annexe B : Notions de base sur les corrélations

Le terme de dépendance renvoie à la présence d'une relation entre deux échantillons de deux variables aléatoires X et Y . On dit que X et Y sont indépendants s'il n'y a pas de relation entre les deux échantillons. Cependant, si on prend $F_{X,Y}$ la fonction de répartition de la loi jointe (X, Y) , on dit qu'il y'a une indépendance stochastique si et seulement si :

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

Cette notion reste plus générale que l'indépendance linéaire (dans le cadre gaussien des variables aléatoires, ce qui est notre cas pour les mouvements browniens), qui est définie si et seulement si le coefficient de corrélation linéaire de Pearson ρ_{XY} est nul tel que :

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}}$$

En prenant un exemple classique d'une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite $X \xrightarrow{L} N(0, 1)$, on a alors $\rho(X, X) = 1$ alors que $\rho(X^2, X) = 0$ malgré que X et X^2 sont dépendant. Ceci est dû au fait que le coefficient de corrélation linéaire de Pearson ne mesure que la structure de dépendance **linéaire**. Les limites de ce coefficient se présentent comme suit :

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée dans l'espace des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 nous donne :
- $\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$, et donc la variance des échantillons étudiés doit être $< \infty$
- $\rho_{T(X)T(Y)} \neq \rho_{XY}$, tel que T est une transformation strictement croissante.

certes, diverses sont les mesures qui peuvent se substituer à la corrélation de Pearson comme la **rank Correlation** qui fait appel aux copules (Annexe B) et qui permet d'évaluer d'avantage la structure de dépendance dans des régions plus particulières comme la queue de distribution qui intéressera d'avantage les OA.

Cependant, le mémoire se consacrera aux coefficients de corrélation linéaire de Pearson dont les valeurs sont entre -1 et 1. L'appellation "Corrélation linéaire" vient du fait que quand ce coefficient est ± 1 (corrélation parfaite), ceci implique une relation purement linéaire entre Y et X et donc $y = a \pm b \cdot x$, tel que a est une constante et b est aussi une constante non nulle.

De plus, le coefficient de Pearson est plus sensible aux observations ayant plus de masse de densité de la distribution multivariée vu qu'il fait appel à la variance et covariance dans son expression qui sont des mesures de la tendance centrale. Pourtant, de grandes valeurs extrêmes, malgré leur faible nombre, avec une forte déviation de la valeur moyenne peuvent significativement impacter le coefficient de Pearson car la variance/covariance est avant tout un moment d'ordre 2 sensible aux outliers. Il y'a une forte relation entre le coefficient de corrélation et les paramètres du modèle de la régression linéaire analysé selon la méthode des moindres carrés ordinaires. Ainsi, le coefficient de Pearson peut-être vu comme une mesure de combien on s'éloigne du modèle linéaire.

Annexe C : Théorie des Copules

Par définition, une copule est une fonction de distribution multivariée $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ tel que :

$C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, avec $u_i \in [0, 1]$ représente une observation associée à une loi uniforme U ([Pla21]).

On rappelle que si F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire X , alors par définition $F(x) = P(X \leq x)$. La fonction F est continue à droite avec des limites à gauche. De plus on définit l'inverse généralisé de F en posant $F^{-1}(y) = \inf\{x / F(x) \geq y\}$

La variable $U = F(X)$ est distribuée selon une loi uniforme sur $[0, 1]$ étant donné que $P(U \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = u$

Théorème de Sklar :

Soit F une fonction de répartition de la loi jointe de (X_1, X_2, \dots, X_n) dont les fonctions marginales sont $F_i, i = 1, \dots, n$. Il existe une Copule C tel que :

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \forall x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \quad (*)$$

Si les fonctions de répartition marginales sont continues alors C est unique. On définit aussi la fonction de densité c de la copule C comme suit :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$$

Ainsi, par dérivation de l'égalité (*) on déduit l'expression de la fonction de densité du vecteur (x_1, \dots, x_n) en fonction des densités marginales $f_i, i = 1, \dots, n$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i).$$

L'expression de la log-vraisemblance de l'échantillon $(x_1^t, \dots, x_n^t)_{1 \leq t \leq T}$ s'exprime directement comme suit :

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln(c(F_1(x_1^t, \theta), \dots, F_n(x_n^t, \theta), \theta)) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n f_i(x_i^t, \theta) \quad (**)$$

avec θ est un paramètre par rapport auquel on maximise la log-vraisemblance et qu'on peut décomposer comme suit :

- $\theta_1, \dots, \theta_n$ les paramètres des marginales ;
- θ_c paramètre de la copule ;

L'étude des copules dans ce mémoire a reposé sur deux des indices de marché auxquels nous avons calculés la corrélation à savoir le CAC40 et l'Eurostoxx50, et donc tout au long de cette annexe, nous supposons

que la dimension $n = 2$, F_1 et F_2 seront respectivement les fonctions de répartition marginales des log-rendements desdits indices, u_1 et u_2 les pseudo-observations (cf.Chapitre 3) associées aux log-rendements respectifs du CAC40 et Eurostoxx50. Ainsi, le Théorème de Sklar en analyse bivariée se présente comme suit :

$$\begin{aligned} \forall x_i \in \mathbb{R} \text{ and } u_i \in [0, 1], \text{ for } i = 1, 2 : \quad & C(u_1, u_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \\ & C(u_1, u_2) = F(x_1, x_2) \\ & C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \end{aligned}$$

Copule Gaussienne vs Copule de Student :

On définit la copule Gaussienne de paramètre $\rho \in [-1, +1]$ (en dimension 2), qui représente le coefficient de corrélation linéaire de Pearson, comme suit :

$$C(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \exp\left(\frac{x^2 - 2\rho \cdot x \cdot y + y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx dy$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

On définit la copule de Student de paramètre $\rho \in [-1, +1]$, et $\nu \geq 2$ (en dimension 2) comme suit :

$$\int_{-\infty}^{T_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{T_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{\pi\nu\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \cdot \left(1 + \frac{x^2 - 2rxy + y^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu}{2}+1} dx dy$$

où T_ν est la fonction de répartition de la loi de Student (univariée) à ν degrés de libertés, c'est-à-dire :

$$T_\nu(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu \cdot \pi} \cdot \Gamma(\frac{\nu}{2})} \cdot \left(1 + \frac{z^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

où Γ est la fonction gamma.

Critère AIC :

il s'agit de l'Akaike Information Criteria (AIC) selon lequel on choisit la copule optimale tout en utilisant l'estimation de la log-vraisemblance (**). Son expression est comme suit :

$$AIC = -2.l(\theta) + 2k$$

où k représente le nombre de paramètre de la copule en question. Cependant on distingue 2 situations possible pour notre cas :

- $k=1$ pour la copule Gaussienne ($\theta = \rho$);
- $k=2$ pour la copule de Student ($\theta = (\rho, \nu)$);

Upper and Lower tail index (Λ_u & Λ_l) :

Afin de mesurer la dépendance asymptotique au niveau des valeurs extremes (upper tail dependance Λ_u) ou les petites valeurs (lower tail dependance Λ_l), on utilise les grandeurs suivantes :

$$\Lambda_u = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \mathbb{P}[X_2 > \text{VaR}_\alpha(X_2) \mid X_1 > \text{VaR}_\alpha(X_1)] = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\bar{C}(\alpha, \alpha)}{1 - \alpha}.$$

Avec : $\bar{C}(\alpha, \alpha) = 1 - 2\alpha + C(\alpha, \alpha)$;

$$\Lambda_l = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbb{P}[X_2 \leq \text{VaR}_\alpha(X_2) \mid X_1 \leq \text{VaR}_\alpha(X_1)] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C(\alpha, \alpha)}{\alpha}.$$

Pour le cas des copules elliptiques (Gaussienne & Student), nous avons toujours $\Lambda_u = \Lambda_l = \Lambda$.

Annexe D : Décomposition de Cholesky

On voudrait tirer un échantillon de la distribution jointe gaussienne qui servira à simuler l'évolution des log-rendements des différents indices qu'on va modéliser tout en disposant des informations comme les moyennes, les écarts types et la corrélation entre les différents log-rendements desdits indices.

Après simulation de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi $N(0, 1)$, il existe une matrice triangulaire inférieure avec laquelle on pourrait pondérer les variables gaussiennes indépendantes et donc de les transformer en une séquence de variables aléatoires conforme à la structure de corrélation désirée. Cette matrice, notée P , est dite la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation originale Σ . Elle est nommée la matrice de corrélation *Pseudo-racine* carrée, qui peut être appliquée à un vecteur X gaussien pour produire un nouveau vecteur Y de variables aléatoires gaussiennes corrélées :

$$Y = P.X \quad (\text{C.1})$$

Diverses sont les techniques qui peuvent être utilisées pour déterminer la matrice P , notamment la décomposition de Cholesky, la décomposition en valeurs propres ou valeurs singulières. Pour notre cas, la décomposition de Cholesky se présente comme suit :

$$P.P^T = \Sigma$$

Cette décomposition n'est possible que si la matrice de corrélation Σ est strictement définie positive et donc ne contient pas de valeurs propres nulles. La matrice P est très proche des vecteurs propres de la matrice de corrélation Σ :

$$\Sigma = P.P^T = U.\Lambda.\Lambda^T.U^T = U.\Lambda^2.U^T = A.A^T$$

Avec U est la matrice des vecteurs propres de Σ , $U.U^T = I$, les éléments de la diagonale de Λ^2 sont les valeurs propres de Σ et A est définie tel que $A = U.\Lambda$ sans toutefois que A soit égale à P .

Il est très important de respecter l'ordre des shocks browniens dans la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation vu que la corrélation entre les risk-drivers va en dépendre après.

Prenons l'exemple de 2 variables aléatoires qui sont dans l'ordre $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$. On suppose que la corrélation entre les 2 variables est $\rho = 0.6$. La décomposition de Cholesky se présente comme suit :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix} = P.P^T$$

$$\text{avec } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, les variables corrélées seront :

$$\begin{cases} X'_1 = X_1 \\ X'_2 = \rho.X_1 + \sqrt{1-\rho^2}.X_2 \end{cases} \quad (11.1)$$

On remarque que le risk driver X_1 serait intacte alors que le risk driver X_2 serait modifié pour prendre en compte l'influence de X_1 . Cet exemple montre que si on avait pris le vecteur aléatoire $\begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \end{bmatrix}$, l'ordre serait complètement inversé du vecteur obtenu.

Cet effet est généralisé sur un nombre plus important des mouvements browniens dans la vie réelle ou l'ordre des risks drivers dans la matrice de corrélation est très important à respecter. La décomposition de Cholesky est automatiquement faite au niveau du GSE risque-neutre de Moody's de telle sorte que l'utilisateur n'a pas la main sur l'ordre des browniens.

Annexe E : Algorithme de HIGHAM

Soit A une matrice symétrique dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, l'objectif de l'algorithme de HIGHAM est de trouver la matrice de corrélation X la plus proche de A et ce en minimisant la distance :

$$\gamma(A) = \min\{\|A - X\| : X \text{ est une matrice de corrélation}\}$$

La norme utilisée en général est celle pondérée de la norme de Frobenius. Cependant, on définit la norme de Frobenius comme suit :

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A.A^T)} = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2}$$

On définit les normes pondérées associées à la norme de Frobenius :

$$\|A\|_W = \|W^{1/2}.A.W^{1/2}\|_F$$

avec W est une matrice symétrique définie positive.

$$\|A\|_H = \|H \circ A\|_F$$

avec H est une matrice symétrique des poids positifs et \circ représente le produit d'Hadamard : $A \circ B = (a_{ij}.b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

On rappelle qu'une matrice A est dite PSD qu'on note par $A \geq 0$ si et seulement si ses valeurs propres sont non-négative. Une définition équivalente est que la forme quadratique associée à la matrice A est non négative :

$$z^T.A.z \geq 0, \forall z \in \mathbb{R}^n$$

la solution de $\gamma(A)$ est une matrice située dans l'intersection des deux ensembles convèxes S et U au sens de la norme pondérée de Frobenius, tel que :

$$S = \{Y = Y^T \in \mathbb{R}^{n*n} : Y \geq 0\}$$

$$U = \{Y = Y^T \in \mathbb{R}^{n*n} : y_{ii} = 1, i = 1 : n\}$$

Programme PSD :

Comme précisé dans l'article [JHI02], un programme semi-défini positif est proposé pour aborder ce genre de problématique. Sa forme standard primale est la suivante :

$$\begin{cases} \text{minimize } \langle C, X \rangle \\ \text{subject to } \langle A_i, X \rangle = b_i, i = 1 : m \end{cases}$$

avec C and A_i sont des matrices symétriques et carrées de dimension n .

Pour simplification, on optimisera moyennant la norme de Fobenius non pondérée et donc :

$$\|A - X\|_F^2 = \|A\|_F^2 + \langle X, X \rangle - 2 \cdot \langle A, X \rangle = a^T \cdot a + x^T \cdot x - 2 \cdot a^T \cdot x \quad (*)$$

avec X est une matrice de corrélation, $x = Vec(X)$ et $a = Vec(A)$ tel que Vec est un opérateur qui concatène les colonnes de la matrice d'intéret en un vecteur de dimension supérieure. On remodélise le problème comme suit :

$$\begin{cases} \text{minimize } \theta \\ \text{subject to } Y = \begin{bmatrix} I_{n^2} & x \\ x^T & \theta + 2 \cdot a^T \cdot x - a^T \cdot a \end{bmatrix} \geq 0, X \geq 0, \text{diag}(X) = I_n \end{cases}$$

Ce résultat découle de la loi de **Schur Complement** qui stipule que :

$$\text{Pour } X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \text{ (Symétrique) et } S = C - B^T \cdot A^{-1} \cdot B :$$

$$\text{Si } A > 0 \text{ alors : } X \geq 0 \Leftrightarrow S \geq 0$$

Ainsi, on peut définir une nouvelle variable $Z = \text{diag}(X, Y, \theta) \geq 0$ qui sera utilisée dans la définition des contraintes suivantes :

- $\langle e_i \cdot e_i^T, Z \rangle = 1, i = 1 : n$ (Pour imposer la contrainte que X a une diagonale des 1),
 - $\langle e_i \cdot e_j^T + e_j \cdot e_i^T, Z \rangle = \delta_{ij}, n + 1 \leq i \leq j \leq n + n^2$ (Pour imposer la contrainte que $Y(1 : n^2, 1 : n^2) = I_{n^2}$),
 - $\langle e_i \cdot e_j^T + e_j \cdot e_i^T - e_p \cdot e_{n+n^2+1}^T - e_{n+n^2+1} \cdot e_p^T, Z \rangle = 0, 1 \leq i \leq j \leq n, n + 1 \leq p \leq n + n^2$
- (Pour établir la relation entre X et Y),
- $\langle \text{diag}(-e_{n+n^2+1} \cdot e_{n+n^2+1}^T, 1), Z \rangle = -x^T \cdot x$ (Pour revenir à l'égalité initiale (*)),

Avec e_i est un vecteur $\in \mathbb{R}^{n+n^2+2}$ dont la $i^{\text{ème}}$ valeur est égale à 1. Ainsi, on se trouve avec $\frac{n^4}{2} + \frac{3 \cdot n^2}{2} + n + 1$ contraintes. Malheureusement ce nombre de contraintes rend en général l'implémentation du programme semi-défini positif difficile, surtout qu'il faut une capacité de mémoire importantes de l'outil d'optimisation.

Par ailleurs, il y'a une possibilité d'exprimer le problème en faisant appel à l'ensemble cone quadratique (C.f Annexe H). Par exemple, on peut écrire $Y = A - X$ et minimiser α qui est soumise aux conditions que X soit une matrice de corrélation et $\|Vec(Y)\| \leq \alpha$.

Méthode par projections alternées :

Cependant, une fonction est prédéfinie sur le logiciel \mathbb{R} appelée **nearPD** qui permet de retrouver la matrice de corrélation la plus proche de la matrice symétrique insérée comme input. En amont, il s'agit d'un algorithme qui fait appel à des tolérances en terme de positivité des valeurs propres (ratio entre une valeur propre de la matrice de corrélation obtenue et la valeur propre maximale inférieur à ce seuil de tolérance sous-entend que ladite valeur propre serait traitée comme un zéro), de convergence de l'algorithme, de nombre d'itérations maximal. cet algorithme est appelé **méthode par projections alternées** ou le but est de trouver la matrice de corrélation optimale à l'intersection des ensembles S et U en projetant itérativement et donc en répétant l'opération suivante :

$$A \leftarrow P_U(P_S(A)).$$

Ainsi, on projette itérativement sur l'ensemble S puis sur l'ensemble U et rebolote jusqu'à ce que la somme des écarts quadratiques définie par la norme de Frobenius soit inférieure à un ϵ qu'on définira comme input de l'algorithme. Les formules explicites et respectives de $P_S(Z)$ et $P_U(Z)$ font appel à des cones ∂S et ∂U qui sont respectivement associés aux ensembles S et U et qui sont détaillés dans l'article [JHI02].

Ayant comme input une matrice symétrique $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, l'algorithme peut se résumer comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta S_0 &= 0, Y_0 = A \\ \text{for } k &= 1, 2, \dots \text{ (on peut limiter le nombre d'itérations)} \\ R_k &= Y_{k-1} - \Delta S_{k-1} \\ X_k &= P_S(R_k) \\ \Delta S_k &= X_k - R_k \\ Y_k &= P_U(X_k) \end{aligned}$$

Avec ΔS_{k-1} une grandeur appelée la correction de **Dykstra** qui est étudiée dans la référence [RL85]. De plus, les résultats généraux de **Boyle & Dykstra** ([RL85], théorème 2) montrent que X_k et Y_k convergent vers la matrice de corrélation souhaitée lorsque $k \rightarrow \infty$.

Annexe F : Relation linéaire entre la matrice covariance des shocks browniens et celle des rendements d'indices financiers

Soit les grandeurs suivantes :

$$(1) Y(t) = P.Y(t-1) + Q(t) + U(t)$$

$$(2) X(t) = C.Y(t) - R \cdot C.Y(t-1)$$

On a alors :

$$(3) X(t) = (C.P - R.C)(t-1) + C.Q \cdot Z(t) + C.U(t)$$

Or en appliquant l'équation (1) à t-1, on obtient :

$$Y(t-1) = P.Y(t-2) + Q(t-1) + U(t-1)$$

$$Y(t) = P^2.Y(t-2) + P.Q(t-1) + Q(t) + P.U(t-1) + U(t)$$

En répétant cette opération tout en remontant à t-2, t-3..., on trouve une relation temporelle comme suit :

$$(5) Y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (P^i \cdot Q \cdot Z(t-i) + P^i \cdot U(t-i))$$

Pour la faisabilité du modèle linéaire, on suppose une absence de corrélation entre Z(t) et U(t) (équivalent à l'exogénéité dans un cadre de régression) et leur absence d'autocorrélation :

$$(6) S_{YY} = \sum_{i=0}^{\infty} (P^i \cdot Q \cdot S_{zz} \cdot Q' \cdot P^{i'} + P^i \cdot S_{uu} \cdot P^{i'})$$

On peut utiliser une propriété du produit de Kronecker :

$$(7) \text{vec}(ABC) = (C' \otimes A) \cdot \text{vec}(B)$$

Pour exprimer (6) comme suit :

$$(8) \text{vec}(S_{YY}) = \sum_{i=0}^{\infty} [((P^i \cdot Q) \otimes (P^i \cdot Q)) \cdot \text{vec}(S_{zz}) + (P^i \otimes P^i) \cdot \text{vec}(S_{uu})]$$

On peut aussi utiliser une autre propriété d'identité standard :

$$(9) (A \cdot B) \otimes (C \cdot D) = (A \otimes C) \cdot (B \otimes D)$$

Pour réécrire (8) comme suit :

$$(10) \text{vec}(S_{YY}) = \sum_{i=0}^{\infty} [((P^i \otimes P^i) \cdot (Q \otimes Q)) \cdot \text{vec}(S_{zz}) + (P^i \otimes P^i) \cdot \text{vec}(S_{uu})]$$

En focussant sur la somme suivante :

$$(11) S = \sum_{i=0}^{\infty} P^i \otimes P^i$$

Qu'on multiplie à gauche par P ⊗ P pour avoir :

$$(12) (P \otimes P) \cdot S = \sum_{i=0}^{\infty} (P \otimes P) \cdot (P^i \otimes P^i) = \sum_{i=0}^{\infty} (P^{i+1} \otimes P^{i+1}) = S - I, \text{ après changement d'indice}$$

tout en supposant que I est la matrice d'identité

En cas de convergence des séries, on a alors :

$$(13) S = (I - (P \otimes P))^{-1}$$

En injectant dans l'équation (10) l'expression (13), on obtient une nouvelle expression pour $\text{vec}(S_{YY})$:

$$(14) \text{vec}(S_{YY}) = (I - (P \otimes P))^{-1} \cdot [(Q \otimes Q) \cdot \text{vec}(S_{zz}) + \text{vec}(S_{uu})]$$

Par analogie aux traitements qui ont été effectués à $Y(t)$, le passage de l'équation (3) à une formule close de S_{XX} est possible, ce qui nous donne :

$$(15) \text{vec}(S_{XX}) = (E \otimes E) \cdot \text{vec}(S_{YY}) + ((CQ) \otimes (CQ)) \cdot \text{vec}(S_{zz}) + (C \otimes C) \cdot \text{vec}(S_{uu})$$

avec $E = C.P - R.C$

On applique une autre fois la formule (9) au second terme de l'équation (15) ce qui nous donne :

$$(16) \text{vec}(S_{XX}) = (E \otimes E) \cdot \text{vec}(S_{YY}) + ((C \otimes C) \cdot (Q \otimes Q)) \cdot \text{vec}(S_{zz}) + (C \otimes C) \cdot \text{vec}(S_{uu})$$

En injectant l'expression de S_{YY} (14) dans l'équation (16) et après factorisation, on obtient le résultat souhaité tel que :

$$\text{vec}(S_{xx}) = H \cdot \text{vec}(S_{zz}) + K$$

avec H et K sont des matrices bien définies dans le 4^{ème} chapitre de la partie 2 du présent mémoire.

Annexe G : Colinéarité des variables explicatives et analyse des résidus

En présence d'un échantillon de n observations $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$, le modèle de régression linéaire est considéré de la forme suivante :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i = x'_i \beta + \varepsilon_i$$

qui se réécrit sous forme matricielle plus globale :

$$Y_{n \times 1} = X_{n \times p} \cdot \beta_{p \times 1} + \varepsilon_{n \times 1}$$

sous les hypothèses :

$$(\mathcal{H}) \begin{cases} (\mathcal{H}_1) : \text{rg}(X) = p \\ (\mathcal{H}_2) : \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n) \end{cases}$$

Colinéarité des variables

L'hypothèse (\mathcal{H}_1) sous-entend que les variables explicatives ne sont colinéaires ce qu'on visera à tester avant même de calculer les paramètres du modèle. la raison d'avoir cette hypothèse c'est pour être sûr que la matrice $(X^T \cdot X)^{-1}$ soit bien définie et donc le déterminant de $(X^T \cdot X)$ est supérieur à 0, car sinon les estimateurs de β et σ^2 des MCO (Moindres carrés ordinaires) ne seront pas définis. On rappelle que : (Cf.[Mat10]).

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y} \\ \hat{\beta} = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y \\ \text{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 \cdot (X^T \cdot X)^{-1} \\ \hat{Y} = X \cdot \hat{\beta} = X \cdot (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y = P_X \cdot Y \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p} \cdot \|\hat{\varepsilon}\|_2^2 \end{cases}$$

Avec P_X est la matrice de projection sur l'espace engendré par les vecteurs de la matrice X.

Pour tester l'hypothèse (\mathcal{H}_1) , on calculera la grandeur VIF : facteur d'inflation de la variance, définie pour la $j^{\text{ème}}$ variable comme suit :

$$V_j = \frac{1}{(1 - R_j^2)}$$

Avec R_j^2 est le coefficient de détermination de la regression de la variable X_j sur les autres variables. Plus X_j est linéairement proche de $\{X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_p\}$ plus R_j^2 est proche de 1 et donc V_j est large. Ainsi, les variables explicatives à retenir seront celles ayant le VIF le plus petit, soit le plus proche de 1 et donc moins de colinéarité.

Pratiquement, il faut calculer le VIF pour chaque variable explicative. Si jamais plusieurs variables ont un VIF qui est supérieur à 5, on supprime la variable qui a le plus grand VIF puis on réitère le calcul des VIFs jusqu'à ce qu'on ait un panel de variables ayant un VIF acceptable (en général inférieur à 5 et de préférence proche de 1). Ceci est similaire à la méthode d'élimination descendante mais toutefois en se basant sur le calcul des VIFs au lieu de la significativité des paramètres du modèle linéaire.

Analyse des résidus

L'objectif étant de valider l'hypothèse (\mathcal{H}_2) , les méthodes courantes sont graphiques vu qu'il est difficile d'avoir des règles strictes de décision.

Le respect de cette hypothèse avec (\mathcal{H}_1) est équivalent à ce que :

- le couple $(\hat{Y}, \hat{\varepsilon})$ soient indépendants ;
- les $(\hat{\varepsilon}_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont centrés et de loi gaussienne.

Pour vérifier le premier constat, il faut un nuage de point quelconque de $(\hat{Y}_i, \hat{\varepsilon}_i)_{1 \leq i \leq n}$; soit sans une tendance établie à savoir une croissance ou décroissance (forme à la banane!). Si ce nuage est autour de l'axe des abscisses, on peut aboutir à ce que le deuxième constat soit vérifié (les $(\hat{\varepsilon}_i)_{1 \leq i \leq n}$ centrés).

avant de vérifier le caractère gaussien des $(\hat{\varepsilon}_i)_{1 \leq i \leq n}$, il est important de noter que :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\varepsilon}) &= \text{Var}(Y - \hat{Y}), \\ &= \text{Var}((I - P_X).Y), \\ &= \sigma^2.(I - P_X) \end{aligned}$$

Pour $P_X = H$ et sous (\mathcal{H}_2) , on retient le tableau suivant :

Erreurs	Résidus
$\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$	$\mathbb{E}[\hat{\varepsilon}_i] = 0$
$\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$	$\text{Var}(\hat{\varepsilon}) = \sigma^2(I - H)$

Ainsi, la variance de $\hat{\varepsilon}_i$ est $\text{Var}(\hat{\varepsilon}_i) = \sigma^2(1 - h_{ii})$, qui dépend donc de i . Afin d'éliminer cette non-homogénéité des variances des résidus, nous préférons utiliser les résidus normalisés :

$$r_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\sigma \sqrt{1 - h_{ii}}}.$$

Mais σ est inconnu, il convient donc de le remplacer par $\hat{\sigma}$ issue de notre échantillon, ce qui donne des résidus dits standardisés :

$$t_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\sigma} \sqrt{1 - h_{ii}}}.$$

Notre but est d'avoir une statistique suivant une loi de student, alors que ce n'est pas le cas car il y'a une dépendance entre $\hat{\varepsilon}_i$ et $\hat{\sigma}$, d'où l'usage des résidus studentisés définis par :

$$t_i^* = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\sigma}_{(i)} \sqrt{1 - h_{ii}}}$$

où $\hat{\sigma}_{(i)}$ est l'estimateur de σ dans le modèle linéaire privé de l'observation i .

Ces résidus t_i^* suivent bien une loi de Student. Ils sont construits selon la logique de validation croisée (en abrégé VC, ou plus précisément méthode du leave-one-out), c'est-à-dire comme suit :

1. Dans un premier temps, nous estimons les paramètres β et σ^2 à l'aide de tous les individus sauf le i^{eme} , nous obtenons ainsi les estimateurs $\hat{\beta}_{(i)}$ et $\hat{\sigma}_{(i)}^2$;

2. Dans un second temps, nous considérons que la i^{ime} observation $x'_i = [x_{i1}, \dots, x_{ip}]$ est une nouvelle observation et nous prévoyons y_i par \hat{y}_i^p (p pour prévision) de façon classique : $\hat{y}_i^p = x'_i \hat{\beta}_{(i)}$. le Cours [Mat10] montre que t_i^* est égale aussi à l'expression suivante :

$$\frac{y_i - \hat{y}_i^p}{\hat{\sigma}_{(i)} \sqrt{1 + x'_i (X'_{(i)} X_{(i)})^{-1} x_i}} \sim \mathcal{T}_{n-p-1}$$

loi Student de $n - p - 1$ car les estimateurs $\hat{\beta}_{(i)}$ et $\hat{\sigma}_{(i)}^2$ sont construits sur la base de $n - 1$ observations.

Pour que les erreurs estimées $(\hat{\varepsilon}_i)_{1 \leq i \leq n}$ soient gaussiennes et bien ajustées et donc la statistique t_i^* suit une student, une façon qualitative de faire est d'observer les valeurs aberrantes, qui sont définies comme observations pour lesquelles on a le résidu studentisé $||t_i^*|| \gg t_{n-p-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$, et voir si leur proportion est au plus égale à $\alpha\%$ voire meme proche de $\alpha\%$. En pratique, si $\alpha = 5\%$ et $n - p - 1 \geq 30$, alors $t_{n-p-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \approx 2$.

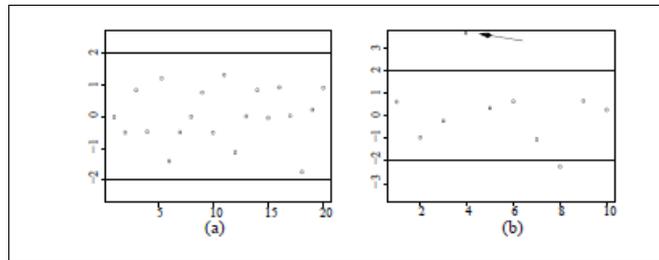


Fig. 11.8 – Résidus studentisés corrects (figure a) et résidus studentisés avec un individu aberrant(figure b).

La figure (a) montre un ajustement satisfaisant vu qu'il n'y ni structure particulière des résidus qui se dégage ni des résidus qui sortent de la bande de student, tandis que dans la figure (b) on voit bien l'exemple d'une valeur abberante qui sort de la bande de Student.

De plus, on teste l'hypothèse de normalité qui reste difficile à approcher, moyennant un $\mathbb{Q} - \mathbb{Q}$ plot (ou diagramme quantile-quantile) dans le cas ou $n - p - 1 \geq 30$ car les résidus studentisés dans ce cas sont quasi gaussiens.

Annexe H : Programme d'optimisation linéaire quadratique sous contrainte d'une matrice semi-définie positive (SQLP)

En général, un problème d'optimisation linéaire conique contient non seulement des variables appartenant au cône semi-défini positif noté \mathcal{S} , mais aussi des variables appartenant au cône quadratique \mathcal{Q} , ou au cône linéaire \mathcal{L} . La fonction objective est alors une somme des produits scalaires faisant appel à ces différentes variables. Ce problème nommé SQLP peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{X}^s, \mathbf{X}^q, \mathbf{X}^l}{\text{minimize}} \sum_{j=1}^{n_s} \langle \mathbf{C}_j^s, \mathbf{X}_j^s \rangle + \sum_{i=1}^{n_q} \langle \mathbf{C}_i^q, \mathbf{X}_i^q \rangle + \langle \mathbf{C}^l, \mathbf{X}^l \rangle \\ & \text{S.c :} \\ & \sum_{j=1}^{n_s} (\mathbf{A}_j^s)^\top \text{svec}(\mathbf{X}_j^s) + \sum_{i=1}^{n_q} (\mathbf{A}_i^q)^\top \mathbf{X}_i^q + (\mathbf{A}^l)^\top \mathbf{X}^l = \mathbf{b} \quad (1) \\ & \mathbf{X}_j^s \in \mathcal{S}^{s_j} \forall j \\ & \mathbf{X}_i^q \in \mathcal{Q}^{q_i} \forall i \\ & \mathbf{X}^l \in \mathcal{L}^l \end{aligned}$$

avec :

- le cône semi-défini positif $-\mathcal{S}^{s_j} = \{\mathbf{X} \in \mathcal{R}^{s_j \times s_j} : \mathbf{X} \succeq 0, \mathbf{X}_{ij} = \mathbf{X}_{ji} \forall i \neq j\}$
- le cône quadratique- $\mathcal{Q}^{q_i} = \{\mathbf{x} = [x_0; \tilde{\mathbf{x}}] \in \mathcal{R}^{q_i} : x_0 \geq \sqrt{\tilde{\mathbf{x}}^\top \tilde{\mathbf{x}}}\}$
- le cône linéaire $-\mathcal{L}^l$ — orthant non-négatif de \mathcal{R}^l

ici on suppose $\tilde{\mathbf{x}} = [x_1, \dots, x_{q_i-1}]$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire dans l'espace approprié. Dans le cône semi-défini positif, le produit scalaire est $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \text{vec}(\mathbf{X})^\top \text{vec}(\mathbf{Y})$, tel que l'opérateur vec est un vecteur issu de la concaténation des colonnes de la matrice \mathbf{X} , tel que pour une dimension $n \times n$ de $\mathbf{X} = [x_{ij}]$, $\text{vec}(\mathbf{X})$ est un vecteur de dimension $n^2 \times 1$ qui s'écrit sous forme $[x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{(n-1)n}, x_{nn}]^\top$.

De plus, l'opérateur svec sélectionne les éléments du triangle supérieur (y compris la diagonale) et les superpose colonne par colonne. En général, si on suppose une matrice de dimension $n \times p$ notée $\mathbf{X} = [x_{ij}]$, $\text{svec}(\mathbf{X})$ aura la forme $[x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{13}, \dots, x_{(n-1)p}, x_{np}]^\top$. Une telle modélisation est justifiée car pour les matrices symétriques dans \mathcal{S} , il est suffisant de mettre les contraintes que sur les éléments de la partie triangulaire supérieure de \mathbf{X} . Il est important de noter que \mathbf{A}_j^s , \mathbf{A}_i^q et \mathbf{A}^l sont des matrices de contraintes du problème d'optimisation (1) dont les dimensions doivent être adaptées selon les variables à optimiser.

Le problème qui nous concerne est celui de déterminer la matrice de corrélation la plus proche de la matrice cible, ce qui est un cas particulier de l'algorithme (1) mais nécessitant une reformulation et adaptation particulière.

Nearest Correlation Matrix

traité en premier temps par **HIGHAM** [JHI02] (C.f Annexe D) dans le cadre de calcul des corrélations entre actions, il est difficile d'effectuer un calcul spot surtout que les données actions ne sont disponibles chaque jour. Le calcul est alors effectué sur un historique plus exhaustif pourtant la matrice de corrélation résultante n'est pas forcément semi-défini positive (PSD). Pour pallier cette limite, l'algorithme de **HIGHAM** se présente suit :

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{X}}{\text{minimize}} \quad \|\mathbf{R} - \mathbf{X}\|_F \\ \text{S.c :} & \\ & \text{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}_n \quad (2) \\ & \mathbf{X} \in \mathcal{S}^n \end{aligned}$$

Avec \mathbf{R} est la pseudo matrice de corrélation et $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobénius.

Étant donné que la matrice \mathbf{X} est contrainte d'avoir une diagonale unitaire et aussi symétrique et la matrice \mathbf{R} est une pseudo matrice de corrélation, et donc elle aura a fortiori une diagonale unitaire et symétrique, on peut réécrire la fonction objective du programme ci-haut comme suit :

$$\|\mathbf{R} - \mathbf{X}\|_F^2 = 2 * \|\text{svec}(\mathbf{R}) - \text{svec}(\mathbf{X})\|^2 = 2 * \|\mathbf{e}\|^2$$

En introduisant la variable e_0 tel que $\|\mathbf{e}\| \leq e_0$, et en définissant $\mathbf{e}^* = [e_0; \mathbf{e}]$, le vecteur \mathbf{e}^* appartient au cône quadratique $\mathcal{Q}^{\frac{n(n+1)}{2}+1}$. On obtient la représentation suivante :

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{e}^*, \mathbf{X}}{\text{minimize}} \quad e_0 \\ \text{S.c :} & \\ & \text{svec}(\mathbf{R}) - \text{svec}(\mathbf{X}) = [0, \mathbf{I}_{n(n+1)/2}] \mathbf{e}^* \quad (3) \\ & \text{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}_n \\ & \mathbf{X} \in \mathcal{S}^n \\ & \mathbf{e}^* \in \mathcal{Q}^{n(n+1)/2+1} \end{aligned}$$

$[X, Y]$ est la juxtaposition des colonnes des deux matrices respectives $\mathbf{X}_{n \times p}$ et $\mathbf{Y}_{n \times m}$ pour former une matrice de taille $n \times (p+m)$. En minimisant e_0 , on minimise indirectement $\mathbf{e} = \text{svec}(\mathbf{R}) - \text{svec}(\mathbf{X})$ car $e_0 \geq \|\mathbf{e}\|$, ce qui est la finalité de la fonction objective. Dans cet algorithme, on obtiendra à la fois \mathbf{e}^* et \mathbf{X} optimales.

Reformulation en un problème SQLP

Pour voir le problème comme optimisation linéaire conique, la grandeur e_0 peut-etre vue comme $\langle C^q, X^q \rangle$ en posant $C^q = [1; 0_{n(n+1)/2}]^T$ et $X^q = \mathbf{e}^*$. Etant donné que la matrice X^5 n'apparaît pas dans la fonction objective, C^s est la matrice nulle de dimension $n \times n$. En posant $C = [C^s, C^q]$, on réécrit le programme (3) de tel sorte qu'il soit le plus proche du programme (1) :

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{e}^*, \mathbf{X}}{\text{minimize}} \quad \langle C^s, X \rangle + \langle C^q, \mathbf{e}^* \rangle \\ \text{S.c :} & \\ & (\mathbf{A}^s)^\top \text{svec}(\mathbf{X}) + (\mathbf{A}^q)^\top \mathbf{e}^* = \mathbf{b} \quad (4) \\ & \mathbf{X} \in \mathcal{S}^n \\ & \mathbf{e}^* \in \mathcal{Q}^{n(n+1)/2+1} \end{aligned}$$

tel que $C^q = [1, 0_{n(n+1)/2}]^T$, et

$$\mathbf{A}^s = [\mathbf{A}_1^s, \mathbf{A}_2^s]$$

$$\mathbf{A}^q = [\mathbf{A}_1^q, \mathbf{A}_2^q]$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2]$$

avec :

$$\mathbf{A}_1^s = I_{n_2}, \text{ matrice identité de dimension } n_2 \text{ avec } n_2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\mathbf{A}_2^s = [svec(\mathbf{A}_1), \dots, svec(\mathbf{A}_n)], \text{ (isolation des éléments de la diagonale devant être égaux à 1)}$$

$$\mathbf{A}_1^q = [0, I_{n_2}]^T$$

$$\mathbf{A}_2^q = 0_{n_2+1}$$

$$\mathbf{b}_1 = svec(\mathbb{R})$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{1}_n$$

Dans la formule de \mathbf{A}_2^s , le but étant d'égaliser les éléments de la diagonale de X à 1 (algorithme (3)). On définit alors \mathbf{b}_2 comme mentionné en haut et pour le $k^{\text{ème}}$ élément de la diagonale on définit \mathbf{A}_k tel que

$$\mathbf{A}_k = [a_{ij}] = \begin{cases} 1, & i = j = k \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

En utilisant l'opérateur *svec* susmentionné, on retrouve le résultat suivant dans l'algorithme (4) notamment pour la matrice \mathbf{A}_2^s :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_2^s)^T \cdot svec(X) &= [\langle svec(A_1), svec(X) \rangle, \dots, \langle svec(A_n), svec(X) \rangle] \\ &= [(svec(A_1))^T \cdot svec(X), \dots, (svec(A_n))^T \cdot svec(X)] \end{aligned} \quad (5)$$

Le package **sdpt3r** dans \mathbb{R} contient la fonction **sqlp** qui prend comme argument les matrices du programme (4) à savoir \mathbf{A}^s , \mathbf{A}^q , C , b ... Cette fonction peut même prendre une condition initiale X_0 et e_0^* (pour le vecteur e^*) pour converger rapidement vers la solution et tendre vers le minimum le plus proche souhaité au cas où la fonction admet des minimums locaux (fonction convexe). Les solutions qui en découlent sont respectivement *pobj* qui est équivalent à e_0 , et X qui est une liste composée de $X[1]$ qui est la matrice de corrélation optimale X^* et $X[2]$ qui est e^* . L'article [Rah18] donne plus de détails et de précisions de la fonction **sqlp**.

De plus, il faut un choix prudent des matrices de contraintes \mathbf{A}^s , \mathbf{A}^q vu qu'en amont la fonction **sqlp** fait des opérations pareilles que dans l'équation (5).

Annexe I : Test de cohérence des prix des indices financiers et instruments dérivés

Afin d'illustrer les résultats obtenus dans les tests de passage de niveau 95% des prix des indices financiers et instruments dérivés (Chapitre 8), on a tracé les bandes de confiance de niveau 95% construites à partir de la projection des scénarios économiques du GSE risque-neutre Moody's. Nous nous contenterons d'illustrer l'impact d'optimisation de la matrice de corrélation des browniens et l'usage de l'outil Moody's sur lesdites bandes vu le rapprochement entre les résultats utilisant l'algorithme de Higham et l'outils de Moody's.

Tests de martingalité(Détail du tableau 8.3 du chapitre 8) :

- Cas du prix de l'obligation ZC :

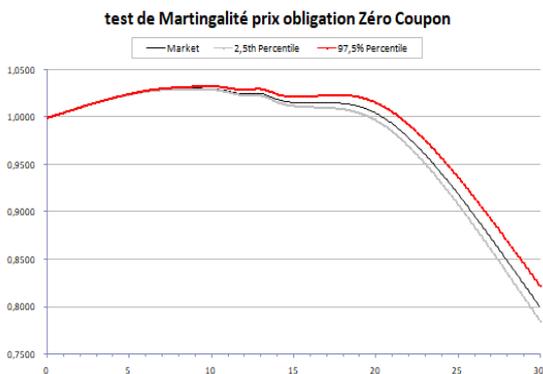


Fig. 11.9 – Test de martingalité au niveau 95% du prix de l'obligation ZC à chaque maturité T avant optimisation.

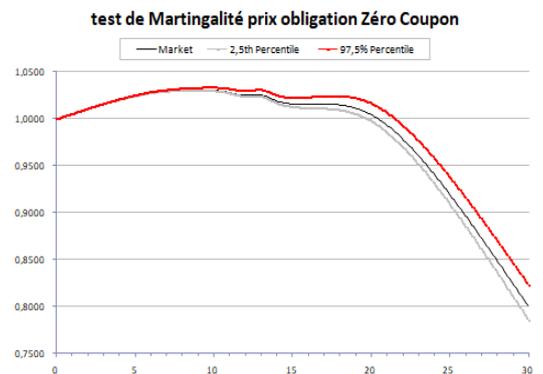


Fig. 11.10 – Test de martingalité au niveau 95% du prix de l'obligation ZC à chaque maturité T après optimisation.

- Cas du prix CAC40 :

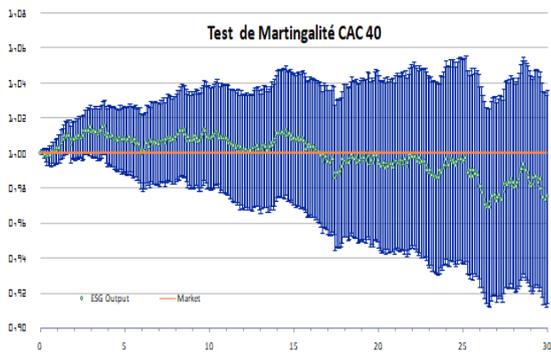


Fig. 11.11 – Test de martingalité au niveau 95% du CAC40 à chaque pas de temps avant optimisation.

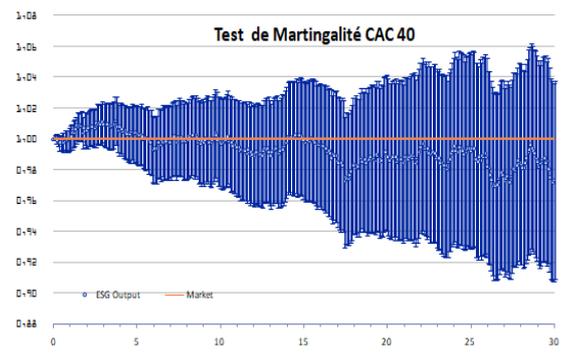


Fig. 11.12 – Test de martingalité au niveau 95% du CAC40 à chaque pas de temps après optimisation.

- Cas du prix Eurostoxx50 :

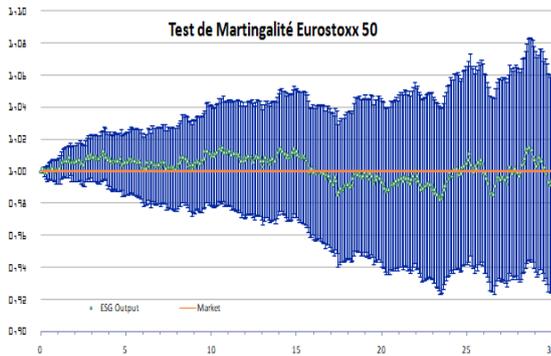


Fig. 11.13 – Test de martingalité au niveau 95% de l'Eurostoxx50 à chaque pas de temps avant optimisation.

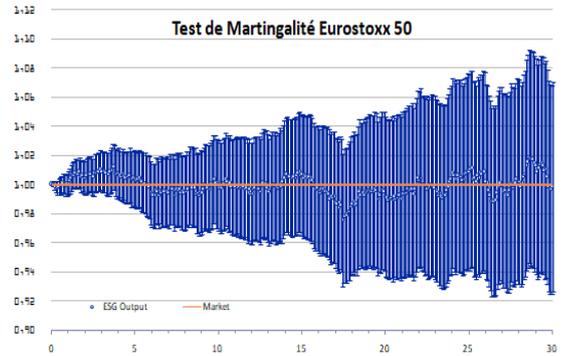


Fig. 11.14 – Test de martingalité au niveau 95% de l'Eurostoxx50 à chaque pas de temps après optimisation.

- Cas du prix de l'indice Immobilier :

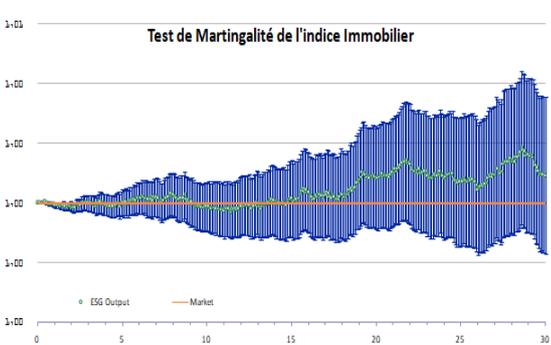


Fig. 11.15 – Test de martingalité au niveau 95% de l'indice immobilier à chaque pas de temps avant optimisation.

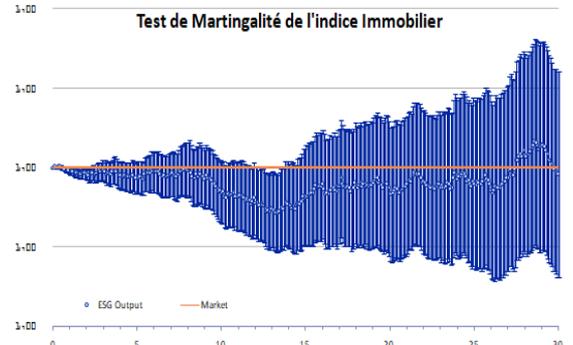


Fig. 11.16 – Test de martingalité au niveau 95% de l'indice immobilier à chaque pas de temps après optimisation.

On peut bien remarquer que le raisonnement pour les indices financiers (hors Obligation ZC) est fait en base unitaire vu que le prix de marché est égal à 1 tout au long de l'horizon de projection. Ceci dit que le GSE risque-neutre Moody's modélise plutôt le rapport $\frac{\hat{P}_t}{P_0}$ pour compatibilité avec le format de l'entrée du Modèle ALM de Sogecap et tirer directement les trajectoires des rendements desdits indices financiers.

Tests de Market-Consistency (Détail du tableau 8.6 du chapitre 8), Actifs contingents à la monnaie :

- Cas de la volatilité implicite du call CAC40 :

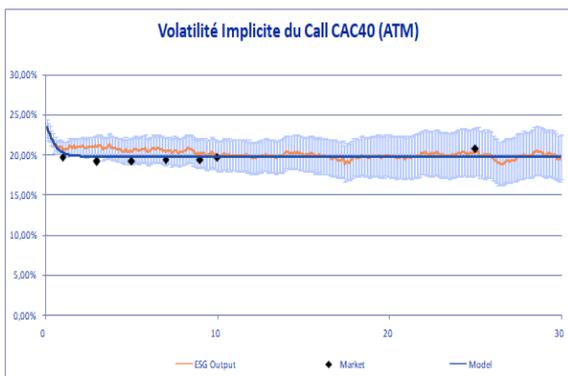


Fig. 11.17 – Test de Market-Consistency au niveau 95% des volatilités implicites du Call CAC40 ATM à chaque pas de temps avant optimisation.

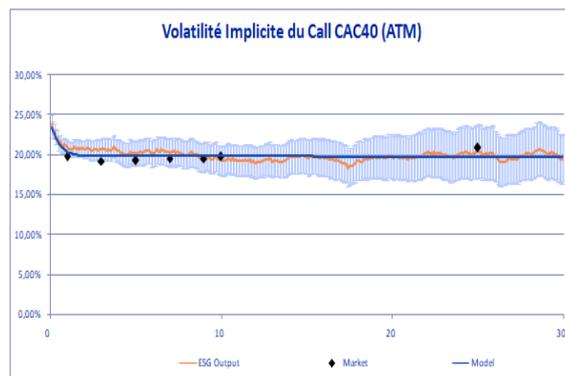


Fig. 11.18 – Test de Market-Consistency au niveau 95% des volatilités implicites du Call CAC40 ATM à chaque pas de temps après optimisation.

- Cas de la volatilité implicite du call Eurostoxx50 :

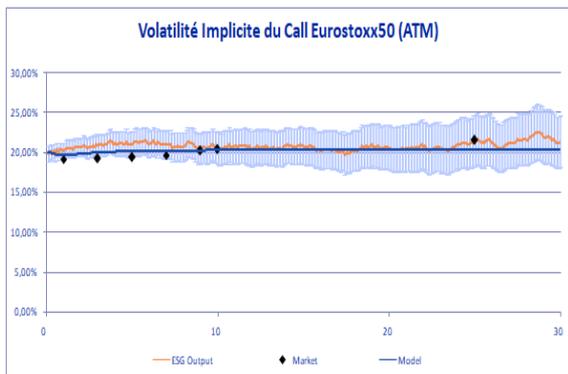


Fig. 11.19 – Test de Market-Consistency au niveau 95% des volatilités implicites du Call Eurostoxx50 ATM à chaque pas de temps avant optimisation.

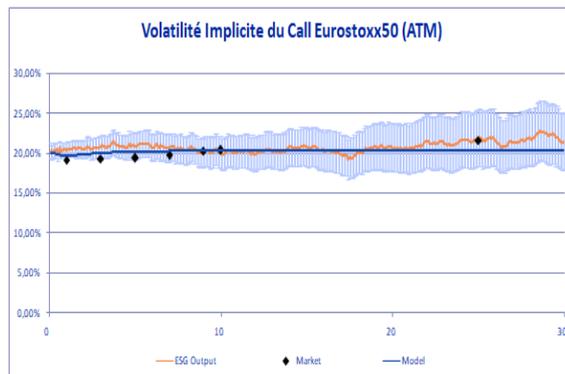


Fig. 11.20 – Test de Market-Consistency au niveau 95% des volatilités implicites du Call Eurostoxx50 ATM à chaque pas de temps après optimisation.

- Cas de la volatilité implicite du Swaption Euro :

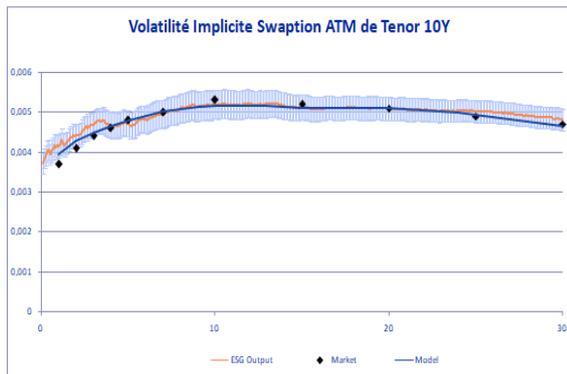


Fig. 11.21 – *Test de Market-Consistency au niveau 95% des volatilités implicites du Swaption Euro ATM de tenor 10 ans à chaque pas de temps avant optimisation.*

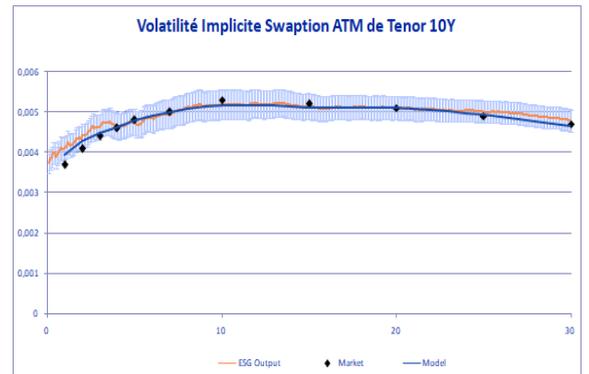


Fig. 11.22 – *Test de Market-Consistency au niveau 95% des volatilités implicites du Swaption Euro ATM de tenor 10 ans à chaque pas de temps après optimisation.*

Il est à noter que dans les 6 graphes des tests market-Consistency, nous nous intéressons plus à la comparaison entre les volatilités implicites de la sortie GSE risque-neutre Moody's et du marché, alors que celles Modèles représentent les volatilités implicites calibrées par les processus de diffusion modélisant les différents indices financiers sous-jacents des instruments dérivés.