

Mémoire présenté le 11 avril 2023

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Florian JOUX

Titre : Evaluations alternatives du SCR de Réserve en Responsabilité Civile
Médicale par Modèle Interne Partiel

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaires

Laurence MARTINI

Julie SURGET

signature

Entreprise :

Nom : SHAM groupe RELYENS

Signature :

Membres présents du jury de l'ISFA

Pierre RIBEREAU

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Christophe PASCAL

Signature :

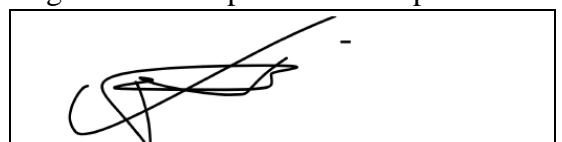
Invité :

Nom :

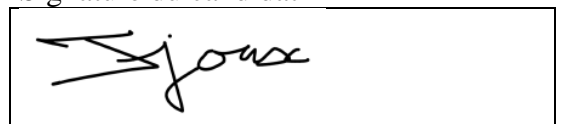
Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels** (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat





Mémoire d'Actuariat

Année 2022/2023

Evaluations alternatives du SCR Réserve en Responsabilité Civile Médicale par Modèle Interne Partiel



Tuteur entreprise
Christophe PASCAL

Tuteur pédagogique
Anne EYRAUD-LOISEL

Auteur
Florian JOUX

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier l'ensemble des collaborateurs du Département des Risques et Actuariat de l'entreprise SHAM qui ont suivi mon parcours, et avec lesquels j'ai partagé des échanges riches et conviviaux.

Plus particulièrement, j'adresse mes remerciements les plus chaleureux aux membres de l'équipe Risk Management et son manager, Monsieur Jérôme VUARIER, qui m'ont accueilli, transmis leur savoir-faire métiers et conseillé tout au long de mon stage suivi de mon alternance.

Je tiens à témoigner toute ma gratitude à mon Tuteur Entreprise, Monsieur Christophe PASCAL, pour son accompagnement et soutien sans faille. Ses qualités pédagogiques m'ont été précieuses pour mener à bien mon mémoire.

Je remercie également ma tutrice de l'ISFA, Madame Anne EYRAUD-LOISEL, pour son écoute et sa disponibilité, ainsi que l'ensemble de l'équipe enseignante de l'Institut avec laquelle j'ai pris plaisir à étudier durant ces trois années.

Enfin je remercie ma famille et mes proches qui m'ont soutenu dans le cadre de la rédaction de ce mémoire d'actuaire.

Mots Clefs

Responsabilité Civile Médicale, Solvabilité II, SCR, Risque de Réserve, Best Estimate, Provisionnement Non-Vie, Bootstrap, Munich Chain Ladder, Méthodes Bayésiennes, Modèle CRC, Méthodes MCMC

Résumé

Ce mémoire propose des méthodes d'évaluations alternatives portant sur le Risque de Réserve (ou SCR Réserve) de la mutuelle SHAM. L'entreprise est principalement spécialisée dans la Responsabilité Civile Médicale et doit détenir, dans le cadre de ses activités, des niveaux réglementaires de fonds propres. Ces derniers sont spécifiés dans la directive européenne Solvabilité 2 et permettent de couvrir, en ce qui concerne le Risque de Réserve, le risque de sous provisionnement du stock de sinistres à horizon 1 an. Ce module de risque est évalué par SHAM à l'aide d'un Modèle Interne Partiel pour le périmètre de la Responsabilité Civile France.

Ce Modèle Interne Partiel est entré en application au 1^{er} janvier 2016 et base son calcul sur des données de règlements. Or les pratiques de marché retiennent plus couramment les charges sinistres pour l'évaluation du Risque de Réserve car contenant davantage d'informations. La charge est en effet constituée des règlements passés et de la provision pour sinistres à payer. Afin de permettre au Modèle Interne Partiel de continuer à refléter les risques de l'entreprise le plus fidèlement à la réalité (amélioration continue), les données de charges sont testées à la place des règlements, les méthodes de projection et éléments d'ajustements ont été adaptés.

Une première catégorie de scénarii abordée dans ce mémoire met en œuvre le modèle de Munich Chain Ladder couplé au Bootstrap, et présente l'avantage d'être très proche du cadre de modélisation du Modèle Interne Partiel initial en termes de méthodologie. Puis une approche alternative plus novatrice, basée sur la logique Bayésienne, est développée à travers le modèle CRC. A l'issue des simulations, nous avons obtenu des montants de Risque de Réserve, utilisant les charges sinistres, sensiblement inférieurs comparativement aux montants actuels avec règlements. Ainsi ces résultats confortent notre modèle initial règlements qui apparait comme plus prudent.

Keywords

Civil Medical Liability, Solvency II, SCR, Capital Reserve, Best Estimate, Macrolevel Reserving Methods in Non-Life Insurance, Bootstrap, Munich Chain Ladder, Stochastic loss reserving, Bayesian MCMC models

Abstract

SHAM is a mutual insurance company specialized in medical civil liability. The Solvency II Directive requires insurance companies to calculate SCRs, corresponding to regulatory levels of capital to be held in the context of their insurance activities. Medical liability is a non-life insurance activity, for which a non-life SCR must be assessed. This SCR integrates risk sub-modules, in particular those related to provisioning such as the Risk of Reserves which reflects a poor estimate of the insurer's technical provisions. This risk module is calculated by SHAM using a Partial Internal Model on the scope of Civil Liability France.

The following pages develop alternative methods on the Risk of Reserves Civil Liability France. The current model applies to a triangle of payments for the assessment of this risk. The goal of this paper will be to implement new methods based on a triangle of incurred claims (including past settlements and an estimate of unpaid liabilities) in order to integrate more information into our result.

A first category of scenarios addressed in this thesis implements the Munich Chain Ladder model coupled with Bootstrap, and is very close to the modeling framework of the initial Partial Internal Model in terms of methodology. An alternative approach, based on Bayesian statistics, is developed through the CRC model. At the end of the simulations, we obtained the amounts of Reserve Risk, using incurred claims data, lower compared to the current amounts with paid claims data. These results therefore confirm our initial model, which appears to be more cautious.

Table des matières

Introduction	8
Partie 1 – Généralités et éléments de contexte	10
1.1 L'activité de Responsabilité Civile Médicale de l'entreprise SHAM	10
1.1.1 Les spécificités de la Responsabilité Civile Médicale	10
1.1.2 Le déclenchement de la garantie en RC Médicale	12
1.2 La réglementation en assurance	14
1.2.1 Dates clefs pour la réglementation européenne des organismes d'assurance	14
1.2.2 Le référentiel européen SOLVABILITE 2	14
1.3 Les principales provisions impactant la RC Médicale périmètre France	17
1.3.1 Les provisions en vision comptable	17
1.3.2 Le modèle BE sophistiqué pour l'évaluation des provisions en vision Solvabilité2	19
1.3.3 L'évaluation nette de réassurance	19
1.4 La logique du Modèle Interne Partiel de SHAM.....	22
1.4.1 Le périmètre du MIP SHAM	22
1.4.2 La formule Risque de Réserve par formule standard pour la branche RC	24
1.4.3 Le Risque de Réserve vu par le MIP SHAM	25
1.4.4 Le calcul du Risque de Réserve en pratique	27
Partie 2 – Cadre théorique pour l'évaluation du Risque de Réserve	28
2.1 Modélisation du Risque de Réserve actuel	30
2.1.1 Le modèle de Chain Ladder	30
2.1.2 Calcul des éléments N+1	32
2.2 Modélisation du Risque de Réserve sur triangle de charges	36
2.2.1 Le modèle de MACK.....	36
2.2.2 Le modèle de Munich Chain Ladder.....	39
2.2.3 Spécificités associées au Risque de Réserve avec charges	46
2.3 Les méthodes Bayésiennes	49
2.3.1 La logique Bayésienne	49
2.3.2 Le modèle CRC en théorie	51
Partie 3 – Application au portefeuille de SHAM	54
3.1 Définition du scénario initial et vérification des hypothèses.....	55
3.2 Evaluation du SCR Réserve avec un triangle de charges comptables.....	63
3.2.1 Evaluation de la charge brute non chargée non ajustée	63
3.2.2 Evaluation de la charge nette de réassurance.....	66

3.2.3 Evaluation sur triangle de provisions reconstituées.....	69
3.3 Evaluation du SCR Réserve avec des provisions en vision BE	71
3.3.1 SCR Réserve sur triangle onze ans méthodologie actuelle règlements	72
3.3.2 SCR Réserve sur triangle onze ans nouvelle méthodologie charges	73
3.4 Mise en œuvre des techniques bayésiennes.....	76
3.4.1 La méthode CRC en pratique.....	76
Conclusion.....	79
Table des figures.....	81
Bibliographie.....	83
Annexes	84
A.1 Caractère indépendant et identiquement distribué des données rééchantillonnées (Bootstrap).....	84
A.2 Hypothèses de Munich Chain Ladder sur triangles réduits à 11 années	87

Introduction

La réglementation Solvabilité 2, encadrant le secteur de l'assurance, impose aux organismes d'assurance de disposer de fonds nécessaires sur un horizon d'un an afin de minimiser leur risque de ruine. Ces niveaux réglementaires de fonds propres sont appelés Solvency Capital Requirement et reflètent le niveau de risque pris par les assureurs dans le cadre de leurs activités. La réglementation met à leur disposition la formule standard pour évaluer ces montants réglementaires, et est commune à l'ensemble des acteurs du marché. Or cette dernière s'appuie sur des hypothèses fortes qui ne sont pas systématiquement vérifiées pour chaque structure d'assurance.

Pour pallier ces limites, les assureurs peuvent utiliser des méthodes undertaking specific parameter (USP) qui leur permettent de recalibrer le paramètre de volatilité de la formule standard en se basant sur leur propre historique de données. Mais les assureurs peuvent souhaiter s'affranchir totalement de la formule standard, dans ce cas ils peuvent recourir à un modèle interne développé et mis en place au sein de leur structure. Ce modèle interne est dit « total » quand son périmètre impacte tous les risques auxquels l'entreprise est exposée. Le modèle interne est dit « partiel » si une partie des risques continue à être modélisée par la formule standard ou une méthode USP. Enfin quel que soit la catégorie de modèle interne, celui-ci nécessite une homologation par l'autorité de contrôle.

La mutuelle d'assurance SHAM a été fondée en 1927 et officie en France, Italie, Espagne et plus récemment en Allemagne. Ses activités d'assurance concernent principalement la Responsabilité Civile Médicale, pour laquelle nous constatons un développement long des sinistres. La couverture RC Médicale assure les établissements et les professionnels de santé contre les conséquences pécuniaires de la mise en cause de leur responsabilité dans l'exercice de leur activité. Afin de refléter ses risques de façon plus précises, la mutuelle a développé son propre Modèle Interne Partiel (MIP) sur le périmètre Risque de Primes et Réserve RC France. Ce dernier a obtenu l'approbation de l'autorité de contrôle prudentiel et de résolution (ACPR) et est entré en application en 2016.

La Directive Solvabilité 2 imposent également que les entreprises d'assurance et de réassurance mettent en place une politique écrite relative à leur Modèle Interne Partiel (MIP), faisant l'objet d'un réexamen interne régulier. Dans celle-ci figure notamment :

- les particularités de SHAM, l'objectif et le périmètre du MIP,
- la politique de changement de modèle et fréquence de mise à jour,
- les principes du modèle, sa structure, les données utilisées et documentation,
- les points forts du modèle, ses limites et les plans d'action.

Le Risque de Réserve (ou SCR Réserve) modélisé par le MIP de SHAM pour la RC Médicale France se base actuellement sur des données de règlements. Dans le cadre de l'amélioration continue du modèle et de la comparabilité avec des méthodologies et pratiques de marchés rependues, nous proposons une approche alternative consistant à utiliser des données de charges sinistres pour l'évaluation du Risque de Réserve de l'entreprise. Cette révision de modèle fait l'objet de ce mémoire et les nouvelles méthodologies développées et testées seront présentées dans la suite du document.

La problématique retenue est la suivante : l'actuelle méthode d'évaluation du Risque de Réserve du MIP de SHAM est-elle prudente par rapport aux pratiques de marché consistant à évaluer ce risque à partir d'un triangle de charges sinistres ?

De manière concrète comment adapter nos hypothèses et méthodologies actuelles utilisées sur nos données de règlements et les adapter à nos données de charges ?

La première partie du mémoire portera sur la présentation du contexte de l'étude. Nous définirons la Responsabilité Civile Médicale, les différents risques associés auxquels l'entreprise est exposée donnant lieu aux calculs de SCR. Les spécificités de la RC Médicale seront abordées, conduisant SHAM à se doter d'une modélisation plus fine à travers son Modèle Interne Partiel. Les formules spécifiques au MIP du Risque de Réserve seront présentées ainsi que les fondements théoriques qui lui sont associés.

La seconde partie s'attardera sur la mise en œuvre et outils théoriques manipulés dans le cadre du MIP. Nous présenterons tout d'abord le modèle actuel, identifierons les aspects devant être adaptés dans notre nouvelle évaluation basée sur les charges des sinistres. La suite de la section sera consacrée à la présentation des nouvelles approches de modélisation visant à répondre aux limites soulevées dans le modèle actuel.

La dernière partie permettra de visualiser les résultats¹ en pratique sur nos données à partir de nos différents modèles. L'accent sera mis sur la comparaison des résultats du modèle actuel avec les nouvelles méthodes alternatives. Les jeux de données testés, issus de la clôture du 31/12/2021, permettront de mettre en œuvre différents scénarios et comparer les résultats obtenus. Nous prendrons également du recul sur les différentes approches afin de dégager des axes d'améliorations et perspectives pour le futur.

Table des abréviations	
AIB	Actuary In The Box, méthodologie développée par SHAM
BE	Sous-entendu provisions Best Estimate
Charge ou Coût	Fait référence à la charge des sinistres, composée des règlements passés et de la provision pour sinistres à payer
CL	Relatif au modèle de Chain Ladder
IC	Intervalle de confiance
IBNR	Famille de Provisions regroupant les IBNER et les IBNYR
IBNER	Provisions sur sinistre réclamé mais non suffisamment provisionné
IBNYR	Provisions sur sinistre survenu mais non encore réclamé
MIP	Modèle Interne Partiel
P/I	Ratio des règlements cumulés sur la charge des sinistres
PSAP	Provisions pour sinistres à payer
QP	Traité de réassurance Quote Part
RC	Responsabilité Civile
S/P	Ratio sinistre / prime
SCR Réserve	Montant de capital requis, aussi appelé Risque de Réserve
SHAM	Société Hospitalière d'Assurances Mutuelles (entreprise d'accueil)
SL	Traité de réassurance Stop Loss
XS	Traité de réassurance Excédant de Sinistres

¹ Par souci de confidentialité, les résultats présentés dans ce mémoire ont été modifiés et reflètent partiellement la réalité de l'entreprise.

Partie 1 – Généralités et éléments de contexte

1.1 L'activité de Responsabilité Civile Médicale de l'entreprise SHAM

SHAM, acronyme de « Société Hospitalière d'Assurance Mutuelle », est une société d'assurance mutuelle spécialisée dans l'assurance et le management des risques des acteurs de la santé. Son activité principale concerne la Responsabilité Civile Médicale, qui constitue une couverture juridique devenue obligatoire depuis la loi du 4 mars 2002 relative aux droits des malades et à la qualité du système de soins (article L1142-2 du code de la santé public). La Responsabilité Civile Médicale doit être souscrite par les établissements et professionnels de santé afin de réparer financièrement les dommages corporels ou immatériels causés à leurs patients. Les acteurs concernés sont :

- les établissements de santé, publics comme privés,
- les professionnels et praticiens exerçant à titre libéral,
- les producteurs, les fournisseurs et exploitants de produits de santé.

Selon l'arrêt Mercier de 1936, la relation liant le patient et l'établissement de santé ou praticien est d'ordre contractuel. Selon ce même arrêt, le praticien détient une obligation de moyen et non de résultat : il doit tout mettre en œuvre pour atteindre le but initial recherché mais n'est pas garant de la réussite de tous ses actes. Ainsi la RC médicale s'entend au sens de régime de responsabilité pour faute.

Le vocabulaire juridique associé aux régimes de responsabilité pour faute

L'indemnisation du sinistre est conditionnée par la présence des trois éléments suivants :

- L'existence de la faute, définie par le Code Civil comme une action volontaire ou non qui porte atteinte au droit d'autrui.
- La matérialisation du dommage sur lequel va porter l'indemnisation de l'assureur.
- Le fait générateur ou fait dommageable faisant le lien entre la faute et le dommage, autrement dit l'activité à l'origine du dommage.

1.1.1 Les spécificités de la Responsabilité Civile Médicale

La RC Médicale est un risque présentant un développement long, les fautes médicales commises pouvant entraîner de lourdes conséquences et durables. Les montants des sinistres sont parfois très onéreux, et il arrive qu'un même fait générateur soit à l'origine d'une succession de réclamations. Nous recensons dans notre historique plusieurs vagues de ces sinistres plus atypiques :

- Les sinistres de sang

Ces sinistres font références aux transfusions contaminantes qui ont été réalisées avant 1992, à une époque où le virus de l'hépatite C (VHC) était indétectable dans le sang des donneurs. La situation des Centres de transfusion sanguine à la fin des années 80 a rendu inassurable leur Responsabilité Civile. Les polices d'assurance souscrites individuellement par chacun d'entre eux ont été résiliées et les anciens Centres de transfusion sanguine ont disparu au profit d'un opérateur unique, devenu l'Etablissement Français du Sang (EFS), qui a repris leurs droits et obligations.

- Les sinistres Epinal

Composé de 5 cohortes, ces séries sont liées à l'affaire des surirradiés de l'hôpital d'Épinal en France : à la suite d'erreurs informatiques commises dans le suivi des traitements des patients atteints de cancer au début des années 2000, une mauvaise utilisation de la radiothérapie a été faite pour une partie des patients, ainsi exposés à des niveaux de radiation bien supérieurs à la prescription.

A présent intéressons-nous au principe du contrat d'assurance qui s'applique pour SHAM.

Le cadre général en assurance

La juridiction définit le contrat d'assurance comme un contrat aléatoire qui lie les parties prenantes suivantes :

- L'assureur qui s'engage à payer les sinistres déclarés.
- Le souscripteur qui approuve le contrat et verse les primes d'assurance.
- Le bénéficiaire du contrat, la personne désignée par le souscripteur recevant les prestations garanties par le contrat.
- L'assuré sur lequel repose le risque défini par le contrat.

Les obligations du contrat d'assurance sont exécutées s'il y a réalisation de l'aléa et survenance d'un sinistre. L'assuré est ensuite tenu de déclarer son sinistre auprès de l'assureur afin que ce dernier puisse procéder à son indemnisation.

La frontière des contrats

Conformément à l'article 18 des actes délégués, la frontière des contrats est définie comme étant la première date à laquelle l'organisme peut de manière unilatérale réviser la prime, la rejeter ou résilier le contrat.

La quasi-totalité des contrats proposés par SHAM sur le périmètre France sont des contrats à faculté de résiliation annuelle disposant d'une couverture d'assurance basée sur l'année civile. Ainsi, ces contrats sont reconduits au premier janvier, sauf dénonciation par l'une ou l'autre des parties du contrat avec un préavis allant d'un à trois mois. Au 31 décembre, SHAM est donc engagée sur l'ensemble de ces contrats si aucune dénonciation n'a eu lieu.

1.1.2 Le déclenchement de la garantie en RC Médicale

Le contrat RC médical s'articule autour d'une garantie déclenchée en base réclamation. Cette spécificité a été rendue obligatoire après 2002 à travers la loi About du 30 décembre de cette même année. Auparavant, le déclencheur de la garantie RC Médicale n'était pas légalement défini et le choix était laissé aux assureurs (SHAM ayant opté pour une base survenance avant 2002).

La charge de la preuve du sinistre (mise en évidence du dommage, de la faute commise et du fait générateur qui les relient) incombe à l'assuré. Lorsque ces différents éléments sont démontrés, l'assuré se présente à SHAM pour réclamer une indemnisation liée au dommage dont il a été victime. La réparation du préjudice a alors lieu dans les cas suivants :

- Le dommage s'est produit pendant la période de couverture de garantie et réclamé pendant que le contrat est toujours en cours (voir schéma ci-dessous).



Figure 1 : Schéma de déclaration du sinistre pour un unique contrat

- Le dommage s'est produit avant la souscription de la garantie (reprise du passé) et n'était pas connu avant la signature du contrat.

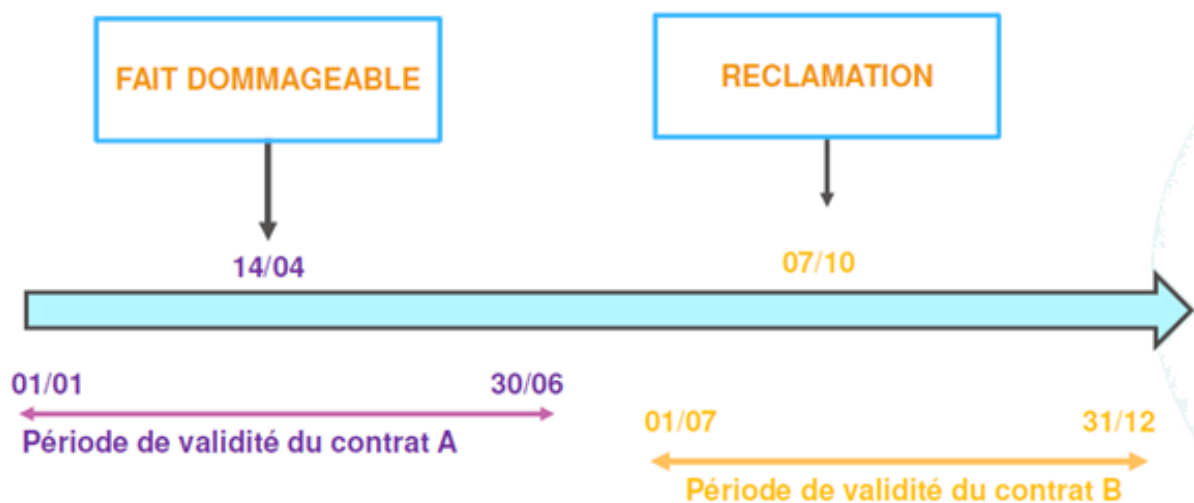


Figure 2 : Schéma de déclaration du sinistre après résiliation de contrat

Dans la figure précédente, avant d'indemniser le sinistre du 14/04, l'assureur B doit être certain de la bonne foi de l'assuré, en particulier qu'il ignorait l'existence du dommage relatif à la période du contrat précédent au moment de la souscription de son nouveau contrat. Dans le cas où cette condition n'est pas valide, le sinistre peut être pris en charge par le précédent assureur à travers une clause particulière nommée « subséquente ».

Définie à l'article L251.2 du code des assurances en 2002, la garantie subséquente correspond à un délai de prise en charge supplémentaire des sinistres après résiliation du contrat. La mise en œuvre de la garantie est conditionnée par un fait générateur du sinistre qui doit remonter à la période de validité du contrat RC Médical.

Le passage de la base survenance vers la base réclamation légitime la présence de cette clause : la comptabilisation en survenance de SHAM avant 2002 permettait la prise en charge de tous les sinistres dont le fait générateur appartenait à la période de validité du contrat. A présent, les sinistres sont rattachés à l'exercice auquel ils sont réclamés.

La durée de la garantie subséquente est de 5 ans pour les établissements de santé publics et privés (et praticiens salariés de ces établissements), et de 10 ans dans le cas d'un praticien libéral ayant cessé son activité.



Figure 3 : Frise temporelle de la garantie subséquente

La période de subséquente du schéma est comprise entre 5 et 10 ans

En pratique, les sinistres au titre de la garantie subséquente relèvent du SCR primes exception faite des « vieux » contrats avant 2002 : en effet, les sinistres tardifs au titre d'un fait générateur survenu pendant la période d'application de la garantie quelle que soit la date de réclamation de la victime, pour lesdits contrats relèvent du Risque de réserve : cela ne concerne que des sinistres survenus mais pas encore déclarés (IBNYR). Le poids de ces sinistres « subséquents » survenus avant 2002 est très faible (représente environ 0,1% des provisions).

1.2 La réglementation en assurance

Le secteur de l'assurance est un domaine fortement réglementé. Le mécanisme d'inversion du cycle de production (mécanisme par lequel l'assureur collecte les primes d'assurance de ses assurés sans que ce dernier ait connaissance avec exactitude du coût réel des contrats - donnée accessible a posteriori), les sommes en jeu et le besoin de transparence légitiment la présence d'une réglementation pour les assureurs. Les assureurs doivent être en mesure d'honorer dans le temps leurs engagements envers leurs assurés et en toute transparence.

1.2.1 Dates clés pour la réglementation européenne des organismes d'assurance

Les mécanismes de couverture des risques au niveau européen ont été formalisés dans plusieurs directives à partir des années 1970, mais ont évolué afin d'intégrer les évolutions majeures qui ont impacté le secteur de l'assurance tels que la mondialisation et financiarisation du secteur de l'assurance, l'émergence de nouveaux risques tels que les catastrophes naturelles.

Voici les principales dates importantes en matière de réglementation européenne :



Figure 4 : Chronologie de la réglementation européenne pour le secteur de l'assurance

- 1973 : première directive sur l'assurance non-vie suivie trois ans plus tard par l'assurance vie
- 2009 : directive cadre de Solvabilité 2
- 2010-2014 : normes techniques d'exécution de l'EIOPA (préconisations pour les assureurs)
- 2014 : règlement délégué de Solvabilité 2
- 2016 : transposition dans le droit et entrée en vigueur de Solvabilité 2

1.2.2 Le référentiel européen SOLVABILITE 2

Le référentiel Solvabilité 2 est entré en application le 1^{er} janvier 2016 et intègre plusieurs catégories d'exigences regroupées sous l'appellation des « trois piliers de Solvabilité 2 » :



Figure 5 : Les trois piliers de Solvabilité 2

Solvabilité 2 se distingue de son prédécesseur par une nouvelle catégorie d'exigences dites « qualitatives » : elle instaure notamment la nomination de personnes responsables de fonctions clefs dans le but d'instaurer un suivi tout au long du processus de production de l'assureur et améliorer la transparence des acteurs du marché.

Dans ce mémoire nous délimitons notre présentation au pilier 1, qui a trait aux nouvelles modalités de calcul et d'évaluation des provisions techniques et fonds propres.

La transition est résumée schématiquement ci-dessous :

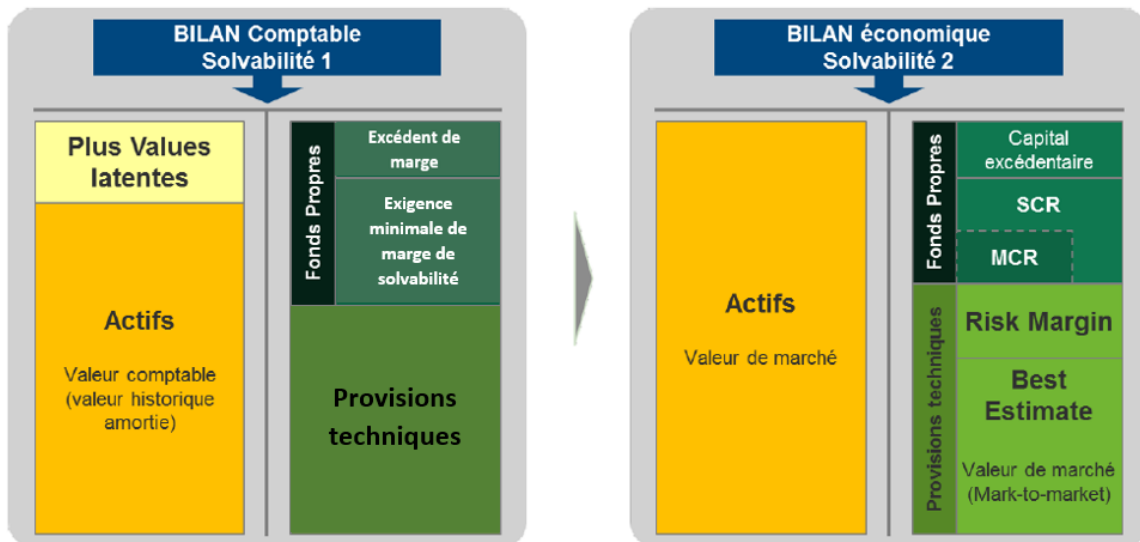


Figure 6 : La vision du bilan sous Solvabilité 1 vers Solvabilité 2

La vision de la partie « actif » du bilan a évolué, passant d'une comptabilisation des placements en valeur comptable vers une comptabilisation en valeur économique.

Au niveau de la partie « passif » du bilan, les fonds propres sous Solvabilité 2 doivent permettre de faire face aux risques réels dans 99,5% des cas sur un horizon d'un an.

Le Solvency Capital Requirement (SCR) correspond à une Value at Risk à horizon d'un an sur les fonds propres de niveau $q = 99,5\%$. La Value at Risk est une mesure de risque qui s'écrit : $VaR_{1-q}(X) = \text{Quantile}_q = F_X^{-1}(q) = \inf(x \in \mathbb{R} \text{ tel que } F_X(x) \geq q)$, où X désigne une variable aléatoire.

Exemple pour une variable aléatoire $X=L_t$ modélisant les pertes. Notons $f_L(x)$ la fonction des pertes et $F_L(x)$ la fonction de répartition de L_t

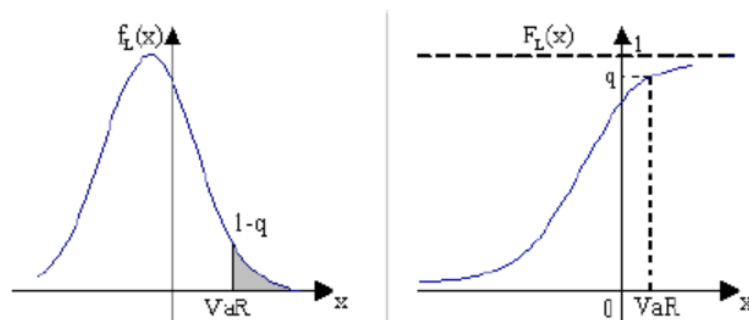


Figure 7 : Visualisation graphique d'une Value at Risk

Les SCR sont calculés par module de risque. La réglementation fournit la formule standard et des matrices de corrélation permettant l'agrégation des différents modules de risques entre eux.

Prenons l'exemple du SCR non-vie, l'évaluation est obtenue à l'aide de la formule suivante :

$$SCR_{\text{non-vie}} = \sqrt{\sum_{i,j} \text{Corr}_{i,j} * SCR_i * SCR_j}$$

Avec :

- SCR_i et SCR_j représentant les modules de risque i et j
- $\text{Corr}_{i,j}$ correspond aux coefficients de corrélation récapitulés dans la matrice suivante

i / j	Primes et Réserve en non-vie	Catastrophe en non-vie	Rachats / Cessation en non-vie
Primes et Réserve en non-vie	1	0,25	0
Catastrophe en non-vie	0,25	1	0
Rachats / Cessation en non-vie	0	0	1

Figure 8 : Matrice de corrélation des risques du sous-module souscription non-vie

Les autres postes de la partie fonds propres du bilan sont :

- Le Minimum Capital Requirement (MCR), un niveau de fond propre plancher que l'organisme doit détenir s'il souhaite poursuivre son activité. Ce montant est généralement exprimé en pourcentage du SCR.
- Le capital excédentaire, les fonds propres en excédent après calcul du SCR et MCR.

Bien qu'il soit théoriquement impossible d'aboutir à une situation économique où la ruine de l'assureur n'existe pas, les fonds propres requis (SCR) fournissent un cadre permettant de minimiser les chances que cette situation se produise. En respectant ces exigences, l'assureur s'expose à une probabilité de ruine au plus égale à 0,5% chaque année.

La seconde partie du passif est composée des provisions techniques assurant la couverture des engagements pris par l'assureur envers ses assurés. La réglementation Solvabilité 2 impose de les comptabiliser en vision Best Estimate, autrement dit elles doivent correspondre à la meilleure estimation possible de la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs. Elles sont basées sur des informations crédibles et des hypothèses réalistes faites par l'organisme d'assurance.

Une surcouche supplémentaire appelé Marge de Risque couvre les risques liés à l'écoulement des passifs sur la totalité de leur durée. Son montant doit permettre de payer le coût de transfert du portefeuille en cas de rachat ou transfert de celui-ci.

Nous allons à présent détailler dans une nouvelle section les différentes provisions qui impactent la Responsabilité Civile Médicale sur le périmètre France.

1.3 Les principales provisions impactant la RC Médicale périmètre France

1.3.1 Les provisions en vision comptable

Les provisions techniques sont en général constituées à la date de l'inventaire. Elles sont définies à l'article R331 du Code des Assurances et se déclinent en plusieurs catégories :

- La provision pour primes non acquise (PPNA) concerne une faible partie de nos contrats dont la période de couverture ne coïncide pas avec celle de l'exercice comptable. Pour ceux-ci, une partie des primes encaissées doivent être affectées sur l'exercice suivant afin de couvrir les risques sur cette nouvelle année. Ce premier type de provision a son importance pour le Risque de Primes mais n'interviendra pas dans le calcul du Risque de Réserve.
- La provision globale de gestion est composée de l'ensemble des charges de gestion des contrats non couvertes par les chargements sur primes. Cette provision intègre les frais de gestion des sinistres, les frais internes et externes de gestion financière et quelques autres frais d'administrations.
- La provision pour sinistres à payer (PSAP) correspond à « la valeur estimée des dépenses en frais et en principal, tant internes qu'externes, nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus (connus ou inconnus de l'assureur) et non payés ». En d'autres termes, il s'agit de la dette de la compagnie envers ses assurés sinistrés avant la date d'inventaire. La PSAP intègre une sous-catégorie de provision nommée IBNR (incurred but not reported) qui regroupe les provisions IBNER (incurred but not enough reserved) couvrant l'insuffisance de provisionnement des sinistres survenus et déclarés à la clôture comptable, et les provisions IBNYR (incurred but not yet reported) qui constitue une estimation du coût des sinistres survenus mais pas encore déclarés à la clôture.

L'évaluation de la provision pour sinistres à payer peut se faire par deux méthodes :

- Evaluation dossier/dossier, chaque sinistre est chiffré par le gestionnaire qui évalue le montant restant à payer. Il s'agit d'une méthode prospective.
- Evaluation statistique basée sur des modèles statistiques et un historique le plus grand possible. Les sinistres peuvent être de nature différente, ainsi les sinistres attritionnels (fréquence élevée, faible sévérité) et les sinistres graves (plus rare mais coûteux) sont traités à l'aide de méthodes statistiques différentes.

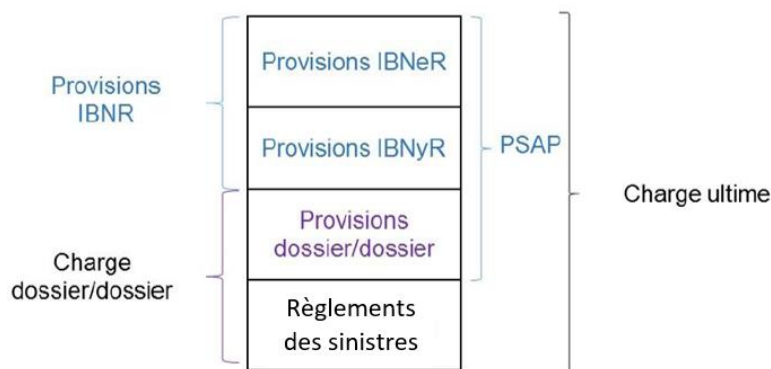


Figure 9 : Décomposition de la charge d'un sinistre

L'évaluation des IBNER par SHAM fait l'objet d'un module de calcul prenant notamment en compte les jurisprudences suivantes.

La jurisprudence « CPAM de Dunkerque » CE 25/06/2008

Cette jurisprudence impacte les nouvelles décisions administratives liquidant un préjudice corporel sur les points suivants :

- Le nombre de postes de préjudices corporels a été élargi. Cette nouvelle liste de poste correspond à la nomenclature Dintilhac (29 postes) contre 6 postes selon les jurisprudences administratives antérieures.

- Le montant accordé au titre de l'indemnisation du préjudice corporel a évolué : « le juge saisi d'un recours de la victime d'un dommage corporel doit, pour chacun des postes de préjudices patrimoniaux et personnels, déterminer le montant du préjudice en précisant la part qui a été réparée par des prestations de sécurité sociale et celle qui est demeurée à la charge de la victime ; qu'il lui appartient ensuite de fixer l'indemnité mise à la charge du ou des auteurs du dommage au titre du poste de préjudice en tenant compte, s'il a été décidé, du partage de responsabilité avec la victime ; que le juge doit allouer cette indemnité à la victime dans la limite de la part du poste de préjudice qui n'a pas été réparée par des prestations », arrêt CPAM de Dunkerque du 25 juin 2008.

En conséquence, cette nouvelle méthodologie du Conseil d'Etat a impacté le provisionnement des sinistres des assureurs ayant un fort contentieux administratif (c'est-à-dire pour les litiges impliquant une administration), cela concerne le patient et son établissement public de santé. Ce mode d'indemnisation permet à présent le remboursement intégral des tiers payeurs en cas de placement de victimes lourdement handicapées. Les coûts des sinistres ont dû être réévalués à la hausse. Les établissements privés et praticiens libéraux relevant de l'ordre judiciaire et non administratif ne sont pas impactés par cette jurisprudence.

La jurisprudence « arrêt du CE (conseil d'Etat) du 24 juillet 2019 : reconnaissance du préjudice professionnel de l'enfant handicapé »

Cette dernière est relative à la perte de gains professionnels futurs, faisant référence aux pertes prévisibles que la victime aurait perçus au cours de sa carrière professionnelle. Le conseil d'Etat a tranché en faveur de l'indemnisation des victimes de handicap présentant une inaptitude totale à un emploi des suites d'un préjudice corporel. L'indemnisation prendra effet à partir de la majorité de la victime à hauteur du salaire médian sous forme de rente. De plus comme précisé dans l'arrêt du conseil d'Etat, cette indemnisation est rétroactive et les victimes répondant aux critères de l'arrêt peuvent réclamer les indemnisations qu'elles étaient en droit de recevoir depuis leur majorité.

1.3.2 Le modèle BE sophistiqué pour l'évaluation des provisions en vision Solvabilité2

La provision pour sinistres à payer de SHAM en vision solvabilité 2 est évaluée par trois modèles statistiques, en fonction des segments suivants :

- un modèle pour les sinistres attritionnels dont le coût individuel du sinistre est en deçà du seuil de 400K€,
- un modèle pour les sinistres graves dont le coût individuel du sinistre excède 400K€,
- un modèle pour les sinistres graves IBNER.

Un modèle de projections des règlements (cash-flow) futurs est mis en œuvre pour ces trois catégories précédentes. Les montants projetés sont actualisés et traités de sorte à correspondre à la meilleure estimation possible de la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs (Best Estimate). Ces différentes projections sont ensuite agrégées, et réévalués à chaque fin d'exercice et constitue la provision Best Estimate. Ce modèle dans son ensemble a été baptisé modèle BE sophistiqué.

Lien avec le Risque de Réserve

Dans l'évaluation du Risque de Réserve, la maille de modélisation n'est pas la même que pour le BE sophistiqué : nous ne différencions pas les différentes catégories de sinistres au sein du triangle de données agrégées que nous utilisons. En effet, intégrer dans le Risque de Réserve cette distinction de sinistres présentée plus tôt obligerait le modèle à réaliser davantage de simulations, ce qui serait très chronophage (en temps de simulation et de développement) et matériellement impossible.

Afin de vérifier si le changement de maille de modélisation induit des résultats significativement différents, nous réalisons des comparaisons en moyenne et en écart-type entre les résultats du modèle BE sophistiqué et le BE recalculé dans le modèle du Risque de Réserve, notamment :

- une comparaison des provisions BE bruts et nets entre les deux modélisations,
- une comparaison des flux projetés entre les deux modèles par année de réclamation et par inventaire comptable.

Ce modèle directement agrégé est appelé BE MIP. En dépit des différences en termes de structure des modèles BE sophistiqué et MIP, la cohérence en termes de résultats a été démontrée.

Enfin SHAM dispose d'un programme de réassurance proportionnel et non proportionnel, les provisions étant évaluées à terme nettes de réassurance.

1.3.3 L'évaluation nette de réassurance

La nature du risque Responsabilités Civile se prête bien à la réassurance : son développement long pouvant conduire à des sinistres parfois très coûteux avec un potentiel important de sinistres sériels. Ainsi SHAM souscrit plusieurs traités de réassurance :

- deux traités de réassurance non proportionnels dont un traité Excédent de Sinistres (XS) et un Stop Loss (SL),
- un traité de réassurance proportionnel Quote-Part (QP).

Les traités non proportionnels

1) Le fonctionnement du traité XS consiste à définir, d'un commun accord entre réassureur et assureur, un montant de franchise appelée « priorité » et une portée qui correspond au niveau d'engagement maximum du réassureur par sinistre.

Pour chaque sinistre de montant noté (X_1, X_2, \dots, X_n) couvert pas le traité de réassurance XS, le montant du sinistre à la charge de l'assureur se calcule comme :

$$\text{Montant sinistre } i \text{ charge assureur} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i \leq \text{priorité} \\ \text{priorité} & \text{si } \text{priorité} \leq X_i \leq \text{priorité} + \text{portée} \\ X_i - \text{portée} & \text{si } \text{priorité} + \text{portée} \leq X_i \end{cases}$$

Cela revient à considérer la cession suivante sur le sinistre i :

$$\text{Montant sinistre } i \text{ cédé} = \begin{cases} 0 & \text{si } X_i \leq \text{priorité} \\ X_i - \text{priorité} & \text{si } \text{priorité} \leq X_i \leq \text{priorité} + \text{portée} \\ \text{portée} & \text{si } \text{priorité} + \text{portée} \leq X_i \end{cases}$$

Il existe des clauses particulières pouvant s'appliquer à l'XS telles que :

- La franchise aggregate, un montant global dont la cédante doit s'acquitter une seule fois à chaque nouvel exercice afin d'activer la couverture XS présentée ci-dessus.
- Le principe de reconstitution de garantie permettant au réassureur de désactiver la protection XS après son utilisation. Dans ce cas, le réassureur peut exiger de sa cédante le paiement d'une recharge (sous la forme d'une surprime) si elle souhaite réactiver sa protection XS. La reconstitution est dite limitée si le nombre de recharge possible est fini.

2) La seconde catégorie de traité non proportionnel concerne le Stop Loss (SL). Son fonctionnement est similaire à l'XS, à la différence qu'il protège un ratio sinistres payés sur primes collectées (S/P) pour l'exercice. Les éléments caractéristiques du contrat sont :

- $\text{priorité}^{\text{SL}}$: priorité du traité stop-loss, exprimée en % des cotisations brutes,
- $\text{portée}^{\text{SL}}$: portée du traité stop-loss, exprimée en % des cotisations brutes.

Ainsi le montant des sinistres restant à charge de l'assureur est :

$$\text{Montant total charge assureur} = \begin{cases} \sum_i^n X_i & \text{si } \frac{\sum_i^n X_i}{P} \leq \text{priorité}^{\text{SL}} \\ \text{priorité}^{\text{SL}} \times P & \text{si } \text{priorité}^{\text{SL}} \leq \frac{\sum_i^n X_i}{P} \leq \text{priorité}^{\text{SL}} + \text{portée}^{\text{SL}} \\ \sum_i^n X_i - [\text{portée}^{\text{SL}} \times P] & \text{si } \text{priorité}^{\text{SL}} + \text{portée}^{\text{SL}} \leq \frac{\sum_i^n X_i}{P} \end{cases}$$

Cela revient à considérer le montant de cession suivant :

$$\text{Montant total cédé} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\sum_i^n X_i}{P} \leq \text{priorité}^{\text{SL}} \\ \left(\frac{\sum_i^n X_i}{P} - \text{priorité}^{\text{SL}} \right) \times P & \text{si } \text{priorité}^{\text{SL}} \leq \frac{\sum_i^n X_i}{P} \leq \text{priorité}^{\text{SL}} + \text{portée}^{\text{SL}} \\ \text{portée}^{\text{SL}} \times P & \text{si } \text{priorité}^{\text{SL}} + \text{portée}^{\text{SL}} \leq \frac{\sum_i^n X_i}{P} \end{cases}$$

La formule simplifiée s'écrit :

$$\text{Cessions SL} = \min \left(\max \left(\frac{\sum_i^n X_i - \text{Montant total cd XS}}{P} - \text{priorité}^{\text{SL}}, 0 \right), \text{portée}^{\text{SL}} \right) \times P$$

Le traité proportionnel

Le traité QP est plus facile à mettre en œuvre que les précédents. L'assureur (la cédante) s'engage à céder un pourcentage de ses primes d'assurance collectées (appelé taux de cession) au réassureur, ce dernier s'engageant alors à indemniser ce même pourcentage de sinistres de la cédante.

Le taux de cession QP est susceptible de varier pour chaque exercice, ainsi cette réassurance est évaluée par exercice de réclamation.

1.4 La logique du Modèle Interne Partiel de SHAM

Depuis la mise en place des normes Solvabilité 2, il est apparu que la formule standard n'était pas adaptée au profil de risque de SHAM. Pour prendre en compte les spécificités liées à la RC Médicale, SHAM a alors décidé de se doter d'un Modèle Interne Partiel (MIP) sur ce segment pour le périmètre de la France uniquement. Ce dernier est en application depuis le 1^{er} janvier 2016, afin de coïncider avec l'entrée en vigueur de la norme Solvabilité 2.

1.4.1 Le périmètre du MIP SHAM

Les différents risques non-vie définis dans Solvabilité 2 auxquels SHAM est exposé sont les suivants :

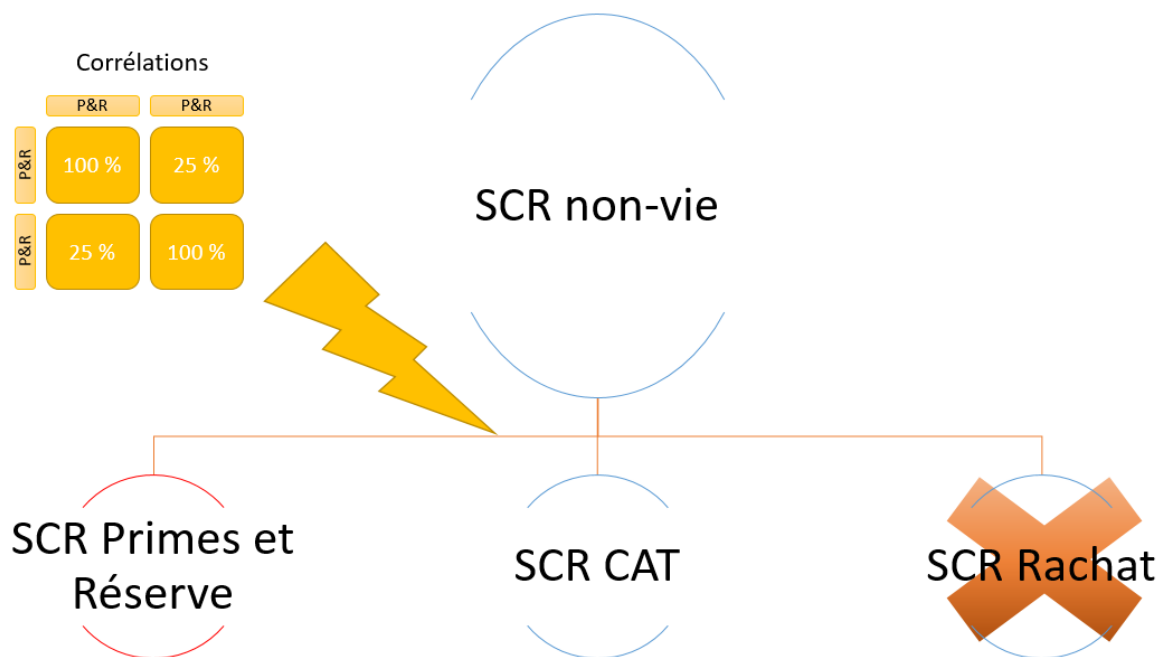


Figure 10 : Décomposition du SCR non-vie de SHAM

Le Risque de Primes et Réserve appréhende d'une part le risque que le coût des futurs sinistres soit supérieur aux primes perçues sur le nouvel exercice (Risque de Primes) et d'autre part le risque lié au sous provisionnement du stock de sinistres à horizon 1 an (Risque de Réserve).

Le Risque Catastrophe (CAT) est le risque d'occurrence d'évènements extrêmes ou irréguliers. Les sinistres de sang et le sinistre Epinal présentés plus tôt entre dans cette catégorie.

Le Risque de Rachat concerne le risque de cessation d'activité de l'entreprise. Dans le cas du mémoire, ce risque est considéré négligeable.

La sous décomposition du SCR Primes et Réserve est présentée ci-dessous :

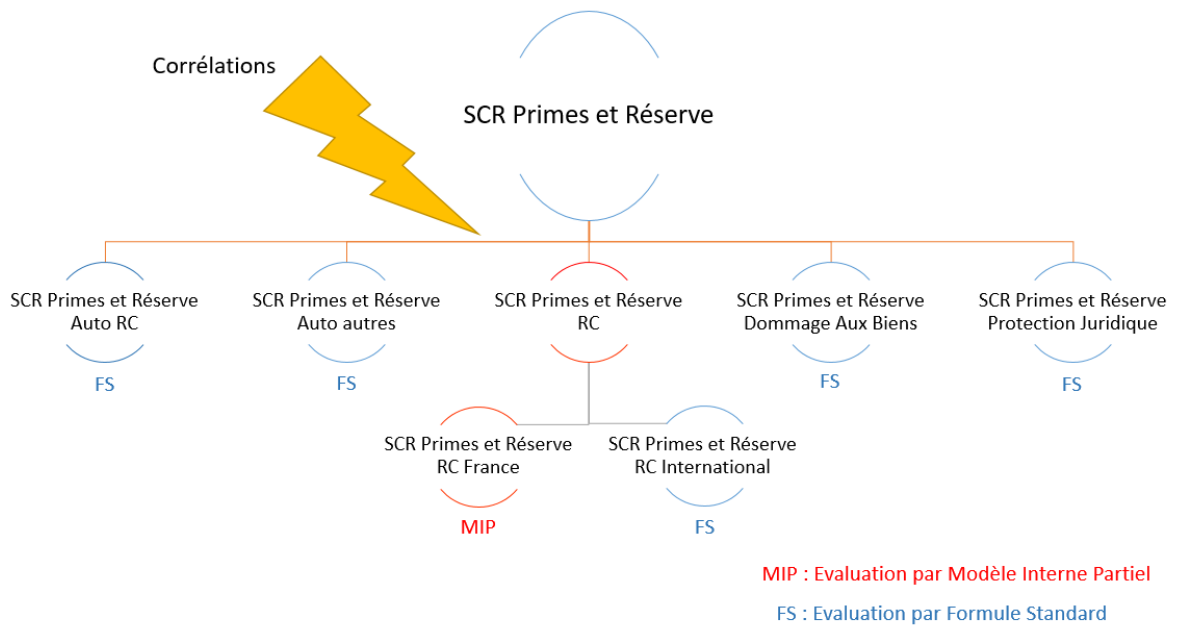


Figure 11 : Décomposition du SCR Primes et Réserve de SHAM

Les autres activités non-vie intégrées dans le module SCR Primes et Réserve hors RC Médicale concernent l'assurance automobile, dommage aux biens (DAB) et de la protection juridique (PJ). Si SHAM délivre une offre de produits très complète, la plus grosse part de son chiffre d'affaires reste constituée par la RC Médicale, et particulièrement la partie réalisée auprès des sociétaires français, qui représente 36% du chiffre d'affaires total en 2021.

Ainsi il a été convenu dans le MIP que seuls les risques relatifs aux garanties RC Médicale délivrées aux différentes entités françaises seraient intégrées. Les risques relatifs aux garanties délivrées aux sociétaires hors France (Italie – Espagne – Allemagne) sont traités en formule standard compte tenu des engagements en termes de provisions techniques sensiblement moins importants :

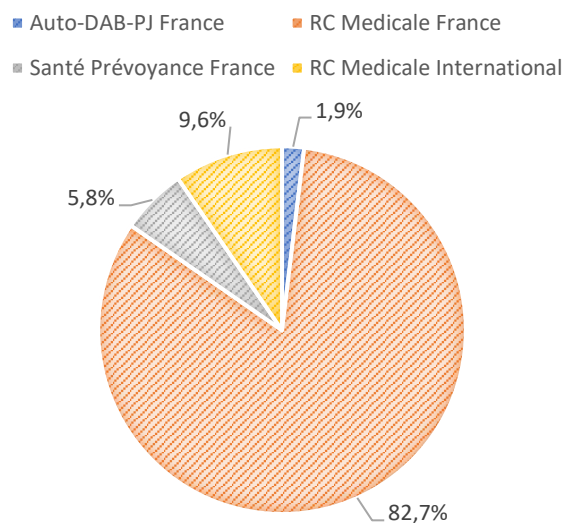


Figure 12 : Poids des provisions BE par branche d'activité en 2021

Le poids des provisions BE pour le périmètre RC Médicale France au 31/12/21 est très significatif. Cela s'explique notamment par la durée moyenne élevée de déroulement d'un sinistre en RC Médicale. La part du BE RC international augmente de façon croissante ces dernières années, mais en raison d'un historique encore insuffisant, la formule standard reste utilisée pour l'international.

1.4.2 La formule Risque de Réserve par formule standard pour la branche RC

Les actes délégués de 2015 ont établi la formule standard pour le Risque de Réserve suivante :

$$SCR_{nl\ res} = \rho(\sigma) \times V_{nl}$$

$$\text{où } \rho(\sigma) = \frac{\exp(q_{99,5\%} \times \sqrt{\ln(\sigma^2 + 1)})}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} - 1$$

avec $q_{99,5\%}$ le quantile à 99,5 % de la loi normale centrée réduite et $\sigma^2 = \frac{\text{variance}(V_{nl})}{\text{moy}(V_{nl})}$

Une hypothèse de log normalité faite sur la distribution du SCR nous permet de simplifier la formule précédente :

$$SCR_{nl\ prem\ res} = 3 \times \sigma_{nl} \times V_{nl}$$

V_{nl} représente la mesure de volume pour le Risque de Réserve

σ_{nl} désigne l'écart type du Risque de Réserve non-vie

Cet écart type est fourni par l'EIOPA par segment d'activité et est évalué $\sigma_{nl} = 11\%$ pour le Risque de Réserve sur le segment assurance de Responsabilité Civile.

La formule standard pour calcul du Risque de Réserve RC s'écrit :

$$SCR_{FS\ res} = 33\% \times \overline{BE^N}$$

Cette formule standard est en application sur le périmètre RC Médicale International mais n'a plus cours pour le périmètre France. En effet la politique écriture du MIP RC présente et justifie l'inadéquation de la formule standard sur les points suivants :

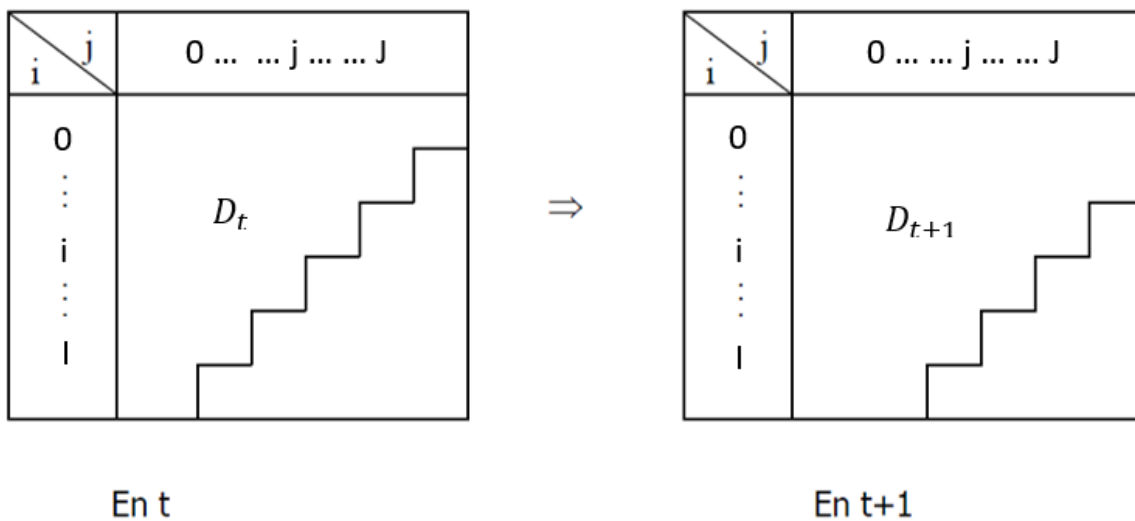
- Le profil d'activité de SHAM et caractéristiques particulières de la RC Médicale, s'agissant d'un risque spécifique en raison de la nature des assurés (hôpitaux, cliniques, praticiens), des garanties, et du contexte juridique français.
- Le segment RC sous Solvabilité 2 est un regroupement de risques RC de nature très différentes (RC construction, RC des dirigeants, RC Médicale) et dont l'agrégation est discutable.

Nous allons maintenant passer à la présentation du Modèle Interne Partiel entré en application en 2016, en plein contexte Solvabilité 2.

1.4.3 Le Risque de Réserve vu par le MIP SHAM

La logique du MIP est basée sur une approche simulateur par Bootstrap (développée en partie 2), basé sur la vision des provisions à un an. Cette approche est inspirée de l'article de Merz Wüthrich : partant d'un niveau d'information initial en t noté $D_t = \{C_{i,j}; i, j \leq N\}$, où $C_{i,j}$ fait référence au montant de règlements cumulés, l'auteur cherche à estimer $E(C_{i,N} | D_t)$, ou dit autrement le montant de règlements cumulés espéré à l'ultime sachant notre niveau d'information initial.

Au pas de temps supérieur $t \rightarrow t+1$, notre triangle de règlements est enrichi d'une diagonale supplémentaire représentée schématiquement ci-dessous :



A partir de cette nouvelle diagonale de développement, nous pouvons estimer en t+1 $E(C_{i,N} | D_{t+1})$. Merz Wüthrich utilise cette approche pour considérer une variable Claims Development Result (CDR) défini par : $CDR_i = E(C_{i,N} | D_t) - E(C_{i,N} | D_{t+1})$

Le calcul du Risque de Réserve est réalisé à partir des triangles de développement des règlements cumulés bruts au 31/12/N (sinistres agrégés), sur les exercices de réclamation N-20 à N (cette profondeur d'historique relève d'un jugement d'expert).

Par conséquent le modèle Merz Wuthrich tel que présenté par son auteur, n'est pas applicable pour notre évaluation car cette méthode repose sur une hypothèse de triangle de liquidation complet. Or la Responsabilité Civile Médicale est un risque à développement très long. La solution retenue par SHAM consiste à projeter les règlements sur 84 années par des coefficients appelés tail factors. Ces projections sont effectuées dans le modèle BE sophistiqué abordé précédemment.

Ainsi nous avons été contraints à revoir la formule de la variable CDR dans notre modèle.

La formule initiale retenue en version simplifiée est la suivante :

$$SCR_{MIP \text{ reserve}} = VaR_{99,5}(CDR) \\ = VaR_{99,5}(BE^{N+1} + R_{\text{incrementaux}}^{N+1}) - \overline{BE^N}$$

BE^{N+1} : Provisions BE 31/12/N évalué au 31/12/N+1

$R_{\text{incrementaux}}^{N+1}$: Règlements incrémentaux au 31/12/N+1

Cette formule consiste mesurer l'écart d'évaluation entre le BE 31/12/N et le BE 31/12/N à 1 an, en tenant compte des nouveaux règlements. Le Risque de Réserve consiste alors à simuler un grand nombre de fois cette formule du CDR, et d'en évaluer le quantile à 99,5% de sa distribution.

Cette formule peut se redémontrer à travers le bilan de l'assureur. Nous considérons le bilan simplifié de l'assureur en t présenté sous la forme suivante :

Bilan en t

	<i>FP_t</i>
<i>A_t</i>	<i>BE_t</i>

Où :

- A_t* est la valeur de marché de l'actif en t,
- FP_t* est la valeur des fonds propres en t,
- BE_t* est la valeur Best Estimate du passif en t.

Ce même bilan vu en t=0, en négligeant le surplus, se réécrit :

Bilan en 0

	<i>FP₀ = A₀ - BE₀</i>
<i>A₀</i>	<i>BE₀</i>

Le SCR en t=0 s'écrit comme la différence entre les Fonds propres en t=0 et le Surplus que nous supposons égal à 0 par simplification. Ainsi $SCR = FP_0 = A_0 - BE_0$

En notant F_1 les flux de prestations de la première année et $R(0,1)$ le taux de rendement des actifs entre t=0 et t=1, nous pouvons écrire en fonction des bilans précédents :

$$A_1 - BE_1 = A_0(1 + R(0,1)) - F_1 - BE_1 = (SCR + BE_0)(1 + R(0,1)) - F_1 - BE_1$$

En réarrangeant les termes, l'expression se réécrit :

$$\frac{A_1 - BE_1}{1 + R(0,1)} = (SCR + BE_0) - \frac{F_1 - BE_1}{1 + R(0,1)}$$

$$\text{Ainsi : } P(A_1 - BE_1 \geq 0) = P(SCR \geq \frac{F_1 + BE_1}{1 + R(0,1)} - BE_0)$$

Nous posons la condition limite $P(A_1 - BE_1 \geq 0) = 99,5\%$ afin d'obtenir l'égalité finale :

$$SCR = VaR_{99,5}(\frac{F_1 + BE_1}{1 + R(0,1)}) - BE_0$$

Si nous considérons les flux de prestations F_1 comme des montants de règlements incrémentaux pour la première année, nous retrouvons la formule du Risque de Réserve du Modèle Interne Partiel.

1.4.4 Le calcul du Risque de Réserve en pratique

Nous avons abordé dans la partie précédente les grands enjeux et motivations qui ont conduit à la création du Modèle Interne Partiel. La formule simplifiée du Risque de Réserve présentée précédemment a permis de définir les grands principes derrière l'évaluation du SCR Réserve. Cependant la version définitive de la formule est légèrement différente et prend en compte des éléments d'ajustements et exigences supplémentaires donnant lieu à détenir davantage de capital. Ces éléments ont été convenus avec l'autorité de contrôle prudentiel et de résolution (ACPR) au moment de la conception du modèle initial.

La formule définitive d'évaluation du SCR Réserve chargé y compris ajustements :

$$\text{SCR}_{\text{réserve}}^{31/12/N} = ((\text{VaR}_{99,5}[\text{CDR}] - \overline{\text{CDR}}) \times (1 + \alpha) \times (1 + \beta))$$

Où :

- Le coefficient α intègre les ajustements liés aux exercices antérieurs à N-20 (qui ne sont captés par le triangle de règlements de profondeur d'historique N à N-20 utilisé par le modèle), ainsi que les sinistres atypiques évoqués dans les parties précédentes. Nous retenons ainsi l'hypothèse selon laquelle la volatilité de ces sinistres précédents est identique à celle calculée sur le périmètre modélisé, hypothèse qui a été confirmée par des études régulièrement actualisées menées par l'entreprise.
- Le coefficient β est constitué des exigences supplémentaires ajoutées pour répondre aux insuffisances de justification ne permettant pas de s'assurer pleinement de la pertinence du modèle, et aux insuffisances de modélisation de risques particuliers.
- La variable CDR est évaluée avec chargement pour frais futurs de gestion.
- Le modèle procède au recentrage de la moyenne du CDR sur 0 en translatant les montants de CDR obtenus à chaque simulation. Ce retraitement a été convenu au moment de la conception du MIP et n'aura pas d'impact sur la dispersion des CDR.

La version définitive du SCR est évaluée nette de réassurance.

Nous avons terminé notre état des lieux de l'actuel modèle. Nous souhaitons maintenant adapter, dans le cadre du mémoire, ce présent modèle sur « règlements » afin qu'il continue à refléter de manière fidèle le profil de risque de l'entreprise. La démarche retenue consiste à modéliser le Risque de Réserve à partir des charges sinistres, qui incluent davantage d'informations. Cependant cette transition nécessite d'adapter l'actuelle formule du SCR Réserve, de repenser les coefficients d'ajustements, les modèles mathématiques associés, et d'un point de vue plus opérationnel récupérer les nouvelles informations relatives aux provisions.

La problématique de l'historique dans nos bases se posera alors lorsqu'il sera question d'utiliser la méthodologie BE sophistiqué, qui est relativement récente.

Nous allons maintenant passer à la présentation des différents outils et modèles mathématiques alternatifs que nous mettrons en œuvre.

Partie 2 – Cadre théorique pour l'évaluation du Risque de Réserve

Le principe d'une assurance consiste à transférer un risque économique supporté par l'assuré vers l'assureur, en contrepartie du paiement d'une prime d'assurance. Ce transfert est possible par l'application du principe de mutualisation lié aux nombreux contrats que l'assureur détient, lui permettant d'utiliser grossièrement la loi des grands nombres comme première approximation. Les propriétés d'indépendance des contrats et le regroupement des risques homogènes fait par l'assureur lui permet de calibrer une loi de probabilité (tarification par garantie) et d'estimer un montant de pertes sur un intervalle de temps donné (avec une précision relative).

L'application de la loi forte des grands nombres permet d'obtenir la convergence presque sûre de la moyenne empirique des pertes indépendantes identiquement distribuées vers l'espérance de la loi :

$$\frac{\sum_{i=1}^n S_i}{n} \xrightarrow{p.s.} E(S_i) \text{ quand } n \rightarrow \infty \text{ avec } S_i \text{ désignant la perte associée à la police } i$$

Il est possible d'écrire la prime pure μ comme le montant qui égalise la moyenne empirique des pertes, soit $E(S_i) = \mu$

La prime pure n'est pas directement facturée à l'assuré, car dans la pratique l'assureur est soumis à différentes charges qu'il doit imputer au tarif, ainsi la prime chargée est la somme de la prime pure et des chargements d'acquisition (frais encourus lors de la souscription du contrat), chargements d'administration et gestion du contrat. Enfin en fonction du canal de distribution et de commercialisation choisi, il est nécessaire de rémunérer des intermédiaires (courtiers, ...), ce coût supplémentaire est intégré à travers la prime commerciale.

Une fois la tarification effectuée et le portefeuille d'assuré constitué, l'assureur va s'intéresser à la vie de ses contrats. Des sinistres commencent à être déclarés, et une part des primes d'assurance permet d'indemniser les assurés sinistrés. Cependant, tous les sinistres ne se clôturent pas dès la première année : selon la branche d'assurance, les montants de prestations associées peuvent s'étaler dans la durée. Ainsi un système de gestion des sinistres est mis en œuvre à travers le provisionnement.

Il existe classiquement deux grandes approches de calcul des provisions :

Le Provisionnement sur triangle de liquidation (données agrégées), est une approche répandue en assurance non-vie. Ces modèles sont généralement de nature déterministe ou stochastique. L'hypothèse de stationnarité est fondamentale dans ces modèles puisque les données dans la partie inférieure du triangle sont projetées à partir des données observées dans la partie supérieure.

Le Provisionnement ligne à ligne s'intéresse au développement individuel de chaque sinistre. La provision associée à chaque sinistre est estimée à partir de ses caractéristiques individuelles. Ces modèles sont plus récents et complexes, ainsi ils sont moins utilisés en entreprise.

Le calcul du Risque de Réserve de SHAM est basé sur les méthodes de provisionnement par triangle de liquidation.

Nous introduisons les notations suivantes :

i : année de réclamation du sinistre ; $i = 0, \dots, I$

j : délai de développement du sinistre ; $j = 0, \dots, J$

$R_{i,j}$: montant des règlements effectués au cours de l'année $i + j$ pour les sinistres réclamés l'année i (montant incrémental)

$P_{i,j}$: montant total des règlements cumulés effectués pour les sinistres réclamés l'année i jusqu'au délai de développement j

$I_{i,j}$: montant de charge sinistres, intégrant tous les montants de sinistres payés jusqu'au développement j auquel s'ajoute la PSAP pour une année de réclamation i donnée

f_j : facteur de développement moyen associé à l'année de développement j

$f_{i,j}$: facteur de développement individuel lié à l'année de réclamation i et année de développement j

$PSAP_{i,j}$: montant de provisions au cours de l'année $i + j$ pour des sinistres ouverts l'année i

Le triangle de liquidation que nous considérons est le suivant, pour X un montant de charge sinistres ou de règlements :

Année de réclamation	Délai de développement								
	0	1	...	j	...	$J - i$...	$J - 1$	J
0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$...	$X_{0,j}$	$X_{0,J-1}$	$X_{0,J}$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$...	$X_{1,j}$				$X_{1,J-1}$	
⋮	⋮	⋮	...	⋮	...			⋮	
i	$X_{i,j}$...	$X_{i,J-i}$			
⋮	⋮	⋮		⋮					
$l - j$	$X_{l-j,j}$					
⋮									
$l - 1$	$X_{l-1,0}$	$X_{l-1,1}$							
l	$X_{l,0}$								

Figure 13 : Illustration d'un triangle de liquidation

Les exercices d'ouverture des sinistres sont vus en base réclamation. Les méthodes de provisionnement que nous utiliserons permettront d'estimer la partie inférieure du triangle, à partir des données historiques présentes dans la partie supérieure. De plus, ces modèles feront appel au Bootstrap, qui est une méthode de rééchantillonnage introduite par Efron en 1979 impliquant un tirage avec remise n fois d'un échantillon de taille n . Le Bootstrap est couplé aux méthodes Monte Carlo dans le but d'aboutir à une estimation de nos paramètres recherchés, par l'application de la loi des grands nombres. En vertu de ce principe, plus le nombre de simulations d'échantillons Bootstrap est élevé, plus la précision de nos paramètres s'améliore.

La méthode Bootstrap repose sur deux hypothèses fortes associées à l'échantillon initial :

1. L'indépendance des observations.
2. L'unicité de leur loi de distribution.

Le tirage avec remise concernera dans nos modèles des résidus qui respecteront ces propriétés, et dont les formules seront développées dans les sections qui vont suivre.

2.1 Modélisation du Risque de Réserve actuel

La formule de calcul du SCR Réserve non chargé hors ajustements s'écrit :

$$\text{SCR}_{\text{réserve}}^{31/12/N} = \left(\text{VaR}_{99,5}[\text{CDR}] - \overline{\text{CDR}} \right)$$

Où

$$\text{CDR} = \text{BE}^{N+1} + \text{R}^{N+1} - \overline{\text{BE}^N}$$

L'objectif consiste à obtenir une distribution par simulation de la variable CDR suffisamment grande afin d'estimer le quantile de niveau 99.5% (autrement dit la Value at Risk) de cette variable. La simulation de la variable CDR est basée sur un triangle de règlements cumulés vu par année de réclamation et délai de développement.

A partir de ces données, nous commençons tout d'abord par évaluer les provisions BE N. Cela nécessite de compléter la partie inférieure du triangle.

2.1.1 Le modèle de Chain Ladder

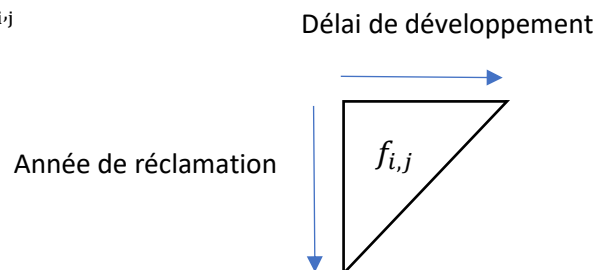
Nous avons alors recours à la méthode de Chain Ladder, facile à mettre en œuvre. Elle consiste à estimer des facteurs de développement moyens notés f_i par délais de développement j .

La valeur de ces facteurs se calcule comme suit : $f_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} P_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} P_{i,j}}$; $j = 1, \dots, n-1$

Le modèle s'écrit $P_{i,j+1} = f_j \times P_{i,j}$; pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n-1$

Nous supposons que les années de réclamation sont indépendantes entre elles.

Nous pouvons construire un D-Triangle contenant les facteurs de développement individuels $f_{i,j}$ définis pour $i + j \leq n$ par $f_{i,j} = \frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}}$



Ces facteurs permettent d'estimer les montants de la partie inférieure $\hat{P}_{i,j}$ pour $i + j > n$:

$$\hat{P}_{i,j} = P_{i,n-i+1} \prod_{k=n-i+1}^{n-1} f_k$$

Les hypothèses sous-jacentes au modèle de Chain Ladder sont les suivantes :

- 1) Indépendance des facteurs de développement f_j par rapport aux années de réclamation.
- 2) Validation de l'existence du coefficient f_j .

Pour notre cas, une fois les hypothèses précédentes vérifiées, l'estimation des facteurs de développement est soumise à plusieurs ajustements propres au MIP :

Sur le triangle des règlements, nous constatons une hétérogénéité des facteurs de développement individuels sur le délai, un an et remarquons que ces facteurs peuvent être regroupés en deux sous-ensembles : ceux relatifs aux exercices de réclamation antérieurs à 2002, et ceux relatifs aux exercices de réclamation 2003 et postérieurs. Nous constatons une accélération de la cadence des règlements après 2003, une conséquence directe de la loi n°2002-303 du 4 mars 2002 relative aux droits des malades et à la qualité du système de santé. Elle permet aux victimes d'accidents médicaux, d'affections iatrogènes ou d'infections nosocomiales, d'obtenir réparation lorsque les dommages subis présentent un caractère de gravité, via la saisie de la commission de conciliation et d'indemnisation des accidents médicaux (CCI). Ainsi nous adoptons une méthode corrective consistant à exclure les facteurs individuels de développement $f_{i,j}$ des années de réclamation antérieures à 2003 pour les premiers délais de développement.

Le calcul des facteurs de développement moyen f_j est couplé à une méthode de sélection des coefficients individuels de Chain Ladder du triangle de règlements cumulés : seuls les coefficients dont la valeur est comprise dans une fenêtre autour de la moyenne des coefficients de développement individuels sont pris en compte. Cette méthode baptisée Actuary In The Box (AIB) permet de rationaliser mathématiquement le jugement d'experts sur la sélection des exercices de réclamation entrant dans le calcul des facteurs de Chain Ladder.

Pour les délais de développement 18 à 20, les facteurs de développement moyens f_j sont évalués à l'aide de 4 années d'historique supplémentaires.

Une fois les facteurs de développement calculés, la partie inférieure du triangle complétée, le triangle de règlements est ensuite prolongé au moyen des tail factors jusqu'à l'extinction du passif (horizon de projection de 84 ans). Ces tail factors proviennent du modèle BE sophistiqué.

Le schéma suivant récapitule ces ajustements lors de la clôture du 31/12/2021 :

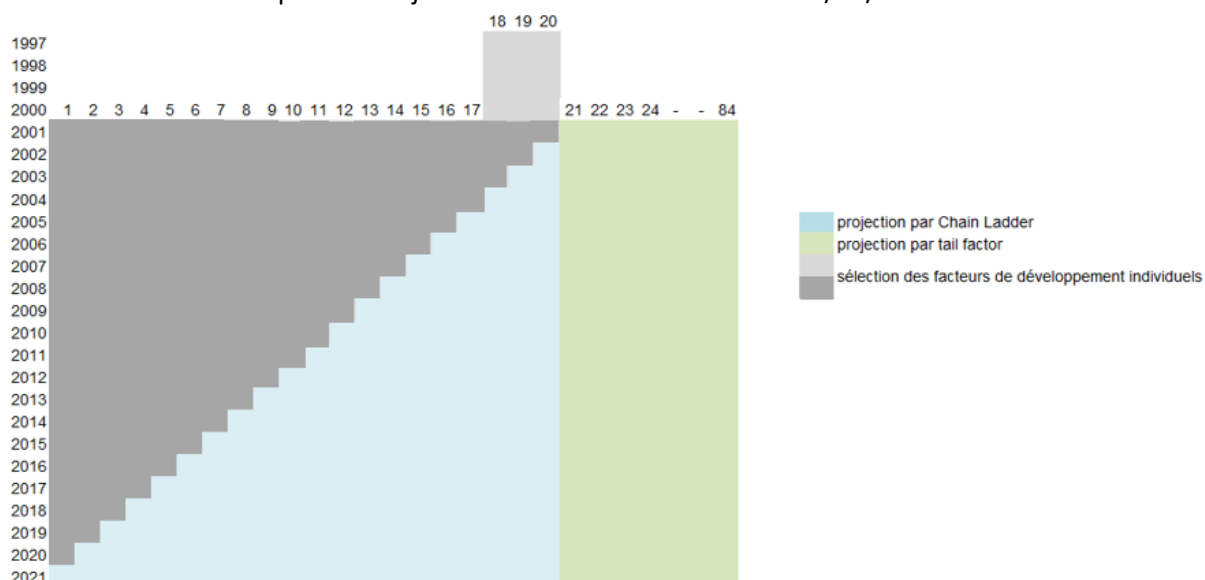


Figure 14 : Evaluation des facteurs de développement par le MIP

Le calcul du BE N est ensuite évalué en actualisant les règlements projetés futurs au 31/12/N à l'aide de la courbe des taux du 31/12/N.

Le schéma ci-dessous illustre la démarche d'évaluation du BE N à la clôture 31/12/2021 :
Notations :

BE(i, j) : montant des provisions Best Estimate pour l'exercice de réclamation i au délai de développement j
R_proj(i, j) : montant de règlements incrémentaux projetés pour l'exercice de réclamation i au délai de développement j
factu_j : facteur d'actualisation associé au développement j

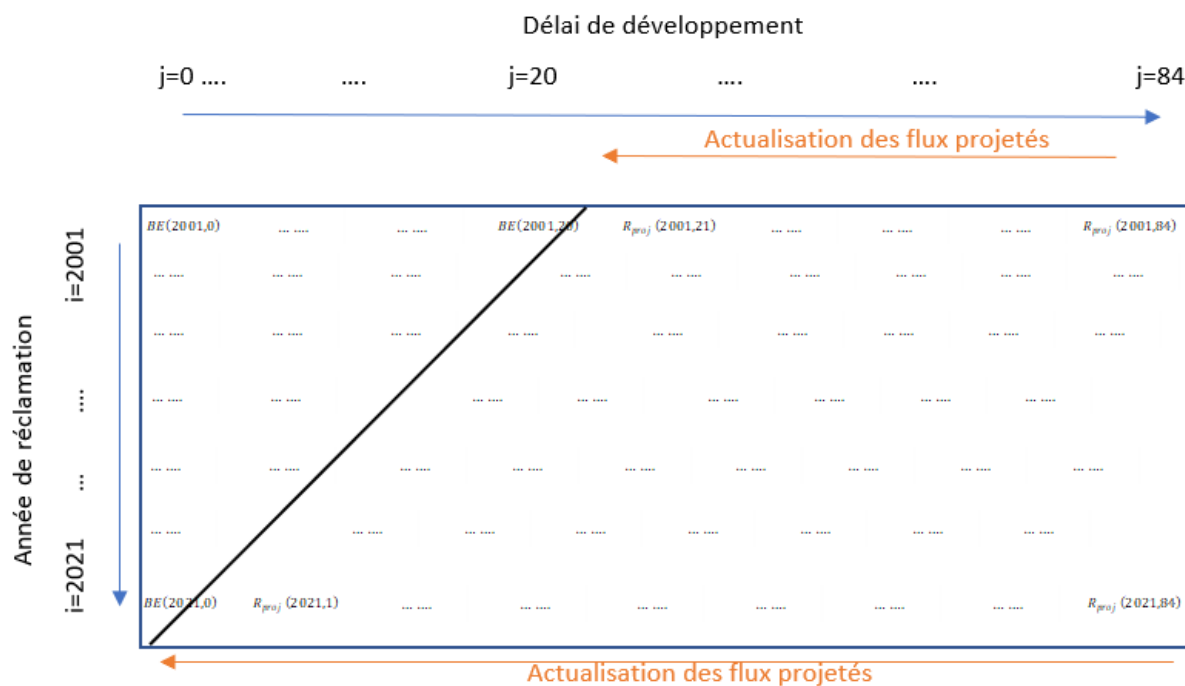


Figure 15 : Evaluation du BE 31/12/2021 (dernière diagonale du triangle) par année de réclamation

La formule de calcul du BE au 31/12/2021 est la suivante :

$$BE^{31/12/2021} = \sum_{k=2001}^{2021} BE(k, 2021 - k) = \sum_{k=2001}^{2021} \sum_{l=2022-k}^{84} R_proj(k, l) \times factu_l$$

2.1.2 Calcul des éléments N+1

Nous pouvons maintenant passer au calcul des règlements et BE N+1.

L'évaluation des éléments N+1 nécessite de simuler la nouvelle diagonale de règlements N+1 : il s'agit ici d'envisager tous les scénarios possibles pouvant se produire à l'exercice N+1. Cette information future est simulée en se basant sur l'ensemble des observations passées (Chain Ladder précédent). Les ajustements relatifs au calcul des coefficients de développement sont identiques à précédemment (figure 14).

Le modèle considère 20 000 diagonales N+1 de règlements. Le Bootstrap paraît donc le plus approprié pour la mesure de la volatilité. Les différentes étapes de cette méthode sont développées ci-après :

Etape 1 : Estimation des facteurs de développement f_j par la méthode de Chain Ladder sur le triangle des règlements cumulés

Etape 2 : Calcul des règlements cumulée $\hat{P}_{i,j}$ en partant de la diagonale du triangle précédent et en appliquant à rebours les coefficients de développement calculés : $\hat{P}_{i,j} = \frac{P_{i,j}}{\hat{f}_j}$

Etape 3 : Construction du triangle de règlements incrémentsaux $R_{i,j} = P_{i,j} - P_{i,j-1}$ et des règlements incrémentsaux estimés par Chain Ladder $\hat{R}_{i,j} = \hat{P}_{i,j} - \hat{P}_{i,j-1}$

Etape 4 : Construction d'un triangle de résidus de Pearson $r_{i,j}^P = \frac{R_{i,j} - E(R_{i,j})}{\sqrt{V(R_{i,j})}} = \frac{R_{i,j} - \hat{R}_{i,j}}{\sqrt{\hat{R}_{i,j}}}$

Etape 5 : Tirage avec remise des résidus et reconstruction d'un nouveau triangle des résidus de Pearson bootstrappé $r_{i,j}^{P*}$

Etape 6 : Recalcul des règlements incrémentsaux $R_{i,j}^*$ à l'aide des nouveaux résidus et la formule de l'étape 4 : $R_{i,j}^* = r_{i,j}^{P*} \sqrt{\hat{R}_{i,j}} + \hat{R}_{i,j}$ et reconstruction d'un triangle de règlements cumulés $P_{i,j}^* = \sum_{k=1}^j R_{i,k}^*$ puis estimation des nouveaux facteurs de développement f_j^* par la méthode de Chain Ladder sur ce nouveau triangle

Etape 7 : Calcul du triangle inférieur par Chain Ladder à l'aide des f_j^* précédents
 Remarque : à la fin de l'étape 7, l'erreur de processus liée au modèle est corrigée en resimulant les montants incrémentsaux finaux par une loi Gamma de moyenne f_{ij}^* et variance $f_{ij}^* \times \sum_{ij} r_{ij}^{P*2}$
 Les résidus de l'étape 4 sont également ajustés pour corriger le biais induit par le Bootstrap.

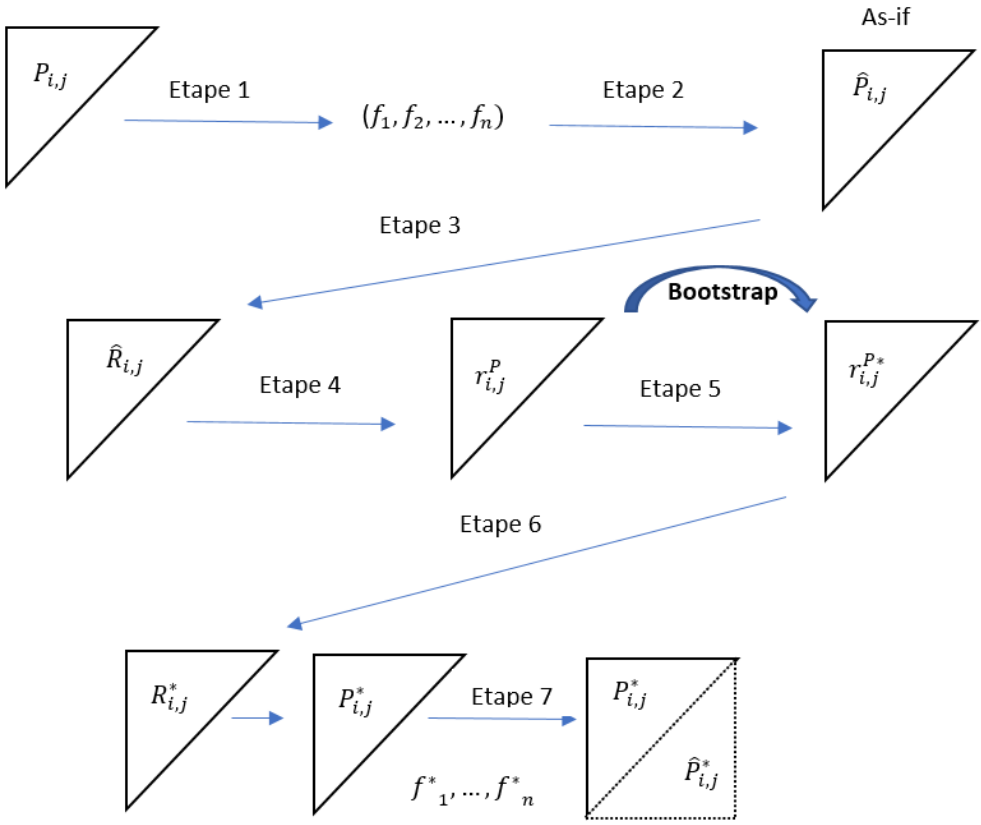


Figure 16 : Résumé du Bootstrap Chain Ladder

La méthode de projection des règlements N+1 possède quelques spécificités :

- 1) Nous retenons pour les délais 20 et 21 des coefficients de développement égaux à la moyenne des coefficients 13 à 19.
- 2) Nous avons recours aux tail factors et méthodologie Actuary In The Box présentés plus tôt.
- 3) A contrario du triangle BE N, les 4 années d'historique supplémentaires prises en compte pour les délais de développement 18 à 20 n'interviennent plus.

Ces ajustements sont représentés schématiquement ci-dessous :

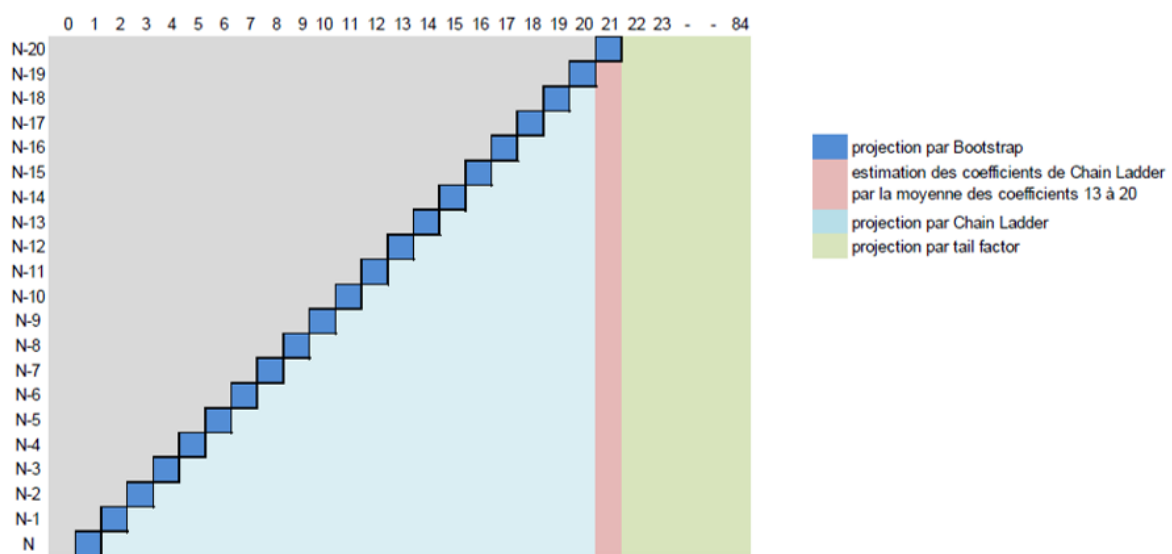


Figure 17 : Méthodologie de projection des règlements N+1

Nous réutilisons les notations du schéma du BE N, afin de calculer le nouveau BE N+1.

La formule de calcul du BE au 31/12/2022 est la suivante :

$$BE^{31/12/2022} = \sum_{k=2001}^{2021} BE(k, 2022 - k) = \sum_{k=2001}^{2021} \sum_{l=2023-k}^{84} R_{proj}(k, l) \times factu_l$$

La synthèse graphique de la démarche est récapitulé ci-après :

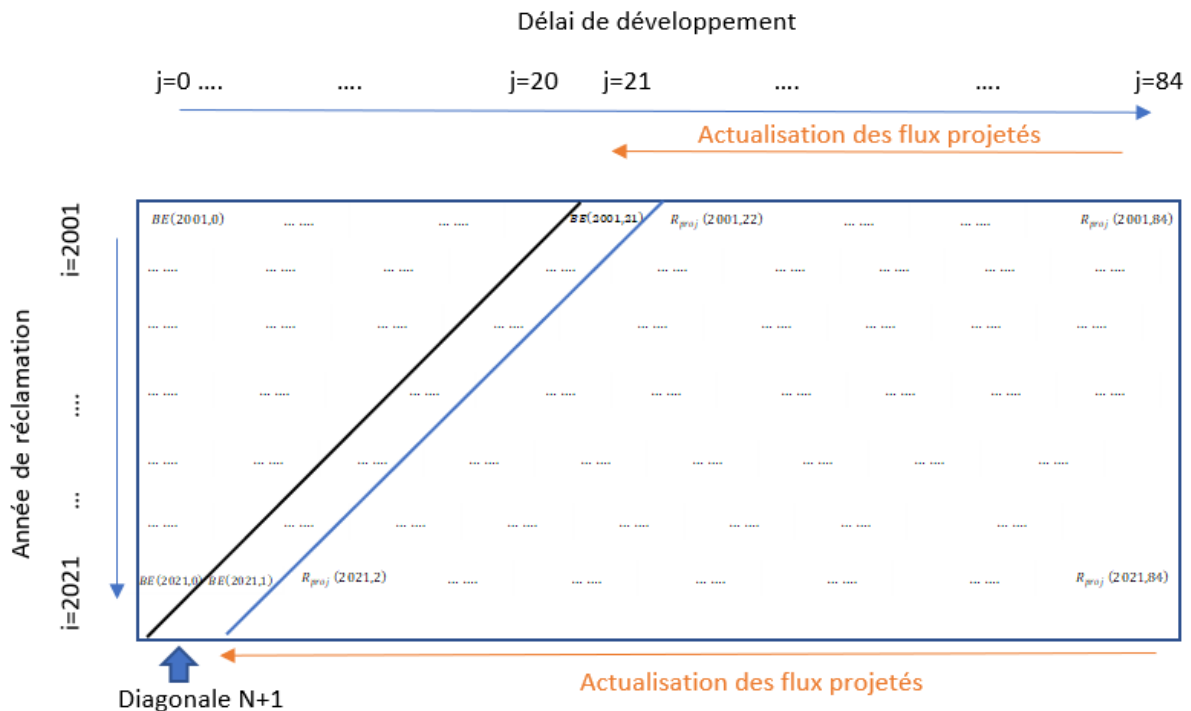


Figure 18 : Evaluation du BE 31/12/2021 (nouvelle diagonale du triangle) par année de réclamation

Nous disposons de tous les éléments pour calculer le Risque de Réserve brut de réassurance hors ajustements. La version nette met en jeu les trois traités de réassurance souscrits par l'entreprise et présentés en partie 1.3.3. Les cessions sont effectuées selon ce principe : les réassureurs Quote-Part étant protégés par le traité XS, nous déterminons d'abord les cessions XS, puis nous calculons les cessions QP sur les montants des sinistres nets des cessions XS et enfin estimons les cessions SL.

Cependant comme l'illustre la formule de cession XS détaillée précédemment, la réassurance XS est évaluée sinistre par sinistre. Or nous calculons un risque de Réserve sur des données agrégées par année, la relation n'étant pas exploitable, nous définissons une autre règle pour traiter l'XS. Les montants de règlements cumulés cédés XS sont modélisés au moyen d'un modèle linéaire multiple par exercice de réclamation et par inventaire (sans loi sous-jacente). Celui-ci est basé sur les règlements bruts projetés, les montants cédés au précédent inventaire ainsi que les simulations réalisées dans le cadre du modèle BE sophistiqué.

Les traités QP et SL sont ensuite appliqués en exploitant les relations présentées en partie 1.3.3, par exercice de réclamation (les conditions de réassurance évoluant chaque année).

Nous n'entrerons pas davantage dans les détails de cette méthodologie de passage brut-net, car elle ne sera pas conservée dans nos évaluations alternatives avec triangle de charges. En effet la méthode actuelle d'évaluation du SCR Réserve met en jeu les résidus de Pearson dans le cadre du Bootstrap de la diagonale N+1. Or ces derniers ne sont plus exploitables dans le cas d'un triangle de données incrémentales possédant des valeurs négatives comme ça peut l'être avec un triangle de coûts, à cause de la racine carrée au dénominateur de la formule des résidus précédemment utilisée. En cause les montants de PSAP réévalués d'une année sur l'autre, ont tendance à varier beaucoup au cours des premiers développements les rendant instables.

Pour pallier ce problème, nous allons à présent nous tourner vers une approche stochastique.

2.2 Modélisation du Risque de Réserve sur triangle de charges

Nous considérons dans cette partie un triangle de charges sinistres de taille similaire au triangle de règlements de la partie précédente. Cette approche alternative nécessite une redéfinition du CDR. Ainsi la formule du SCR Réserve non chargé hors ajustements devient :

$$\text{SCR}_{\text{réserve}}^{31/12/N} = \left(\text{VaR}_{99,5}[\text{CDR}'] - \overline{\text{CDR}'} \right)$$

Où

$$\text{CDR}' := \text{Charge}^{N+1} - \overline{\text{Charge}^N}$$

Nous rappelons au préalable que la charge des sinistres est composée de l'ensemble des règlements passés et de la provision pour sinistres à payer.

La charge N+1 correspond à une évaluation de la charge N vue à un an pour l'ensemble des exercices de réclamations du triangle de liquidation. Sa projection est réalisée par Bootstrap. Cependant la formule des résidus de Pearson utilisée dans la section précédente n'étant pas applicable pour un triangle possédant des montants incrémentaux négatifs (cas du triangle de charges sinistres), cela nous force à revoir notre approche de modélisation.

2.2.1 Le modèle de MACK

Notre première intuition s'est portée sur l'utilisation du modèle de Mack, qui correspond à la version stochastique de la méthode de Chain Ladder. Le modèle stochastique se base sur un triangle de liquidation de montant cumulé de charges ou règlements noté $C_{i,j}$, où i désigne l'année de réclamation et j le délai de développement du sinistre. Mack suppose que les facteurs de développement individuel λ_{ij} sont des réalisations d'une variable aléatoire d'espérance inconnue λ_j et pour laquelle nous pouvons utiliser l'estimateur de Chain Ladder précédemment introduit.

Les hypothèses du modèle de Mack sont les suivantes :

- 1) Les années de réclamation sont indépendantes entre elles, c'est-à-dire les vecteurs $(C_{k,1}, \dots, C_{k,n})$ et $(C_{i,1}, \dots, C_{i,n})$ sont indépendants pour $k \neq i$
- 2) Existence du coefficient constant λ_j pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n-1$ telle que $E[C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = \lambda_j \times C_{i,j}$

Ce coefficient λ_j est calculé par l'estimateur de Chain Ladder : $\lambda_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} ; j = 1, \dots, n-1$

Ces deux premières hypothèses sont communes au modèle de Chain Ladder déterministe, mais une nouvelle hypothèse supplémentaire sur la forme de la variance est ajoutée :

- 3) Existence d'un paramètre σ_j^2 pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n-1$, telle que $V[C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = \sigma_j^2 \times C_{i,j}$

Dans son article, Mack définit la valeur du paramètre σ_j^2 de la façon suivante :

$$\text{Pour } j \leq n-2, \sigma_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \lambda_j \right)^2$$

$$\text{Pour } j = n-1, \sigma_j^2 = \min \left\{ \frac{\sigma_{n-2}^4}{\sigma_{n-3}^2}, \min \{ \sigma_{n-3}^2, \sigma_{n-2}^2 \} \right\}$$

Ce cadre stochastique permet de donner une nouvelle expression aux résidus de Pearson en utilisant les hypothèses du modèle. La formule générale des résidus de Pearson est la suivante :

$$r_{i,j}^P = \frac{f_{i,j} - E(f_{i,j})}{\sqrt{V(f_{i,j})}}$$

En utilisant la définition du facteur de développement $f_{i,j}$ rappelé plus tôt, nous pouvons injecter l'expression $C_{i,j+1} = f_{i,j} C_{i,j}$ dans les hypothèses 2 et 3 du modèle de Mack afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} E[f_{i,j} | C_{i,1} \dots C_{i,j}] &= \lambda_j \\ V[f_{i,j} | C_{i,1} \dots C_{i,j}] &= \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}} \end{aligned}$$

Nous remplaçons ces deux expressions dans la formule des résidus de Pearson $r_{i,j}^P = \frac{f_{i,j} - \lambda_j}{\sqrt{\frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}}}$

Puis nous pouvons une nouvelle fois utiliser le Bootstrap dans sa version stochastique « Mack » :

Etape 1 : Construction du D-Triangle des $f_{i,j}$ et calcul des facteurs de développement λ_j par la méthode de Chain Ladder sur le D-triangle ou directement sur le triangle des charges cumulées. Calcul des σ_j^2 par la formule donnée en fin d'hypothèse 3.

Etape 2 : Construction du triangle des résidus de Pearson $r_{i,j}^P = \frac{f_{i,j} - \lambda_j}{\sqrt{\frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}}}$

Etape 3 : Tirage avec remise des résidus et construction d'un nouveau triangle des résidus de Pearson bootstrappé $r_{i,j}^{P*}$

Etape 4 : Recalcul des facteurs de développement individuel $f_{i,j}^*$ du D_triangle à l'aide des nouveaux résidus et la formule de l'étape 4 : $f_{i,j}^* = r_{i,j}^P \times \sqrt{\frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}} + \lambda_j$ puis obtention des nouveaux facteurs de développement $\lambda_j^* = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} f_{i,j}^* C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} ; j = 1, \dots, n-1$

Etape 5 : Calcul du triangle inférieur des $C_{i,j}^*$ par Chain Ladder à l'aide des λ_j^*

Etape 6 : Re simulation des montants $C_{i,j}^{**}$ par une loi de probabilité choisie pour corriger l'erreur de processus. Nous souhaitons conserver la logique du modèle actuel, ainsi nous optons pour la loi gamma : $C_{i,j+1}^{**} \sim \text{Gamma}\left(\frac{\lambda_j^{**} C_{i,j}^*}{\sigma_j^2}, \frac{\sigma_j^2}{\lambda_j^{**}}\right)$

Remarque : Dans les faits, les résidus $r_{i,j}^P$ sont ajustés d'un facteur $\sqrt{\frac{n-j}{n-j-1}}$ afin de corriger le biais induit par le Bootstrap (cet ajustement prend sa source dans l'estimateur sans biais de σ_j^2 défini plus tôt dans le modèle de Mack).

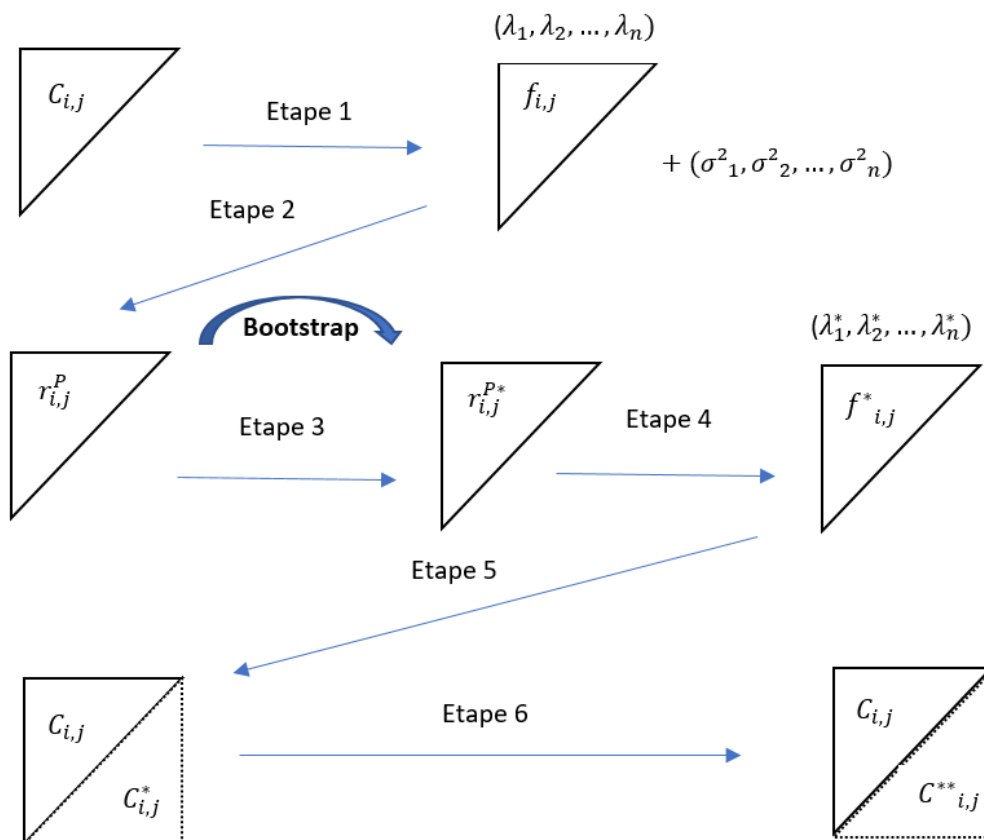


Figure 19 : Résumé du Bootstrap Mack

La logique du modèle précédent a été reprise quelques années plus tard par Thomas MACK en collaboration avec Gerhard QUARG. Dans leur article publié en 2004, les deux auteurs proposent une méthode appelée Munich Chain Ladder qu'ils présentent comme variante du modèle de Mack. Ce nouveau modèle présente l'avantage de faire converger les estimations des charges ultimes induites par les triangles de règlements et de charges. Cette extension de modèle sera privilégiée sur la base du constat fait sur le ratio règlements sur charges (P/I) à l'ultime pour ces deux modèles. Nos triangles de charges et règlements (sur lesquels s'appuiera le premier scénario de la partie 3.1) sous entendent un ratio (P/I) à l'ultime compris entre 0,6 et 0,7 comme illustré ci-dessous :

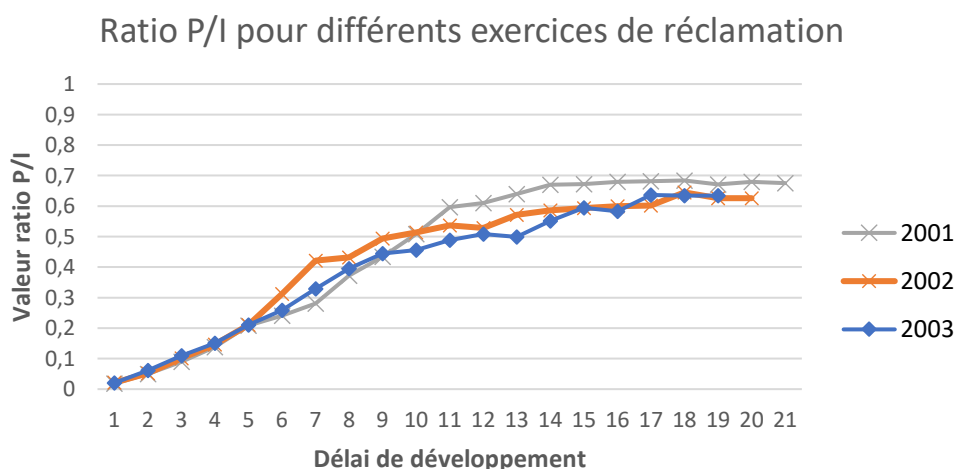


Figure 20 : Tendence du ratio P/I

Ce graphique représente le ratio du montant cumulé des règlements sur la charge des sinistres pour les trois premiers exercices de réclamation de nos triangles. Après une vingtaine d'année de développement, ce ratio avoisine 70% dans le cas le moins favorable. Il est censé à terme converger vers 1, car la provision finit par disparaître dans la charge des sinistres une fois les sinistres liquidés :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{P_{i,j}}{I_{i,j}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{P_{i,j}}{P_{i,j} + PSAP_{i,j}} = \frac{P_{i,j}}{P_{i,j} + 0} = 1 \quad ; \quad \forall i \in \llbracket N - 20, N \rrbracket$$

Nous considérons la sous-branche RC Médicale pour laquelle le développement des sinistres est long, expliquant la valeur du ratio précédent inférieure à 1 à l'ultime du triangle après vingt et une années de développement.

Dans le cas des projections à l'ultime (du triangle) des montants de charges et règlements par la méthode de Mack et Munich Chain Ladder, nous constatons des différences importantes :

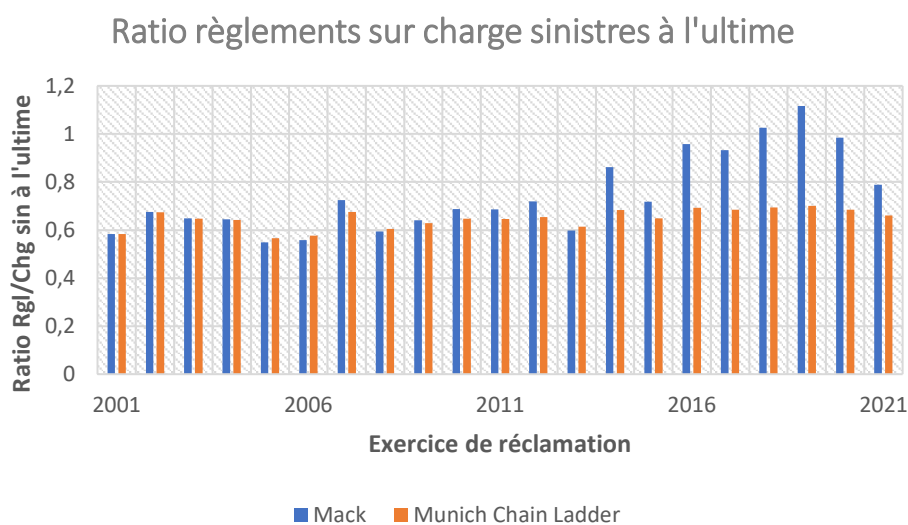


Figure 21 : Comparaison des ratios P/I à l'ultime

Les valeurs des ratios P/I pour les deux méthodes convergent sur les exercices de réclamations les plus anciens (proche de l'ultime du triangle), mais les années plus récentes encore très éloignées de l'ultime retournent des ratios aberrants pour la méthode de Mack. En effet, les ratios des exercices 2018 et 2019 sont ici supérieurs à 1, ce qui est incompatible avec notre cadre de modélisation car cela impliquerait $P_{i,j} > I_{i,j}$ c'est-à-dire $P_{i,j} > (P_{i,j} + PSAP_{i,j})$.

Ainsi nous avons décidé de nous concentrer sur la mise en œuvre du modèle plus complet de Munich Chain Ladder adapté du modèle de Mack qui est plus pertinent.

2.2.2 Le modèle de Munich Chain Ladder

Le modèle Munich Chain Ladder repose sur deux jeux de données corrélés, les règlements et les charges (Paid and Incurred data). La modèle Munich Chain Ladder nécessite donc deux jeux en entrée : un triangle de règlements et un triangle de charges sinistres.

Nous introduisons les notations suivantes :

i correspond à l'année de réclamation du sinistre ; $i = 1, \dots, n$

j correspond au délai de développement du sinistre ; $j = 1, \dots, n-1$; $J = \{1, \dots, n-1\}$

$P_{i,j}$, $I_{i,j}$ ont été définis en introduction de partie 2

Afin d'alléger les écritures, nous noterons $Q_i = \frac{P_i}{I_i} = \left(\frac{P_{i,j}}{I_{i,j}} \right)_{j \in J}$, comme le processus des ratios des « sinistres payés » pour chaque année de réclamation i .

$B_i(s) = \{P_{i,1}, \dots, P_{i,s}, I_{i,1}, \dots, I_{i,s}\}$ correspond à l'ensemble de l'information relatif aux sinistres déclarés (paiements et charges).

Pour $s = 1, \dots, n - 1$:

$f_{s \rightarrow s+1}^P$ désigne le facteur de développement du triangle de règlements cumulés entre les années de développement s et $s+1$

$f_{s \rightarrow s+1}^I$ désigne le facteur de développement du triangle de charges sinistres entre les années de développement s et $s+1$

Il apparait de façon naturelle : $P_{i,s+1} = P_{i,s} \times f_{s \rightarrow s+1}^P$ et $I_{i,s+1} = I_{i,s} \times f_{s \rightarrow s+1}^I$

Nous notons enfin pour une variable aléatoire X et une condition C :

$$\sigma(X|C) := \sqrt{\text{Var}(X|C)} \quad \text{et} \quad \text{Res}(X|C) := \frac{X - E(X|C)}{\sigma(X|C)}$$

Les hypothèses suivantes doivent être vérifiées :

Périmètre Triangle règlements cumulés

Périmètre Triangle charges sinistres

(P1) Hypothèse d'espérance

Pour $s, j \in J$ avec $j = s + 1$; $i = 1, \dots, n$

$$E\left(\frac{P_{i,j}}{P_{i,s}} \middle| P_i(s)\right) = f_{s \rightarrow j}^P$$

$$E\left(\frac{I_{i,j}}{I_{i,s}} \middle| I_i(s)\right) = f_{s \rightarrow j}^I$$

(P2) Hypothèse de variance

Pour $s, j \in J$ avec $j = s + 1$; $i = 1, \dots, n$

$$\text{Var}\left(\frac{P_{i,j}}{P_{i,s}} \middle| P_i(s)\right) = \frac{(\sigma_{s \rightarrow j}^P)^2}{P_{i,s}}$$

$$\text{Var}\left(\frac{I_{i,j}}{I_{i,s}} \middle| I_i(s)\right) = \frac{(\sigma_{s \rightarrow j}^I)^2}{I_{i,s}}$$

(P3) Hypothèse d'indépendance

Échantillons $\{P_{1,j} | j \in J\}, \dots, \{P_{n,j} | j \in J\}$

Échantillons $\{I_{1,j} | j \in J\}, \dots, \{I_{n,j} | j \in J\}$

Indépendants identiquement distribués

Indépendants identiquement distribués

(P4) Hypothèse de corrélation

Il existe une constante λ^P telle que pour $s, j \in J$ avec $j = s + 1$; $i = 1, \dots, n$

$$E\left(\text{Res}\left(\frac{P_{i,j}}{P_{i,s}} \middle| P_i(s)\right) \middle| B_i(s)\right) = \lambda^P \cdot \text{Res}(Q_{i,s}^{-1} | P_i(s))$$

Il existe une constante λ^I telle que pour $s, j \in J$ avec $j = s + 1$; $i = 1, \dots, n$

$$E\left(\text{Res}\left(\frac{I_{i,j}}{I_{i,s}} \middle| I_i(s)\right) \middle| B_i(s)\right) = \lambda^I \cdot \text{Res}(Q_{i,s} | I_i(s))$$

Une fois ces hypothèses validées pour nos données, nous pouvons calculer les quantités suivantes :

Pour $s, j \in J$ avec $j = s + 1$, les facteurs de développement $f_{s \rightarrow j}^P$ et $f_{s \rightarrow j}^I$, sont estimés par Chain Ladder.

$$\widehat{f_{s \rightarrow j}^P} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s}} \sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s} \times \frac{P_{i,j}}{P_{i,s}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s}}$$

Et

$$\widehat{f_{s \rightarrow j}^I} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-s} I_{i,s}} \sum_{i=1}^{n-s} I_{i,s} \times \frac{I_{i,j}}{I_{i,s}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-s} I_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-s} I_{i,s}}$$

Les paramètres σ se calculent également de manière classique, pour $s = 1, \dots, n - 2$:

$$\widehat{\sigma_{s \rightarrow j}^P}^2 = \frac{1}{n - s - 1} \sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s} \left(\frac{P_{i,j}}{P_{i,s}} - \widehat{f_{s \rightarrow j}^P} \right)^2$$

Et

$$\widehat{\sigma_{s \rightarrow j}^I}^2 = \frac{1}{n - s - 1} \sum_{i=1}^{n-s} I_{i,s} \left(\frac{I_{i,j}}{I_{i,s}} - \widehat{f_{s \rightarrow j}^I} \right)^2$$

Les hypothèses suggèrent pour $E(Q_{i,s} | I_i(s))$ l'estimateur :

$$\widehat{q}_s = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-s+1} I_{k,s}} \sum_{k=1}^{n-s+1} I_{k,s} \times Q_{k,s} = \frac{\sum_{k=1}^{n-s+1} P_{k,s}}{\sum_{k=1}^{n-s+1} I_{k,s}}$$

Les hypothèses suggèrent pour $\sigma(Q_{i,s}^{-1} | P_i(s))$ et $\sigma(Q_{i,s} | I_i(s))$ les estimateurs :

$$\widehat{\rho_s^P}^2 = \frac{1}{n-s} \sum_{k=1}^{n-s+1} P_{k,s} (Q_{k,s}^{-1} - \widehat{q}_s^{-1})^2 \quad \text{et} \quad \widehat{\rho_s^I}^2 = \frac{1}{n-s} \sum_{k=1}^{n-s+1} I_{k,s} (Q_{k,s} - \widehat{q}_s)^2$$

Les valeurs précédentes permettent de calculer les résidus et pouvoir spécifier les 4 triangles de résidus

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Res}}(P_{i,j}) &= \text{Res} \left(\frac{P_{i,j}}{P_{i,s}} \middle| P_i(s) \right) = \frac{\frac{P_{i,j}}{P_{i,s}} - \widehat{f_{s \rightarrow j}^P}}{\widehat{\sigma_{s \rightarrow j}^P}} \times \sqrt{P_{i,s}} \\ \widehat{\text{Res}}(I_{i,j}) &= \text{Res} \left(\frac{I_{i,j}}{I_{i,s}} \middle| I_i(s) \right) = \frac{\frac{I_{i,j}}{I_{i,s}} - \widehat{f_{s \rightarrow j}^I}}{\widehat{\sigma_{s \rightarrow j}^I}} \times \sqrt{I_{i,s}} \\ \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1}) &= \text{Res}(Q_{i,s}^{-1} | P_i(s)) = \frac{Q_{i,s}^{-1} - \widehat{q}_s^{-1}}{\widehat{\rho_s^P}} \times \sqrt{P_{i,s}} \\ \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}) &= \text{Res}(Q_{i,s} | I_i(s)) = \frac{Q_{i,s} - \widehat{q}_s}{\widehat{\rho_s^I}} \times \sqrt{I_{i,s}} \end{aligned}$$

Les paramètres λ^P et λ^I sont estimés comme suit :

$$\lambda^P = \frac{1}{\sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1})^2} \sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1})^2 \frac{\widehat{\text{Res}}(P_{i,j})}{\widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1})} = \frac{\sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1}) \times \widehat{\text{Res}}(P_{i,j})}{\sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1})^2}$$

et

$$\lambda^I = \frac{1}{\sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s})^2} \sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s})^2 \frac{\widehat{\text{Res}}(I_{i,j})}{\widehat{\text{Res}}(Q_{i,s})} = \frac{\sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}) \times \widehat{\text{Res}}(I_{i,j})}{\sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s})^2}$$

Nous rééchantillons les résidus définis par le modèle Munich Chain Ladder en considérant uniquement les résidus du triangle de paiements et de charges. Ainsi le rééchantillonnage s'opère par couple de résidus $Z_{i,j} = (\text{res}_{i,j}^P, \text{res}_{i,j}^I)$.

Afin de corriger l'erreur de processus liée au modèle, les montants finaux de règlements et charges sinistres seront resimulés à l'aide d'une loi gamma.

Ce choix se justifie au travers des hypothèses du modèle :

En effet, si la loi des montants est inconnue, ces hypothèses imposent que la loi envisagée soit à support positif (dans le cas contraire les hypothèses de variance pourraient ne pas être vérifiées à cause d'une « variance négative ») et entièrement déterminée par la valeur de ses deux premiers moments (espérance et variance).

Nous pouvons initialiser notre algorithme Munich Chain Ladder à partir des étapes suivantes :

Etape 1 initialisation

Dans le cadre de la méthode Munich Chain Ladder, les coefficients sont calculés pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n-1\}$:

$$\begin{cases} \widehat{f}_{i,j}^{P, \text{MCL}} = \widehat{f}_j^P + \widehat{\lambda}^P \times \frac{\widehat{\sigma}_j^P}{\widehat{\rho}_j^P} \times \left(\frac{\widehat{I}_{i,j}}{\widehat{P}_{i,j}} - \widehat{q}_j^{-1} \right) \\ \widehat{f}_{i,j}^{I, \text{MCL}} = \widehat{f}_j^I + \widehat{\lambda}^I \times \frac{\widehat{\sigma}_j^I}{\widehat{\rho}_j^I} \times \left(\frac{\widehat{P}_{i,j}}{\widehat{I}_{i,j}} - \widehat{q}_j \right) \end{cases}$$

Les coefficients $\widehat{\sigma}_{n-1}^P$ et $\widehat{\sigma}_{n-1}^I$ sont calculés à l'aide de l'extrapolation de Mack basée sur son article :

$$\begin{cases} \widehat{\sigma}_{n-1}^P{}^2 = \min \left(\frac{\widehat{\sigma}_{n-2}^P{}^4}{\widehat{\sigma}_{n-3}^P{}^2}, \min \left(\widehat{\sigma}_{n-3}^P{}^2, \widehat{\sigma}_{n-2}^P{}^2 \right) \right) \\ \widehat{\sigma}_{n-1}^I{}^2 = \min \left(\frac{\widehat{\sigma}_{n-2}^I{}^4}{\widehat{\sigma}_{n-3}^I{}^2}, \min \left(\widehat{\sigma}_{n-3}^I{}^2, \widehat{\sigma}_{n-2}^I{}^2 \right) \right) \end{cases}$$

Etape 2 Résidus

Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2 / i + j \leq n$, les résidus et les résidus à ajuster sont calculés :

$$\begin{cases} \text{res}_{\text{MCL}, i, j}^P = \frac{f_{i,j}^P - \widehat{f}_{i,j}^{P, \text{MCL}}}{\widehat{\sigma}_j^P} \times \sqrt{P_{i,j}} \text{ où } f_{i,j}^P = \frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} & \text{res}_{\text{MCL}, i, j}^{P, \text{ajusté}} = \sqrt{\frac{n-j}{n-j-1}} \times \text{res}_{\text{MCL}, i, j}^P \\ \text{res}_{\text{MCL}, i, j}^I = \frac{f_{i,j}^I - \widehat{f}_{i,j}^{I, \text{MCL}}}{\widehat{\sigma}_j^I} \times \sqrt{I_{i,j}} \text{ où } f_{i,j}^I = \frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} & \text{res}_{\text{MCL}, i, j}^{I, \text{ajusté}} = \sqrt{\frac{n-j}{n-j-1}} \times \text{res}_{\text{MCL}, i, j}^I \end{cases}$$

Etape 3 Bootstrap

1. Bootstrap à partir des résidus ajustés (l'itération n°s est décrite ci-dessous ($s \in \llbracket 1, N \rrbracket$))

a) Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2 / i + j \leq n$, ré-échantillonnage des résidus par couple $Z_{i,j} = (\text{res}_{\text{MCL } i,j}^{\text{P,ajusté } (s)}, \text{res}_{\text{MCL } i,j}^{\text{I,ajusté } (s)})$ et obtention de pseudo-résidus après tirage aléatoire avec remise $\widetilde{Z}_{i,j} = (\widetilde{\text{res}}_{\text{MCL } i,j}^{\text{P,ajusté } (s)}, \widetilde{\text{res}}_{\text{MCL } i,j}^{\text{I,ajusté } (s)})$

b) Le rééchantillonnage précédent fournit deux nouvelles familles de résidus qui permettent de calculer par la suite deux triangles de pseudo-facteurs de développement individuels $(\widetilde{f}_{i,j}^{\text{P}(s)}, \widetilde{f}_{i,j}^{\text{I}(s)})$:

$$\begin{cases} \widetilde{f}_{i,j}^{\text{P}(s)} = \widehat{f}_{i,j}^{\text{MCL}} + \frac{\sqrt{P_{i,j}}}{\widehat{\sigma}_j^{\text{P}}} \times \text{res}_{\text{MCL } i,j}^{\text{P,ajusté}} \\ \widetilde{f}_{i,j}^{\text{I}(s)} = \widehat{f}_{i,j}^{\text{MCL}} + \frac{\sqrt{I_{i,j}}}{\widehat{\sigma}_j^{\text{I}}} \times \text{res}_{\text{MCL } i,j}^{\text{I,ajusté}} \end{cases}$$

c) La troisième sous-étape du Bootstrap consiste en l'estimation des pseudo-facteurs de développement $(\widehat{f}_j^{\text{P}(s)})_{1 \leq j \leq n-1}$ et $(\widehat{f}_j^{\text{I}(s)})_{1 \leq j \leq n-1}$, ainsi que des pseudo-variances de Chain Ladder $(\widehat{\sigma}_j^{\text{P}(s)})_{1 \leq j \leq n-2}$ et $(\widehat{\sigma}_j^{\text{I}(s)})_{1 \leq j \leq n-2}$

$$\begin{cases} \widehat{f}_j^{\text{P}(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} P_{i,j} \times \widetilde{f}_{i,j}^{\text{P}(s)}}{\sum_{i=1}^{n-j} P_{i,j}} & \left\{ \widehat{\sigma}_j^{\text{P}(s)2} = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} P_{i,j} \times \left(\widetilde{f}_{i,j}^{\text{P}(s)} - \widehat{f}_j^{\text{P}(s)} \right)^2 \right. \\ \widehat{f}_j^{\text{I}(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} I_{i,j} \times \widetilde{f}_{i,j}^{\text{I}(s)}}{\sum_{i=1}^{n-j} I_{i,j}} & \left. \left\{ \widehat{\sigma}_j^{\text{I}(s)2} = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} I_{i,j} \times \left(\widetilde{f}_{i,j}^{\text{I}(s)} - \widehat{f}_j^{\text{I}(s)} \right)^2 \right. \right. \end{cases}$$

Puis l'estimation des paramètres de corrélation de Munich Chain Ladder est faite :

$$\begin{cases} \widehat{\lambda}^{\text{P}(s)} = \frac{\sum_{i+j \leq n} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,j}^{-1}) \times \widehat{\text{Res}}(P_{i,j})^{(s)}}{\sum_{i+j \leq n} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,j}^{-1})^2} \text{ où } \widehat{\text{Res}}(P_{i,j})^{(s)} = \frac{\widetilde{f}_{i,j}^{\text{P}(s)} - \widehat{f}_j^{\text{P}(s)}}{\widehat{\sigma}_j^{\text{P}(s)}} \times \sqrt{P_{i,j}} \\ \widehat{\lambda}^{\text{I}(s)} = \frac{\sum_{i+j \leq n} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,j}) \times \widehat{\text{Res}}(I_{i,j})^{(s)}}{\sum_{i+j \leq n} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,j})^2} \text{ où } \widehat{\text{Res}}(I_{i,j})^{(s)} = \frac{\widetilde{f}_{i,j}^{\text{I}(s)} - \widehat{f}_j^{\text{I}(s)}}{\widehat{\sigma}_j^{\text{I}(s)}} \times \sqrt{I_{i,j}} \end{cases}$$

Nous en déduisons les pseudo-facteurs de développement estimés par Munich Chain Ladder :

$$\begin{cases} \widehat{f}_{i,j}^{\text{MCL}(s)} = \widehat{f}_j^{\text{P}(s)} + \widehat{\lambda}^{\text{P}(s)} \times \frac{\widehat{\sigma}_j^{\text{P}(s)}}{\widehat{\rho}_j^{\text{P}(s)}} \times (Q_{i,j}^{-1} - \widehat{q}_j^{-1}) \\ \widehat{f}_{i,j}^{\text{MCL}(s)} = \widehat{f}_j^{\text{I}(s)} + \widehat{\lambda}^{\text{I}(s)} \times \frac{\widehat{\sigma}_j^{\text{I}(s)}}{\widehat{\rho}_j^{\text{I}(s)}} \times (Q_{i,j} - \widehat{q}_j) \end{cases}$$

d) Le rééchantillonnage a permis d'inclure une erreur d'estimation dans l'estimation des coefficients des pseudo-paramètres de Munich Chain Ladder, il reste à inclure une erreur de processus. Celle-ci est obtenue lors de la simulation des règlements futurs pour chaque montant du triangle inférieur (pour le triangle de charges sinistres et de règlements), à l'aide d'une loi Gamma dont l'espérance et la variance se base sur l'erreur d'estimation.

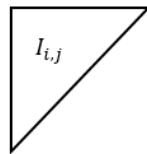
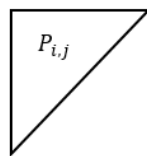
Pour la 1ère diagonale future, c'est-à-dire $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 / i + j = n + 1\}$, nous simulons les montants suivants avec $1 \leq i \leq n + 2$:

$$\begin{cases} P_{i,n-i+2} = \text{Gamma}(\text{esperance} = P_{i,n-i+1} \times \widehat{f_{1,n-i+1}^P}^{\text{MCL}(s)}, \text{variance} = P_{i,n-i+1} \times (\widehat{\sigma_{n-i+1}^P}^{(s)})^2) \\ I_{i,n-i+2} = \text{Gamma}(\text{esperance} = I_{i,n-i+1} \times \widehat{f_{1,n-i+1}^I}^{\text{MCL}(s)}, \text{variance} = I_{i,n-i+1} \times (\widehat{\sigma_{n-i+1}^I}^{(s)})^2) \end{cases}$$

Résumé Schématique de la démarche Bootstrap Munich Chain Ladder

$$(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n - 1\}$$

Inputs

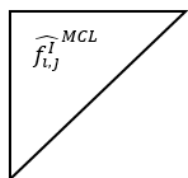
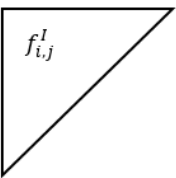
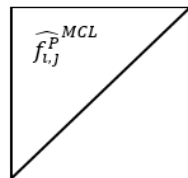
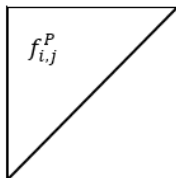


Etape 1 : Calcul initial des quantités suivantes pour $s = 1, \dots, n-1$

$$\widehat{f_{s \rightarrow s+1}^P} \quad \widehat{\sigma_{s \rightarrow s+1}^P}^2 \quad \widehat{Res}(P_{i,s+1}) \quad \lambda^P \quad \widehat{\rho_s^P} \quad \widehat{I_{i,t}} \quad \widehat{q}_s$$

$$\widehat{f_{s \rightarrow s+1}^I} \quad \widehat{\sigma_{s \rightarrow s+1}^I}^2 \quad \widehat{Res}(I_{i,s+1}) \quad \lambda^I \quad \widehat{\rho_s^I} \quad \widehat{P_{i,t}}$$

Etape 2 : Construction des D-triangles et triangles des coefficients $\widehat{f_{i,j}^{MCL}}$

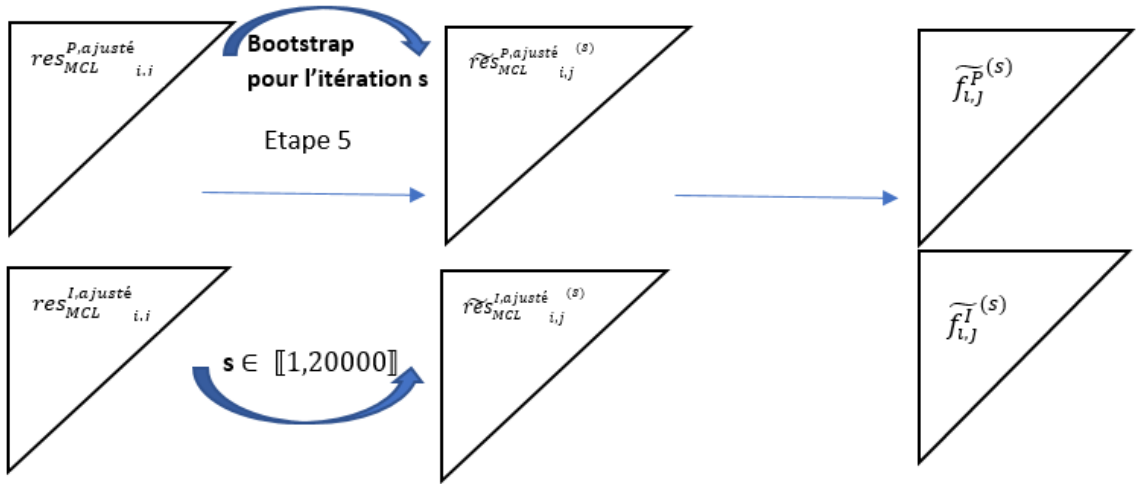


Etape 3 : Recalcul du sigma n-1 pour chaque triangle, par la formule basée sur l'extrapolation de Mack

$$\widehat{\sigma_{n-1}^P}^2 = \min\left(\frac{\widehat{\sigma_{n-2}^P}^4}{\widehat{\sigma_{n-3}^P}^2}, \min(\widehat{\sigma_{n-3}^P}^2, \widehat{\sigma_{n-2}^P}^2)\right)$$

$$\widehat{\sigma_{n-1}^I}^2 = \min\left(\frac{\widehat{\sigma_{n-2}^I}^4}{\widehat{\sigma_{n-3}^I}^2}, \min(\widehat{\sigma_{n-3}^I}^2, \widehat{\sigma_{n-2}^I}^2)\right)$$

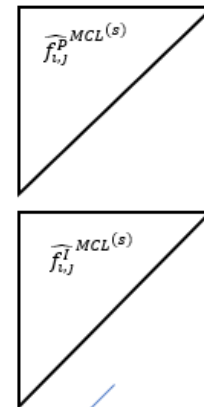
Etape 4 : Construction des triangles de résidus ajustés



Etape 7 : Calcul des quantités relatives à l'itération (s)

$$\begin{matrix} \widehat{f}_j^{P(s)} & \widehat{\sigma}_j^{P(s)^2} & \widehat{\lambda}^{P(s)} \\ \widehat{f}_j^{I(s)} & \widehat{\sigma}_j^{I(s)^2} & \widehat{\lambda}^{I(s)} \end{matrix}$$

Etape 8 : Pseudo D-Triangle de Munich Chain Ladder



Etape 9 : Simulation des triangles inférieurs par loi Gamma de paramètres basés sur les estimateurs précédents

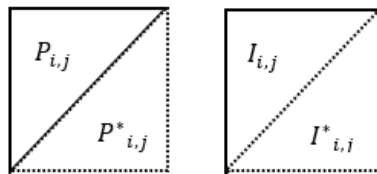


Figure 22 : Résumé du Bootstrap Munich Chain Ladder

2.2.3 Spécificités associées au Risque de Réserve avec charges

Spécificités associées à la diagonale N+1 de projection de la charge sinistres :

- Nous retenons pour les délais 20 et 21 des coefficients de développement égaux à la moyenne des coefficients 13 à 19.
- La méthodologie Actuary In The Box utilisée en complément du modèle triangle de règlements ne fait pas partie du cadre de modélisation du Risque de Réserve sur triangle de charges.

Nous disposons maintenant des éléments pour calculer le SCR Réserve brut de réassurance non chargé hors ajustements. De façon similaire à la partie 2.1, le passage net de réassurance va être problématique au niveau de l'XS, car ce traité nécessite l'information sur les montants individuels des sinistres que nous ne possédons pas dans notre modèle sur données agrégées.

L'ordre d'application des traités reste le même : le traité Quote Part s'applique sur le montant net de réassurance XS.

Pour évaluer les cessions XS, nous définissons une règle simplifiée d'application « globale » : à partir des simulations réalisées dans le modèle BE sophistiqué du 31/12/N, nous déterminons pour chaque exercice, par simulation, un taux de cession XS défini comme :

$$\text{taux}_{XS}(\text{exouv}, \text{sim}) = \frac{\sum_{\text{inv} \leq N} R_{\text{histo_XS}}(\text{exouv}, \text{inv}) + \sum_{\text{inv} > N} R_{XS}(\text{exouv}, \text{sim}, \text{inv}) \times f_{\text{inv}}}{\sum_{\text{inv} \leq N} R_{\text{histo}}(\text{exouv}, \text{inv}) + \sum_{\text{inv} > N} R_{\text{proj}}(\text{exouv}, \text{sim}, \text{inv}) \times f_{\text{inv}}}$$

Avec les notations suivantes :

exouv : exercice d'ouverture, ici considéré en base réclamation

inv : délai de développement, assimilé ici au numéro d'inventaire

sim : numéro de simulation, $\text{sim} \in \llbracket 1, 20\,000 \rrbracket$

f_{inv} : facteur d'actualisation associé à l'inventaire inv

$R_{\text{histo}}(\text{exouv}, \text{inv})$: montant des règlements historiques pour l'exercice de réclamation exouv à l'inventaire inv donné

$R_{\text{proj}}(\text{exouv}, \text{simulation}, \text{inv})$: montant des règlements futurs simulé au cours de la simulation sim pour l'exercice de réclamation exouv à l'inventaire inv donné

$R_{\text{histo_XS}}(\text{exouv}, \text{inv})$: montant des règlements historiques cédés en XS pour l'exercice de réclamation exouv à l'inventaire inv donné

$R_{XS}(\text{exouv}, \text{sim}, \text{inv})$: montant des règlements futurs cédés au titre du traité XS simulé au cours de la simulation sim pour l'exercice de réclamation exouv à l'inventaire inv donné

S'agissant de l'évaluation de la charge N moyenne cédée au titre du traité XS :

Pour chaque exercice de réclamation, nous utilisons un taux moyen de cession XS calculé sur l'ensemble des simulations, pour l'appliquer au montant de la charge brut N :

$$\text{taux}_{XS}(\text{exouv}) = \frac{\sum_{\text{sim}=1 \dots 20000} \text{taux}_{XS}(\text{exouv}, \text{sim})}{20000}$$

Le montant de charge (totale), cédée au titre des traités XS, est calculé en sommant les montants des charges cédées au titre du traité XS de chaque exercice de réclamation N-20 à N.

Pour l'évaluation de la charge N+1 cédée au titre du traité XS dans chaque simulation issue du modèle Munich Chain Ladder nous utilisons pour chaque exercice de réclamation la règle suivante :

- 1) Les charges brutes « simulées » dans le modèle sophistiqué du BE 31/12/N obtenues à partir des simulations des règlements futurs, sont triées dans l'ordre croissant.
- 2) Nous notons $\text{taux}_{XS}(\text{exouv}, k)$ le taux de cession XS associé à la simulation correspondant à la k-ème charge de la liste triée $k \in \llbracket 1, 20\,000 \rrbracket$.
- 3) Les charges brutes N+1 simulées obtenues dans le cadre de la présente méthode Munich Ladder sont triées dans l'ordre croissant : $\text{Charge}_{\text{brut}}^{N+1}(k')$ où $k' \in \llbracket 1, 20\,000 \rrbracket$ désigne le rang de la charge simulée dans la liste triée.
- 4) Nous déterminons le montant de charge correspondant cédée au titre du traité XS avec la règle suivante :

$$\text{Charge}_{XS}^{N+1}(\text{exouv}, k') = \text{Charge}_{\text{brut}}^{N+1}(\text{exouv}, k') \times \text{taux}_{XS}(\text{exouv}, k')$$

Enfin, le montant de charge (totale), cédée au titre des traités XS, est calculé en sommant les montants des charges cédées au titre du traité XS de chaque exercice de réclamation N-20 à N. Nous déterminons ensuite, dans le cadre du calcul de la charge moyenne N ou des simulations de charge N+1 et pour chaque exercice de réclamation, le montant cédé des charges aux titres des traités Stop-Loss et QP :

- 5) Le montant de charge cédée au titre du traité SL se calcule en comparant les « loss ratios » de l'exercice en vigueur à ceux définis dans le traité : la « priorité » dans la limite de « la portée ». La charge utilisée dans le calcul du loss ratio est la charge nette des cessions XS.
- 6) Le montant de charge cédée au titre du traité QP se calcule en appliquant le taux de QP en vigueur pour l'exercice de réclamation considéré au montant de charge sinistres nette des cessions XS

De façon similaire, le montant de charge (totale), cédée au titre des traités QP et SL, est calculé en sommant les montants des charges cédées au titre des traité QP et SL de chaque exercice de réclamation N-20 à N.

A ce stade, nous sommes théoriquement en mesure d'évaluer le montant du SCR Réserve net de réassurance non chargé hors ajustements. Le paramétrage des coefficients d'ajustements vient s'ajuster à notre nouveau jeu de données. Nous rappelons la formule du SCR Réserve brut :

$$\text{SCR}_{\text{réserve}}^{31/12/N} = ((\text{VaR}_{99,5}[\text{CDR}] - \overline{\text{CDR}}) \times (1 + \alpha) \times (1 + \beta))$$

- L'ajustement β intègre les exigences supplémentaires ajoutées au MIP, liées à certains risques non suffisamment pris en compte pour assurer la pertinence du modèle. Ce coefficient est destiné à disparaître, lorsque le modèle principal justifiera la pleine prise en compte de ces risques spécifiques. Pour l'instant, cet ajustement est maintenu dans le même rapport que son poids actuel dans le modèle du Risque de Réserve règlements.

- L'ajustement α est actuellement déterminé par la formule suivante :

$$\alpha = \frac{\text{BE net N sophistiqué y compris sinistres atypiques}}{\text{BE net N sophistiqué ex } \geq N - 20, \text{ hors sinistres atypiques}} - 1$$

Ce coefficient retranscrit le poids des provisions associées aux sinistres enregistrés y compris sinistres de sang, Epinal et subséquente, rapporté aux provisions associées aux exercices $\geq N - 20$ hors sinistres particuliers (sang, Epinal et subséquente). Injecté dans la formule du SCR Réserve, il permet d'intégrer le capital à immobiliser au titre des sinistres réclamés sur une année antérieure à N-20, du surcoût associé aux sinistres atypiques tels que Epinal, sang et subséquente. Cela sous-entend une hypothèse forte dans notre modèle, celle de considérer la volatilité de ces sinistres exclus est identique à celle des autres sinistres (une hypothèse conservatrice qui fait d'objet d'études menées en parallèle chaque année). En supposant cela, le poids relatif de cet ajustement dans la charge devrait rester constant, ainsi nous estimons que ce coefficient ne devrait pas bouger en considérant un triangle de charges sinistres.

Ainsi nous venons d'implémenter la méthode Munich Chain Ladder stochastique. Couplée en parallèle avec une approche simulateur Bootstrap développée par les auteurs LIU et VERRALL, celle-ci permet d'obtenir une distribution de la charge N+1 cohérente.

Toutefois le cadre de provisionnement utilisé est celui présenté par Mack et repose sur des hypothèses fortes sur nos données (hypothèse sur la variance et les développements de sinistres). Ainsi nous souhaitons mettre en œuvre une autre approche de modélisation plus souple basée sur la logique bayésienne, et qui plus est permettra une comparaison des résultats avec ce précédent modèle.

2.3 Les méthodes Bayésiennes

La méthodologie que nous allons développer dans cette partie offre davantage de flexibilité en termes de modélisation et d'hypothèses, au prix d'une complexité accrue d'implémentation.

2.3.1 La logique Bayésienne

Posons $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un échantillon de réalisations de la variable aléatoire X régi par une distribution de probabilité dépendant du paramètre θ . La mise en œuvre d'un modèle statistique peut être réalisée selon deux courants de pensée :

L'approche des statisticiens fréquentistes exploite le modèle en fixant une valeur au paramètre $\theta = \theta_0$

L'approche des bayésiens suppose détenir une information sur le paramètre θ . Cette information prend la forme d'une loi sur l'espace des paramètres Θ noté $\Pi(\theta)$ appelé loi a priori et représentant toute l'information connue au sujet de la valeur du paramètre θ . Nous spécifions une distribution de probabilité conditionnelle de notre échantillon $p(x|\theta)$. La loi a priori sur θ couplée à l'observation des données $p(x|\theta)$ nous permet d'obtenir la distribution jointe suivante :

$$p(\theta, x) = p(x|\theta) \times \Pi(\theta)$$

Nous considérons à présent des variables aléatoires continues. En intégrant la quantité précédente, nous obtenons la distribution marginale de X :

$$p(x) = \int_{\theta} p(x|\theta) \times \Pi(\theta) d\theta$$

Par l'application de la formule de Bayes, la distribution a posteriori pour θ est calculée comme suit :

$$\Pi(\theta|x) = \frac{p(\theta, x)}{p(x)} = \frac{p(x|\theta) \Pi(\theta)}{p(x)} = \frac{p(x|\theta) \Pi(\theta)}{\int_{\theta} p(x|\theta) \Pi(\theta) d\theta}$$

Enfin le dénominateur ne dépendant pas du paramètre θ , l'expression précédente peut être considérée proportionnelle à $p(x|\theta) \times \Pi(\theta)$.

Ainsi la distribution prédictive d'une nouvelle observation notée x' connaissant l'échantillon initial x est finalement obtenue par :

$$p(x'|x) = \int_{\theta} p(x', \theta|x) d\theta = \int_{\theta} p(x'|x, \theta) \Pi(\theta|x) d\theta = \int_{\theta} p(x'|\theta) \Pi(\theta|x) d\theta$$

Remarque : l'étape de simplification ci-dessus suppose l'indépendance conditionnelle entre x et x' par rapport à θ .

En résumé, pour utiliser un modèle bayésien, nous devons nous munir d'une distribution a priori $\Pi(\theta)$. Nous spécifions ensuite $p(x|\theta)$ aussi appelé vraisemblance de X sachant $\theta = \theta$, afin d'obtenir notre distribution a posteriori $\Pi(\theta|x)$ par la formule :

$$\Pi(\theta|x) = \frac{p(x|\theta) \Pi(\theta)}{\int_{\theta} p(x|\theta) \Pi(\theta) d\theta} \propto p(x|\theta) \Pi(\theta)$$

Trois types d'approches peuvent être utilisées pour le choix de la loi a priori :

- L'approche informative qui consiste à choisir et calibrer une loi qui reflète l'expérience du passé, un avis d'expert ou une intuition du concepteur.

- L'approche partiellement informative consistant à sélectionner une loi a priori qui simplifie le calcul de $\Pi(\theta|x)$. Cette simplification est basée sur la notion de loi conjuguée. Rappelons qu'une famille F de distribution sur Θ est conjuguée pour la loi $p(x|\theta)$ si pour tout $\Pi \in F$ la distribution a posteriori $\Pi(\cdot|x)$ appartient également à F . Ainsi en se servant du constat $\Pi(\theta|x) \propto p(x|\theta) \times \Pi(\theta)$ il est possible de connaître la loi de notre distribution a posteriori $\Pi(\theta|x)$ pour une partie des lois plus ou moins usuelles dont les plus courantes ont été récapitulées ci-dessous :

$f(x \theta)$	$\pi(\theta)$	$\pi(\theta x)$
$\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$	$\mathcal{N}(\mu, \tau^2)$	$\mathcal{N}\left(\frac{\sigma^2\mu + \tau^2x}{\sigma^2 + \tau^2}, \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}\right)$
$\mathcal{P}(\theta)$	$Ga(\alpha, \beta)$	$Ga(\alpha + x, \beta + 1)$
$Ga(\nu, \theta)$	$Ga(\alpha, \beta)$	$Ga(\alpha + \nu, \beta + x)$
$B(n, \theta)$	$Be(\alpha, \beta)$	$Be(\alpha + x, \beta + n - x)$
$\mathcal{N}(\mu, \frac{1}{\theta})$	$Ga(\alpha, \beta)$	$Ga(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{(\mu-x)^2}{2})$

Figure 23 : Tableau des principales lois conjuguées

- L'approche non informative pour laquelle la loi choisie intègre peu d'informations. Cette approche est privilégiée lorsque les données parlent d'elles-mêmes. Les lois concernées sont principalement la loi de Jeffreys, la loi uniforme.

Le modèle bayésien précédent peut être généralisé au cas où le paramètre θ devient multidimensionnel : $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$

$$\Pi(\theta|x) = \frac{p(x|\theta) \Pi(\theta)}{\int_{\theta_1} \dots \int_{\theta_n} p(x|\theta) \Pi(\theta) d\theta} \propto p(x|\theta) \Pi(\theta)$$

Dans le cas où la loi a priori n'est pas partiellement informative, le calcul peut devenir très délicat mais des techniques de simulation adéquates permettent de gérer cette complexité.

La méthode MCMC (Monte-Carlo Markov Chain) fait partie de l'une d'elles : elle consiste à approximer la densité du paramètre θ à l'aide d'une chaîne de Markov de mesure invariance g . Nous pouvons ensuite considérer l'estimateur de θ pour $V_1, \dots, V_n \sim \Pi(\theta|x)$ suivant : $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i$ (Estimateur de Monte-Carlo)

Nous rappelons ci-dessous quelques propriétés des chaînes de Markov :

Soit $\{X_t; t\}$ un processus stochastique défini comme une suite de variables aléatoires indicées sur le temps t . Nous considérons un processus à temps discret pour $t \in \mathbb{N}$ et notons E , l'espace d'état fini pour une chaîne de Markov.

Ainsi le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov si $P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t)$ autrement dit la loi conditionnelle sur X_{t+1} ne dépend que la valeur à l'état précédent X_t du processus. Nous notons également $P(X_{t+1} | X_t, \dots, X_0) = K(X_{t+1} | X_t)$ où $K : E \times E$ est appelé noyau de transition.

La théorie ergodique implique sous certaines conditions vérifiées la plupart du temps (telle que la finitude des états de la chaîne), la convergence de la chaîne de Markov vers la mesure stationnaire $g : P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x_{t+1})$

Des algorithmes ont été développés autour de cette méthode MCMC tel que l'algorithme Metropolis Hasting que nous allons développer à présent.

Ce dernier nécessite la loi a priori $\Pi(\theta)$, la vraisemblance $p(x|\theta)$ ainsi que la valeur initiale $\theta^{t=0}$. Remarque : θ peut faire référence à un unique paramètre (cas particulier du Gibbs sampler) ou un vecteur de paramètres dans le cas multidimensionnel.

Nous devons également fixer une loi de tirage $h(\theta^{t+1} | \theta^t)$ qui donne la nouvelle valeur de θ connaissant la précédente.

A chaque itération en commençant par $t=0$, l'algorithme simule :

- une variable $U \sim \text{Uniforme}(0,1)$
- θ^* une réalisation de $h(\theta^{t+1} | \theta^t)$
- le rapport $R = \frac{p(x|\theta^*) \cdot \Pi(\theta^*)}{p(x|\theta^t) \cdot \Pi(\theta^t)} \times \frac{h(\theta^t | \theta^*)}{h(\theta^* | \theta^t)}$
- l'étape de rejet : Si $U < R$ alors $\theta^{t+1} = \theta^*$ sinon $\theta^{t+1} = \theta^t$

Après convergence de la chaîne de Markov, une distribution limite est obtenue : il s'agit de la loi a posteriori.

2.3.2 Le modèle CRC en théorie

Glenn Meyers a proposé dans ses travaux récents une application pour des triangles de règlements et charge sinistres, basée sur la logique de l'algorithme Metropolis Hasting.

Dans son article, la loi a priori est supposée informative et est spécifiée à l'aide de l'historique du triangle considéré, du montant du ratio de perte à l'ultime ainsi que des montants de primes perçus pour chaque exercice de réclamation.

Le théorème ergodique garantit la convergence des chaînes de Markov (qui respectent les conditions d'application du théorème), cependant la vitesse de convergence peut être très variable en fonction du modèle spécifié (fortement dépendant de la loi de tirage $h(\theta^{t+1} | \theta^t)$ utilisée). En partant de ce constat, Meyers a optimisé différents modèles afin que la chaîne atteigne le plus rapidement son état stationnaire. Dans ce mémoire nous choisissons de se concentrer sur son modèle CRC (Cross-Classified). Dans celui-ci, la loi a priori utilisée est une log-normale, une loi à support dans R_+ qui simule des montants positifs. Cette loi possède deux paramètres :

- un paramètre de la moyenne μ ,
- un paramètre de la dispersion σ .

Ces deux éléments intègrent des informations connues sur nos données et intuitions statistiques.

Le modèle spécifié est un modèle à facteurs dans lequel nos paramètres dépendent des deux dimensions du triangle, avec un facteur par modalité d'année de réclamation et de développement.

Les notations propres au modèle sont :

- d : délai de développement de notre triangle
- w : indice de l'année de réclamation de notre triangle
- C_{wd} : montant du triangle pour l'année " w " au délai " d "
- μ_{wd} : moyenne de la loi log-normale pour l'année " w " au délai " d "
- σ_d : écart type de la loi log-normale au délai " d "

Une hypothèse est formulée sur les écarts types : $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_d$

Cette intuition est basée sur le constat qu'à mesure que le délai augmente, notre connaissance sur nos sinistres réclamés s'améliore et nos montants des charges ont tendance à se stabiliser diminuant ainsi la volatilité.

Ainsi dans le cas du triangle de liquidation, les paramètres de notre loi a priori sont des vecteurs multidimensionnels. Pour le cas d'un triangle de taille 21x21, les calculs sont les suivants :

$$\sigma_d^2 = \sum_{i=1}^{21} a_i \text{ où } a_i \sim \text{Uniforme}(0,1)$$

$$\mu_{wd} = \ln(\text{Prime}_w) + \ln(\text{Ratio}) + \alpha_w + \beta_d$$

où :

$$\ln(\text{Ratio}) \sim \text{Normale}(\ln(\text{Ratio}_S/P_Attendu), \sqrt{21})$$

$$\alpha_w \sim \text{Normale}(0, \sqrt{21}), \text{ avec } \alpha_1 = 0$$

$$\beta_d \sim \text{Normale}(0, \sqrt{21}), \text{ avec } \beta_{21} = 0$$

Le Ratio Sinistre sur Prime peut être vu comme une information exogène qui est connu pour la branche d'assurance considérée.

Une fois l'algorithme exécuté, tous les vecteurs de paramètres simulés à la suite de la convergence de la chaîne de Markov sont des réalisations possibles de notre loi a posteriori.

Dans le cas du calcul du Risque de Réserve, nous cherchons à calculer la diagonale N+1 de notre triangle. Dans la section précédente, nous simulons ces dernières sur la base de 20 000 simulations Bootstrap. Dans le cas de cette nouvelle approche, nous considérons les 20 000 réalisations des vecteurs α_w, β_d simulés après convergence de la chaîne de Markov et procédons au calcul des montants de charges du triangle inférieur en utilisant les formules de l'article de Glenn Meyers :

$$\mu_{wd} = \ln(\text{Prime}_w) + \ln(\text{Ratio}) + \alpha_w + \beta_d$$

$$C_{wd} \sim \text{LogNormale}(\mu_{wd}, \sigma_d)$$

En conclusion nous avons développé une approche bayésienne basée sur les chaînes de Markov. Bien que celles-ci furent étudiés dès les années 1930 pour résoudre des problèmes en physique nucléaire de grande complexité, leur application aux modèles statistiques de type bayésien

est beaucoup plus récente. Il aura fallu attendre le développement des techniques de simulation informatique pour concevoir des algorithmes telle que Metropolis Hasting afin de doter cette approche d'une réelle application pratique pour les statisticiens. En effet les modèles MCMC dont fait partie Metropolis Hasting privilégient avant tout l'aspect simulateur pour approcher la solution des problèmes statistiques au détriment des théorèmes et équations mathématiques comme cela a longtemps été d'usage. Le modèle CRC développé par l'auteur Glenn Meyers s'inscrit dans la lignée de l'algorithme Metropolis Hasting et présente l'avantage de s'appliquer à des triangles de liquidations. De plus les éléments manipulés sont facilement compréhensibles (le ratio S/P, les montants des cotisations), et sur lesquels il est possible d'intégrer des jugements d'expert par exemple.

A présent nous pouvons aborder à travers une nouvelle grande section la mise en œuvre pratique des différents modèles développés précédemment. Cette nouvelle partie sera l'occasion de répondre également aux problématiques associées aux nouvelles données de charges considérées, à savoir la construction de notre variable de charge, la vision retenue pour l'évaluation de notre provision, la profondeur d'historique. Nous envisagerons différents scénarii et les ferons évoluer au fil des résultats obtenus pour ces nouvelles évaluations du Risque de Réserve.

Partie 3 – Application au portefeuille de SHAM

Nous passons maintenant à la partie pratique du mémoire. Tout d'abord, la première étape concerne l'extraction de nos données : il s'agit de sélectionner l'ensemble des dossiers dans les bases de l'entreprise et d'en synthétiser les règlements et les charges par année de réclamation et par inventaire. Ces données serviront naturellement pour la construction d'un triangle de règlements et de coûts par année de réclamation et délai de développement.

Le triangle retenu pour la mesure du Risque de Réserve actuel couvre les années N-20 à N. Les travaux sur le mémoire sont faits à partir des données de la clôture 2021. Plusieurs jeux de données, de natures parfois très différentes, seront testés dans le but de challenger les résultats du Risque de Réserve actuel calculé sur un triangle de règlements.

Nous avons opté pour un premier scénario, qualifié de « central », basé sur un jeu de données en vision comptable et dans lesquels nous avons établi un triangle de charges historiques des exercices 2001 à 2021. Cette charge est constituée :

- des règlements passés,
- des montants des provisions comptables dossier/dossier historiques enregistrées à chaque clôture annuelle,
- des montants de provisions IBNER au titre des jurisprudences « CPAM de Dunkerque » (augmentation du coût horaire de la tierce personne) et PGPF (préjudice professionnel de l'enfant handicapé),
- la provision pour frais de gestion est directement intégrée à travers un taux de chargement.

Nous rappelons les enjeux identifiés pour notre nouvelle évaluation basée sur la charge :

- La vérification des hypothèses préalables pour le modèle de Munich Chain Ladder sur le triangle de règlements puis celui de charges sinistres. Ces vérifications seront menées par la suite pour tous les scénarii proposés, sans toutefois faire mention du détail des résultats graphiques comme pour le premier scénario initial.
- La prise en compte de la réassurance : les conditions de réassurance étant propre à chaque exercice de réclamation des sinistres, nous travaillerons dans un premier temps avec une évaluation brute de la charge, sur laquelle nous appliquerons exercice par exercice les différents traités pour déterminer le montant de charge cédée.
- Matching entre provisions comptable et provisions Best Estimate : nous anticipons un écart important entre nos provisions BE et nos provisions comptables, et les évolutions de l'un ne préjugent pas forcément de l'évolution de l'autre.
- L'indexation de nos données : la courbe des taux et nos hypothèses d'inflation ont fluctué au cours du temps. Pour rendre comparable nos évaluations, nous veillerons à nous placer à même courbe des taux. Les règlements et provisions techniques sont retraités en euros constants du dernier inventaire.
Enfin nous utiliserons dans l'ensemble des applications qui vont suivre une courbe des taux EIOPA au format Volatility Adjustment, construite à partir de la somme de la courbe des taux sans risque (Basic Risk Free Rate) et d'un ajustement de la volatilité (Volatility Adjustment).

3.1 Définition du scénario initial et vérification des hypothèses

Le premier jeu de données est basé sur des données de charges et règlements enregistrés à chaque clôture comptable. La dimension des triangles est identique à celle du modèle du Risque de Réserve SHAM actuel (soit une profondeur allant de 2001 à 2021).

Ce scénario initial est donc évalué au 31/12/2021 et repose sur une évaluation des provisions telle qu'enregistrée dans les comptes.

Dans le cadre de l'évaluation du SCR Réserve, nous rappelons l'évaluation du CDR suivante :

$$\text{CDR}' := \text{Charge}^{\text{N}+1} - \overline{\text{Charge}^{\text{N}}}$$

Nous récapitulons la construction de la charge à partir des triangles de charges sinistres ci-dessous :

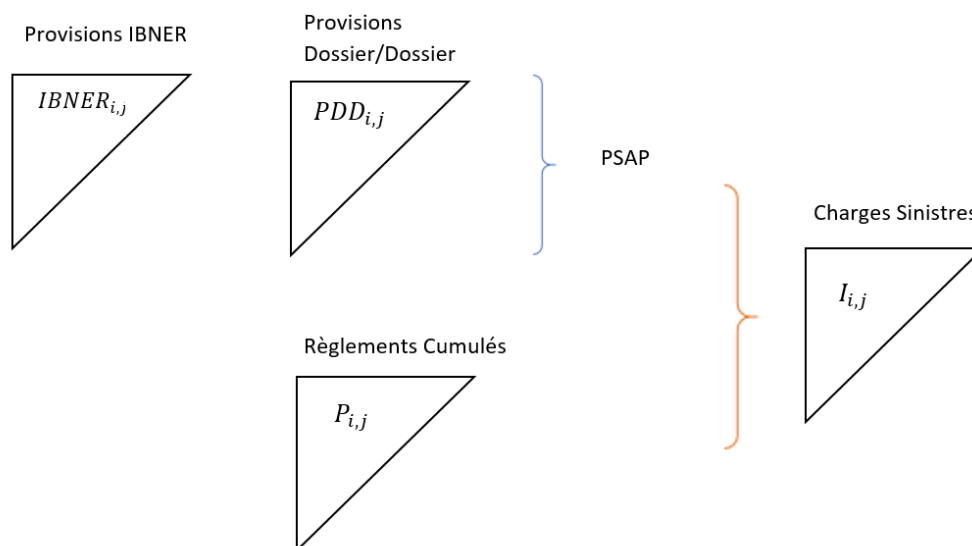


Figure 24 : Construction du triangle de charges dans le premier scénario

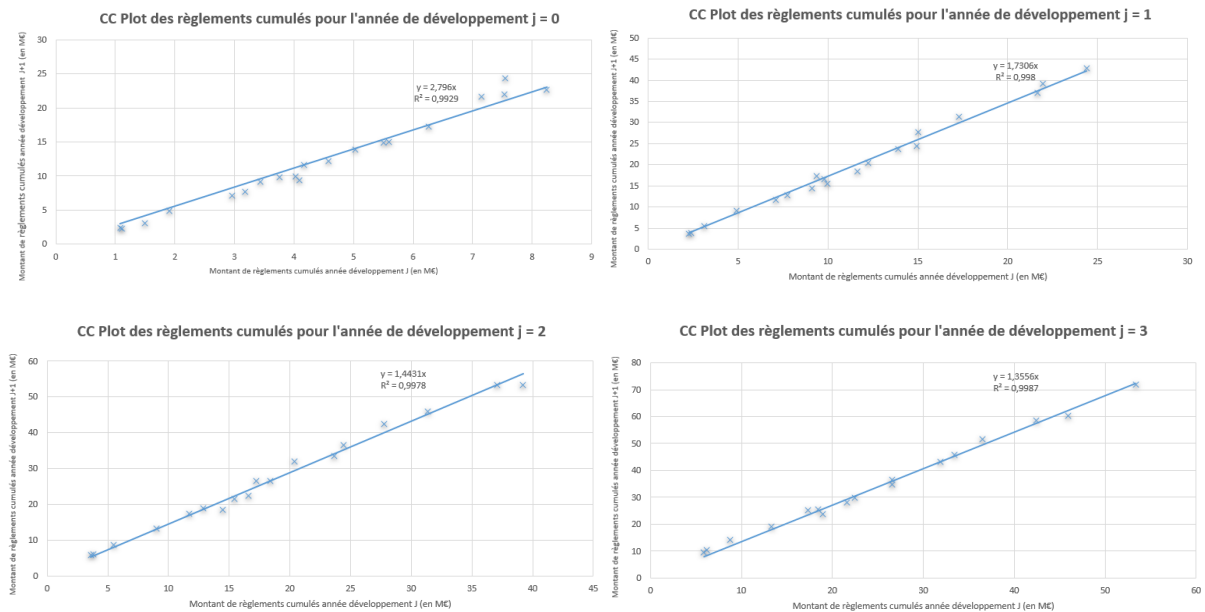
Nous devons ensuite vérifier au préalable les hypothèses du modèle de Munich Chain Ladder sur nos données. Par soucis de concision, ces hypothèses seront uniquement illustrées pour le premier scénario, mais celles-ci seront également contrôlées pour les prochains scénarii.

Les quatre hypothèses testées dans le modèle Munich Chain Ladder sont :

- (P1) l'hypothèse d'espérance,
- (P2) l'hypothèse de variance,
- (P3) l'hypothèse d'indépendance,
- (P4) l'hypothèse de corrélation des résidus des triangles.

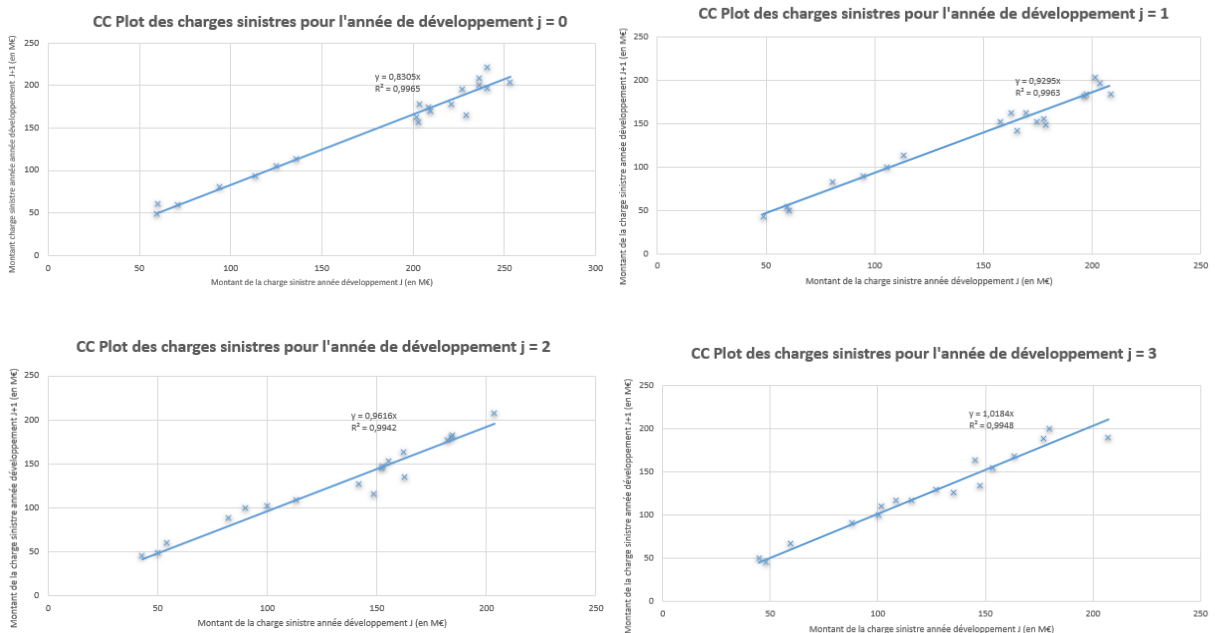
(P1) Hypothèse d'espérance sur Triangle règlements cumulés

L'existence d'une relation linéaire entre les règlements cumulés entre deux années de développement consécutives se visualise graphiquement. La validation consiste à tracer un graphique des couples $(P_{i,j}, P_{i,j+1}), i = 0, \dots, I - j$ appelé CC plot et vérifier que ceux-ci forment relativement une droite passant par l'origine du repère. Exemple pour les 4 premiers développements :



(P1') Hypothèse d'espérance sur Triangle charges sinistres

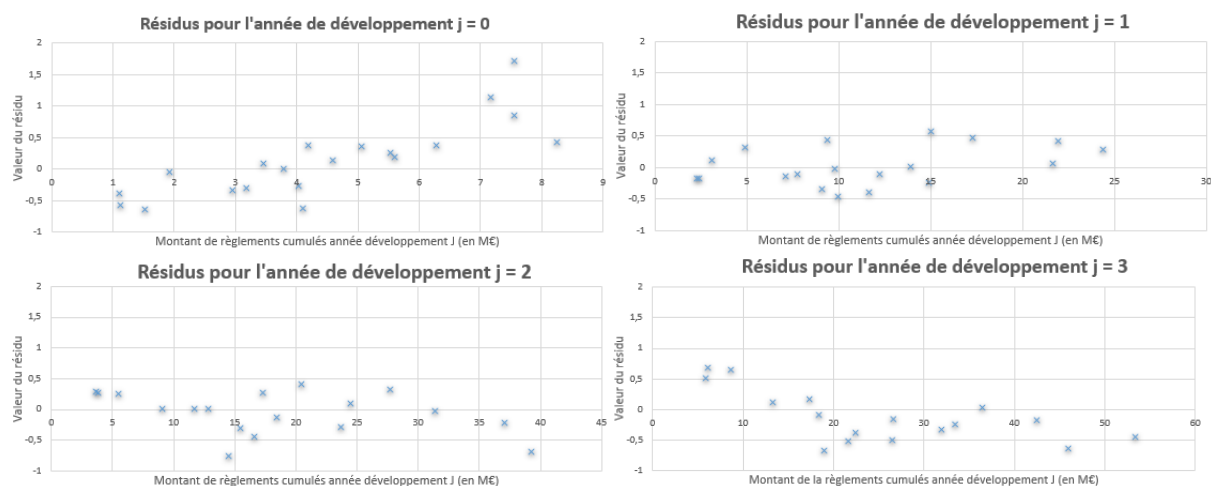
De façon analogue sur le triangle de charges sinistres :



Nous avons forcé l'ordonnée à l'origine à 0. Les coefficients de détermination R^2 sont très proche de 1, ainsi l'adéquation du modèle aux données est très bonne. Ce constat est également fait pour les développements $j > 3$, ainsi nous considérons l'hypothèse d'Espérance vérifiée pour nos données de règlements et charges.

(P2) Hypothèse de variance sur Triangle règlements cumulés

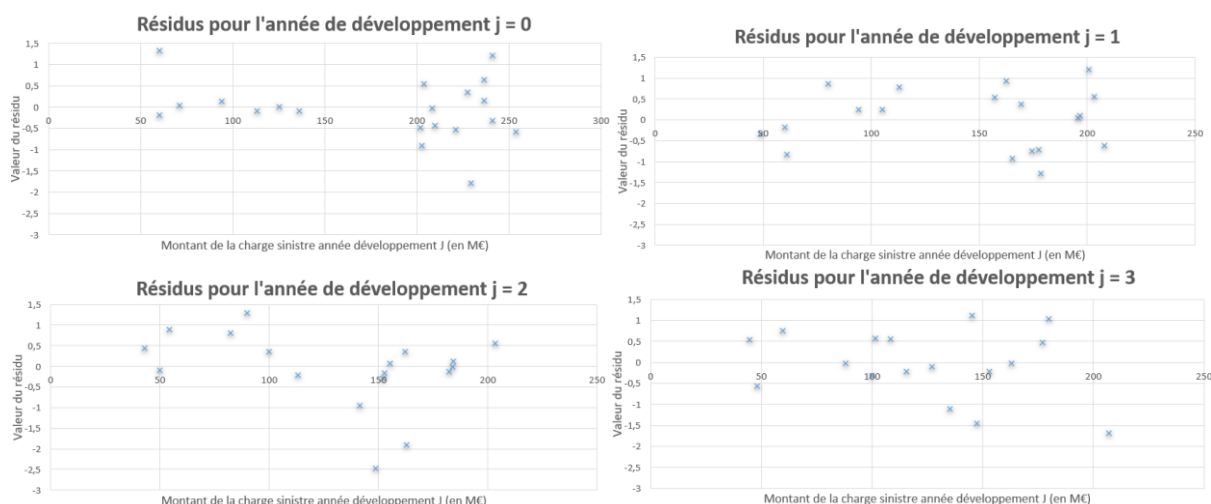
Cette hypothèse peut être validée graphiquement en observant la forme des résidus du modèle, définis par la formule : $r_{i,j} = \frac{P_{i,j+1} - \bar{f}_j P_{i,j}}{\sqrt{P_{i,j}}}$; où \bar{f}_j désigne la cadence moyenne de règlement pour l'année de développement j. Les graphiques $(P_{i,j}; r_{i,j})$ doivent présenter une forme non structurée pour chaque année de développement j.



La forme des résidus est globalement déstructurée pour les premiers développements illustrés ci-dessus. Les développements suivants non représentés valident également l'hypothèse.

(P2') Hypothèse de variance sur Triangle charges sinistres

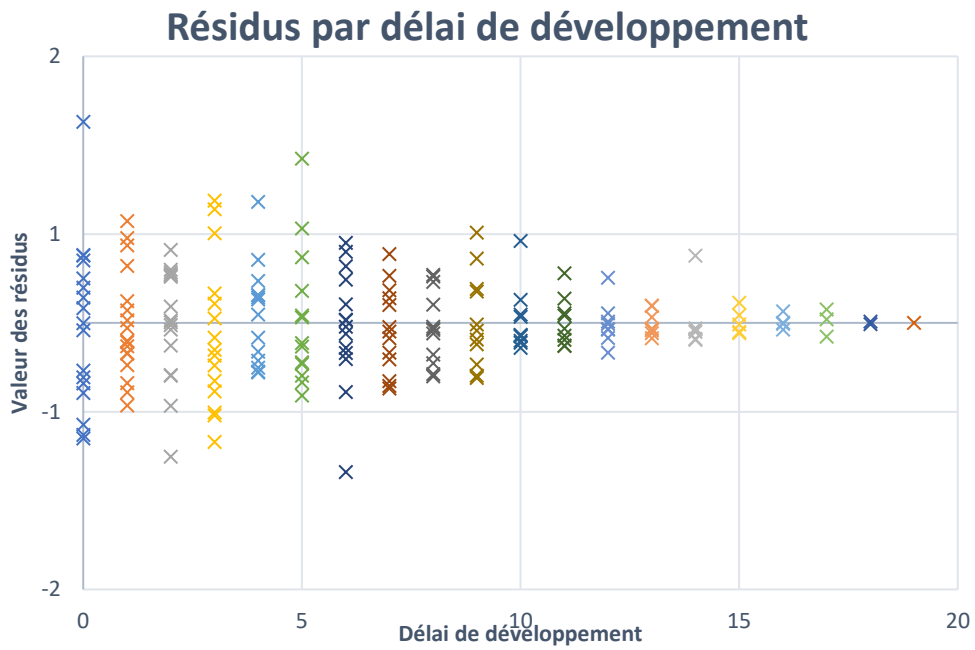
De façon analogue en notant les résidus dans le cas du triangle de charge $r'_{i,j}$:



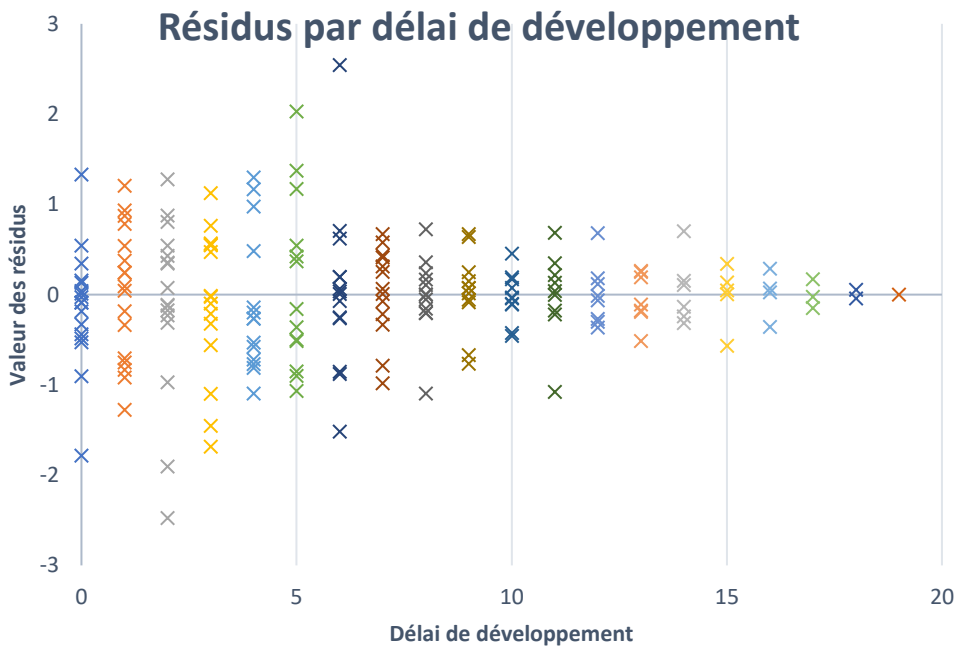
La forme des résidus ne présente pas de tendance particulière pour les quatre premiers développements et suivants.

Ces résidus vus pour l'ensemble des exercices de réclamation doivent également présenter un caractère aléatoire par délai de développement :

Résidus pour le triangle de règlements :



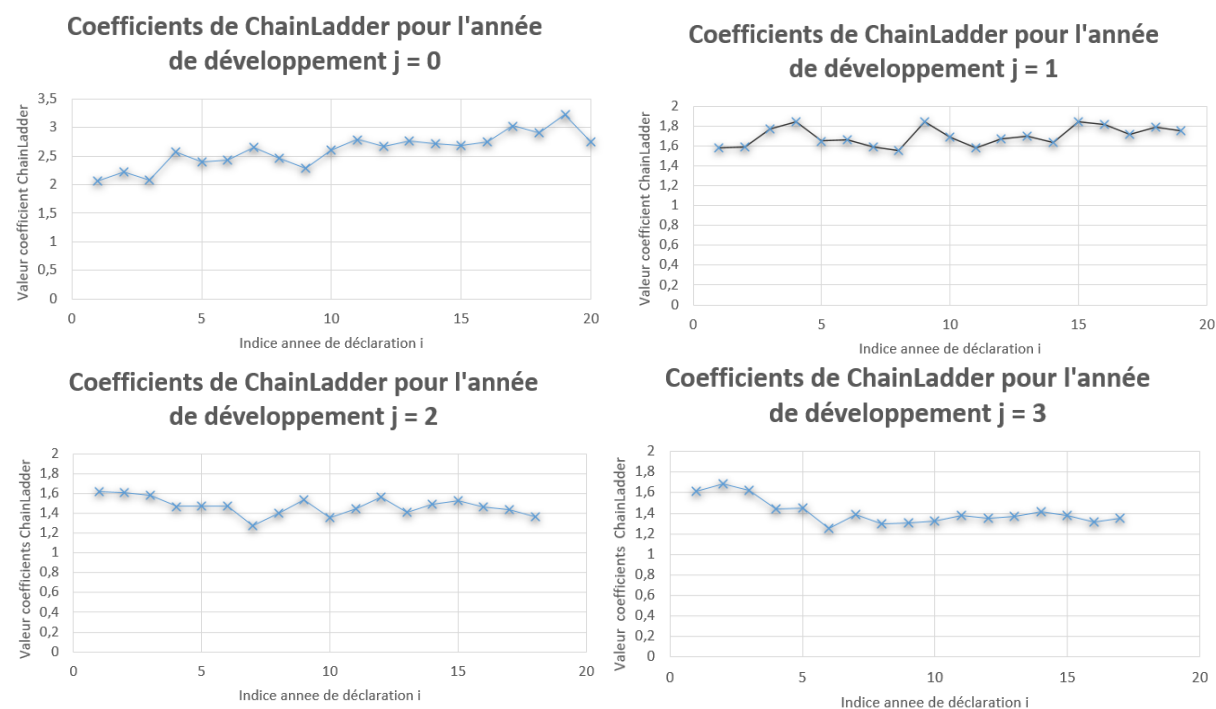
Résidus pour le triangle de charges sinistres :



Les résidus sont bien équirépartis autour de 0 pour ces deux triangles, quel que soit le délai de développement. L'hypothèse de variance est vérifiée pour nos triangles.

(P3) Hypothèse d'indépendance sur Triangle règlements cumulés

La première intuition graphique consiste à observer les facteurs de développement individuels (ou coefficients de Chain Ladder) pour chaque année de réclamation, une situation d'indépendance parfaite se traduirait par une valeur constante des coefficients pour un délai de développement donné indépendamment de l'année de réclamation.



La littérature sur le sujet évoque l'instabilité des coefficients de Chain Ladder pour les premières années de développement, mais ces graphiques ne constituent pas une preuve en soi. Ainsi nous allons mettre en œuvre un test d'indépendance plus robuste pour tester cette hypothèse.

Ce test est basé sur l'article de Mack, et consiste à classer les coefficients de Chain Ladder de chaque délai de développement en deux sous-groupes : les coefficients inférieurs à la médiane du délai de développement sont notés P tandis que les coefficients supérieurs à la médiane sont notés G. Si la valeur du facteur est égale à la médiane (dans le cas des colonnes d'éléments impaires), ce coefficient n'est pas affecté à l'une ou l'autre des catégories précédentes. La validation de l'hypothèse d'indépendance des coefficients par rapport aux années de réclamation, que Thomas MACK reformule « absence d'effet calendaire », nécessite d'obtenir approximativement le même nombre de coefficients classés P et G le long de chacune des diagonales du triangle, chaque facteur de développement ayant la même probabilité d'être classé en état G ou P.

Nous définissons la variable $Z_k = \min(G_k, P_k)$, où G_k et P_k sont les compteurs des éléments G et P associés à la diagonale du triangle k. L'absence d'effet calendaire conduit à émettre l'hypothèse que la variable Z_k suit une loi binomiale, de paramètre $N_k = G_k + P_k$, et $p = 0,5$

Nous pouvons montrer que :

$$E(Z_k) = \frac{N_k}{2} - \binom{N_k - 1}{M_k} \times \frac{N_k}{2^{N_k}} \text{ avec } M_k = \left\lfloor \frac{N_k - 1}{2} \right\rfloor$$

$$V(Z_k) = \frac{N_k \times (N_k - 1)}{4} - \binom{N_k - 1}{M_k} \frac{N_k \times (N_k - 1)}{2^{N_k}} + E(Z_k) - E(Z_k)^2$$

En posant $Z = \sum_k Z_k$ et sous l'hypothèse d'indépendance, nous avons :

$$E(Z) = \sum_k E(Z_k)$$

$$V(Z) = \sum_k V(Z_k)$$

Nous pouvons remplacer la loi de l'estimateur Z par une approximation normale pour un nombre suffisant d'observations (supposé atteint). Ainsi nous considérons l'intervalle de confiance pour la loi normale suivant pour notre test statistique :

$$IC_{1-\alpha}(p) = [E(Z) - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V(Z)}; E(Z) + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V(Z)}],$$

Où :

$1 - \alpha$: niveau de confiance du test, que nous prendrons égal à 95%

$q_{1-\frac{\alpha}{2}}$: quantile de la loi normale de niveau $1 - \frac{\alpha}{2}$

Sachant que $q_{0,975} = 1,96$ pour la loi normale, l'intervalle de confiance se simplifie :

$$IC_{95\%}(p) = [E(Z) \pm 1,96 \sqrt{V(Z)}]$$

Nous posons à présent la statistique de test suivante :

$$\begin{cases} H_0 : \text{Il y a des effets calendaires} \\ H_1 : \text{Absence d'effets calendaires} \end{cases}$$

Si Z appartient à l'intervalle de confiance, nous rejetons H_0 et ainsi acceptons l'hypothèse d'indépendance, avec un niveau de confiance de 95%.

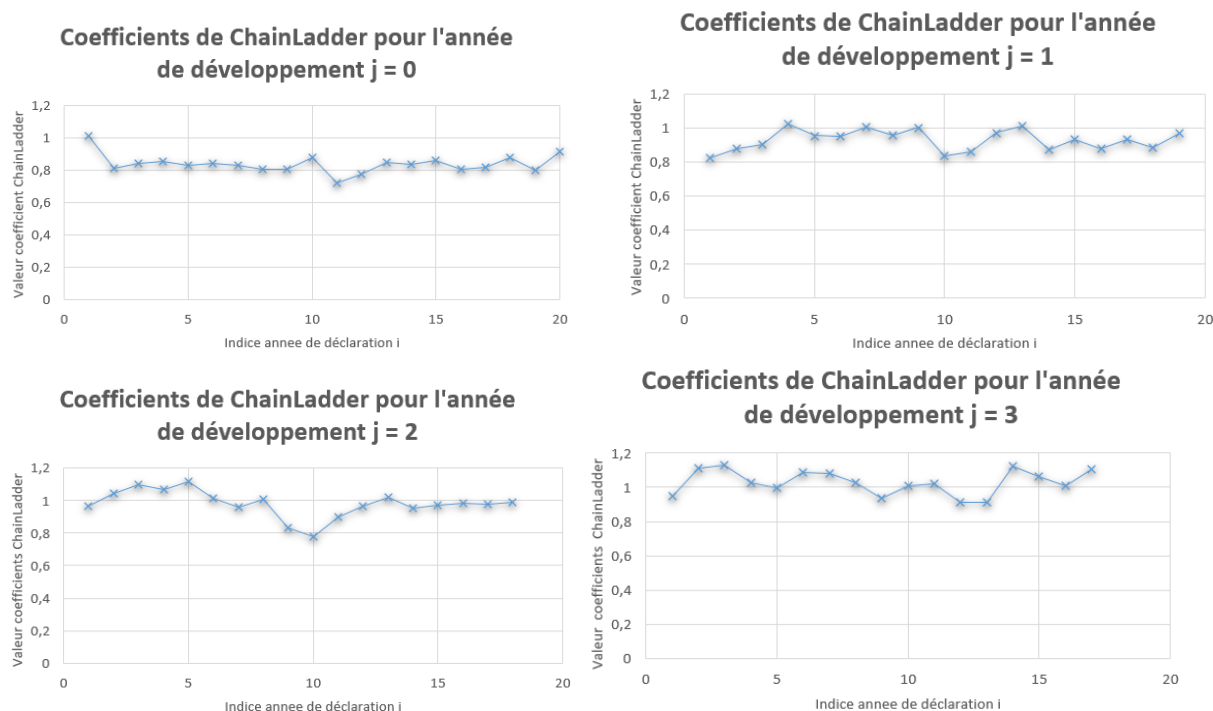
Visualisation des résultats du test pour le triangle de règlements :

diagonale	Gj	Pj	nj	Zj	mj	E(Zj)	Var(Zj)	Z	78
2002	0	1	1	0	0	0,00	0	E(Z)	75,86
2003	0	2	2	0	0,5	0,50	0,25	Var(Z)	18,10
2004	1	2	3	1	1	0,75	0,19	alpha	5,0%
2005	3	1	4	1	1,5	1,25	0,44	intervalle 95%	67,52 84,20
2006	4	1	5	1	2	1,56	0,37		indépendance acceptée
2007	2	4	6	2	2,5	2,06	0,62		
2008	4	3	7	3	3	2,41	0,55		
2009	4	4	8	4	3,5	2,91	0,80		
2010	4	5	9	4	4	3,27	0,74		
2011	6	3	9	3	4	3,27	0,74		
2012	7	3	10	3	4,5	3,77	0,99		
2013	3	9	12	3	5,5	4,65	1,17		
2014	4	8	12	4	5,5	4,65	1,17		
2015	8	5	13	5	6	5,03	1,10		
2016	6	9	15	6	7	5,93	1,28		
2017	8	6	14	6	6,5	5,53	1,35		
2018	8	9	17	8	8	6,83	1,46		
2019	8	9	17	8	8	6,83	1,46		
2020	10	8	18	8	8,5	7,33	1,71		
2021	10	8	18	8	8,5	7,33	1,71		

Figure 25 : Résultats du test « effet calendaire » pour le triangle de règlements

Le test statistique conclue à rejeter H_0 , l'hypothèse d'indépendance sur le triangle de règlements cumulés est acceptée au niveau de confiance 95%.

(P3') Hypothèse d'indépendance sur Triangle charges sinistres



La première visualisation graphique laisse penser que les coefficients de développements sont relativement indépendants sur les quatre premières années de développements pour les différentes années de réclamations. Le test d'indépendance fournit les résultats suivants :

diagonale	Gj	Pj	nj	Zj	mj	E(Zj)	Var(Zj)	Z	
2002	1	0	1	0	0	0,00	0		69
2003	1	1	2	1	0,5	0,50	0,25	E(Z)	75,85
2004	1	2	3	1	1	0,75	0,19	Var(Z)	18,10
2005	2	2	4	2	1,5	1,25	0,44	alpha	5,0%
2006	4	1	5	1	2	1,56	0,37	intervalle 95%	67,51 84,19
2007	5	1	6	1	2,5	2,06	0,62	indépendance acceptée	
2008	4	3	7	3	3	2,41	0,55		
2009	3	5	8	3	3,5	2,91	0,80		
2010	6	3	9	3	4	3,27	0,74		
2011	8	2	10	2	4,5	3,77	0,99		
2012	1	8	9	1	4	3,27	0,74		
2013	4	8	12	4	5,5	4,65	1,17		
2014	5	8	13	5	6	5,03	1,10		
2015	5	7	12	5	5,5	4,65	1,17		
2016	6	9	15	6	7	5,93	1,28		
2017	6	10	16	6	7,5	6,43	1,53		
2018	6	10	16	6	7,5	6,43	1,53		
2019	12	5	17	5	8	6,83	1,46		
2020	8	9	17	8	8	6,83	1,46		
2021	12	6	18	6	8,5	7,33	1,71		

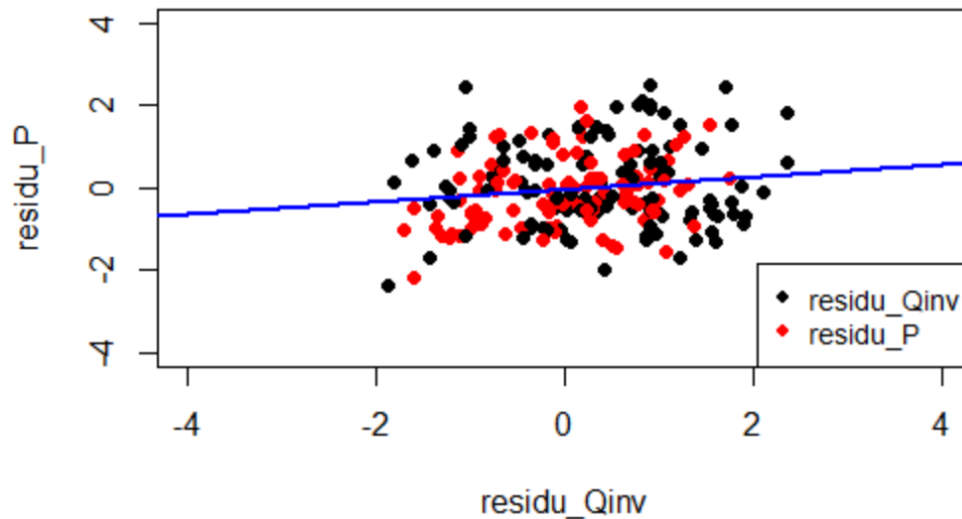
Figure 26 : Résultats du test « effet calendaire » pour le triangle de charge

Le test statistique conclue à rejeter H0, l'hypothèse d'indépendance sur le triangle de charges sinistres est acceptée au niveau de confiance 95%.

(P4) Hypothèses supplémentaires de corrélation

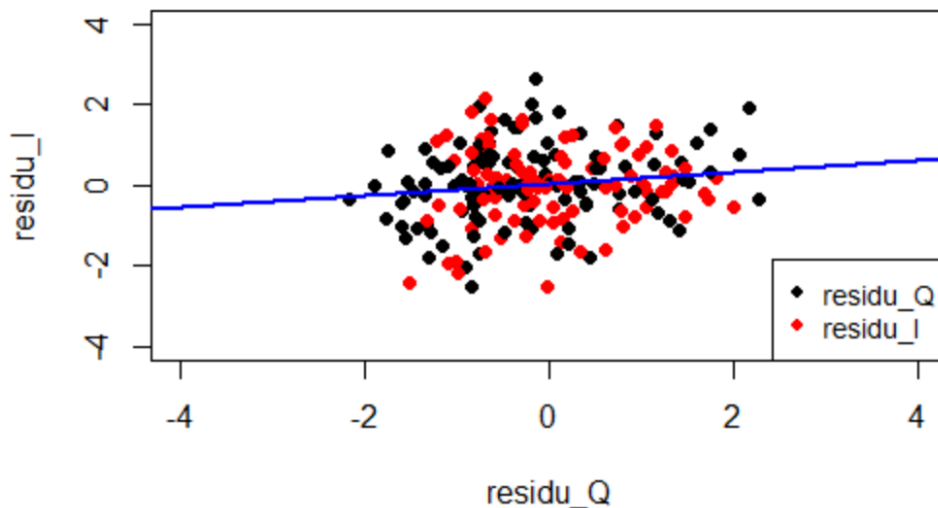
La présente hypothèse consiste à montrer la dépendance linéaire entre résidus des facteurs de développements du triangle de règlements avec celui des résidus I/P :

Dépendance linéaire entre résidus des facteurs de développement du triangle de règlements et résidus des ratios $Q_{inv} = I/P$



Et de façon similaire pour le triangle de charges sinistres :

Dépendance linéaire entre résidus des facteurs de développement du triangle des charges sinistres et résidus des ratios $Q = P/I$



L'hypothèse de corrélation est vérifiée graphiquement pour nos données.

Ces précédentes hypothèses valident l'utilisation du modèle de Munich Chain Ladder, mais il reste à montrer le caractère indépendant identiquement distribué des résidus du modèle pour pouvoir faire usage du Bootstrap. Cette propriété est discutée en annexe A.1 du mémoire.

3.2 Evaluation du SCR Réserve avec un triangle de charges comptables

Les hypothèses du modèle étant vérifiées, nous pouvons passer à l'implémentation de la méthode.

3.2.1 Evaluation de la charge brute non chargée non ajustée

Nous considérons dans un premier temps l'évaluation du SCR brut non chargé, non ajusté donnée par la formule suivante :

$$\text{SCR}_{\text{réserve}}^{31/12/N} = \left(\text{VaR}_{99,5}[\text{CDR}'] - \overline{[\text{CDR}']} \right)$$

La distribution des CDR bruts est obtenue par simulation de 20 000 scénarii de charge N+1, basés sur le Bootstrap de Munich Chain Ladder défini dans la partie 2.2. Le nombre de simulations a été retenu sur la base d'un test de convergence dont la théorie a été développée par Geneviève GAUTHIER dans son article [Introduction à la simulation de Monte Carlo](#).

La logique de ce test est la suivante :

Considérons X , une variable aléatoire de fonction de répartition F_X . Soit $X_i, i = 1, \dots, n$, des tirages indépendants identiquement distribués de cette variable. Notons $X_{(i)}, i = 1, \dots, n$ l'échantillon ordonné.

Soit x_α le quantile d'ordre α de la distribution F_X . Définissons les variables aléatoires :

$$\xi_i \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq x_\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Et $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$ représente le nombre d'observations inférieures ou égales à x_α .

La variable ξ vérifie les propriétés suivantes :

1. Si $a \in \{1, \dots, n\}$, alors $\xi \geq a$ si et seulement si $X_{(a)} \leq x_\alpha$
2. Si $b \in \{1, \dots, n\}$, alors $\xi > b$ si et seulement si $X_{(b)} > x_\alpha$

Nous pouvons démontrer que ξ suit une loi binomiale (n, θ) où :

$$\theta = P(\xi_i = 1) = F_X(x_\alpha)$$

Notons que si x_α n'est pas un point de discontinuité de la distribution F_X , alors $\theta = \alpha$. Sinon $\theta > \alpha$. Par la suite, nous posons l'hypothèse de continuité de la fonction F_X .

Quand le nombre d'observations est grand, il est possible d'approcher la distribution de ξ par une distribution normale notée $\mathcal{N}(n\theta, n\theta(1-\theta))$.

Posons $\Delta_\beta = \frac{z_{\beta/2}}{2} \sqrt{n\theta(1-\theta)}$ où $z_{\beta/2}$ est le quantile d'ordre $\beta/2$ d'une loi normale centrée réduite.

Nous aboutissons à :

$$\begin{aligned} 1 - \beta &\approx P\left(-z_{\frac{\beta}{2}} \leq \frac{\xi - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \leq z_{\frac{\beta}{2}}\right) \\ &= P(n\theta - \Delta_\beta \leq \xi < n\theta + \Delta_\beta) \\ &\leq P([n\theta - \Delta_\beta] \leq \xi < [n\theta + \Delta_\beta]) \\ &= P(X_{[n\theta - \Delta_\beta]} \leq x_\alpha < X_{[n\theta + \Delta_\beta]}) \end{aligned}$$

Ainsi, pour un niveau de confiance β donné, l'estimation d'un intervalle de confiance du quantile x_α est possible à partir d'un échantillon d'observations.

Nous avons mis en œuvre ce test à partir de notre distribution de 20 000 CDR centrée sur triangle de charges. Pour les résultats qui suivront, nous estimerons pour un niveau de confiance 95% ($\beta=5\%$) un intervalle de confiance du quantile $x_{99,5\%}$ à partir de l'échantillon d'observations ordonnées $\{X_{(i)}, i = 1, \dots, n\}$ dont nous rappelons l'expression : $IC = [X_{[n \times 99,5\% - \Delta_5\%]}; X_{[n \times 99,5\% + \Delta_5\%]}]$. Le graphique suivant illustre la valeur des bornes de l'intervalle en fonction du niveau du quantile :

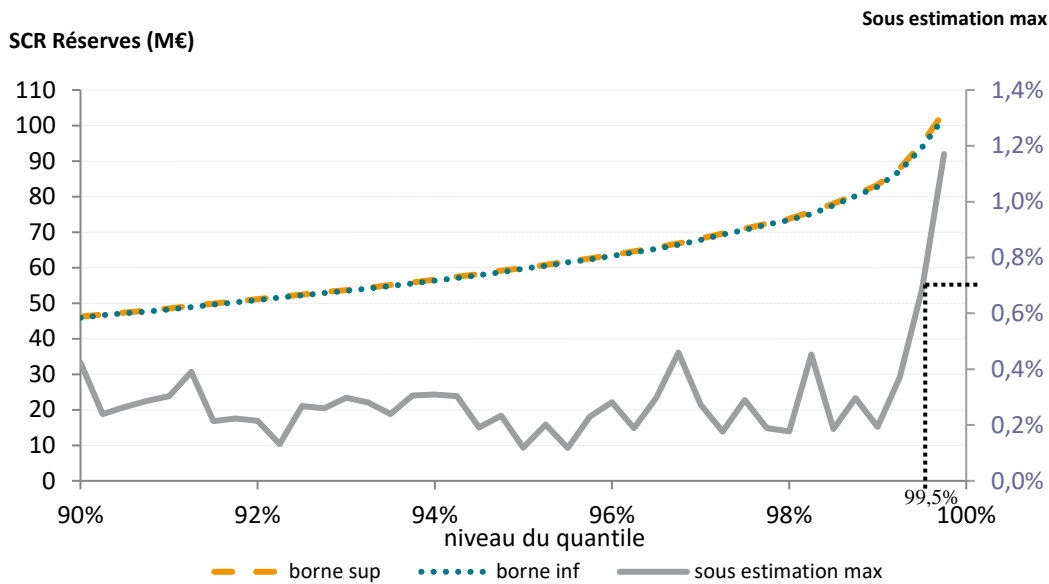


Figure 27 : Visualisation des bornes de l'IC du CDR centré en fonction du niveau du quantile

La Value-At-Risk de niveau $\alpha=99,5\%$ pour cette distribution de CDR centrée vaut environ 94,3M€. La borne inférieure de son intervalle de confiance est de 93,8M€ ; sa borne supérieure de 95M €. La différence entre la Var 99,5 des 20 000 simulations de CDR centrés et la borne supérieure de son intervalle de confiance est de $95-94,3 = 0,7\text{M€}$. Cette différence rapportée au montant de la Value-At-Risk est appelée sous-estimation max et représente environ 0,75% pour ce quantile $\alpha=99,5\%$. Ce pourcentage est bien inférieur à 5% donc le nombre de simulations choisi est jugé suffisant.

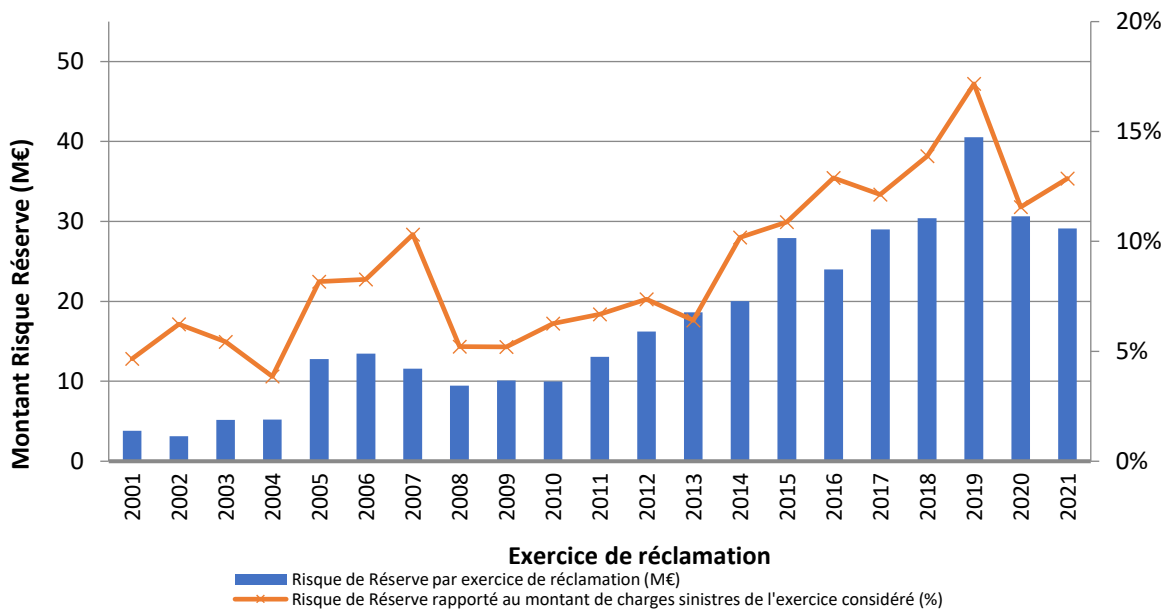
Nous obtenons les résultats bruts de réassurance non chargés hors ajustements suivants pour la variable $\text{VaR}_{99,5}[\text{CDR}] - \overline{\text{CDR}}$ au 31/12/2021. Nous construisons notre intervalle de confiance normale de niveau de confiance 95% comme défini ci-dessus : $IC = [X_{[n \times 99,5\% - \Delta_5\%]}; X_{[n \times 99,5\% + \Delta_5\%]}]$

31/12/2021	Méthode actuelle règlements	Nouvelle méthode charges
$\text{VaR}_{99,5}[\text{CDR}] - \overline{\text{CDR}}$	IC Sup : 230,2	IC Sup : 95
	228,3	94,3
	IC Inf : 227,1	IC Inf : 93,8

Ces résultats donnés à périmètre d'historique identique N-20 jusqu'à N sont très éloignés l'un par rapport à l'autre.

Nous illustrons ci-dessous le montant du Risque de Réserve pour chaque exercice de réclamation :

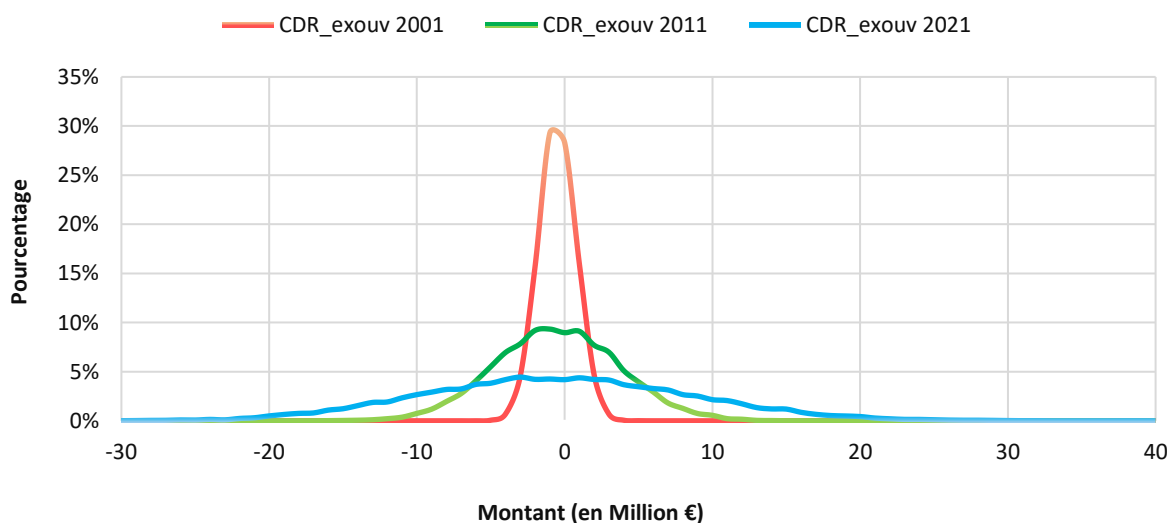
Figure 28 : Risque de Réserve par année de réclamation au 31/12/2021



La visualisation graphique du SCR Réserve calculé par exercice de réclamation illustre bien le phénomène de volatilité croissante : l'incertitude sur les provisions est plus forte sur les exercices de réclamation récents. Les montants de SCR Réserve sur les années les plus anciennes sont très faibles en valeur. La volatilité du SCR Réserve comparativement au volume de charge sinistres détenues permet de tenir compte du développement de notre portefeuille. Cette donnée est intégrée à l'aide du rapport Risque de Réserve sur montant de charge sinistres, tracé par la ligne orange sur le graphique. Le constat initial ne change pas mais permet de relativiser la volatilité des premiers exercices qui nous semblaient à première vue bien plus faible que les exercices suivants.

Nous illustrons ci-dessous quelques distributions empiriques du CDR brut :

Figure 29 : Distribution empirique du CDR brut centré pour différents exercices



La distribution empirique du CDR brut associée à l'exercice de réclamation 2021 est plus dispersée que les distributions empiriques des CDR brut de 2011 et 2001. Ainsi la volatilité est plus élevée sur l'exercice 2021 comparativement à 2011 et 2001.

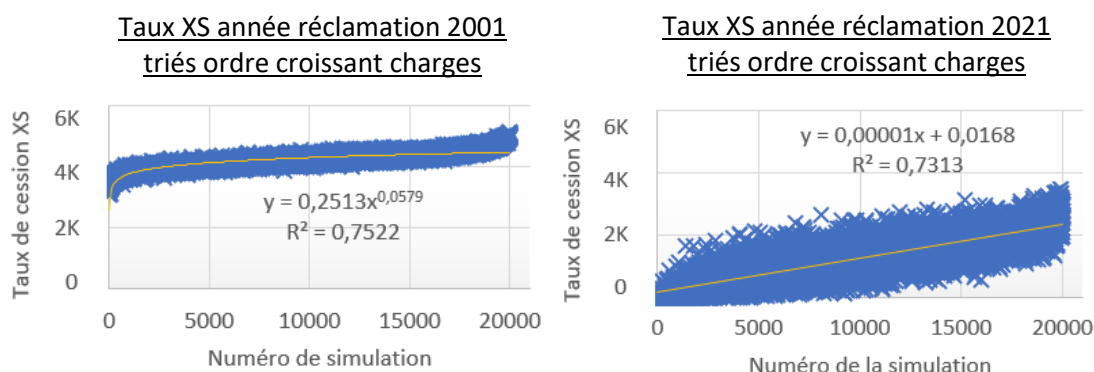
3.2.2 Evaluation de la charge nette de réassurance

Evaluation du traité XS ¹

Nous avons mis en œuvre la méthode d'extrapolation basée sur les simulations du modèle BE sophistiqué (présentée en partie 2.2.3). Nous récupérons les taux de cession XS que nous affectons à nos 20 000 charges par la formule rappelée ci-dessous :

$$\text{Charge}_{XS}^{N+1}(\text{exouv}, k') = \text{Charge}_{\text{brut}}^{N+1}(\text{exouv}, k') \times \text{taux}_{XS}(\text{exouv}, k')$$

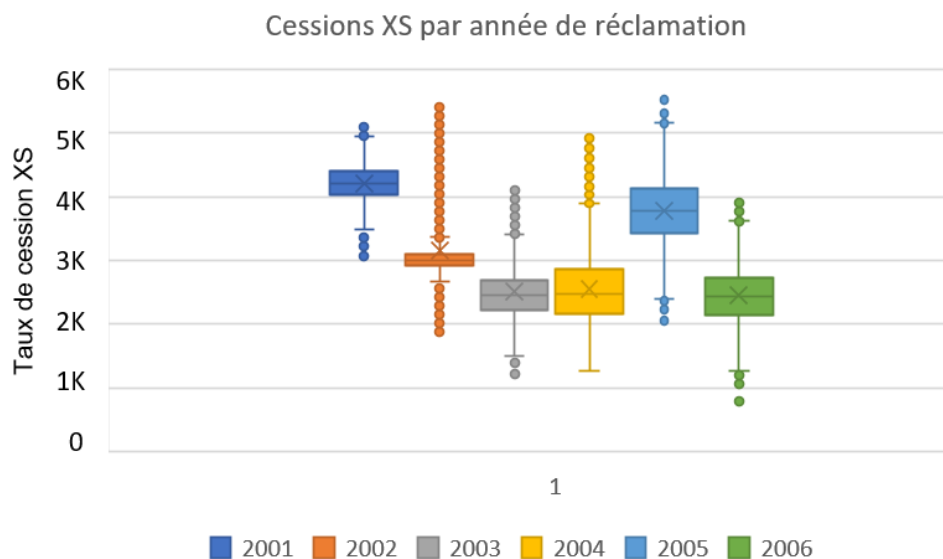
où $k' \in \llbracket 1, 20\,000 \rrbracket$



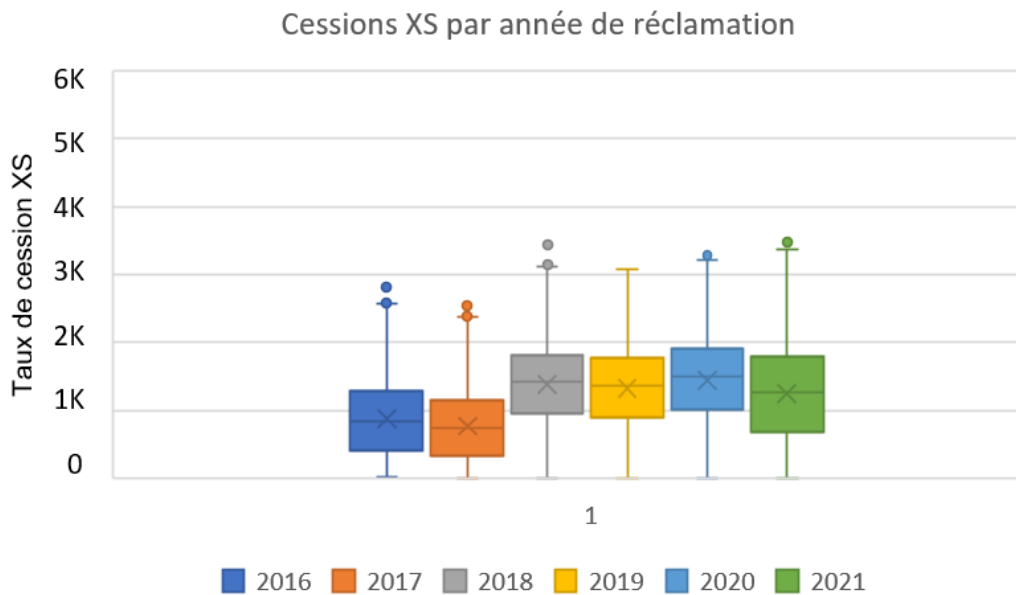
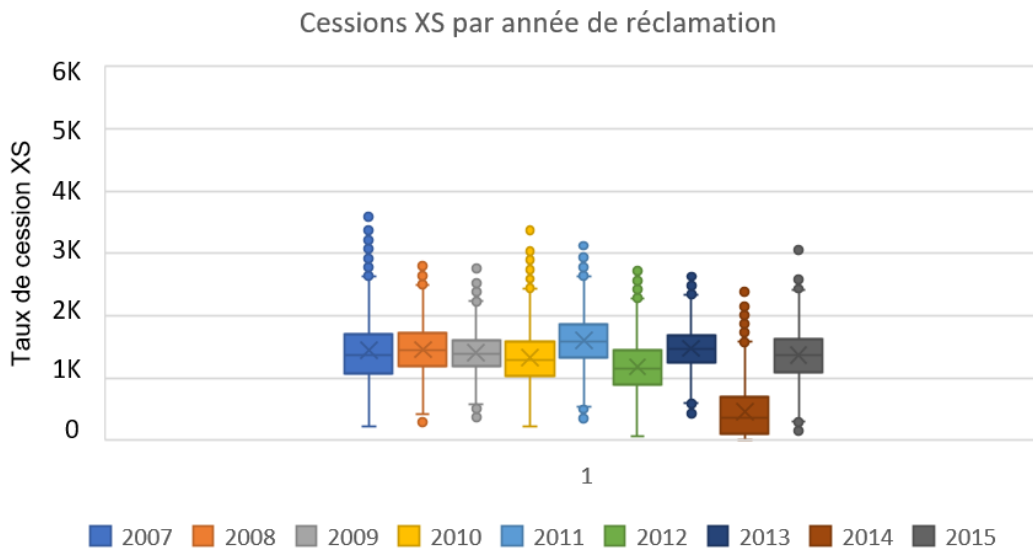
Nous constatons que les taux de cessions associés aux charges simulées dans le modèle BE sophistiqué ont logiquement tendance à être plus élevés pour des montants de charges élevés. Ces taux XS sont ensuite mis en correspondance avec les montants de charge Bootstrap brut, ainsi seuls les taux les plus élevés des distributions précédentes impacteront au moment de l'évaluation de la Value at Risk 99,5.

A des fins de comparaison, nous avons calculé des taux XS moyens par exercice de réclamation sur la base de ces simulations précédentes. Ces taux moyens peuvent être décomposés en trois périodes, en phase avec l'évolution historique des conditions des traités XS de SHAM.

Nous proposons d'approfondir l'analyse pour chaque sous période, à l'aide de boîtes à moustaches :



¹ Les échelles des graphiques sont volontairement fictives, les taux de cession étant remplacés par des K



Les boîtes à moustaches sont des outils de visualisation et d'analyses statistiques permettant de juger la dispersion d'un échantillon de données. Les indicateurs de position illustrés correspondent aux trois premiers quartiles (le second étant la médiane) et les valeurs extrêmes au niveau des pattes supérieures et inférieures. Le schéma suivant synthétise ces notions :

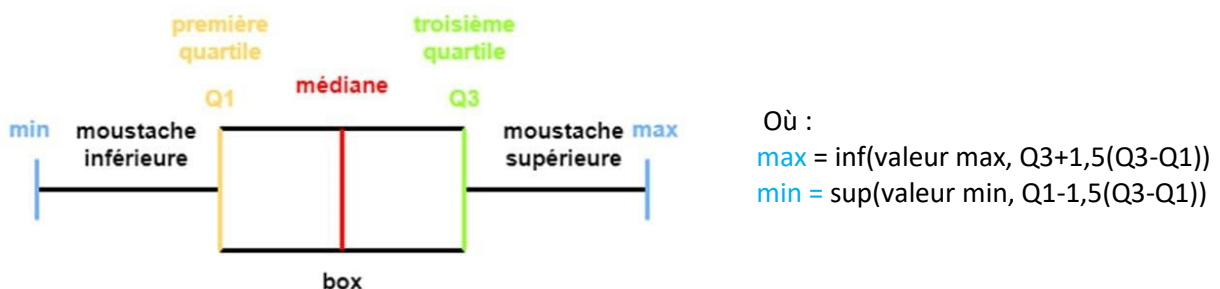


Figure 30 : Boîte à moustaches pour visualiser les taux XS

Dans le cas des simulations de taux XS, nous observons une taille des rectangles centraux relativement homogène et symétrique autour de la médiane pour les sous périodes 2007-2015 et 2016-2021. La période 2001-2006 est marquée par une forte instabilité des taux de cession XS. La taille des rectangles suggère un phénomène de volatilité croissante au cours des années : l'espace entre le 3^{ème} et 1^{er} quartile est globalement plus élevé pour la sous période 2016-2021 que pour 2007-2015, et de façon similaire entre la période 2007-2015 et 2001-2006. Ce constat nous ramène directement aux volatilités constatées sur le Risque de Réserve brut : les montants bruts présentant une volatilité plus élevée pour les exercices récents, le passage du brut au net ne vient pas modifier cela et les montants nets héritent de cette caractéristique.

Evaluation du traité SL

La formule de la charge au titre du traité Stop Loss pour un exouv donné est rappelée ci-dessous :

$$\text{Charge}_{\text{SL}}(\text{exouv}) = \min \left(\max \left(\frac{\sum_i^P X_i(\text{exouv}) - \text{Montant total cd XS}(\text{exouv})}{P(\text{exouv})} - \text{priorité}^{\text{SL}}(\text{exouv}), 0 \right), \text{portée}^{\text{SL}}(\text{exouv}) \right) \times P(\text{exouv})$$

Où :

- $P(\text{exouv})$: niveau de cotisation perçu par l'assureur au cours de l'exouv considéré,
- $X_i(\text{exouv})$: montant du sinistre i réclamé au cours de l'exouv considéré,
- $\text{priorité}^{\text{SL}}(\text{exouv})$: priorité du traité stop-loss pendant l'exouv considéré,
- $\text{portée}^{\text{SL}}(\text{exouv})$: portée du traité stop-loss pendant l'exouv considéré.

Cette relation est évaluée par année de réclamation, car les conditions de réassurance (priorité et portée) sont propres à chaque exercice. Le montant des cessions globales est égal à la somme des cessions individuelles de chaque exercice.

Evaluation du traité QP

Le montant de $\text{Charge}_{\text{QP}}$ est obtenu en multipliant le montant de la charge brut par le taux de cession QP associé par exercice de réclamation. Les cessions QP sont calculés sur les montants de charges brutes nettes d'XS.

$$\text{Charge}_{\text{QP}}(\text{exouv}) = \left(\sum_i^n X_i(\text{exouv}) - \text{Charge}_{\text{XS}} \right) \times \text{taux}_{\text{QP}}(\text{exouv})$$

La réassurance QP est évaluée par année de réclamation, le taux de cession QP n'étant pas identique sur toutes les périodes.

Le montant de la charge nette est donné par la relation suivante :

$$\text{Charge}_{\text{nette}} = \text{Charge}_{\text{brut}} - \text{Charge}_{\text{XS}} - \text{Charge}_{\text{QP}} - \text{Charge}_{\text{SL}}$$

Cette relation est applicable pour chaque exercice de réclamation ou pour le montant « global ».

La formule du SCR Réserve net chargé incluant les ajustements est rappelée ci-dessous :

$$\text{SCR}_{\text{réserve}}^{31/12/N} = \left((\text{VaR}_{99,5}[\text{CDR}'] - \overline{\text{CDR}'}) \times (1 + \alpha) \times (1 + \beta) \right)$$

La valeur des coefficients calculés pour ce scénario sont les suivants :

Méthode triangle de charges	31/12/2021
α	11,5 %
β	26,2 %

Les résultats nets sont synthétisés dans le tableau ci-dessous, montants en M€ :

31/12/2021	Méthode règlements	Méthode charges	Ecart entre méthodes en valeur absolue	Ecart entre méthodes en valeur relative
Risque de Réserve net chargé avec ajustements	140,1	58,3	58,3 - 140,1 = -81,8	$\frac{ -81,8 }{140,1} = 58,4\%$
Rappel version brute : VaR_{99,5}[CDR] – $\overline{\text{CDR}}$	228,3	94,3	94,3 - 228,3 = -134	$\frac{ -134 }{228,3} = 58,7\%$

L'écart en valeur absolue entre méthodes règlements et charges passe de -134M€ en version brute à -81,8M€ en version nette chargée ajustée. Cependant l'écart en valeur relative est resté stable pour ces deux évaluations. Nous avons envisagé d'intégrer un coefficient d'agrandissement évalué à partir du rapport des engagements en vision BE sur les engagements comptables, et ce afin d'être sur niveau homogène de provisions entre la méthode en règlements et cette nouvelle évaluation charge comptable. Cependant bien qu'un écart ait pu être constaté sur les montants bruts de provisions comptables et Best Estimate, cette différence devient négligeable lorsque nous passons en net de réassurance. De même ce coefficient envisagé n'aurait été légitime que si la volatilité des provisions comptables était identique à celle des provisions Best Estimate. Au vu des résultats précédents, cela ne semble pas être le cas, l'approche actuelle sur règlement semble capter des situations beaucoup plus « extrêmes » en termes de volatilité. Ainsi nous envisageons dans un premier temps une correction que nous allons présenter dans une nouvelle sous-section.

3.2.3 Evaluation sur triangle de provisions reconstituées

La méthode précédente souffre d'un défaut majeur : une partie de nos provisions n'entrent pas dans le périmètre du calcul des traités de réassurance, et sont enregistrés historiquement comme valeur brute = valeur nette. Or le modèle précédent applique indistinctement de la réassurance à la charge globale qui intègre une part de provisions calculées directement nettes de réassurance. Cela a pu créer un biais dans nos résultats précédents, ainsi nous proposons un retraitement qui intègre ces montants de provisions bruts « reconstitués » notées Prov*, à partir du montant net par exercice d'inventaire en inversant la relation :

$$\text{Prov}^*_{\text{net}}(\text{exouv}, \text{inv}) = \text{Prov}^*_{\text{brut}}(\text{exouv}, \text{inv})(1 - \text{Taux}_{\text{XS}}(\text{exouv}, \text{inv}) - \text{Taux}_{\text{SL}}(\text{exouv}, \text{inv}) - [(1 - \text{Taux}_{\text{XS}}(\text{exouv}, \text{inv})) \times \text{Taux}_{\text{QP}}(\text{exouv})])$$

Où :

$\text{Taux}_{\text{XS}}(\text{exouv}, \text{inv})$: taux de cession de réassurance associé au traité XS. Ce taux est calculé par le rapport des provisions BE brut sur les provisions BE nettes d'XS pour chaque exercice de réclamation N-20 à N et pour chaque inventaire inv,

Taux_{SL}(exouv, inv) : taux de cession de réassurance associés au traité SL, donnés pour chaque exercice de réclamation des sinistres. Taux également calculé par le rapport des provisions BE brutes sur les provisions BE nettes d'XS pour chaque exercice de réclamation N-20 à N pour chaque inventaire *inv*,

Taux_{QP}(exouv, inv) : taux de cession de réassurance associés au traité QP, donnés pour chaque exercice de réclamation des sinistres.

Nous recalculons ces montants de provisions spécifiquement :

$$\text{Prov}^*_{\text{brut}}(\text{exouv}, \text{inv}) = \frac{\text{Prov}^*_{\text{net}}(\text{exouv}, \text{inv})}{1 - \text{Taux}_{\text{XS}}(\text{exouv}, \text{inv}) - \text{Taux}_{\text{SL}}(\text{exouv}, \text{inv}) - \text{Taux}_{\text{QP}}(\text{exouv}) + \text{Taux}_{\text{XS}}(\text{exouv}, \text{inv}) \text{Taux}_{\text{QP}}(\text{exouv})}$$

Cette méthode est généralisée pour l'ensemble du triangle de ces provisions. Cependant, pour des raisons d'historique, la reconstitution a été effectuée de 2011 à 2021.

Prov retraité par inventaire	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Version brut = net	46,8	49,2	62,4	66	76,8	81,6	90	88,8	98,4	135,6	120
Brut reconstitué	85,2	92,4	117,6	122,4	153,6	168	183,6	182,4	211,2	312	282

Le modèle est entièrement réexécuté à partir du nouveau triangle de charges intégrant le retraitement brut reconstitué. Les nouveaux résultats sont donnés ci-dessous en version nette.

31/12/2021	Méthode règlements	Méthode charges	Ecart entre méthodes en valeur absolue	Ecart entre méthodes en valeur relative
Risque de Réserve net chargé, ajusté	IC Sup : 140,9	IC Sup : 67,3	67 - 140,1 = -73,1	$\left \frac{-73,1}{140,1} \right = 52,1\%$
	140,1	67		
	IC Inf : 139,7	IC Inf : 66,9		

L'écart constaté entre les deux méthodes a diminué mais reste très important. Ce différentiel peut s'expliquer par la charge des sinistres qui est un élément par nature plus subjectif, pas nécessairement revue chaque année pour tous les dossier (dépendant parfois d'avis d'experts) là où les paiements sont des éléments plus objectifs. La prudence de la méthode règlements peut s'expliquer par l'évaluation des sinistres graves : le calcul du Risque de Réserve est basé sur un triangle de liquidation agrégé qui n'intègre pas de distinction entre les montants de sinistres graves et attritionnels. Dans le cas de la méthode actuelle, les règlements au-delà de 20 ans sont calculés à partir des tail factors issus du modèle sophistiqué du BE, étant donné que nous ne disposons pas des coefficients Chain-Ladder associés. Or, ce BE dit sophistiqué est évalué à partir de l'agrégation des simulations des flux de trois « modules » : la charge attritionnelle, les sinistres graves connus et les sinistres graves IBNER. Cette sinistralité des graves « pèse » davantage dans ce modèle BE (puisqu'elle représente plus d'un tiers de la sinistralité contre à peine 5 % dans notre modèle en vision « provisions comptables ») et se caractérise par une volatilité plus marquée : volatilité qui se retrouve notamment dans les tail factors... et « absente » du modèle présenté ci-avant.

Ces principales faiblesses en tête, nous allons proposer dans la prochaine section un nouveau scénario dans lequel le BE sophistiqué sera intégré dans notre triangle de charges.

3.3 Evaluation du SCR Réserve avec des provisions en vision BE

La nouvelle méthodologie consiste à utiliser un triangle de charges dans lequel les provisions sont évaluées en vision BE. Ces provisions s'appuient sur les montants des règlements projetés par le modèle BE sophistiqué au moment de la clôture annuelle. Notre historique de données sera plus restreint que pour les modèles précédents, car la mise en place du modèle BE sophistiqué ne coïncide pas avec le premier exercice de réclamation considéré initialement dans nos triangles précédents (la première mise en œuvre des projections par le modèle sophistiqué date de la clôture du 31/12/2011).

Nous représentons à titre illustratif les montants et poids relatifs des règlements projetés par le modèle BE sophistiqué lors de la clôture 31/12/2021 :

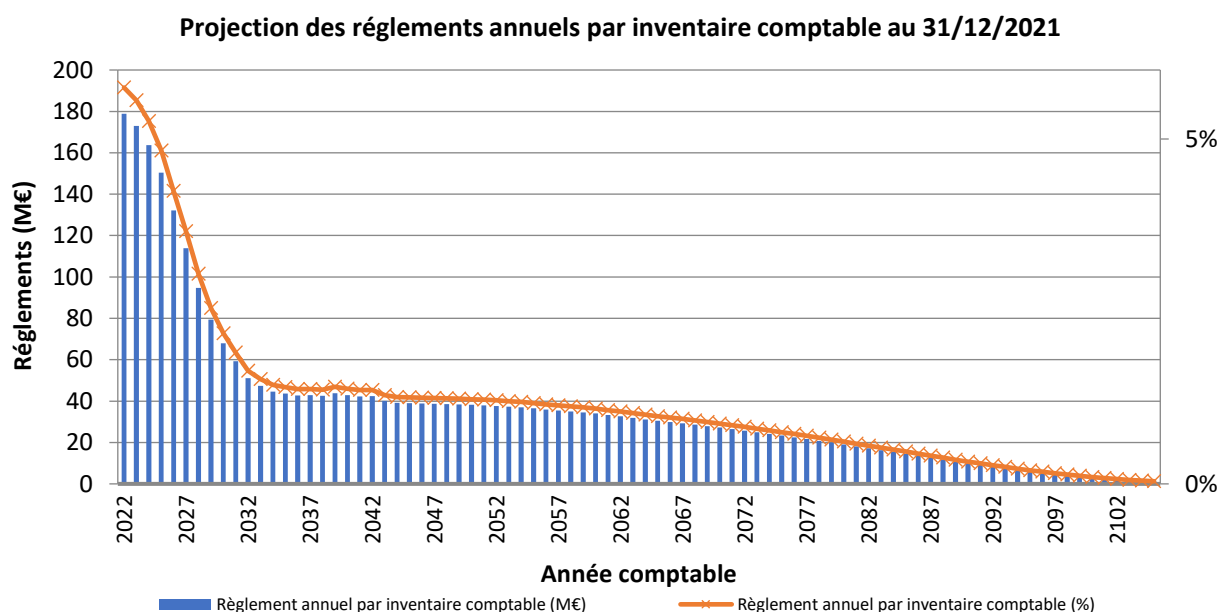


Figure 31 : Projection des règlements au 31/12/2021 par modèle BE sophistiqué

Les montants projetés découlant de l'inventaire comptable 2021 sont particulièrement élevés sur la période 2022-2032 comme le souligne la première pente abrupte. Ces règlements sont ensuite plus lissés les années suivantes jusqu'à pratiquement disparaître après 2102.

Ainsi le triangle de provisions BE construit par exercice de réclamation permettra d'actualiser l'ensemble de ces flux projetés par inventaire comptable, en partant du premier disponible au 31/12/2011 (autrement dit un total de 11 inventaires jusqu'à aujourd'hui).

Nous avons toutefois envisagé de remonter à des historiques « simulés », mais cette démarche était relativement complexe à mettre en œuvre et matériellement trop coûteuse en ressource. En effet le calcul du modèle BE sophistiqué immobilise lors de chaque clôture un effectif d'actuaire pendant deux mois, et il est aussi nécessaire de récupérer des données d'époque et/ou réémettre des jugements d'experts a posteriori pour avoir une matérialisation cohérente du chiffre.

Pour ces différentes raisons cette piste a été écartée et nous avons préféré privilégier le recalcul d'une version du Risque de Réserve actuelle sur un triangle de règlements plus petit afin de garantir un périmètre d'historique identique avec cette nouvelle méthode et établir des comparaisons.

Les données utilisées seront exprimées en euros constants à date de l'inventaire et l'actualisation des règlements projetés sera basée sur la courbe des taux de l'EIOPA du 31/12/2021.

3.3.1 SCR Réserve sur triangle onze ans méthodologie actuelle règlements

Quelques corrections sont apportées sur le calcul du Risque de Réserve actuel règlements sur le périmètre onze exercices :

- Lors de la projection des règlements N+1, nous retenons jusqu'à présent pour les deux derniers délais (anciennement délais 20 et 21) des coefficients de développement égaux à la moyenne des huit coefficients précédents (c'est-à-dire précédemment les coefficients 13 à 19). A présent notre historique se limite à 11 exercices, nécessitant de reconsidérer cette hypothèse précédente car les coefficients de Chain Ladder sont très volatiles lors des premiers développements (appliquer la règle des huit ans induit un net décrochage au niveau des derniers règlements). Par conséquent nous retenons pour la projection N+1 des règlements aux délais 10 et 11, la moyenne des 4 derniers coefficients de développement.
- La méthodologie Actuary In The Box est mise en œuvre sur ce nouveau triangle plus court, le paramétrage des fenêtres d'exclusion des coefficients de développement s'adapte en conséquence de ce nouvel historique. Cependant, il s'agit en définitive des mêmes coefficients exclus que ceux du modèle sur le triangle complet.

Le Risque de Réserve sur règlements utilise les tail factors du modèle BE sophistiqué afin de projeter les règlements au-delà du délai maximum permis par le triangle en entrée de modèle. Ce nouveau triangle réduit le délai maximum à 11 pour le premier exercice de réclamation 2011. Cependant nous possédons toujours l'information relative aux facteurs de développement CL utilisés dans le cas du modèle initial sur triangle couvrant les exercices de réclamation 2001 jusqu'à 2021.

Ainsi nous considérons deux évaluations du Risque de Réserve règlements :

- Une version centrale, la plus proche du modèle actuel sur le triangle complet, où nous utilisons les coefficients de Chain Ladder sur les délais 1 à 11 puis les tail factors pour les projections au-delà du triangle.
- Une version 2 où nous exploitons les coefficients de Chain Ladder sur les délais 12 à 21 récupérés du scénario initial du triangle complet, puis appliquons les tail factors à partir du délai 22.

Nous mettons en œuvre les précédents modèles et obtenons deux versions du SCR Réserve brut non chargé hors ajustements (montants en M€). Nous construisons un intervalle de confiance basé sur la loi normale de niveau de confiance 95% comme défini en section 3.2.1 :

31/12/2021 $\text{VaR}_{99,5}[\text{CDR}] - \overline{\text{CDR}}$	Méthode actuelle règlements 11 ans version centrale	Méthode actuelle règlements 11 ans version 2
Borne sup intervalle confiance 95%	212,9	199,5
Résultat	211,8	198,5
Borne inf intervalle confiance 95%	210,7	197,5

Où :

$$\text{CDR} = \text{BE}^{N+1} + \text{R}^{N+1} - \overline{\text{BE}}^N$$

3.3.2 SCR Réserve sur triangle onze ans nouvelle méthodologie charges

Ces résultats précédents doivent maintenant être comparés à notre nouvelle méthodologie basée sur la charge sinistre. Notre triangle de charge est dorénavant constitué :

- des règlements passés (inchangés par rapport au scénario précédent),
- des montants des provisions Best Estimate sophistiqué.

Le nouveau triangle de provisions vision Best Estimate considéré dans cette approche est construit selon le modèle suivant :

exouv/ délai	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2011	BE ^{vu31/12} (2011,0)	BE ^{vu31/12} (2011,1)	BE ^{vu31/12} (2011,2)	BE ^{vu31/12} (2011,3)	BE ^{vu31/12} (2011,4)	BE ^{vu31/12} (2011,5)	BE ^{vu31/12} (2011,6)	BE ^{vu31/12} (2011,7)	BE ^{vu31/12} (2011,8)	BE ^{vu31/12} (2011,9)	BE ^{vu31/12} (2011,10)
2012	BE ^{vu31/12} (2012,0)	BE ^{vu31/12} (2012,1)	BE ^{vu31/12} (2012,2)	BE ^{vu31/12} (2012,3)	BE ^{vu31/12} (2012,4)	BE ^{vu31/12} (2012,5)	BE ^{vu31/12} (2012,6)	BE ^{vu31/12} (2012,7)	BE ^{vu31/12} (2012,8)	BE ^{vu31/12} (2012,9)	
2013	BE ^{vu31/12} (2013,0)	BE ^{vu31/12} (2013,1)	BE ^{vu31/12} (2013,2)	BE ^{vu31/12} (2013,3)	BE ^{vu31/12} (2013,4)	BE ^{vu31/12} (2013,5)	BE ^{vu31/12} (2013,6)	BE ^{vu31/12} (2013,7)	BE ^{vu31/12} (2013,8)		
2014	BE ^{vu31/12} (2014,0)	BE ^{vu31/12} (2014,1)	BE ^{vu31/12} (2014,2)	BE ^{vu31/12} (2014,3)	BE ^{vu31/12} (2014,4)	BE ^{vu31/12} (2014,5)	BE ^{vu31/12} (2014,6)	BE ^{vu31/12} (2014,7)			
2015	BE ^{vu31/12} (2015,0)	BE ^{vu31/12} (2015,1)	BE ^{vu31/12} (2015,2)	BE ^{vu31/12} (2015,3)	BE ^{vu31/12} (2015,4)	BE ^{vu31/12} (2015,5)	BE ^{vu31/12} (2015,6)				
2016	BE ^{vu31/12} (2016,0)	BE ^{vu31/12} (2016,1)	BE ^{vu31/12} (2016,2)	BE ^{vu31/12} (2016,3)	BE ^{vu31/12} (2016,4)	BE ^{vu31/12} (2016,5)					
2017	BE ^{vu31/12} (2017,0)	BE ^{vu31/12} (2017,1)	BE ^{vu31/12} (2017,2)	BE ^{vu31/12} (2017,3)	BE ^{vu31/12} (2017,4)						
2018	BE ^{vu31/12} (2018,0)	BE ^{vu31/12} (2018,1)	BE ^{vu31/12} (2018,2)	BE ^{vu31/12} (2018,3)							
2019	BE ^{vu31/12} (2019,0)	BE ^{vu31/12} (2019,1)	BE ^{vu31/12} (2019,2)								
2020	BE ^{vu31/12} (2020,0)	BE ^{vu31/12} (2020,1)									
2021	BE ^{vu31/12} (2021,0)										

Figure 32 : Structure du triangle de provisions Best Estimate

Chaque élément du triangle précédent est de la forme $BE^{vu31/12/exouv+délai}$ (exouv, délai)

où :

- exouv fait référence à l'exercice de réclamation du sinistre,
- délai correspond au delta en année entre l'exercice de réclamation et l'année de comptabilisation de la provision.

Ainsi chaque diagonale du triangle est associée à un inventaire de clôture distinct. Par exemple la dernière diagonale est reconstituée sur la base des règlements projetés par le modèle sophistiqué au moment de la clôture 31/12/2021.

exouv/ délai	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2011	223,8	221,9	201,2	194,7	167,3	125,6	120,8	99,7	86,3	73,4	79,2
2012	241,8	225,8	222,0	209,8	169,8	114,2	96,0	118,5	123,6	125,0	
2013	229,7	234,2	220,6	215,6	175,7	128,9	128,0	82,2	89,7		
2014	252,6	247,8	239,9	226,5	174,0	164,3	143,2	131,4			
2015	264,4	264,4	257,5	237,1	201,4	151,7	101,2				
2016	293,4	294,8	284,3	275,5	198,7	140,5					
2017	312,9	313,2	315,2	257,1	212,9						
2018	324,4	332,6	262,0	257,5							
2019	334,8	296,9	284,2								
2020	206,2	216,8									
2021	220,8										

Figure 33 : Triangle de provisions brutes Best Estimate (courbe taux 31/12/21)

A titre de comparaison, nous présentons ci-dessous les montants de provisions comptables retenus dans le scénario précédent :

exouv/ délai	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2011	237,3	172,1	155,0	137,0	106,4	33,2	109,7	101,9	104,3	104,8	101,2
2012	277,1	223,1	214,9	204,9	165,3	142,0	137,1	184,6	176,2	178,5	
2013	243,5	191,5	149,3	123,4	125,6	108,2	90,1	82,6	84,0		
2014	264,9	214,1	181,1	157,2	153,9	165,7	151,4	161,4			
2015	256,5	187,0	141,9	119,8	93,8	82,2	91,2				
2016	279,7	209,8	173,7	151,8	154,4	121,3					
2017	274,6	220,4	169,8	146,0	159,2						
2018	294,1	216,7	188,7	165,7							
2019	283,0	245,6	193,1								
2020	220,4	189,3									
2021	238,5										

Figure 34 : Triangle de provisions brutes comptables (version reconstituée)

Nous constatons que le différentiel entre la diagonale de provision vue au 31/12/2021 et la diagonale vue au 31/12/2020 est plus marquée pour le triangle de provision Best Estimate.

Nous proposons deux évaluations pour cette méthode charges BE :

- Une version centrale dans laquelle les provisions BE sont évaluées par la courbe des taux EIOPA format Volatility Adjustment du 31/12/2021,
- Une seconde version dans laquelle les provisions BE sont évaluées en courbe des taux historique.

Cette deuxième sensibilité permet d'évaluer l'impact de la courbe des taux sur l'indexation de nos données. Le risque de taux étant par ailleurs déjà appréhendé dans le module de SCR marché corrélé avec le SCR non-vie (dont fait partie le Risque de Réserve), il s'agit bien de la version centrale qui serait utilisée en définitive.

Les différents résultats du Risque de Réserve brut non chargé hors ajustements sont récapitulés ci-dessous en M€ et mis en lien avec les résultats sur règlements précédents :

31/12/2021 Avec l'intervalle confiance normale à 95%	Méthode actuelle règlements 11 ans version centrale	Méthode actuelle règlements 11 ans version 2	Nouvelle méthode charge BE 11 ans courbe taux 31/12/21	Nouvelle méthode charge BE sur 11 ans courbe taux historique
VaR_{99,5}[CDR] – CDR	IC Sup : 212,9	IC Sup : 200,5	IC Sup : 172,1	IC Sup : 190
	211,8	198,5	171,6	189,1
	IC Inf : 210,8	IC Inf : 198	IC Inf : 171,3	IC Inf : 188,7

La méthode charge BE fournit des résultats beaucoup plus proches de la méthodologie actuelle. Toutefois la version initiale sur règlement en vigueur reste plus prudente.

En complément du tableau précédent, nous avons également calculé le Risque de Réserve méthode actuelle version centrale sur le triangle des exercices 2001-2010. Ce montant brut non chargé hors ajustements est évalué à **33,8M€**. A des fins de comparaison avec le SCR Réserve initial sur 2001-2021, nous récapitulons les résultats à travers l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 (\text{VaR}_{99,5}[\text{CDR}] - \overline{\text{CDR}})_{2001-2021} &< (\text{VaR}_{99,5}[\text{CDR}] - \overline{\text{CDR}})_{2001-2010} + (\text{VaR}_{99,5}[\text{CDR}] - \overline{\text{CDR}})_{2011-2021} \\
 \mathbf{228,4M€} &< (33,8 + 211,8) = \mathbf{245,6M€}
 \end{aligned}$$

En toute rigueur, ces montants de Value at Risk ne sont pas additives car il faut tenir compte de l'effet corrélation entre les risques. L'inégalité précédente fournit une majoration dans le cas d'absence de corrélation pour le montant de SCR Réserve 2001-2021. En supposant l'indépendance des deux Value at Risk du membre de droite, nous avons tester la formule d'agrégation des SCR suivante :

$$\begin{aligned}
 (\text{VaR}_{99,5}[\text{CDR}] - \overline{\text{CDR}})_{2001-2021} &= \sqrt{(\text{VaR}_{99,5}[\text{CDR}] - \overline{\text{CDR}})_{2001-2010}^2 + (\text{VaR}_{99,5}[\text{CDR}] - \overline{\text{CDR}})_{2011-2021}^2} \\
 &= \sqrt{33,8^2 + 211,8^2} = \mathbf{214,5M€}
 \end{aligned}$$

La valeur du SCR Réserve 2001-2021 (**228,4M**) est bien comprise entre la valeur en absence de corrélation (**245,6M**) et la valeur en présence de corrélation (**214,5M**). Sur la base de ce constat, nos résultats obtenus pour les sous-périodes 2001-2010 et 2011-2021 semblent cohérents.

Evaluation nette de réassurance chargée

La méthode de passage du brut au net de réassurance hors ajustements de la section précédente est réutilisée pour ce triangle de charges BE.

31/12/2021	Méthode actuelle règlements 11 ans version centrale	Méthode actuelle règlements 11 ans version 2	Nouvelle méthode charge BE 11 ans courbe taux 31/12/21	Nouvelle méthode charge BE sur 11 ans courbe taux historique
SCR Réserve net chargé	IC Sup : 92,7	IC Sup : 86,8	IC Sup : 79,4	IC Sup : 88,2
	92,1	86,3	79	87,7
	IC Inf : 91,7	IC Inf : 86	IC Inf : 78,9	IC Inf : 87,5

Pour obtenir un Risque de Réserve « complet » comprenant chargements, ajustements et cales, le problème principal de cette méthode concerne l'ajustement pour les exercices antérieurs à N-11 (pour lesquels nous ne disposons d'évaluation best estimate historique).

Dans le cas d'un triangle plus grand, notamment de taille 21 ans comme c'est le cas dans la méthode actuelle, considérer un ajustement proportionnel au poids des provisions inhérentes aux sinistres exclus du triangle dans les provisions totales RC reste raisonnable car cela suppose d'une part que la volatilité des sinistres exclus du triangle est identique à celle des autres sinistres : cette hypothèse a été vérifiée par plusieurs analyses complémentaires et est très conservatrice ; et d'autre part le poids de ces exclusions reste faible < 10%.

Dans le cas d'un triangle 11 ans, cet ajustement serait multiplié par 3 et passerait à environ 30%, nous pouvons donc douter de sa pertinence. Une solution plus réaliste consisterait à augmenter le SCR Réserve net chargé 11 ans du rapport du SCR net chargé 10 ans sur le SCR net chargé 21 ans. Le poids de cet ajustement serait alors de 15,8% pour le cas de la version règlements.

Nous pouvons conclure que cette approche de la charge en vision Best Estimate est davantage comparable avec la méthode actuelle règlements. Cependant nous sommes contraints par notre historique de 11 années sur le triangle de charge. Sur ce périmètre réduit, la méthode règlements version 2 reflète mieux la réalité que la centrale, car celle-ci se base sur des coefficients de développements pour les délais 12 à 21 issues de règlements réellement constatés. Toutefois la version centrale sera préférée si l'objectif est de préserver « l'esprit » du modèle initial, supposant l'utilisation des tail factors dès lors que nous projetons les règlements hors du triangle.

Les résultats de la méthode charge en courbe des taux historique n'est pas fidèle à la méthode d'évaluation du Risque de Réserve qui est évaluée à partir de la courbe des taux du dernier inventaire (et qui n'intègre donc pas le risque de taux). Ainsi en considérant uniquement le résultat de la méthode charge BE en courbe des taux 31/12/21, nous constatons que l'actuelle méthode règlements reste plus prudente. Les écarts sont cependant plus faibles que pour l'évaluation précédente vision comptable.

Nous allons maintenant s'intéresser aux techniques bayésiennes et établir une comparaison avec la méthodologie de cette partie.

3.4 Mise en œuvre des techniques bayésiennes

Nous proposons dans cette partie de remplacer la méthodologie Bootstrap utilisée dans les sections précédentes pour simuler la diagonale N+1 de règlements ou de charges. Nous allons mettre en application un modèle Bayésien type MCMC permettant d'intégrer les chaînes de Markov et propriétés associées afin de simplifier les simulations.

La démocratisation de l'informatique dans les années 2000 et l'amélioration continue de la puissance de calcul des machines et outils numériques ont renforcé l'attractivité des méthodes MCMC. Des langages pour coder des modèles bayésiens ont été développés tels que BUGS (Bayesian inference using gibbs sampling), JAGS (Just another gibbs sampler) et plus récemment STAN que nous avons choisi car facilement utilisable sous R (en tant que langage open source).

Le cadre de la modélisation est issu de la publication de l'auteur Glenn MEYERS. Son modèle baptisé CRC a l'avantage d'être conçu à la fois pour les triangles de règlements et triangles de charges. Ainsi à des fins de comparabilité, ce modèle sera aussi exécuté sur le Risque de Réserve actuel triangle de règlements en complément de la version charge. Ce modèle est présenté par son auteur comme étant à mi-chemin entre l'approche de Mack et les modèles Over Dispersed Poisson (non abordés dans ce document car davantage mis en œuvre sur pour des triangles de règlements).

3.4.1 La méthode CRC en pratique

Pour mettre en œuvre le modèle CRC, nous devons spécifier les mêmes éléments que pour l'algorithme Metropolis Hasting développé plus tôt, c'est à dire un vecteur d'observation (le triangle de liquidation dans notre cas), une loi a priori suivie par ces observations, la vraisemblance conditionnelle au paramètre de notre distribution précédente, une fonction de transition entre le paramètre de la loi au temps t et la valeur de ce paramètre à l'itération suivante au temps t+1.

Le déroulement de l'algorithme CRC se fait en trois grandes étapes :

- La première étape appelée phase « adaptative » débute sur petit nombre d'itérations (1000 dans notre cas). Si la chaîne de Markov utilisée pour modéliser chaque état du paramètre de notre loi a posteriori semblent converger, nous pouvons passer à la phase suivante.
- La phase « burn-in » se compose d'un plus grand nombre d'itérations dans le but de stabiliser la valeur du paramètre (et converger jusqu'à l'état stationnaire). Cette deuxième phase s'achève à l'issue de la 10 000ème itération du programme.
- L'ultime phase nommée « sampling-phase » est ensuite exécutée et suppose la convergence de la valeur de notre paramètre au cours de la phase précédente. Cette étape permet de récupérer un échantillon de taille souhaitée de nos paramètres de loi a posteriori. En effet toutes les valeurs simulées après convergence de la chaîne de Markov s'inscrivent comme des réalisations possibles de notre loi a posteriori.

Dans le cas d'un triangle de liquidation, l'algorithme travaille en multidimensionnel et cherche à évaluer des vecteurs de paramètres comme nous l'avons présenté dans la section 2.3. Nous avons coutume de travailler jusqu'à présent sur une formule de Risque de Réserve basée sur 20 000 simulations N+1 de diagonales de notre triangle, ainsi nous récupérons au cours de la phase trois de l'algorithme 20 000 vecteurs de paramètres pour nous permettre de simuler ces diagonales N+1 à partir de la loi a posteriori du modèle.

Les données considérées dans cette partie sont des triangles sur onze années d'historique, en vue de comparer les résultats avec la précédente approche des charges Best Estimate évaluée sur ce même périmètre.

Nous rappelons que le modèle CRC est construit autour d'une loi a posteriori LogNormale(μ_{wd} , σ_d) pour la simulation des montants du triangle considéré, dont les paramètres de la loi sont évalués par :

$$\mu_{wd} = \ln(\text{Prime}_w) + \ln(\text{Ratio}) + \alpha_w + \beta_d$$

$$\sigma^2_d = \sum_{i=d}^{11} a_i \text{ où } a_i \sim \text{Uniforme}(0,1)$$

Au cours de la phase « burn-in » de l'algorithme, la convergence effective de la chaîne de Markov doit être vérifiée. Nous illustrons dans le graphique suivant la convergence du paramètre ($\mu_{2,11}$) dans notre algorithme :

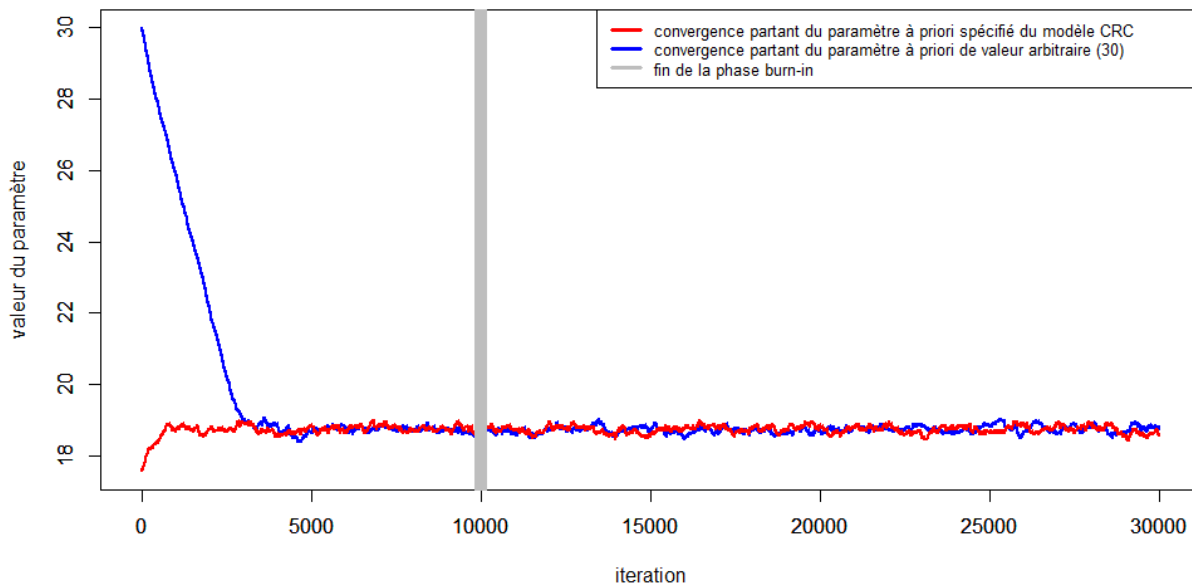


Figure 35 : Exemple de convergence pour le paramètre $\mu_{2,11}$

La figure précédente illustre deux trajectoires de la convergence du paramètre $\mu_{2,11}$. La trajectoire rouge est issue d'une première chaîne de Markov pour laquelle nous avons renseigné le paramètre $\mu_{2,11}$ a priori de la loi comme spécifié dans le modèle CRC. La seconde trajectoire bleue provient d'une autre chaîne de Markov pour laquelle nous avons fixé arbitrairement une valeur a priori du paramètre égale à 30. La ligne verticale grise marque la fin de la phase burn-in au cours de laquelle nos chaînes de Markov sont censées converger et la valeur du paramètre $\mu_{2,11}$ se stabiliser. Le nombre d'itérations choisi est de 10 000 pour la phase burn-in. Pour notre cadre de modélisation, nous constatons que la chaîne bleue et la chaîne rouge finissent toutes deux par converger avant la 10 000ème itération, mais pas à la même vitesse. La notion de convergence n'est donc pas liée à la manière de spécifier le paramètre a priori, mais un choix judicieux de la valeur initiale permet d'améliorer grandement la vitesse de convergence de la chaîne. Si nous avions réduit la phase burn-in à 1000 itérations, notre chaîne bleue n'aurait pu converger à temps.

Nous travaillons en multidimensionnel, la vérification graphique consiste alors à mener l'étude précédente pour chacun de nos paramètres ce qui peut paraître fastidieux. Pour l'ensemble de notre triangle, cela revient à étudier μ_{wd} pour $(w, d) \in [1,11]^2$ pour la partie inférieure du triangle c'est-à-dire 66 paramètres pour le paramètre moyenne de la loi.

Une autre façon de vérifier si une chaîne de Markov a convergé vers son état stationnaire consiste à comparer son comportement à d'autres chaînes initialisées. C'est la motivation de la statistique proposée par German-Rubin appelée potential scale reduction factor (PSRF) qui permet de fixer une règle d'acceptation de convergence de notre chaîne de Markov : $PSRF = \sqrt{\frac{W+B}{W}}$, où W fait référence à la variabilité de la chaîne de Markov courante, et B la variabilité inter-chaînes.

German et Rubin suggèrent d'initialiser plusieurs chaînes de Markov indépendantes avec des valeurs de départ diffuses pour les paramètres a priori et d'accepter la convergence lorsque les valeurs de la statistique PSRF pour l'ensemble des paramètres sont toutes inférieures à 1,1. Ainsi dans notre programme, trois chaînes de Markov ont été initialisées. Le langage STAN permet de spécifier les valeurs initiales, puis trace ensuite des positions aléatoires diffuses qui satisfassent les contraintes sur les paramètres déclarées.

Après évaluation des 20 000 diagonales N+1 par cette nouvelle méthodologie, nous pouvons recalculer les montants de Risque de Réserve bruts non chargés hors ajustements (montants en M€) pour les scénarios précédents. Nous accompagnons les résultats d'un intervalle de confiance normale de niveau de confiance 95% comme présenté en section 3.2.1 :

31/12/2021 VaR_{99,5}[CDR] – CDR	Méthode règlements 11 ans version centrale	Méthode charges sur 11 ans
Borne sup intervalle confiance 95%	199,8	196,3
Résultat	198,3	195
Borne inf intervalle confiance 95%	197,8	194,2

Et les résultats nets de réassurance :

31/12/2021	Méthode règlements 11 ans version centrale	Méthode charges sur 11 ans
SCR Réserve net chargé	IC Sup : 86,3	IC Sup : 85,4
	85,9	85
	IC Inf : 85,7	IC Inf : 84,7

Les résultats avec la méthodologie MCMC sont globalement similaires à la méthodologie Bootstrap ce qui est rassurant. Nous avons testé de modifier plusieurs paramètres « exogènes » du modèle tels que la valeur du ratio de perte, les niveaux de cotisations considérés mais l'impact sur le résultat final est marginal.

La littérature sur le sujet met en garde sur le caractère évolutif de ces modèles, qui ne sont pas figés et encore perfectibles (méthode relativement récente).

Conclusion

Ce mémoire a développé une approche alternative de calcul du Risque de Réserve par Modèle Interne Partiel. Dans le cas d'une sous branche longue telle que la Responsabilité Civile Médicale, les pratiques de marché consistent à baser les modèles sur données agrégées en partant de la charge des sinistres, cette dernière intégrant l'information sur le passé des sinistres (les montants réglés) ainsi que les prévisions pour le futur (la provision pour sinistres à payer). L'actuelle modélisation du Risque de Réserve est basée sur un triangle de règlements des sinistres, ainsi il a été nécessaire de l'adapter pour répondre aux contraintes suivantes :

- Des contraintes d'ordre technique portant sur les modèles mathématiques, le Bootstrap basé sur les résidus de Pearson ne peut plus être mis en œuvre à cause d'une contrainte de positivité sur les montants incrémentaux du triangle de liquidation non respectée pour le cas des charges sinistres.
- Des contraintes d'ordre méthodologique, nous avons dans un premier temps exploité des provisions comptables et avons constaté que cette vision sous estimait grandement les sinistres graves et leur volatilité associée.
- Des contraintes liées aux spécificités actuelles du MIP, le périmètre des données considérées et les ajustements présents dans la formule du Risque de Réserve. Ces paramètres ont été mis à niveau sur les nouvelles approches testées afin de continuer à refléter le même risque. La méthodologie de passage brut au net du modèle actuel n'a pu être conservée et a été adaptée.
- Des contraintes opérationnelles liées au stockage des informations et temps de calcul des différents modèles. Nous avons manipulé des gros volumes de données au moment de la mise en œuvre de la méthodologie Bootstrap et Bayésienne, et bien que le prétraitement des données ait pu être fait sous SAS, il demeure une bonne partie des méthodes qui a été mise en œuvre sous R et Excel.

Les contraintes d'ordre technique ont été gérées à travers des modèles de provisionnement conçus pour intégrer des données de charges sinistres. Le cadre stochastique de Mack a permis le développement du modèle Munich Chain Ladder qui s'appuient sur deux jeux de données supposés corrélés : le triangle de règlements et le triangle de charges sinistres. Une méthodologie basée sur les techniques Bayésiennes a été explorée dans le but de la comparer avec nos résultats issus du modèle Munich Chain Ladder.

Différents scénarii ont été testés :

- Les scénarii basés sur des triangles de charges comptables ont fourni des résultats très en dessous de la méthode actuelle règlements. Nous avons émis l'hypothèse que cette différence pouvait s'expliquer par la vision comptable qui ne permet pas de capter des situations aussi « extrêmes » en termes de volatilité par rapport à la vision Best Estimate utilisée dans l'actuel Risque de Réserve.
- Les scénarii sur triangles de charges BE s'appuient sur notre historique de provisions calculées par le modèle BE sophistiqué. La première mise en œuvre du modèle sophistiqué datant de 2011, nous avons été contraints de réduire notre périmètre d'évaluation du Risque de Réserve, le portant de 21 exercices à 11 exercices. Dans le but d'obtenir des évaluations comparables, le Risque de Réserve méthode règlements a été recalculé sur ce périmètre réduit. L'écart entre les résultats finaux méthode charges et règlements est plus faible et confirme notre intuition

initiale : la différence de vision comptable et Best Estimate explique en grande partie la différence de volatilité sur les montants simulés, constatée dans les scénarii précédents.

- Les évaluations basées sur l'approche Bayésienne s'inscrivent comme un complément aux résultats précédents, permettant de tester une approche simulatoire différente du Bootstrap. Les résultats obtenus restent cohérents avec nos constats précédents.

Ainsi ce travail exploratoire aura permis de conforter SHAM dans son évaluation actuelle du Risque de Réserve par triangle de règlements. En effet les pratiques de marchés retenant un triangle de charges aboutissent à des résultats moins prudents que l'actuelle méthode règlements de l'entreprise. Nous excluons définitivement la version charges comptables de notre analyse, qui ne semble pas en adéquation avec l'évaluation du risque que l'on souhaite mesurer car la volatilité inhérente à la vision Best Estimate est bien plus marquée.

L'objectif à présent sera de mettre à jour l'étude menée dans ce mémoire afin de vérifier que la proximité des résultats entre la méthode de charges et règlements est maintenue dans le temps. En parallèle, notre historique de provisions BE calculées par le modèle BE sophistiqué va continuer à croître, de sorte à pouvoir compléter notre triangle de charge BE jusqu'à reconstituer un triangle de profondeur identique au modèle initial.

Enfin une nouvelle piste de développement pourrait être envisagée : bien que le MIP soit conçu et basé sur des données agrégées sous forme de triangle de liquidation, il pourrait être intéressant d'opter pour une approche de provisionnement ligne à ligne, consistant à utiliser les données individuelles connues sur nos sinistres. Cette démarche alternative permettrait :

- La prise en compte de l'hétérogénéité de notre portefeuille (en particulier notre segmentation des sinistres attritionnels, graves et graves IBNER).
- La prise en considération du cycle de vie de nos sinistres, qui serait implicitement intégré dans un modèle ligne à ligne à travers par exemple un système de censure sur nos données. Ce point permettrait également de se dispenser des tail factors actuellement utilisés pour projeter nos règlements.

Cependant ces catégories de modèles sont plus difficiles à implémenter, et s'éloignent de la démarche du MIP actuel qui simplifie volontairement certains aspects (données agrégées et tail factors). Enfin le provisionnement ligne à ligne est un grand changement méthodologique et nécessiterait un temps de développement important, car celui-ci n'est pour l'instant pas utilisé au sein de SHAM.

Table des figures

Figure 1 : Schéma de déclaration du sinistre pour un unique contrat.....	12
Figure 2 : Schéma de déclaration du sinistre après résiliation de contrat.....	12
Figure 3 : Frise temporelle de la garantie subséquente	13
Figure 4 : Chronologie de la réglementation européenne pour le secteur assurance	14
Figure 5 : Les trois piliers de Solvabilité 2.....	14
Figure 6 : La vision du bilan sous Solvabilité 1 vers Solvabilité 2.....	15
Figure 7 : Visualisation graphique d'une Value at Risk.....	15
Figure 8 : Matrice de corrélation des risques du sous module souscription non-vie.....	16
Figure 9 : Décomposition de la charge d'un sinistre.....	17
Figure 10 : Décomposition du SCR non-vie de SHAM.....	22
Figure 11 : Décomposition du SCR Primes et Réserve de SHAM.....	23
Figure 12 : Poids des provisions BE par branche d'activité	23
Figure 13 : Illustration d'un triangle de liquidation	29
Figure 14 : Evaluation des facteurs de développement par le MIP SHAM.....	31
Figure 15 : Evaluation du BE 31/12/2021 par année de réclamation	32
Figure 16 : Résumé du Bootstrap Chain Ladder	33
Figure 17 : Méthodologie de projection des règlements N+1	34
Figure 18 : Evaluation du BE 31/12/2021 par année de réclamation	35
Figure 19 : Résumé du Bootstrap Mack.....	38
Figure 20 : Tendances du ratio P/I.....	38
Figure 21 : Comparaison des ratios P/I à l'ultime	39
Figure 22 : Résumé du Bootstrap Munich Chain Ladder	45
Figure 23 : Tableau des principales lois conjuguées	50
Figure 24 : Construction du triangle de charges dans le premier scénario	55
Hypothèse d'espérance (triangle de règlements et charges).....	56
Hypothèse de variance (triangle de règlements et charges)	57
Hypothèse d'indépendance (triangle de règlements et charges).....	59
Figure 25 : Résultats du test « effet calendaire » pour le triangle de règlements.....	60
Figure 26 : Résultats du test « effet calendaire » pour le triangle de charges	61
Hypothèse supplémentaire de corrélation entre règlements et charges.....	62

Figure 27 : Visualisation des bornes de l'IC du CDR fonction du niveau quantile	64
Figure 28 : Risque de Réserve par exercice de réclamation au 31/12/2021	65
Figure 29 : Distribution empirique du CDR brut centré pour différents exercices.....	65
Figure 30 : Boite à moustaches pour visualiser les taux XS	67
Figure 31 : Projection des règlements au 31/12/2021 par modèle BE sophistiqué.....	71
Figure 32 : Construction du triangle de provisions Best Estimate	73
Figure 33 : Triangle de provisions brutes Best Estimate (courbe taux 31/12/21)	73
Figure 34 : Triangle de provisions brutes comptables (version reconstituée)	73
Figure 35 : Exemple de convergence pour le paramètre $\mu_{2,11}$	77
Figure Annexe 1 : Normal QQ Plot – Résidus Charges	84
Figure Annexe 1bis: Lag Plot – Résidus Charges	85

Bibliographie

[1] Notes de cours de méthodes avancées de tarification / provisionnement par Xavier MILHAUD.

[2] Notes de cours de provisionnement non-vie assuré à l'ISFA par Esterina MASIELLO.

[3] Support de cours de Frédéric PLANCHET : Modèles quantitatif pour l'ORSA

[4] Politique écrite du Modèle Interne Partiel de SHAM

[5] Règlement délégué du 10 octobre 2014 relatif à Solvabilité 2 :

<https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/PDF/?uri=CELEX:32015R0035&from=EN/>

[6] Le code des assurances consultable sur le site legifrance.gouv.fr

[7] Arrêt du Conseil d'État du 25/06/2008 Publié au recueil Lebon :

<https://www.legifrance.gouv.fr/ceta/id/CETATEXT000019081201>

[8] Arrêt du Conseil d'État du 24/07/2019 relatif à la reconnaissance du préjudice professionnel de l'enfant handicapé : <https://www.legifrance.gouv.fr/ceta/id/CETATEXT000038815760/>

[9] Les jurisprudences relatives aux pertes de gains professionnels futurs :

<https://www.aredoc.com/index.php/publication/lettre-n-27-les-pertes-de-gains-professionnels-futurs/>

[10] WÜTHRICH, Mario V., MERZ, Michael, et LYSENKO, Natalia. Uncertainty of the claims development result in the Chain Ladder method. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2009, vol. 2009, no 1, p. 63-84.

[11] MACK, Thomas. Distribution-free calculation of the standard error of Chain Ladder reserve estimates. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 1993, vol. 23, no 2, p. 213-225.

[12] QUARG, Gerhard et MACK, Thomas. Munich Chain Ladder. *Blätter der DGVMF*, 2004, vol. 26, no 4, p. 597-630.

[13] LIU, Huijuan et VERRALL, Richard J. Bootstrap estimation of the predictive distributions of reserves using paid and incurred claims. *Variance*, 2010, vol. 4, p. 121-135.

[14] CHARPENTIER, Arthur. *Statistique de l'assurance*. 2010.

[15] NTZOUFRAS, Ioannis et DELLAPORTAS, Petros. Bayesian modelling of outstanding liabilities incorporating claim count uncertainty. *North American Actuarial Journal*, 2002, vol. 6, no 1, p. 113-125.

[16] MEYERS, G. (2019). *Stochastic loss reserving using Bayesian MCMC models - 2ND Edition*. Arlington : Casualty Actuarial Society.

[17] Treyvis DAVID et Laetitia NGUYEN, Munich Chain Ladder stochastique pour la mesure du risque de provisionnement à un an en assurance non-vie : Mémoire d'actuaire 2014

[18] Joël ABOA, Méthodes de provisionnement de la branche Responsabilité Civile Entreprise : Mémoire d'actuaire 2018

Annexes

A.1 Caractère indépendant et identiquement distribué des données rééchantillonnées (Bootstrap)

Des vérifications supplémentaires ont donné lieu à des tests statistiques qui n'ont pas été développés précédemment pour ne pas surcharger les parties. Nous revenons ici sur les hypothèses d'application du Bootstrap, liées au caractère « indépendant et identiquement distribué » des observations de l'échantillon utilisé, faisant l'objet du rééchantillonnage.

Ces conditions n'étant pas vérifiées sur nos triangles de règlements et charges initiaux, nous avons recours à des résidus dont la formule dépend du modèle. Nous allons considérer ici les résidus de Munich Chain Ladder manipulés pour estimer le Risque de Réserve à partir des charges sinistres.

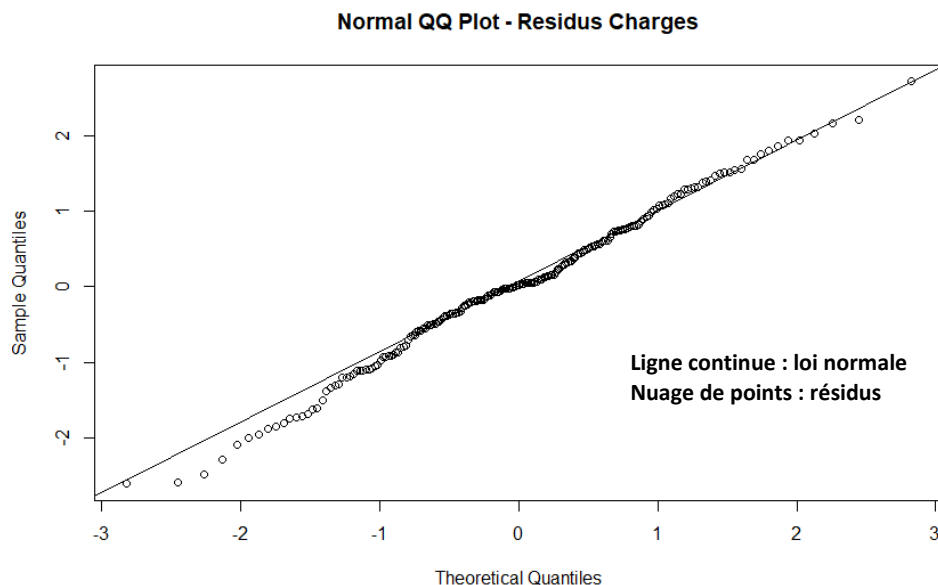
L'article de Thomas MACK et Gerhard QUARG démontre que les résidus du modèle de Munich Chain Ladder peuvent être vus comme des résidus de régressions linéaires, qui sont par définition indépendants identiquement distribués selon une loi normale d'espérance nulle. Nous proposons de vérifier ces hypothèses pour les résidus du modèle de Munich Chain Ladder sur triangle de charges, dont la formule est rappelée ci-dessous :

$$\text{res}_{\text{MCL}}^{\text{I,ajusté}}_{i,j} = \sqrt{\frac{n-j}{n-j-1}} \times \frac{f_{i,j}^{\text{I}} - \widehat{f}_{i,j}^{\text{MCL}}}{\widehat{\sigma}_j^{\text{I}}} \times \sqrt{I_{i,j}} \quad \text{où } f_{i,j}^{\text{I}} = \frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}}$$

Les prochains tests statistiques seront effectués sur le premier scénario développé, qui a par ailleurs déjà donné lieu à de multiples vérifications d'hypothèses liées aux triangles de données en partie 3.1.

1. Caractère identiquement distribué des résidus (selon une loi normale d'espérance nulle)

Une première intuition graphique validant cette propriété consiste à tracer un diagramme Quantile-Quantile (QQ Plot), afin de comparer deux distributions de probabilité en se basant sur la distribution de leur quantile. En utilisant le postulat que nos résidus considérés doivent respecter les propriétés des résidus d'une régression linéaire, nous allons représenter la distribution des quantiles de la loi normale et la mettre en relation avec la distribution des quantiles des résidus de notre modèle.



Le nuage de point se répartit plutôt bien sur la distribution de la loi normale. Pour se convaincre de la validité de cette propriété, nous menons un test statistique plus robuste. Le test de Kolmogorov-Smirnov permet d'identifier si notre échantillon de résidus de charges suit une distribution de probabilité particulière. En notant F_n la fonction de répartition empirique de nos résidus et F la fonction de répartition de la loi normale, Andréï Nikoláyeïch Kolmogorov s'est intéressé à la variable $D = \max_x [F_n(x) - F(x)]$ qui définit la distance maximale séparant nos deux fonctions précédentes. Ainsi plus cette distance s'approche de 0, plus les deux distributions sont semblables.

Nous souhaitons tester l'hypothèse de normalité des résidus avec une marge d'erreur de 5%, ainsi le test d'hypothèse peut se résumer en deux cas :

- { H_0 : La variable D tend vers 0 donc la distribution des les résidus suit une loi normale
- { H_1 : La variable D ne tend pas vers 0 invalidant ainsi la normalité des résidus

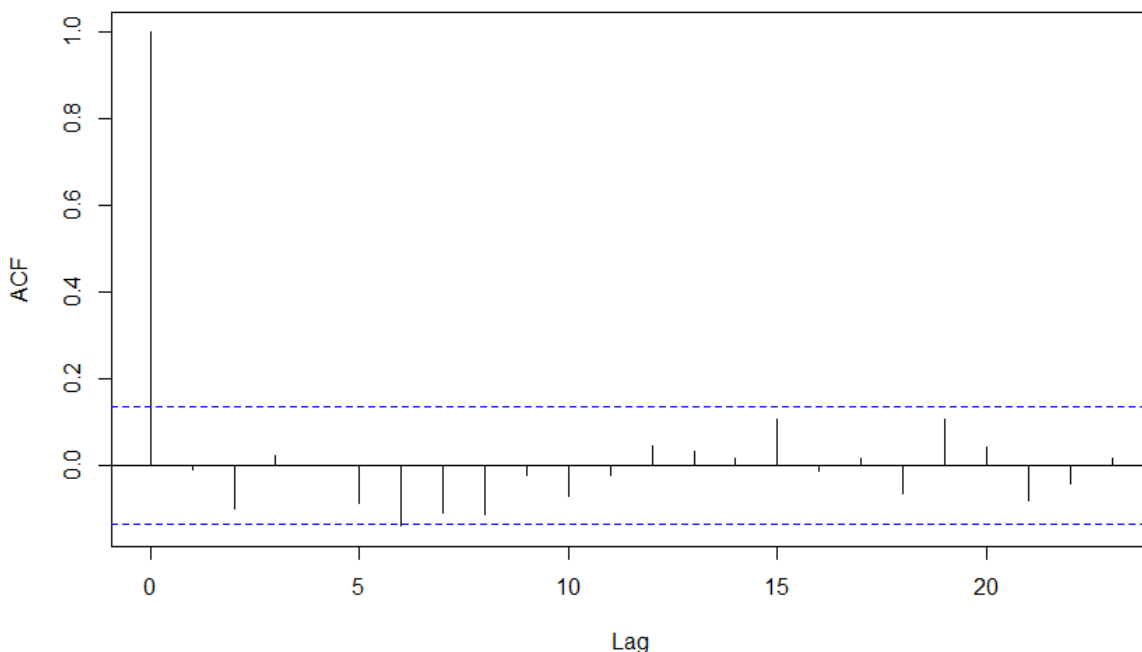
```
> ks.test(res_charges,"pnorm",m=0,s=sd(res_charges))
      one-sample kolmogorov-smirnov test
data:  res_charges
D = 0.062194, p-value = 0.3939
alternative hypothesis: two-sided
```

La p-value associée au test précédent est supérieure à notre marge d'erreur de 5%, ainsi nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse nulle H_0 , ainsi les résidus suivent bien une loi normale.

2. Hypothèse d'indépendance des résidus

Une première intuition graphique validant cette propriété consiste à tracer un corrélogramme de type « Lag plot » qui permet de comparer les résidus deux à deux en appliquant un « lag » autrement dit un décalage de rang entre deux résidus.

Lag Plot - Residus Charges



Dans le graphique précédent, en notant e_i notre suite des résidus de charges, nous constatons que le décalage de rang nul présente une corrélation égale à 1. Ce constat est logique car cela revient à étudier la corrélation entre e_i et e_i quel que soit i . La seconde barre au niveau du Lag = 1 estime la corrélation entre e_{i+1} et e_i , la troisième barre ensuite pour le Lag = 2 s'intéresse à e_{i+2} et e_i quel que soit i . Cette démarche se généralise pour les pics suivants. Nous constatons que ces derniers sont tous inclus dans la fenêtre en bleu pointillé qui délimite l'intervalle de confiance du coefficient de corrélation de valeur nulle. Ainsi en admettant cette marge d'erreur, les résidus paraissent relativement décorrélés entre eux.

Pour valider ce constat, nous proposons de mener le test statistique de Durbin-Watson, consistant à évaluer le rapport suivant : $DW = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}$

Cette statistique DW est bornée entre 0 et 4, la corrélation est la plus forte lorsque la valeur de cette dernière s'approche de 0 (cas de la corrélation positive) ou de 4 (cas de la corrélation négative). Lorsque la valeur est proche de 2, nous tendons vers une situation d'absence de corrélation.

Nous souhaitons tester l'hypothèse d'indépendance des résidus avec une marge d'erreur de 5%, ainsi le test d'hypothèse peut se résumer en deux cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \text{La variable DW s'approche de 2 donc les résidus sont non corrélés} \\ H_1 : \text{La variable DW est éloignée de 2 ainsi les résidus sont corrélés} \end{array} \right.$$

Ce test mené conduit à ne pas rejeter H_0 . De plus nous manipulons des résidus qui peuvent être vus comme des réalisations de loi normale. Nous savons que deux variables aléatoires X et Y suivant une loi normale constituent un cas particulier où la non corrélation implique l'indépendance.

En effet, rappelons que la densité f d'une variable aléatoire réelle X de loi normale de paramètres espérance, écart type (μ_X, σ_X) s'écrit pour $x \in \mathbb{R}$: $f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right\}$

La densité jointe $f_{X,Y}$ pour un couple de variable aléatoire (X,Y) de loi normale se note :

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho \frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 \right)\right\}$$

où ρ représente le coefficient de corrélation entre X et Y

Dans le cas où ces variables aléatoires sont décorrélées, $\rho = 0$ et l'expression précédente se simplifie :

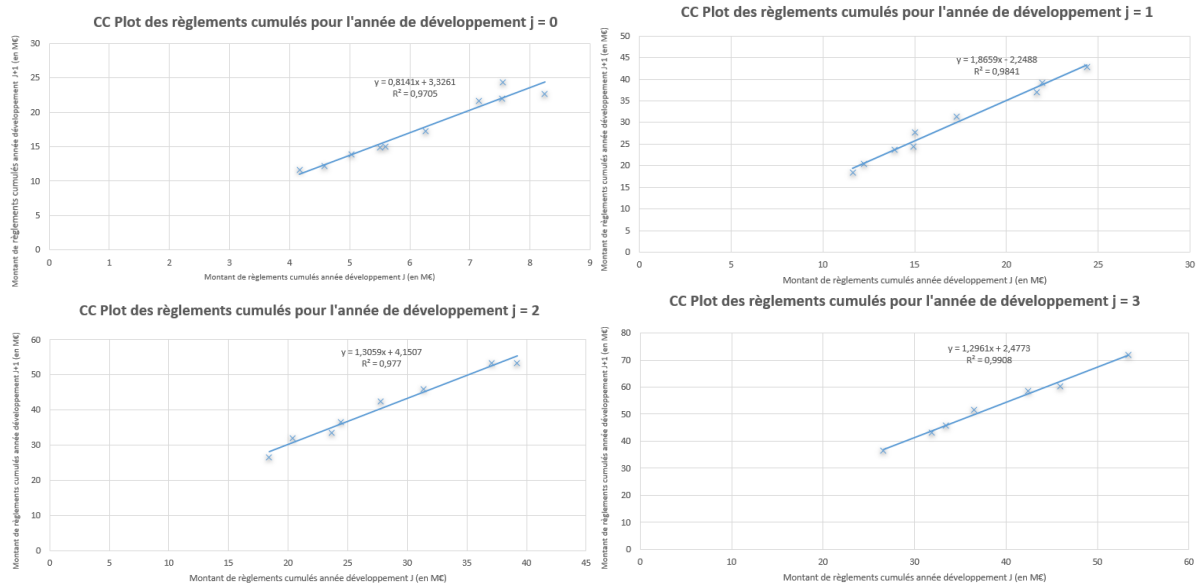
$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 \right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right\} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right\} \\ &= f_X(x)f_Y(y) \end{aligned}$$

Or deux variables sont par définition indépendantes si la densité de probabilité jointe est égale au produit de leur densité marginale. Ainsi deux variables de loi normale décorrélées sont indépendantes.

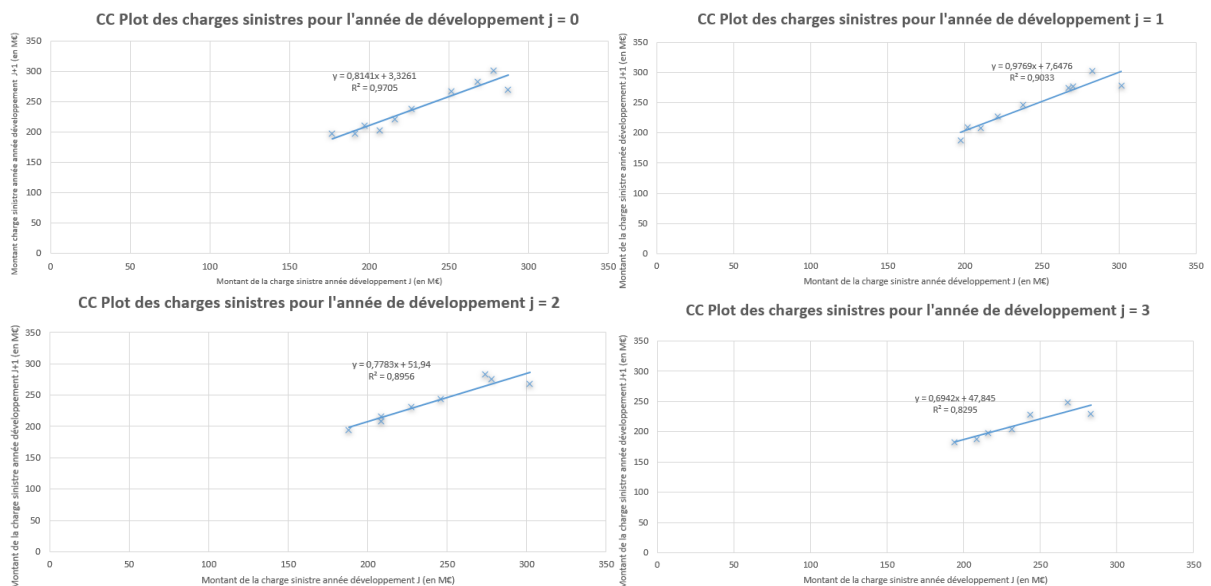
A.2 Hypothèses de Munich Chain Ladder sur triangles réduits à 11 années

Nous proposons de vérifier les hypothèses de Munich Chain Ladder associées aux observations des triangles réduits à 11 ans sur le scénario charge BE (courbe des taux 31/12/2021)

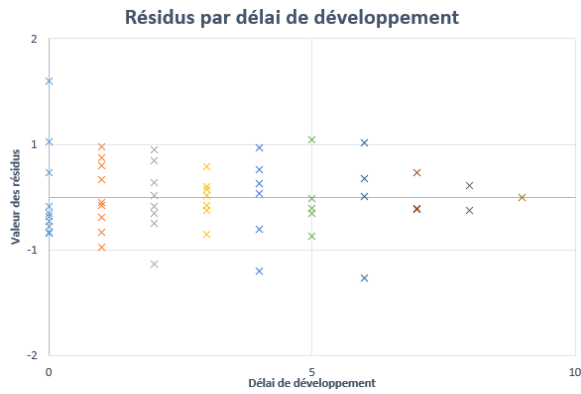
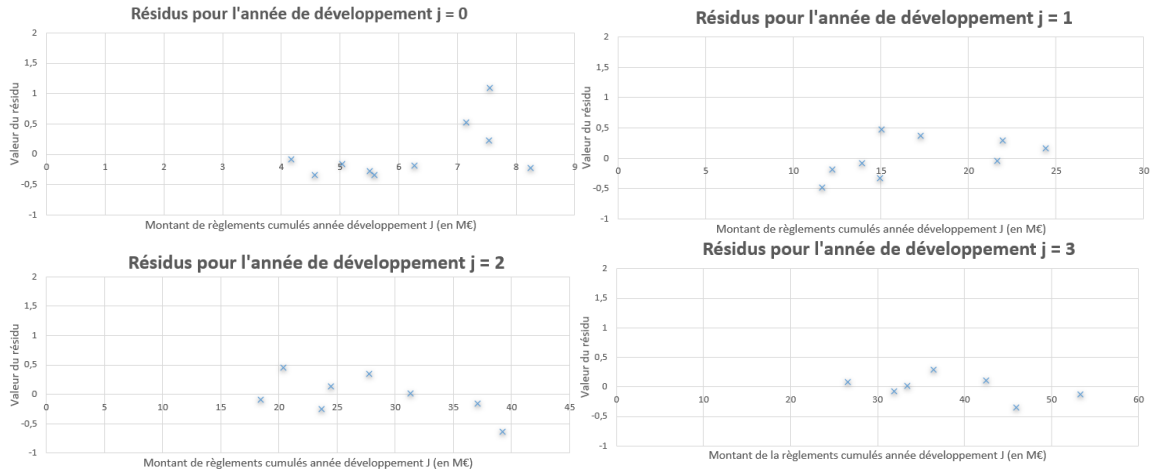
(P1) Hypothèse d'espérance sur Triangle règlements cumulés



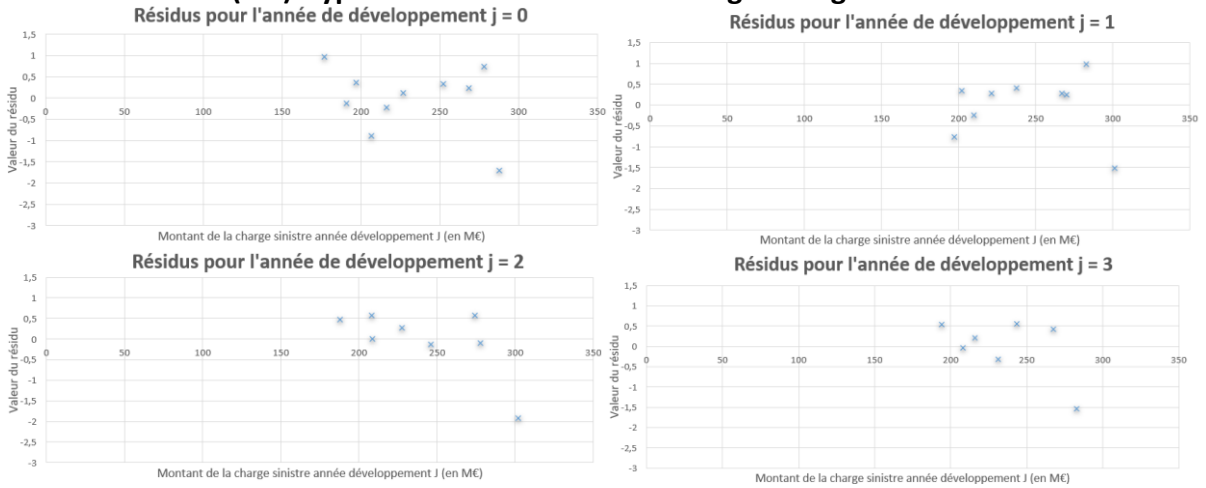
(P1') Hypothèse d'espérance sur Triangle charges sinistres



(P2) Hypothèse de variance sur Triangle règlements cumulés

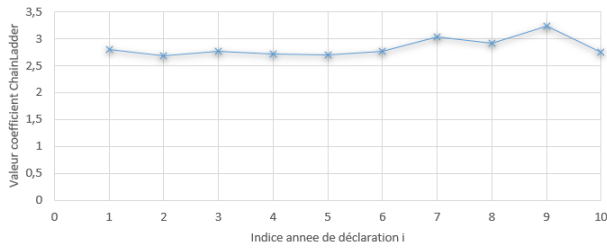


(P2') Hypothèse de variance sur Triangle charges sinistres

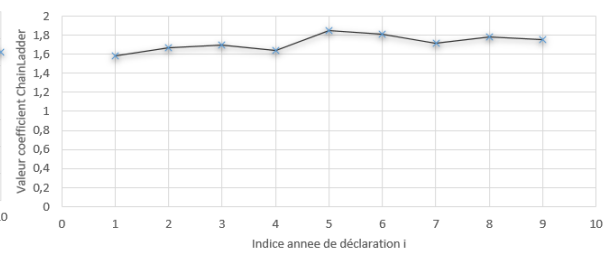


(P3) Hypothèse d'indépendance sur Triangle règlements cumulés

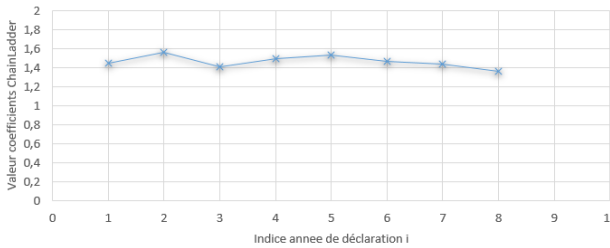
Coefficients CL pour l'année de développement j = 0



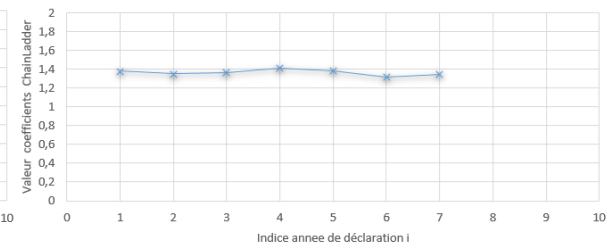
Coefficients CL pour l'année de développement j = 1



Coefficients CL pour l'année de développement j = 2



Coefficients CL pour l'année de développement j = 3

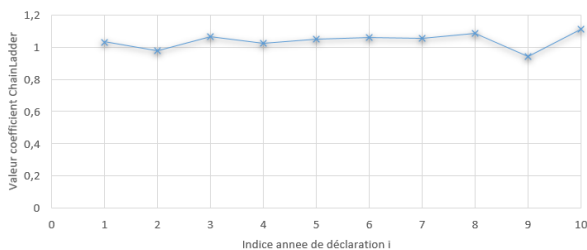


diagonale	Gj	Pj	nj	Zj	mj	E(Zj)	Var(Zj)
2012	1	0	1	0	0	0,00	0,00
2013	0	2	2	0	0,5	0,50	0,25
2014	1	2	3	1	1	0,75	0,19
2015	2	2	4	2	1,5	1,25	0,44
2016	2	3	5	2	2	1,56	0,37
2017	4	1	5	1	2	1,56	0,37
2018	5	2	7	2	3	2,41	0,55
2019	4	2	6	2	2,5	2,06	0,62
2020	5	4	9	4	4	3,27	0,74
2021	1	7	8	1	3,5	2,91	0,80

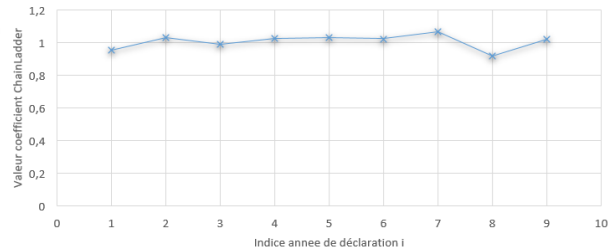
Z	15
E(Z)	16,27
Var(Z)	4,33
alpha	5,0%
intervalle 95%	12,19 20,35
	indépendance acceptée

(P3') Hypothèse d'indépendance sur Triangle charges sinistres

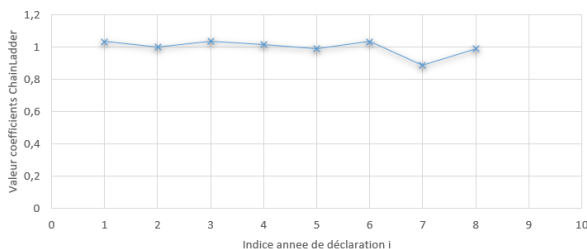
Coefficients CL pour l'année de développement j = 0



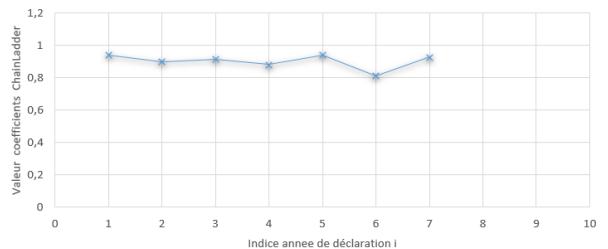
Coefficients CL pour l'année de développement j = 1



Coefficients CL pour l'année de développement j = 2



Coefficients CL pour l'année de développement j = 3

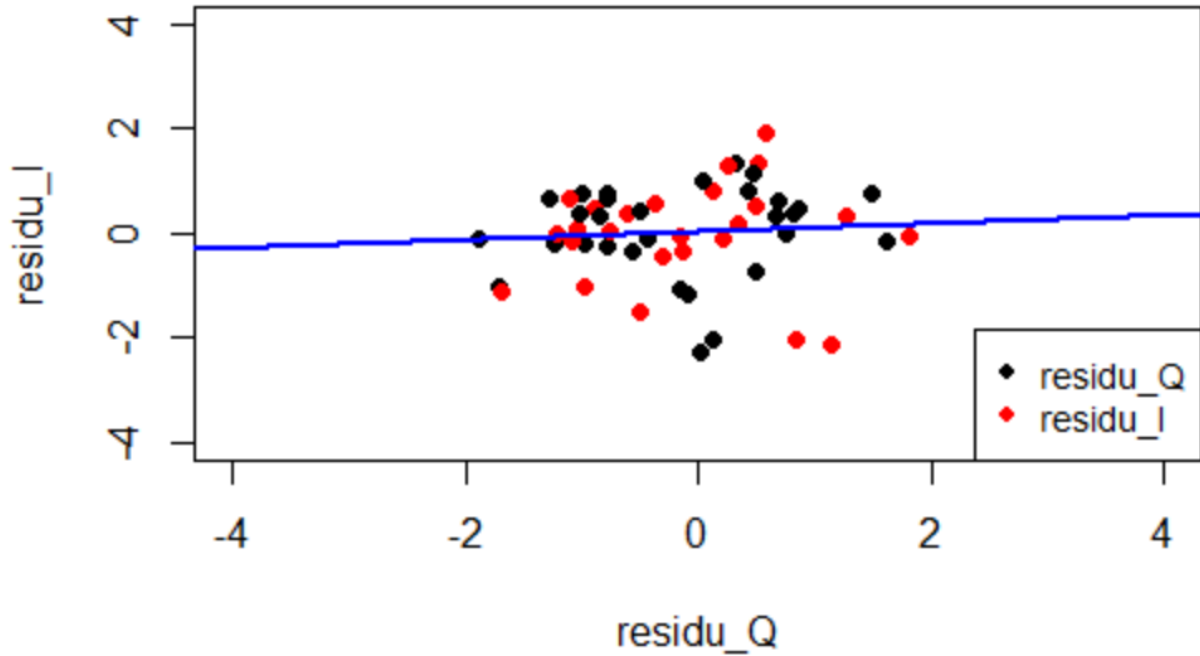


diagonale	Gj	Pj	nj	Zj	mj	E(Zj)	Var(Zj)
2012	0	1	1	0	0	0,00	0,00
2013	0	2	2	0	0,5	0,50	0,25
2014	3	0	3	0	1	0,75	0,19
2015	2	2	4	2	1,5	1,25	0,44
2016	2	3	5	2	2	1,56	0,37
2017	3	2	5	2	2	1,56	0,37
2018	2	3	5	2	2	1,56	0,37
2019	6	2	8	2	3,5	2,91	0,80
2020	1	7	8	1	3,5	2,91	0,80
2021	6	3	9	3	4	3,27	0,74

Z	14
E(Z)	16,27
Var(Z)	4,33
alpha	5,0%
intervalle 95%	12,19 20,35
	indépendance acceptée

(P4) Hypothèses supplémentaires de corrélation

Dépendance linéaire entre résidus des facteurs de développement
du triangle de charges sinistres et résidus des ratios $Q = P/I$



Dépendance linéaire entre résidus des facteurs de développement
du triangle de règlements et résidus des ratios $Q_{inv} = I/P$

