

Mémoire présenté le :

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Isaure Robert-Dautun

Titre Modélisation de l'inflation dans le générateur de scénarios économiques d'un assureur
vie

Confidentialité : ☒ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

signature

Entreprise :

Nom : Le Conservateur

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Charline Mordelet

Signature : Charline Mordelet

Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Charline Mordelet

Signature du candidat

Isaure Robert-Dautun

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement ma tutrice en entreprise, Charline Mordelet, ainsi que Jordan Pafadnam pour leur encadrement rigoureux, empreint de bienveillance, tout au long de mon année d'alternance. Leur disponibilité, ainsi que la pertinence de leurs remarques m'ont été d'une aide précieuse.

Un grand merci également à Léo Henry Biabaud, Directeur ALM et Technique pour son soutien et son expertise et à l'ensemble de l'équipe ALM et Actuariat pour leur accueil.

J'adresse également mes remerciements à mon tuteur académique, Pierre Thérond, pour ses conseils et sa disponibilité.

Je souhaite également remercier l'ensemble du corps enseignant de l'ISFA pour la qualité de la formation dispensée pendant ces trois années d'études.

Résumé

Mots-clés : Inflation, Tarification, ALM, Solvabilité II, Générateur de scénarios économiques, Univers risque-neutre, Modèle stochastique, Calibration, Modèle de marché Libor, Taux forward, Assurance vie

L'objectif de cette étude est le développement et la mise en œuvre d'un modèle d'inflation cohérent avec le marché dans le cadre de Solvabilité II pour les compagnies d'assurance vie. Solvabilité II, une directive réglementaire de l'Union Européenne, exige que les assureurs maintiennent des réserves de capital adéquates pour atténuer les risques potentiels, garantissant ainsi la stabilité financière et la protection des assurés. Un élément clé de cette directive est la modélisation précise de l'inflation, qui influence directement la valorisation des passifs d'assurance vie.

Dans la phase initiale, cette recherche évalue de manière critique les modèles d'inflation existants, en soulignant leurs limites, notamment leur incapacité à répliquer les prix de marché des caps d'inflation pour des maturités de moins de dix ans. Ces modèles existants ne répondent souvent pas aux exigences de cohérence de marché essentielles sous Solvabilité II, entraînant des estimations inexactes des passifs de la meilleure estimation. De telles inexactitudes peuvent conduire à une sous-estimation des réserves de capital nécessaires, posant ainsi un risque pour la stabilité financière de l'assureur.

Pour remédier à ces insuffisances, l'étude propose une nouvelle approche de modélisation. Ce nouveau modèle intègre un modèle de marché Libor (LMM) ajusté pour les taux réels avec un mécanisme de convergence vers une cible d'inflation à long terme. Le modèle proposé subit un processus de calibration rigoureux, où les paramètres sont optimisés pour garantir que les taux forward s'alignent avec les données de marché observées, atteignant ainsi la cohérence de marché cruciale. La calibration implique de faire correspondre les résultats du modèle avec les prix de marché de divers instruments financiers liés à l'inflation, assurant la fiabilité et l'exactitude du modèle.

La mise en œuvre du nouveau modèle est testée à travers divers scénarios économiques pour comparer les projections d'inflation résultantes avec celles générées par les modèles existants. Ces tests révèlent que le nouveau modèle surpasse significativement les modèles précédents, offrant une représentation plus précise et cohérente avec le marché de l'inflation. Cette précision améliorée est essentielle pour la valorisation précise des passifs ajustés en fonction de l'inflation.

Dans la phase finale, l'étude évalue l'impact du nouveau modèle sur la valorisation des passifs d'assurance vie. Les résultats démontrent que le modèle mis à jour offre une estimation plus fiable de ces passifs, assurant que les assureurs vie peuvent mieux respecter les exigences de capital de Solvabilité II. Cette fiabilité améliorée renforce également la capacité des assureurs à gérer plus efficacement les risques financiers.

En outre, l'étude souligne les implications plus larges d'une modélisation précise de l'inflation pour l'industrie de l'assurance. Elle met en évidence comment un modèle d'inflation robuste peut contribuer à la santé financière globale des compagnies d'assurance vie en garantissant qu'elles maintiennent des réserves de capital suffisantes. Cela, à son tour, offre une plus grande sécurité aux assurés et contribue à la stabilité du système financier dans son ensemble.

En conclusion, le nouveau modèle d'inflation non seulement respecte les normes réglementaires strictes imposées par Solvabilité II, mais il améliore également de manière significative la stabilité financière et les capacités de gestion des risques des compagnies d'assurance vie. Des recherches futures pourraient affiner davantage ce modèle et explorer son application à d'autres types de

produits d'assurance et de cadres réglementaires, élargissant potentiellement son impact à l'ensemble du secteur financier.

Abstract

Keywords : Inflation, Pricing, ALM, Solvency II, Economic Scenario Generator, Risk-neutral world, Stochastic model, Calibration, Libor Market Model, Forward rate, Life insurance

The focus of this study is the development and implementation of a market-consistent inflation model within the framework of Solvency II for life insurance companies. Solvency II, a regulatory directive by the European Union, mandates that insurers maintain adequate capital reserves to mitigate potential risks, ensuring both financial stability and the protection of policyholders. A pivotal component of this directive is the accurate modeling of inflation, which directly impacts the valuation of life insurance liabilities.

In the initial phase, this research critically evaluates existing inflation models, highlighting their limitations, particularly their inadequacy in replicating market prices of inflation caps for maturities of less than ten years. These existing models often fail to meet the market-consistency requirements essential under Solvency II, resulting in inaccurate estimations of the Best Estimate liabilities. Such inaccuracies can lead to the underestimation of required capital reserves, thereby posing a risk to the insurer's financial stability.

To address these deficiencies, the study proposes a novel modeling approach. This new model integrates a shifted Libor Market Model (LMM) for real rates with a convergence mechanism towards a long-term inflation target. The proposed model undergoes a rigorous calibration process, wherein the parameters are optimized to ensure that the forward rates align with observed market data, thereby achieving the crucial market-consistency. The calibration involves matching the model outputs with market prices of various inflation-linked financial instruments, ensuring the reliability and accuracy of the model.

The implementation of the new model is tested across various economic scenarios to compare the resulting inflation projections with those generated by the existing models. These tests reveal that the new model significantly outperforms the previous models, providing a more accurate and market-consistent representation of inflation. This enhanced accuracy is critical for the precise valuation of inflation-adjusted liabilities.

In the final phase, the study assesses the impact of the new model on the valuation of life insurance liabilities. The results demonstrate that the updated model offers a more reliable estimation of these liabilities, ensuring that life insurers can better meet the Solvency II capital requirements. This improved reliability also enhances the insurers' ability to manage financial risks more effectively.

Moreover, the study underscores the broader implications of accurate inflation modeling for the insurance industry. It highlights how a robust inflation model can contribute to the overall financial health of life insurance companies by ensuring they maintain sufficient capital reserves. This, in turn, provides greater security for policyholders and contributes to the stability of the financial system as a whole.

In conclusion, the new inflation model not only meets the stringent regulatory standards set forth by Solvency II but also significantly enhances the financial stability and risk management capabilities of life insurance companies. Future research could further refine this model and explore its application to other types of insurance products and regulatory frameworks, potentially broadening its impact across the financial industry.

Table des matières

I	Bases financières et importance de la modélisation de l'inflation	7
1	Contexte actuel	9
1.1	Définition et causes de l'inflation	9
1.2	L'assurance vie	11
1.3	L'inflation en assurance vie	12
2	Générateur de scénarios économiques	14
2.1	Cadre réglementaire	14
2.2	Générateur de scénarios économiques [9]	17
2.3	Martingalité en univers risque-neutre	19
2.4	Structure du GSE risque-neutre [4]	19
2.5	Cadre d'étude	21
2.6	Choix des instruments financiers de calibration	21
2.7	Tests de sortie d'une table de scénarios économiques	22
3	Socle financier	26
3.1	Définitions générales	26
3.2	Taux	26
3.3	Courbe de taux	28
3.4	Inflation	29
3.5	Produits indexés sur l'inflation	30
4	Modèles actuels dans le générateur de scénarios économique et limites	32
4.1	Notations	32
4.2	Modèle de taux nominaux	32
4.3	Modèle de taux réels	35
4.4	Modèle inflation	37
4.5	Limites du model actuel	38
II	Implémentation d'un modèle	41
5	Revue des principaux modèles de taux	43
5.1	Modèles d'Équilibre et Modèles de Taux Court	43
5.2	Modèles à Absence d'Arbitrage (AOA) et Modèles de Marché	44
5.3	Modèles à Structure par Terme	45
6	Processus de choix de modèle	47
6.1	Définition des critères de sélection	47
6.2	Contexte réglementaire	48
7	Première approche : Le modèle de Jarrow-Yildirim	49
8	Nouveau modèle	53
8.1	Approche	53
8.2	Constat sur la volatilité du modèle	53
8.3	Calibration du DDLMM taux nominaux	55
8.4	DDLMM taux réels	67
9	Convergence de la courbe initiale	70
9.1	Construction	70

10	Test Market-Consistent	72
11	Test de martingalité	73
III Résultats et impact		75
12	Pricing	77
12.1	Market-consistency	77
12.2	Répartition des valeurs d'inflation	78
13	Maîtrise du modèle	81
14	Changement de condition de marché	86
15	Résultats Solvabilité 2	87
15.1	Impact sur les frais et le ratio	87
15.2	Levée de la correction sur les trajectoires	89
16	Vérification des critères de sélection	90
17	Limites et ouverture	91
18	Conclusion	92

Introduction

Alors que l'inflation en France était relativement stable d'une année sur l'autre jusqu'en 2021, en se maintenant toujours en deçà de 3%, l'indice des prix à la consommation a connu une nette augmentation en 2022. L'inflation annuelle s'est ainsi établie à 5,2 % en 2022, alors qu'elle n'était que de 1,6 % en 2021. Cette tendance s'est poursuivie en 2023, avec une inflation de 4,9 %. Cette évolution s'explique par une combinaison de facteurs structurels et conjoncturels, notamment la reprise économique post-confinement due à la pandémie de Covid-19, les tensions géopolitiques liées au conflit russo-ukrainien, et les perturbations dans les chaînes d'approvisionnement mondiales. La Russie et l'Ukraine, en tant que grands exportateurs de matières premières, ont contribué à une hausse généralisée des prix des biens et services, accentuant les pressions inflationnistes.

L'inflation, définie comme une augmentation durable et généralisée des prix, est un phénomène à la fois économique et financier qui impacte directement le pouvoir d'achat des ménages et les institutions financières. Une inflation modérée est souvent perçue comme un signe de santé économique, car elle reflète une augmentation de la demande de biens et services. Cependant, une inflation trop élevée ou trop faible peut entraîner des déséquilibres économiques majeurs. La Banque Centrale Européenne (BCE) vise ainsi une inflation de 2 % à moyen terme, un niveau jugé optimal pour favoriser une croissance économique stable tout en évitant les risques de déflation, qui peuvent freiner les dépenses et les investissements. Ce niveau modéré d'inflation permet également des ajustements flexibles des salaires et des prix, tout en facilitant la gestion de la dette en réduisant sa valeur réelle avec le temps. Ces raisons combinées contribuent à maintenir la stabilité économique dans la zone euro.

Dans ce contexte, les entreprises d'assurance sont confrontées à des défis majeurs liés à la modélisation de l'inflation. En effet, le cadre réglementaire de Solvabilité II, entré en vigueur en 2016, impose aux assureurs de maintenir des réserves de capital adéquates pour atténuer les risques potentiels, garantissant ainsi la stabilité financière et la protection des assurés. Un élément clé de cette directive est la modélisation précise de l'inflation, qui influence directement la valorisation des passifs d'assurance vie. Les assureurs sont tenus d'évaluer leurs actifs et passifs en fonction des valeurs qu'ils pourraient obtenir dans des transactions réalisées dans des conditions de concurrence normales, entre des parties informées et consentantes. Cette évaluation doit correspondre aux montants auxquels les actifs pourraient être échangés et les passifs transférés. Il est spécifié dans la directive que l'inflation, et notamment celle des dépenses et sinistres, doit être prise en compte lors du calcul des provisions techniques. Ainsi, il est nécessaire d'utiliser une estimation d'inflation la plus fiable possible afin de satisfaire ces exigences réglementaires.

Dans un contexte de modélisation, il est essentiel de mettre en place un algorithme de valorisation des engagements futurs. Cette valorisation doit être en adéquation avec les instruments financiers disponibles sur le marché et les variations anticipées du taux d'inflation. Bien que l'on puisse obtenir une projection théorique du taux d'inflation en se basant sur les instruments disponibles sur le marché, cette approche ne prend pas en compte les risques associés aux différentes fluctuations potentielles des indicateurs financiers, ce qui peut impacter les coûts des options et garanties financières. Afin d'obtenir la valorisation la plus fidèle, il est essentiel de mettre en œuvre une projection dite "stochastique", qui intègre plusieurs scénarios possibles d'évolution des indicateurs financiers. Ces scénarios sont obtenus via un générateur de scénarios économiques. Pour chacun de ces scénarios, l'activité future de l'organisme d'assurance est modélisée, ce qui permet d'évaluer la situation de l'assureur dans diverses situations, y compris les plus défavorables, et de déterminer les coûts associés aux options déclenchées dans ces circonstances. Ainsi, le choix des modèles implémentés dans le générateur entraîne des différences dans les scénarios d'évolutions des indicateurs modélisés, et donc des variations dans le calcul des engagements de l'assureur.

Face à ces défis, cette étude propose une nouvelle approche de modélisation de l'inflation, spé-

cifiquement conçue pour répondre aux besoins des compagnies d'assurance vie dans le cadre de Solvabilité II. L'objectif est de développer un modèle robuste et cohérent avec les données de marché, capable de reproduire avec précision les prix des instruments financiers liés à l'inflation, tout en respectant les exigences réglementaires.

C'est dans cette conjecture que s'inscrit ce mémoire, qui se propose d'étudier la modélisation de l'inflation dans le cadre d'un générateur de scénarios économiques en univers risque-neutre dans le domaine assurantiel. L'objectif de cette recherche est de présenter une évolution du modèle existant, lequel a atteint ses limites face au contexte inflationniste récent. Le mémoire détaillera l'importance de la modélisation de l'inflation dans le cadre de l'assurance-vie, en contextualisant son rôle dans l'environnement économique actuel et en définissant les attentes spécifiques d'un modèle d'inflation en univers risque-neutre.

Une analyse approfondie des modèles existants est menée pour identifier leurs limites, en particulier leur incapacité à s'aligner sur les données de marché dans des contextes économiques instables. Cette lacune entraîne des estimations inexactes des passifs ajustés à l'inflation, ce qui peut conduire à une sous-estimation des réserves de capital réglementaires. Une évaluation critique du modèle actuel, soulignant ses limites, conduira à la proposition d'un nouveau modèle. Par la suite, l'implémentation pratique du modèle sera détaillée, en retraçant les premières approches, la méthode de calibration et en s'assurant de son admissibilité au sens des critères établis précédemment. Le choix de ce modèle est motivé par sa capacité à modéliser de manière réaliste les dynamiques des taux d'intérêts, y compris dans des environnements de taux bas ou négatifs.

Enfin, une analyse des résultats et impacts du modèle sera présentée, en abordant la maîtrise de ce dernier, son comportement face à des conditions de marché changeantes, et sa conformité aux exigences réglementaires de Solvabilité II. Cette évaluation est réalisée à travers plusieurs scénarios de stress et tests de sensibilité, visant à étudier les performances du nouveau modèle et à mesurer son impact sur la valorisation des passifs d'assurance vie.

Première partie

Bases financières et importance de la modélisation de l'inflation

Cette première partie se propose de poser les bases financières essentielles à la compréhension des analyses qui seront développées dans ce mémoire. Elle s'attache à définir et à expliciter la notion d'inflation, un concept fondamental pour les assureurs vie, en raison de son impact significatif sur la valorisation des passifs et sur la gestion des risques.

Par ailleurs, cette section examine les interactions entre les exigences réglementaires, en particulier celles de Solvabilité II, et les modèles employés dans les générateurs de scénarios économiques. Cette contextualisation théorique vise à offrir une compréhension approfondie des défis que pose la modélisation de l'inflation dans un environnement complexe et évolutif.

1 Contexte actuel

1.1 Définition et causes de l'inflation

L'inflation traduit le phénomène de hausse généralisée des prix au sein d'une économie, accompagnée d'une baisse durable de la valeur de la monnaie : elle reflète donc une baisse du pouvoir d'achat. Ses causes sont complexes et variées, mais il est possible d'en décrire quelques-unes :

- L'inflation par la demande (*Demand-pull inflation*) se produit lorsque la demande globale dépasse la capacité de production de l'économie. Cela peut être dû à une augmentation des dépenses des consommateurs, à des politiques gouvernementales qui augmentent les dépenses publiques ou réduisent les impôts, ou encore à une croissance économique rapide qui entraîne une demande excédentaire.
- L'inflation par les coûts (*Cost-push inflation*) survient lorsque les coûts de production augmentent. Cela inclut les hausses des prix des matières premières (comme le pétrole), des salaires et d'autres coûts de production qui sont répercutés sur les consommateurs. Les chocs d'offre, comme les interruptions d'approvisionnement dues à des catastrophes naturelles ou des crises géopolitiques, peuvent également réduire l'offre de biens et services, augmentant ainsi les prix.
- L'inflation importée est liée aux variations des prix des biens et services importés. Une dépréciation de la monnaie nationale augmente le coût des importations, ce qui se traduit par des prix plus élevés pour les biens et services importés. De plus, l'inflation dans les pays partenaires commerciaux peut être importée via les biens et services qu'ils exportent.
- L'inflation par la politique monétaire (*Monetary inflation*) peut résulter d'une politique monétaire expansionniste. Une augmentation de la masse monétaire par la banque centrale, souvent via des taux d'intérêt bas ou des programmes de rachat d'actifs, peut stimuler la demande au-delà de l'offre disponible, augmentant les prix.

A la base du calcul de l'inflation en France se trouve l'Indice des Prix à la Consommation (IPC), ou CPI pour *Consumer Price Index*. L'INSEE le définit comme suit :

Indice des prix à la consommation : Instrument de mesure de l'inflation qui permet d'estimer, entre deux périodes données, la variation moyenne des prix des produits consommés par les ménages. Les biens et services sont réunis en grandes catégories auxquelles il est attribué une pondération, mise à jour annuellement, en fonction de leur poids dans la consommation

moyenne des Français. C'est une mesure synthétique de l'évolution des prix de produits, à qualité constante. Il est publié chaque mois au Journal Officiel.

En outre, l'IPC n'est pas un indice du coût de la vie mais cherche à mesurer les effets des variations de prix sur le coût d'achat des produits consommés par les ménages.

De ce fait, l'inflation est calculée mensuellement à partir de l'évolution du prix d'un panier de biens et services par les instituts nationaux de statistiques, soit l'INSEE pour la France, Eurostat pour l'Europe.

La valeur de l'IPC est notée IPC_t à la date t . On distingue plusieurs mesures de l'inflation :

- **L'inflation glissante annuelle** : Cette mesure d'inflation, notée $I(t)$, correspond au taux de capitalisation de l'IPC en composition annuelle :

$$I(t) = \frac{IPC_t}{IPC_{t-1}} - 1$$

- **Le taux d'inflation en capitalisation continue** : Le taux d'inflation en capitalisation continue entre les instants t et T , noté $i(t, T)$, est défini comme :

$$i(t, T) = \frac{1}{T - t} \ln \left[\frac{IPC_T}{IPC_t} \right]$$

- **Le taux court** : Le taux court, noté q_t , est défini comme la limite du taux en capitalisation continue :

$$q_t = \lim_{T \rightarrow t} i(t, T)$$

La méthode de calcul de l'inflation utilisée en France est l'inflation glissante annuelle. La référence retenue dans le cadre de l'assurance est l'indice des prix à la consommation *hors tabac*. En effet, une loi adoptée en 1992 interdit en particulier l'utilisation d'un indice des prix dépendant du tabac dans le calcul de l'inflation pour les obligations indexées sur l'inflation.

On introduit également l'Indice des Prix à la Consommation Harmonisé (IPCH). C'est une version de l'IPC utilisée dans l'Union européenne et d'autres pays qui ont adopté l'euro. L'IPCH vise à harmoniser les méthodes de calcul de l'IPC entre les différents pays membres de l'UE afin de faciliter les comparaisons entre eux.

On peut observer l'historique de variation annuelle de l'IPCH en France et zone Euro depuis 2007.

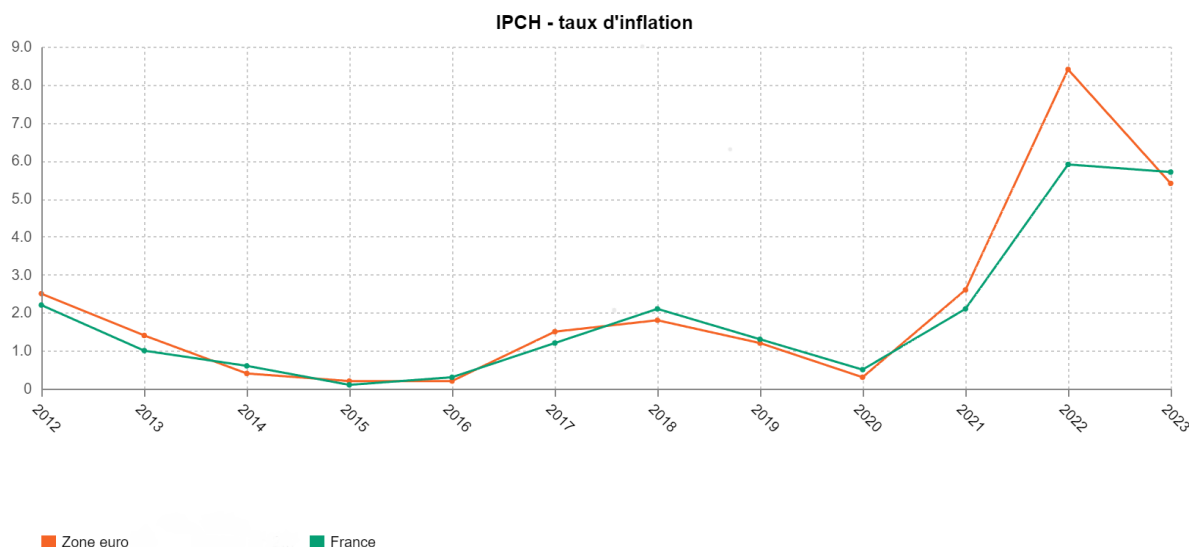


FIGURE 1 – Evolution de l'IPCH en Zone Euro et en France depuis 2012, source Eurostat

1.2 L'assurance vie

L'assurance vie en France est un placement financier essentiel qui combine des aspects d'assurance et d'investissement. Il s'agit d'un contrat à long terme entre un souscripteur et une compagnie d'assurance. Ces contrats permettent de répondre à différents objectifs, tels que la préparation de la retraite, la constitution d'une épargne, la protection des proches ou encore la transmission du patrimoine.

Dans un contrat d'assurance-vie, les épargnants ont la possibilité de choisir entre deux types de supports d'investissement : le fonds en euros et les unités de compte. Le fonds en euros est particulièrement adapté aux épargnants recherchant une stabilité de leur capital, car il offre une garantie sur le montant de l'épargne et les intérêts. Ce fonds est majoritairement investi dans des obligations d'État ou d'entreprises, et l'assureur s'engage à fournir un rendement minimum garanti (TMG), quelle que soit la situation des marchés financiers. En cas de performance supérieure, l'assureur doit redistribuer une part des bénéfices à l'épargnant. Les gains sont protégés par un mécanisme appelé "effet cliquet", et les intérêts générés sont soumis à des prélèvements sociaux.

Les unités de compte, quant à elles, sont des supports d'investissement qui ne garantissent pas le capital, mais qui offrent des perspectives de rendement plus élevées. Elles permettent de diversifier l'épargne sur plusieurs types de placements. Contrairement aux fonds en euros, les prélèvements sociaux sur les unités de compte ne s'appliquent qu'en cas de rachat du contrat.

Les contrats d'assurance épargne se distinguent principalement en deux catégories : les contrats mono-support et les contrats multi-supports. Dans les contrats mono-support, les versements et le capital de l'assuré sont investis exclusivement dans un seul fonds de placement, que ce soit un fonds en euros ou un support en unités de compte. En revanche, les contrats multi-supports offrent à l'assuré la possibilité de répartir une partie de son capital sur un fonds en euros, tandis que la part restante est placée sur un ou plusieurs supports en unités de compte. Ce type de contrat permet ainsi de potentiellement bénéficier de rendements plus attractifs grâce à l'investissement en unités de compte, tout en sécurisant la part du capital investie dans le fonds en euros.

1.3 L'inflation en assurance vie

1.3.1 Comportement des assurés

Une inflation élevée influence directement le comportement des assurés et les modèles économiques des assureurs. En matière d'assurance vie, un contexte inflationniste peut rendre les contrats moins attrayants et entraîner une augmentation des rachats. En effet, les contrats avec participation aux bénéfices, qui visent à lisser les taux servis aux assurés, peuvent voir leurs rendements diminuer par rapport à d'autres formes d'épargne. Ainsi, l'inflation et la hausse des taux d'intérêt peuvent réduire les taux servis aux assurés, rendant d'autres investissements plus attractifs, notamment les titres à court terme lorsque la courbe des taux est inversée.

En 2022, la forte hausse de l'inflation et des taux d'intérêt a mis à rude épreuve les modèles économiques des assurances vie à participation aux bénéfices. Les produits d'épargne, bien que stables en valeur nominale, ont vu leur valeur réelle diminuer en raison de l'inflation. Par ailleurs, certains portefeuilles, conçus pour garantir des rendements dans un environnement de faible taux, contiennent des obligations à long terme dont les rendements sont désormais inférieurs aux taux actuels. En conséquence, il pourrait falloir un certain temps avant que les bénéfices des assurances vie à participation aux bénéfices s'ajustent aux rendements attendus, ce qui pourrait poser des défis importants face à la concurrence du secteur bancaire et aux attentes des consommateurs. Dans ce contexte, le caractère collectif et les avantages de l'épargne dans le modèle à participation aux bénéfices, avec partage des bénéfices et lissage dans le temps, doivent être pris en compte. Ces effets étaient appréciés dans un environnement de faible rendement, lorsque les participations aux bénéfices étaient parfois bien supérieures aux rendements actuels du marché. En revanche, dans la situation actuelle, la participation aux bénéfices pour les contrats à prime unique pourrait ne pas être compétitive par rapport aux produits bancaires.

Pour les contrats en unités de compte, l'assuré peut choisir parmi une gamme d'investissements. L'allocation peut inclure des actifs offrant une protection contre l'inflation ou non, et être plus ou moins sensibles à un environnement économique faible. Par conséquent, l'impact dépend de la composition du portefeuille. Par exemple, un portefeuille composé majoritairement d'actions serait avantageux dans un environnement inflationniste à forte croissance. À l'inverse, si l'inflation est accompagnée d'une faible croissance et de marchés financiers en déclin, la perte de pouvoir d'achat due à l'inflation serait exacerbée par la mauvaise performance des actions. La contribution des actifs à revenu fixe au portefeuille dépendrait des taux d'intérêt. Si les taux augmentent, la valeur de marché des titres à revenu fixe diminuerait, tandis que si les taux baissent, les titres à revenu fixe s'apprécieraient et compenseraient les pertes des actions en cas de faible croissance.

En dehors de l'impact sur les bénéfices, les aspects de rachat et de retrait peuvent également être pertinents dans un environnement de forte inflation. Des taux d'intérêt à court terme plus élevés, visant à ralentir l'inflation, peuvent inciter les assurés à racheter leurs contrats d'épargne. Les rachats peuvent également augmenter en raison de la diminution du revenu réel des assurés, poussant les consommateurs à accéder à leurs fonds en raison de la hausse des coûts de la vie.

1.3.2 Impacts pour les assureurs

Pour un assureur ayant des engagements dans des branches à développement long, tels que les assurances vie, il est important de considérer l'inflation parmi les facteurs de risque. En effet,

- En assurance vie individuelle, une modification du comportement des épargnants pourrait exposer les assureurs à une désépargne du fait de la hausse du coût de la vie, ou à un mouvement des épargnants vers d'autres produits indexés ou mieux rémunérés ou encore des arbitrages entre contrats en unités de compte (pour lesquels le risque est porté par l'assuré) et contrats en euro (pour lesquels les engagements de l'assureur sont beaucoup plus importants) notamment en termes de revalorisation.
- La hausse de l'inflation impacte les placements des assureurs. Ces derniers investissent les primes payées par les assurés dans des actifs financiers variés : obligations de plusieurs natures, actions, parts d'organismes de placements collectifs, titres non cotés, immobilier, liquidités. Les portefeuilles sont structurés de manière à ce que les flux perçus des actifs (dividendes, coupons, loyers, remboursements d'obligations, reventes de titres) s'adaptent le mieux possible, en termes de durée et de montant, aux flux sortants générés par les garanties offertes.
- De plus, certains frais supportés par l'assureur augmentent systématiquement avec l'inflation : frais administratifs, frais de gestion et placements, frais de gestion des sinistres, commissions, etc.
- Par ailleurs, dans le cadre d'engagements de rentes prévoyant une revalorisation avec pour objectif l'inflation, l'utilisation de produits indexés sur l'inflation est important pour que la rentabilité de l'actif corresponde avec les objectifs du passif.

Les impacts de l'inflation sur les portefeuilles d'assurance et les obligations des assureurs, ainsi que les défis réglementaires associés, ont été pleinement intégrés dans cette étude, l'objectif central restant de développer un modèle robuste et cohérent avec le cadre réglementaire de Solvabilité II, garantissant que l'inflation soit modélisée avec précision. Cette approche vise à mesurer de manière fiable le risque inhérent aux portefeuilles sous gestion tout en respectant les exigences de cohérence avec le marché et de rigueur quantitative imposées par la directive.

2 Générateur de scénarios économiques

2.1 Cadre réglementaire

La directive européenne Solvabilité II, entrée en vigueur au 1er janvier 2016, vise à renforcer la solidité financière des entreprises d'assurance en renforçant leur gouvernance, améliorant la gestion des risques et instaurant des exigences de solvabilité mieux adaptées à leur profil de risque.

Cette directive est fondée sur 3 piliers :

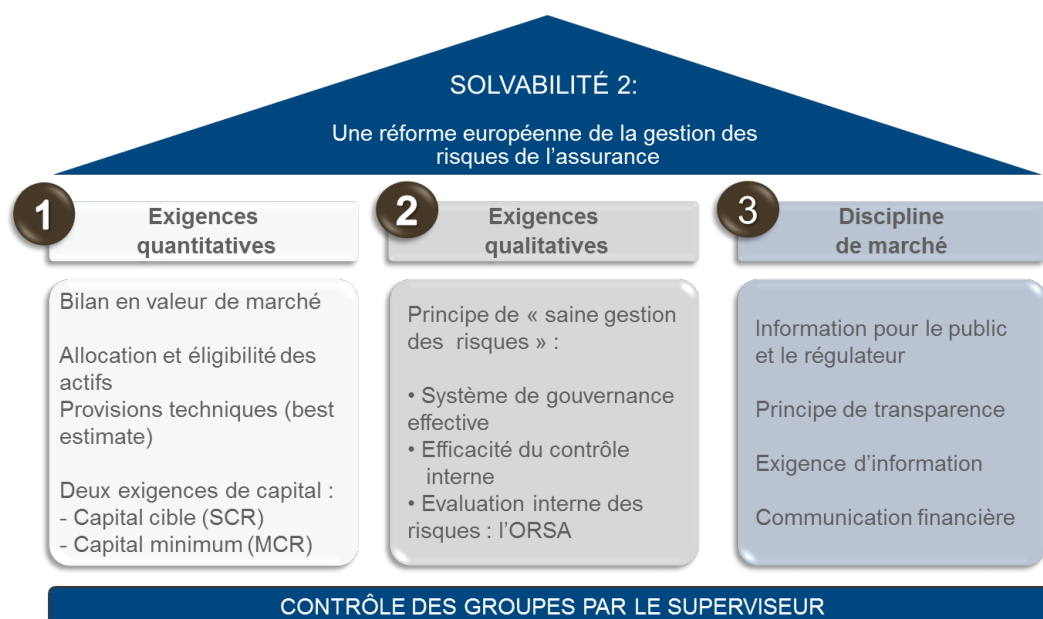


FIGURE 2 – Les trois piliers de la directive Solvabilité 2

La problématique de cette étude concerne les exigences quantitatives de la norme, soit le Pilier I. Les notions importantes de ce pilier sont les suivantes :

Pilier I

Le bilan sous Solvabilité 2 se décompose en deux parties :

- L'actif, évalué en valeur de marché
- Le passif, correspondant à la somme des fonds propres, de la marge pour risque et du Best Estimate

Le graphique suivant illustre le bilan économique d'une compagnie d'assurance-vie sous Solvabilité 2 :

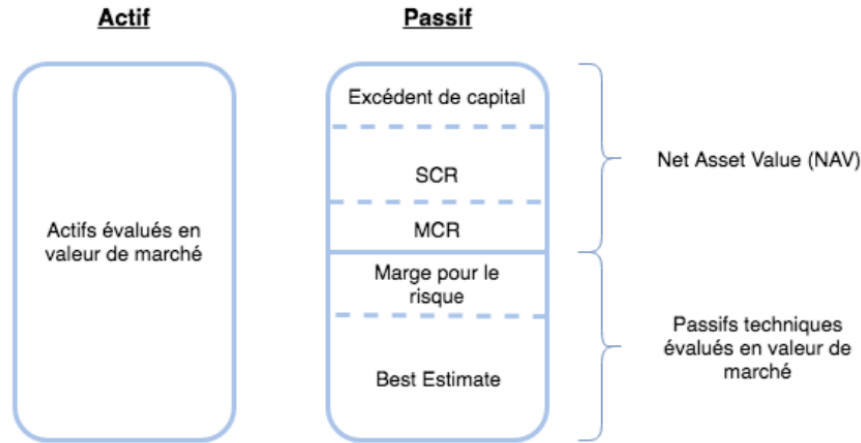


FIGURE 3 – Bilan économique d’une compagnie d’assurance vie sous Solvabilité 2

L’une des spécificités de l’assurance vie réside dans le lien étroit qui existe entre la performance financière constatée à l’actif et les engagements de l’assureur envers ses assurés, qui sont dirigés par les options et garanties proposées sur les contrats (taux minimum garanti, rachats, arbitrages, etc.).

Le **Best Estimate** correspond à la valeur actuelle des engagements futurs de l’assureur envers ses assurés, calculée en moyenne pondérée par les probabilités d’occurrence des flux de trésorerie futurs, en prenant en compte la valeur temporelle de l’argent et en utilisant la courbe des taux sans risque ajustée selon les spécifications de Solvabilité II, qui incluent des ajustements pour le risque de crédit (CRA), la volatilité (VA) et la dernière liquidité (UFR). Son calcul nécessite la projection des flux grâce à un modèle qui permet de modéliser ces interactions entre l’actif et le passif de l’assureur.

Mathématiquement, il se calcule :

$$BE = \mathcal{E} \left[\sum_{t=0}^T \frac{\text{Flux}_t}{(1 + r_t)^t} \right]$$

Où Flux_t représente le flux de trésorerie net attendu à la période t , r_t est le taux d’actualisation applicable à la période t et T est l’horizon temporel pour lequel les flux de trésorerie sont projetés.

Dans le cadre de l’évaluation du *Best Estimate* des passifs pour un assureur vie, plusieurs flux de trésorerie sont particulièrement sensibles aux variations de l’inflation. Ces flux sont essentiels à considérer pour garantir que les engagements futurs soient correctement valorisés. Voici les principaux flux concernés :

- **Frais de gestion** : Les frais associés à la gestion des contrats, y compris les frais administratifs et les frais de gestion, sont souvent sensibles à l’inflation. L’augmentation des coûts opérationnels au fil du temps peut entraîner une augmentation des charges futures, influençant le calcul du Best Estimate.
- **Provisions techniques** : Les provisions constituées pour couvrir les engagements futurs doivent intégrer une estimation de l’inflation. Les ajustements en fonction de l’inflation sont cruciaux pour les provisions pour sinistres futurs, afin de garantir que les montants réservés

aujourd'hui suffiront à couvrir les prestations à payer, ainsi que les frais qui leur sont liés, dans un contexte inflationniste.

- **Valeur de rachat** : La valeur de rachat des contrats d'assurance vie, particulièrement pour les contrats en unités de compte ou en euros, peut être affectée par l'inflation. Une indexation partielle ou totale sur l'inflation peut modifier la valeur des rachats futurs, ce qui doit être pris en compte dans le Best Estimate.

Le **SCR** correspond au montant de fonds propres minimum que doit détenir la compagnie pour ne pas faire faillite à horizon d'un an avec une probabilité de 99,5%. Une formule standard est calibrée par l'EIOPA pour le calcul du SCR.

La directive Solvabilité II préconise une méthode de calcul du SCR basée sur l'agrégation de divers risques auxquels les entreprises du secteur de l'assurance sont confrontées. L'exigence de capital C_R pour un facteur de risque R , qui correspond au capital requis pour le sous-module de risque R , est calculée en évaluant la variation du niveau des fonds propres économiques suite à un choc instantané sur le facteur R au niveau de risque de 0,5%.

$$C_R = NAV_{centrale} - NAV_{choquée}$$

Ensuite, les capitaux requis pour chaque sous-module sont agrégés en utilisant des matrices de corrélation afin de déterminer les SCR associés aux différents modules de risque. Enfin, les SCR relatifs à chaque module de risque sont agrégés à l'aide d'une nouvelle matrice de corrélation pour obtenir le BSCR (Basic Solvency Capital Requirement), qui représente le SCR global.

Le SCR final est calculé en ajoutant au BSCR une exigence de capital pour le risque opérationnel, puis en soustrayant un ajustement pour prendre en compte les propriétés d'absorption des risques liées aux futures participations aux bénéfices et aux impôts différés. Le schéma suivant illustre l'agrégation des sous-modules et des modules du SCR décrite ci-dessus :

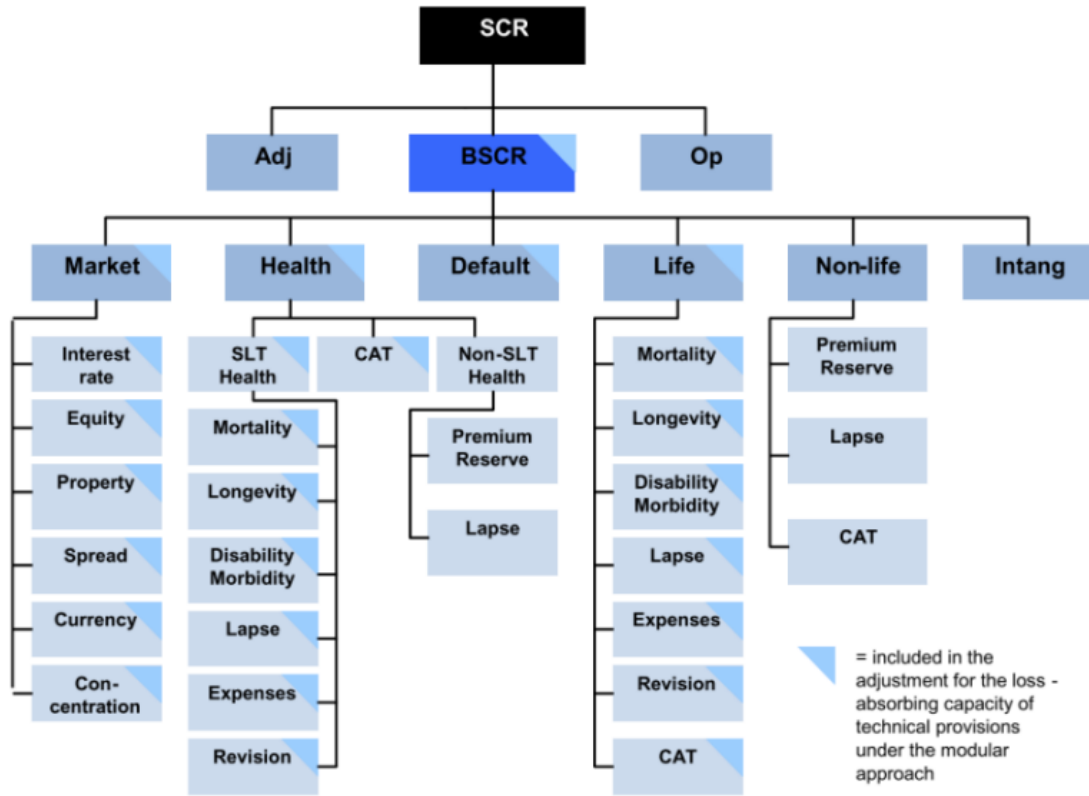


FIGURE 4 – Arborescence du SCR fourni par l'ACPR

La **marge pour risque** s'interprète comme une provision complémentaire au Best Estimate calculée comme étant le coût d'immobilisation d'un montant de fonds propres égal au SCR sur la durée résiduelle des engagements de l'assureur.

$$RM = CoC \times \sum_{t=0}^T \frac{SCR_t}{(1 + r_{t+1})^{t+1}}$$

Avec :

- r_t le taux sans risque en t
- SCR_t le SCR en t
- CoC le coût du capital.

2.2 Générateur de scénarios économiques [9]

On distingue 4 grands risques financiers pour une compagnie d'assurance :

- **Risque de taux** : Perte de valeur du portefeuille obligataire en face des engagements euro liée à une hausse des taux ou perte de rendement progressive sur le portefeuille liée à une baisse des taux
- **Risque action/immobilier** : Perte de valeur du portefeuille action en face des engagements euro liée à une baisse des marchés

- **Risque inflation** : Augmentation des frais généraux liés à la gestion des contrats
- **Risque de crédit** : Défaut des obligations risquées ou perte de valeur du portefeuille obligataire en face des engagements euro liée à une hausse des spreads

Un générateur de scénarios économiques (GSE) est un outil de simulation qui permet de diffuser pour chaque simulation et sur un horizon de projection donné les évolutions de différents facteurs de risques financiers reflétant les grands risques énoncés :

- Les courbes des taux nominaux
- Les indices actions (avec et hors dividendes)
- La courbe d'inflation
- L'indice immobilier
- Les spreads

qui sont reliés entre eux par des corrélations.

Dans le cadre de Solvabilité 2, et plus spécifiquement pour le pilier 1, le générateur joue un rôle central. En effet, dans le contexte de la formule standard, il définit l'évolution des variables économiques nécessaire à la valorisation de l'ensemble des éléments du bilan, tenant compte des options et des garanties.

La valorisation du Best Estimate est le résultat de la combinaison du générateur et du modèle de projection actif-passif, qui sert à établir l'échéancier des flux d'actif et de passif. Ces flux sont fonction d'un contexte contenu notamment au sein des tables stochastiques produites par le GSE.

2.2.1 Probabilité risque-neutre

La manière de projeter les facteurs de risque dépend de l'utilisation souhaitée du générateur de scénarios économiques, ce qui conduit à définir les notions de probabilité historique et de probabilité risque neutre.

1. Dans un univers **risque-neutre**, utilisé dans une optique d'évaluation, tous les actifs présentent une performance moyenne égale au taux sans risque, ce qui signifie que les primes de risque sont nulles. Cette approche permet de valoriser les flux futurs en les actualisant au taux sans risque. Afin d'assurer une cohérence entre les évaluations réalisées et les prix observés sur les marchés, les modèles doivent être ajustés en fonction de ces prix de marché.
2. Dans un univers de **probabilités réelles**, utilisé pour déterminer les évolutions futures conformément aux observations historiques, les simulations cherchent à reproduire fidèlement la réalité historique passée. Les modèles sont calibrés sur les données historiques dans ce cas. Dans cette configuration, les actifs risqués offrent une prime de risque, ce qui complique la réalisation d'évaluations précises.

Dans l'univers risque-neutre, l'ensemble des prix est une information suffisante pour valoriser des instruments financiers non cotés tandis que, dans l'univers monde réel, il est nécessaire de calibrer les primes de risques en supplément.

L'univers risque neutre repose sur deux hypothèses fondamentales :

- **L'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)**, qui exprime l'impossibilité d'effectuer un gain strictement positif avec une probabilité strictement positive pour un investissement nul.
- **La complétude des marchés**, qui est vérifiée si chaque flux financier peut être répliqué par un portefeuille auto-finançant composé d'actifs sans risque et risqués qui génère à l'échéance un flux identique.

En effet, sous l'hypothèse d'AOA et de complétude du marché, il existe une unique mesure martingale sous laquelle le prix actualisé au taux sans risque des actifs financiers est une martingale. Cette mesure est appelée probabilité risque-neutre. Dans cet univers, les modèles doivent être calibrés sur les prix de marché fiables. Les scénarios générés servent ensuite au *pricing* des produits dérivés ou à la valorisation des garanties et options contenues dans les contrats d'assurance.

Cette étude se place intégralement dans le cadre de l'univers risque-neutre.

2.3 Martingalité en univers risque-neutre

Soit un processus adapté X sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}), \mathbb{P})$ tel que pour tout entier n , X_n est intégrable. On dit que X est une **martingale** si pour tout entier n ,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] = X_n, \quad \text{presque sûrement.}$$

Avec $\mathcal{F}_t$ l'information disponible en t .

En finance, cette propriété s'applique aux prix actualisés des actifs. Pour un actif de prix P_t et un déflateur D_t , on a :

$$\mathbb{E}^Q [D_T P_T \mid \mathcal{F}_t] = D_t P_t \tag{1}$$

Cette condition garantit l'absence d'opportunités d'arbitrage et la cohérence avec les prix de marché.

2.4 Structure du GSE risque-neutre [4]

Les générateurs de scénarios économiques sont essentiels pour évaluer et gérer les risques financiers à long terme. Ils permettent de simuler différentes trajectoires possibles des variables économiques et financières. Leur objectif n'est pas de prédire l'évolution future d'un actif, mais de fournir un éventail de scénarios plausibles, permettant ainsi la valorisation des instruments financiers.

La structure générale du GSE se représente de la façon suivante :

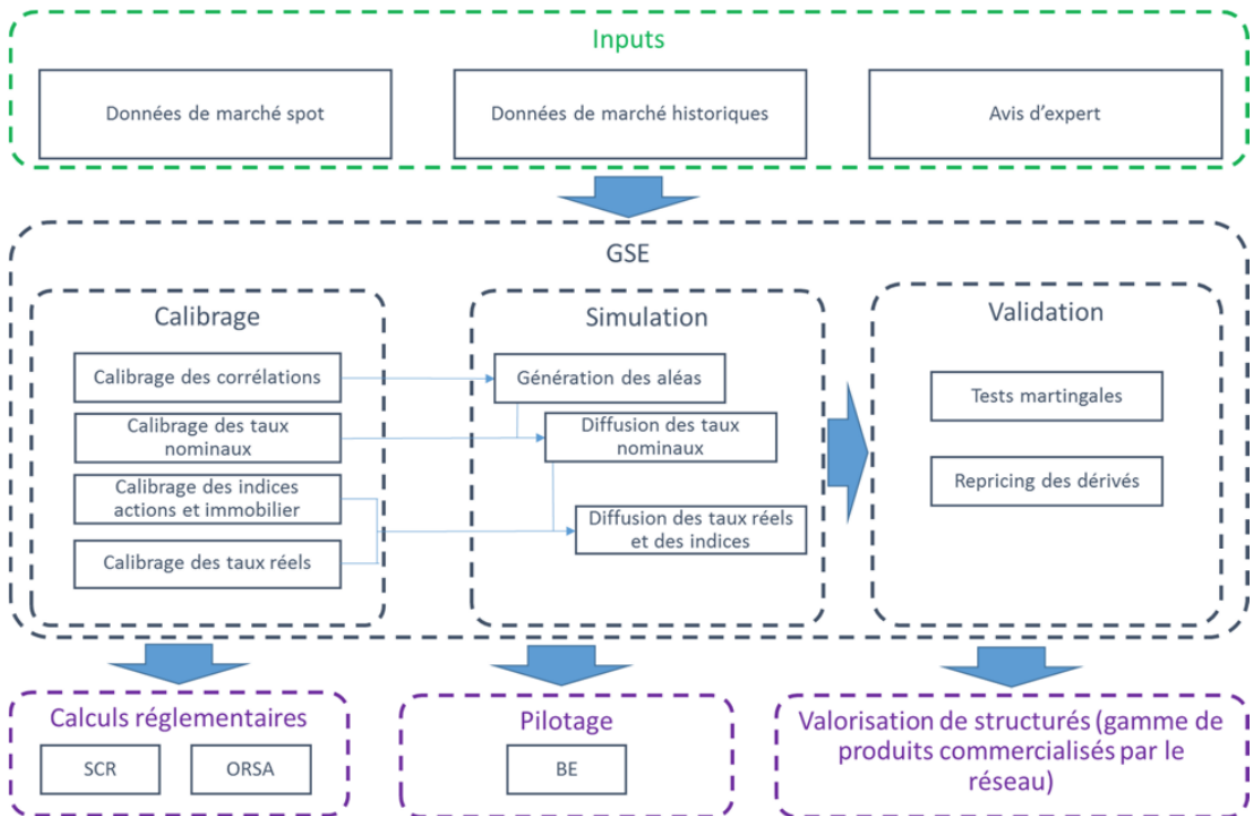


FIGURE 5 – Structure du GSE, Léo Henry-Biabaud

Le premier encadré (inputs) présente les trois types d'input utilisés par le GSE :

- Des données de marché spot afin de respecter la risque-neutralité
- Des données de marché historiques (qui peuvent servir pour certaines calibrations)
- Des paramètres à dire d'expert

Le deuxième encadré, qui représente le coeur du GSE, se décompose en trois modules :

- **Calibrage** : Ajustement des paramètres et des variables des modèles pour refléter de manière réaliste les conditions économiques et les comportements des agents économiques, permettant ainsi de produire des scénarios crédibles
- **Simulation** : Production de la table de scénarios économiques à partir des résultats du module de calibrage
- **Validation** : Vérification de propriétés mathématiques et financières des tables de scénarios économiques

Au sein du module de simulation, chaque classe d'actifs est diffusée avec un modèle spécifique :

1. Un modèle de Black&Scholes pour le processus immobilier,
2. Un modèle de Heston pour le processus action,
3. Un Libor Market Model (LMM) shifté à 3 facteurs pour la courbe des taux nominaux,
4. Un modèle de Hull&White 1 facteur pour la courbe des taux réels,
5. Un modèle Longstaff, Mithal et Neis (LMN) à surplus pour le crédit.

La structure de dépendance retenue est la corrélation.

2.5 Cadre d'étude

Le choix des modèles de diffusion pour chaque facteur de risque est une étape importante, ceux-ci devant répondre aux exigences de la norme Solvabilité II, en particulier aux critères de cohérence de marché et de martingalité. Il est également essentiel de considérer la difficulté d'implémentation et de calibration des modèles, ainsi que leur complexité et robustesse.

2.5.1 Market-consistency

L'article 75.1 de la directive Solvabilité II indique que les actifs doivent être valorisés « au montant pour lequel ils pourraient être échangés dans le cadre d'une transaction conclue, dans des conditions de concurrence normale, entre des parties informées et consentantes ». C'est la définition de la notion de cohérence avec le marché (*Market-consistency*). L'objectif d'une telle valorisation est de reproduire au mieux les conditions du marché à une date fixée.

L'évaluation market-consistent de notre GSE exige qu'il soit capable de générer des scénarios qui reproduisent le prix des produits dérivés observés sur le marché.

Le modèle doit être compatible avec :

- La courbe des taux spot
- La courbe des taux forwards
- La volatilité des taux

La méthode de valorisation utilisée est celle de Monte-Carlo.

2.6 Choix des instruments financiers de calibration

Le calibrage du modèle de diffusion doit être cohérent avec le marché en répliquant les prix observés sur celui-ci.

Quatre conditions importantes sur le marché doivent être réunies :

- Un marché **liquide** : les actifs considérés doivent pouvoir être facilement achetés et vendus.
- Un marché **profond** : un nombre important d'actif doit pouvoir être échangé sans affecter de manière significative les prix des instruments financiers.

- Un marché **transparent** : les transactions et les informations sur les prix doivent être disponibles au public.
- Un marché **sans opportunité d'arbitrage** : un arbitrage est une opération qui permet d'assurer un gain positif ou nul à celui qui la réalise sans mise de départ ; l'existence d'acteurs sur le marché dont l'objectif est d'exploiter ces opportunités garantit leur résorption quasi-instantanée.

Les trois principaux aspects à considérer lors du calibrage d'un GSE sont alors :

- L'utilisation **d'instruments financiers qui reflètent la nature et la durée des engagements**. Il est essentiel que ces instruments reproduisent à minima les décaissements futurs les plus importants.
- Le calibrage **sur la courbe des taux sans risque** utilisée pour actualiser les décaissements dans le modèle ALM
- La prise en compte **appropriée de la volatilité**. Cet aspect n'est pas aisé et le traitement de cette question relève davantage du calibrage. Deux approches sont envisageables :
 1. Calibrage sur les prix de marché d'options pour en extraire les volatilités implicites ;
 2. Recours aux volatilités historiques à partir de l'étude du cours passé des actifs.

L'utilisation d'options requiert de bien choisir leurs caractéristiques, en accord avec le portefeuille de l'assureur. C'est l'approche recommandée par l'EIOPA, qui correspond au principe de cohérence avec le marché.

Toutefois, l'existence d'options liquides, profondes, transparentes, et présentant les caractéristiques du portefeuille n'est toujours pas acquise, surtout lorsque des maturités importantes sont envisagées. De ce fait, l'utilisation de volatilités historiques peut sembler pertinente dans le cas où le marché n'est pas capable de fournir des instruments de calibrage satisfaisants. Elles sont utilisées uniquement pour le modèle immobilier dans le GSE.

2.7 Tests de sortie d'une table de scénarios économiques

Remarque importante : Dans l'ensemble du mémoire, le terme "test" est utilisé par abus de langage. Il ne s'agit pas de test statistique. L'hypothèse du caractère market consistent est validée à l'aide de seuils définis en interne.

Deux tests sont réalisés en sortie du générateur de scénarios économiques dans le but de valider l'hypothèse martingale de l'univers risque neutre et la projection market-consistent.

Tests de martingalité

La vérification du caractère risque-neutre des trajectoires s'effectue grâce aux tests de martingalité. En univers risque-neutre, l'espérance actualisée d'un indice est en théorie égale à la valeur de cet indice en $t = 0$.

Les tests de martingales sont réalisés sur les trajectoires générées par le GSE des facteurs de risques économiques projetés. Ils vérifient la propriété de martingales des prix actualisés générés par les modèles. Le test vérifie :

$$P(0) = \mathbb{E}^Q[\text{Prix estimé}]$$

$$P(0) = \frac{1}{n} \sum_i (\text{Prix actualisé du scénario } i)$$

où :

- n est le nombre de scénarios stochastiques
- $\mathbb{E}^Q$ est l'espérance sous la mesure probabilité risque neutre Q .
- $P(0)$ est le prix évalué en 0 de notre actif.

La propriété de martingalité est testée sur les indices actions, les taux nominaux (avec les prix d'obligations ZC), les taux réels (avec les obligations indexées sur l'inflation) et les spreads obligataires.

Un test statistique est effectué pour les modèles action, immobilier, le déflateur, les taux Zéro-Coupon 1 an, 5 ans et 10ans, avec l'hypothèse H_0 :

$$\frac{X_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

où

- $X_n = \mathbb{E}^Q[\text{Prix estimé}]$
- $m = P(0)$
- n est le nombre de scénarios stochastiques
- σ est l'écart-type empirique du prix estimé

Contre l'hypothèse H_1 : Le prix estimé X_n ne suit pas la distribution normale ci-dessus.

Le niveau de confiance est fixé à 99,9%.

Par exemple, un test sur les taux Zéro-Coupon 1 an se présente sous la forme suivante :

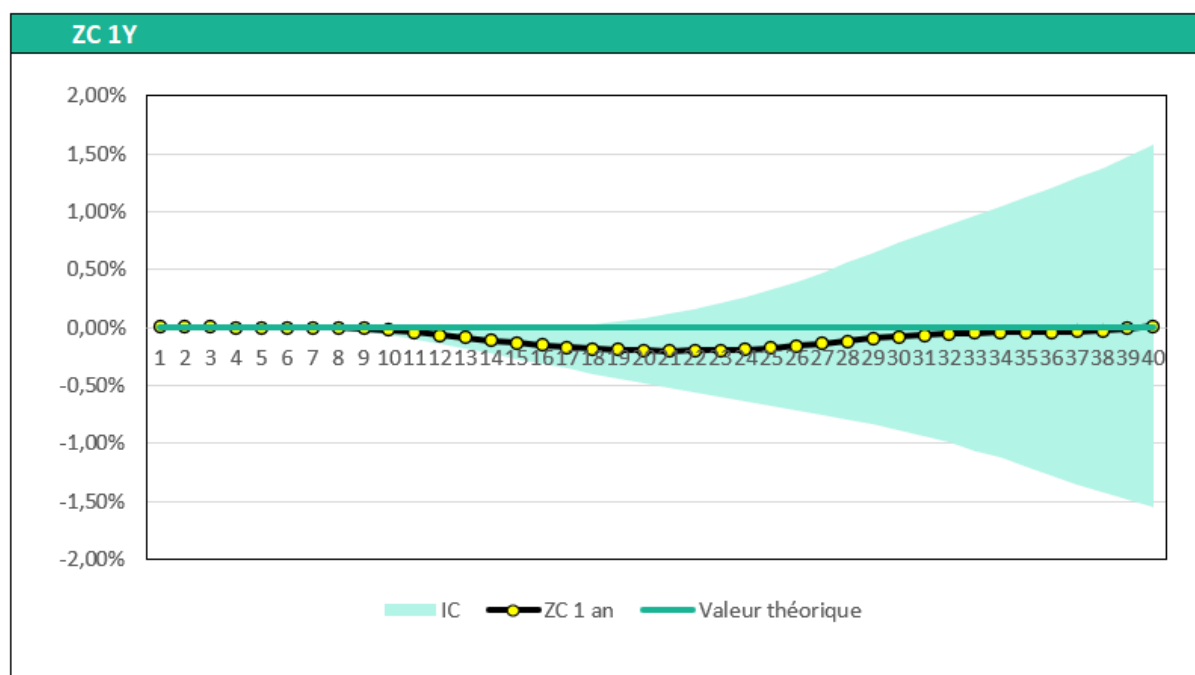


FIGURE 6 – Exemple de test martingale sur les taux Zéro-Coupon 1 an

Tests de market-consistency

Les tests de market-consistency permettent de vérifier que les scénarios économiques générés respectent les conditions de projection "market-consistent". Le test vérifie que la valorisation des instruments financiers via ces scénarios est cohérente avec leurs prix de marché en recalculant leur prix par simulations de Monte Carlo.

La martingalité des prix des produits non dérivés générés par le GSE (et validée par les tests martingales) assure déjà leur caractère market-consistent par propriété martingale. Cependant, cela n'est pas vérifié pour les produits dérivés. Il est alors nécessaire de vérifier que la valorisation des instruments dérivés est cohérente avec leurs valeurs de marché.

Concrètement, ce test se déroule selon les étapes suivantes :

1. Calcul des prix des options par méthode de Monte Carlo sur la table de scénarios à valider.
2. Comparaison des prix (ou volatilités) obtenus avec les prix (ou volatilités) de marché.

Pour résumer, le fonctionnement synthétique des modèles en environnement risque-neutre est le suivant :

	Risque-Neutre
Calibrage	Objectif : Répliquer les anticipations du marché à date ⇒ Répliquer des volatilités implicites de marché ⇒ Répliquer des prix d'option de marché
Corrélations	Choix des corrélations entre facteurs de risques projetés Calibrage sur historique
Projection	Projection martingale (moyenne des prix projetés actualisés = prix actuels) ⇒ directement géré par la forme des modèles
Validation	❖ Respect de la martingalité ⇒ problème de martingalité = problème intrinsèque au modèle ou à sa projection ❖ Respect de la market-consistency ⇒ problème de market-consistency = problème lié au calibrage

FIGURE 7 – Fonctionnement des modèles en univers risque-neutre

3 Socle financier

3.1 Définitions générales

On introduit les notions suivantes pour l'ensemble de l'étude :

- **Option** : Une option est un instrument financier, dépendant d'un autre instrument financier, le « sous-jacent ». La valeur de l'option fait intervenir des paramètres caractérisant le niveau du sous-jacent. Une option donne le droit (mais pas l'obligation) d'acheter (option d'achat, ou « call ») ou de lui vendre (option de vente, ou « put ») un actif à un prix donné, moyennant le versement d'une prime, à une date future. On distingue par ailleurs différentes typologies d'options :

- ATM : une option d'achat (respectivement de vente) est "At the money" lorsque le cours de l'actif sous-jacent est proche du prix d'exercice
- OTM : une option d'achat (respectivement de vente) est "Out of the money" lorsque le cours de l'actif sous-jacent est inférieur (respectivement supérieur) au prix d'exercice
- ITM : une option d'achat (respectivement de vente) est "In the money" lorsque le cours de l'actif sous-jacent est supérieur (respectivement inférieur) au prix d'exercice

On assimile régulièrement ITM et OTM sous la notation unique OTM.

- **Cap** : Un cap est un contrat qui permet à son acheteur de se prémunir contre un risque de hausse de taux. Pour un ensemble de dates données (définies au moment de la prise du contrat), si le taux sur lequel porte le contrat est supérieur à un taux fixe défini à la prise du contrat, l'acheteur du cap se voit verser la différence entre ces taux.
- **Floor** : A l'inverse, un floor est un contrat qui permet à son acheteur de se prémunir contre un risque de baisse de taux. Pour un ensemble de dates données (définies au moment de la prise du contrat), si le taux sur lequel porte le contrat est inférieur à un taux fixe défini à la prise du contrat, l'acheteur du floor se voit verser la différence entre ces taux.
- **Strike** : Le strike, ou prix d'exercice de l'option, est le prix auquel sera potentiellement acheté ou vendu le sous-jacent dans le cadre d'une option.
- **Volatilité** : La volatilité du sous-jacent (action, spread, taux, ...) est l'ampleur des variations du cours de ce sous-jacent et traduit son risque intrinsèque.
 - Volatilité historique : c'est la volatilité réalisée, estimée à partir d'un historique de données. Cette volatilité a une interprétation en termes d'évolution du prix dans le temps et sa détermination répond à un critère de réalisme.
 - Volatilité implicite : c'est la volatilité retenue qui permet de reconstituer le pricing des options. C'est un indicateur représentatif d'un prix d'option à une date donnée et sous-tendu par une hypothèse de modèle.

3.2 Taux

L'**obligation zéro-coupon (ZC)** est un produit financier dont la rémunération se fait uniquement par son taux, il verse un montant nominal C à la date de maturité T . On note $P(t, T)$ son

prix à la date $t \in [0, T]$ et on pose $C = 1\text{€}$.

À partir de ce prix, deux types de taux peuvent être définis :

- Le **taux d'intérêt instantané continûment composé** parfois appelé « taux zéro-coupon » : c'est le taux R_c continu constant sur la période $[t, T]$ défini par :

$$R_c(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T)$$

- Le **taux composé annuellement**, aussi appelé taux actuariel, noté R_A , défini par :

$$R_A(t, T) = P(t, T)^{-\frac{1}{T-t}} - 1$$

La relation liant les deux taux est la suivante :

$$R_c(t, T) = \ln(1 + R_A(t, T))$$

On appelle **taux court instantané** r_t (désigné par abus de langage « taux court »), est la limite de ces taux lorsque T tend vers t soit :

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t} R_A(t, T) = \lim_{T \rightarrow t} R_c(t, T).$$

Il est à noter que ce taux n'a pas de réalité physique car prévalant sur une période infinitésimale. Il existe là aussi des approximations communes (souvent taux court = taux journalier).

Un **taux forward** est un taux payé à un instant t mais au titre d'une période ultérieure. Le taux forward (ou taux forward Zéro-Coupon) $F(t, x, y - x)$ déterminé en t , démarrant en x et d'échéance y , est défini par :

$$f(t, x, y - x) = \left[\frac{(1 + R(t, y))^{y-t}}{(1 + R(t, x))^{x-t}} \right]^{\frac{1}{y-x}} - 1$$

Avec :

- $R(t, x)$ le taux de rendement en t de l'obligation Zéro-Coupon délivrant 1 euro en x .

Le **taux forward instantané** est un taux forward particulier défini comme suit :

$$f(t, x) = \lim_{y-x \rightarrow 0} F(t, x, y - x)$$

Il s'agit du taux forward déterminé en t , démarrant en x et finissant un instant (infiniment petit) plus tard.

La relation entre le prix Zéro-Coupon et le taux forward est la suivante :

$$P(t, T) = e^{\int_t^T f(t, u) du}$$

Avec $f(t, T)$ le taux forward instantané évalué en t et de maturité T défini de la façon suivante :

$$f(t, T) = \lim_{T \rightarrow t} F_c(t, S, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T)$$

et $r(t) = f(t, t)$.

Le taux d'actualisation en univers risque neutre est le taux court, c'est le taux zéro-coupon. Dans la suite, les termes "taux court" et "taux sans risque" sont utilisés de manière équivalente.

3.3 Courbe de taux

Une **courbe des taux** correspond à une représentation graphique des rendements offerts par les titres obligataires d'un même émetteur selon leur échéance, de la plus courte à la plus longue.

Il existe deux types de courbes de taux sans risque : celles qui font référence à l'ensemble du marché obligataire d'un pays donné, correspondant aux emprunts d'État, et celles qui font référence aux taux d'intérêt qui reflètent le coût des emprunts sur le marché interbancaire.

Courbe des taux zéro-coupons

C'est la courbe des taux d'intérêt comptants en composition annuelle, elle dépend ainsi des prix zéro-coupons qui ne sont pas directement observables sur le marché. Pour les construire, nous les déduisons des taux swaps par la technique dite de *Bootstrapping* :

1. Pour la première maturité :

$$P(0, T_1) = \frac{1}{1 + \tau_1 S_1(t)}$$

2. Pour les maturités suivantes (*i.e.* $2 \leq i$) :

$$P(0, T_i) = \frac{1 - S_i(t) \sum_{j=1}^{i-1} \tau_j P(0, T_j)}{1 + \tau_i S_i(t)}$$

Courbe des taux swap

Un **swap** est un contrat financier qui permet aux parties d'échanger des flux de trésorerie basés sur des taux d'intérêt différents. Dans le cas des swaps de taux d'intérêt, les parties s'engagent à échanger des paiements de taux d'intérêt fixes contre des paiements de taux d'intérêt variables basés sur un taux de référence, tel que l'EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate) ou le LIBOR (London Interbank Offered Rate).

La **courbe des taux swap** est une courbe de taux d'intérêt qui reflète le coût des emprunts sur le marché interbancaire.

On utilise le taux sans risque swap pour la valorisation de certains produits financiers plutôt que la courbe de taux d'État pour plusieurs raisons :

1. La courbe de taux sans risque basée sur les swaps reflète mieux les taux d'intérêt réels du marché que la courbe de taux d'État, car elle est basée sur les taux auxquels les banques se prêtent de l'argent entre elles, plutôt que sur les taux d'intérêt souverains.

2. La courbe des taux swap couvre une gamme de maturités allant de quelques mois à plusieurs décennies, tandis que la courbe de taux d'État ne couvre souvent qu'un éventail limité de maturités, telles que les échéances à 2, 5 et 10 ans.
3. Les produits financiers tels que les obligations d'entreprise, les prêts hypothécaires et les produits dérivés sont souvent liés à la courbe de taux swap plutôt qu'à la courbe de taux d'État, car les taux swap reflètent mieux les taux d'intérêt réels que ces produits impliquent.

En somme, la courbe de taux swap est une mesure plus précise du coût de financement à long terme pour les institutions financières et reflète mieux le marché que la courbe de taux d'État, ce qui explique pourquoi elle est utilisée pour la valorisation de produits financiers.

Courbe réglementaire

La courbe de taux utilisée dans le cadre de Solvabilité 2 est la courbe des taux sans risque fournie par l'EIOPA. Elle est construite par devise à partir des swaps de taux de marché ajustés du risque de crédit jusqu'au dernier point supposé liquide **LLP** (Last Liquid Point, situé à 20 ans dans la zone euro).

Les données sont ensuite interpolées pour construire la courbe de taux. Le marché des swaps n'étant plus liquide après le **LLP**, la construction de la courbe sur les données de marché ne peut donc pas se faire. Une extrapolation est alors effectuée en partant du LLP pour converger vers un point ultime (*Ultimate Forward Rate* ou UFR).

L'EIOPA détermine l'UFR annuellement à partir de la somme d'une composante de taux réel et d'une composante d'inflation attendue (pour l'euro, c'est la cible d'inflation de la BCE à 2 %). La variation annuelle de l'UFR est limitée à ± 15 bps. L'UFR passe de 3,45 % en 2023 à 3,30 % en 2024.

3.4 Inflation

Taux d'intérêt nominal

Le taux d'intérêt nominal, noté R_n , est le taux défini au moment de la signature d'un contrat entre un emprunteur et un prêteur. Il peut être fixe ou variable.

Mathématiquement, c'est le taux tel que, pour un emprunt en date 0 d'un montant N , le montant remboursé en t est :

$$N' = N(1 + R_n(0, t))$$

Taux d'inflation

L'inflation représente la perte du pouvoir d'achat d'une monnaie, ce qui se traduit concrètement par la hausse globale des prix dans cette monnaie. En pratique, l'évolution de cette hausse des prix est observable via une grandeur appelée **taux d'inflation**.

Ce taux, noté $i(t, T)$ pour une période donnée $[t, T]$, correspond au taux auquel il aurait fallu placer son argent en t , pour conserver en T son pouvoir d'achat initial. Il permet ainsi de suivre

l'évolution globale du pouvoir d'achat dans une monnaie donnée.

Le taux d'inflation est généralement calculé grâce à un indice d'inflation. En France, le taux d'inflation est obtenu à partir de l'IPC (Indice des Prix à la Consommation), publié mensuellement par l'INSEE :

$$i(t, T) = \frac{IPC_T - IPC_t}{IPC_t}$$

où IPC_t représente l'indice des prix à la consommation à l'instant t .

Taux d'intérêt réel

Le taux d'intérêt réel correspond au nominal auquel est effectué un ajustement afin de tenir compte de l'inflation et de la prime de risque.

Avec $i(t, T)$ le taux d'inflation sur la période $[t, T]$, et $R_n(t, T)$ le taux nominal sur la même période, on a la relation suivante :

$$R_r(t, T) = \frac{R_n(t, T) - i(t, T)}{1 + i(t, T)}$$

3.5 Produits indexés sur l'inflation

3.5.1 Définitions

— Obligations indexées sur l'inflation

Les Obligations Assimilables du Trésor indexées sur l'inflation (OATi) émises par l'Etat français diffèrent des obligations conventionnelles puisque leurs coupons sont ajustés en fonction de l'inflation. Elles protègent l'investisseur du risque d'inflation grâce à la réévaluation du coupon et du prix de remboursement à chaque date de paiement afin de tenir compte des variations de l'indice des prix. Ce dernier dépend de l'inflation constatée sur chaque période, par rapport à une période de référence, entre les versements des coupons.

Considérons une obligation émise à la date 0 de maturité T , de nominal N et de taux de coupon c . Alors, à une date de versement de coupon t , la valeur de celui-ci sera $c * N * \frac{I(t)}{I(0)}$.

Par rapport à une obligation classique, la valeur du coupon est compensée par le taux d'inflation après la date d'émission, soit le facteur $\frac{I(t)}{I(0)}$ où $I(t)$ représente l'indice des prix à la consommation à la date t . Le prix de l'OATi étudiée s'écrit alors :

$$P(t) = \sum_{k=t+1}^T c N \frac{I(k)}{I(0)} P(0, k) + N P(0, T) \frac{I(T)}{I(0)}$$

— Inflation Indexed Caps (IIC) et Inflation Indexed Floors (IIF)

Ce sont des caps/floor sur le taux d'inflation. Le *payoff* en T_i est :

$$N \psi_i \left[\omega \left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1 - k\tau \right) \right]^+$$

Avec :

- $\omega = 1$ pour un IIC et $\omega = -1$ pour un IIF,
- ψ_i un coefficient de pondération se rapportant à la période $[T_{i-1}, T_i]$,
- N le nominal,
- $\tau = T_i - T_{i-1}$,
- k le strike du IIC/IIF.

— Swap inflation

Dans un swap d'inflation, une partie paie un flux de trésorerie à taux fixe sur un montant notionnel tandis que l'autre partie paie un taux variable lié à un indice d'inflation, tel que l'indice des prix à la consommation. La partie qui paie le taux variable paie le taux ajusté en fonction de l'inflation multiplié par le montant principal théorique.

Les swaps d'inflation constituent la base du marché des dérivés d'inflation. Dans la zone euro, ils sont en général très liquides sur les points de référence inférieurs à dix ans. La liquidité y est souvent plus importante que sur les obligations indexées.

Remarque : Les titres indexés sur l'inflation visent à garantir une valeur réelle stable. Cependant, pour assurer une protection parfaite des flux de trésorerie indexés sur l'inflation, il serait nécessaire que l'indexation se fasse en fonction de l'inflation actuelle. En réalité, les indices d'inflation utilisés accusent un décalage de trois mois. Ce décalage est dû au temps nécessaire pour calculer et publier l'indice.

Ce retard affecte directement la capacité des obligations indexées sur l'inflation à protéger le rendement réel. Il est rare que l'indexation soit exactement la même entre l'inflation réelle et l'inflation calculée avec retard, ce qui réduit quelque peu la certitude de la valeur réelle.

3.5.2 Intérêt des produits dérivés d'inflation

Ces produits peuvent présenter différents avantages pour les investisseurs :

- Les produits dérivés liés à l'inflation offrent aux investisseurs une protection contre le risque d'augmentation des niveaux d'inflation, qui pourrait diminuer la valeur réelle de leur portefeuille.
- Les produits indexés sur l'inflation peuvent constituer une composante diversifiée d'un portefeuille d'investissement. Leur performance peut être moins corrélée à celle des actions et des obligations traditionnelles, ce qui peut aider à réduire le risque global du portefeuille.
- Certains produits indexés sur l'inflation, tels que les obligations indexées sur l'inflation, offrent des flux de trésorerie plus stables et prévisibles, car les paiements sont ajustés en fonction de l'inflation. Cela peut être particulièrement attractif pour les investisseurs à la recherche de revenus réguliers et de protection contre l'érosion de la valeur due à l'inflation.

Les prix des produits dérivés d'inflation fournissent une estimation de l'inflation attendue car ils reflètent les attentes du marché concernant l'évolution future des prix. Ces prix sont influencés par l'offre et la demande sur les marchés financiers, les prévisions des analystes et des institutions financières ainsi que par les primes de risque associées à l'incertitude de l'inflation future.

Ainsi, après l'établissement du contexte et la présentation des bases financières nécessaires à l'étude, l'analyse se poursuit avec l'examen des limites des modèles actuels face aux exigences réglementaires, menant à la problématique de ce mémoire.

4 Modèles actuels dans le générateur de scénarios économique et limites

4.1 Notations

On considère un ensemble de dates $\{T_0, \dots, T_{N-1}\}$, T_0 correspondant à la première date de fixation.

- τ_i est la mesure de temps séparant T_{i-1} et T_i , $i > 0$.
- $m(t)$ est le dernier *Libor* en cours et représente le plus petit entier tel que $t \leq T_{m(t)}$.
- $F_i(t)$ est le taux *Libor* forward pour la période $[T_{i-1}, T_i]$, $F_i(t) := F(t, T_{i-1}, T_i)$.
- $\sigma_i(t)$ est la volatilité de $F_i(t)$.

4.2 Modèle de taux nominaux

Le modèle implémenté dans le GSE pour la diffusion des taux nominaux est un *Libor Market Model* (LMM) shifté à n facteurs. Ce modèle est utile pour valoriser tous les instruments dont le *pay-off* peut être décomposé en combinaison de taux *forward*. L'hypothèse fondamentale sur laquelle se base le modèle LMM est que les taux forwards sont diffusés à travers une dynamique log-normale.

Nous allons à présent introduire ce modèle, dont l'utilité sera mise en évidence lors de la présentation du modèle final retenu pour l'implémentation.

4.2.1 Modèle LMM [1]

Pour toutes dates $T_0 \leq t \leq T_{N-1}$, on note $P_n(t, T)$ le prix (en euros) à la date t d'un zéro-coupon délivrant un euro en T .

Les taux forward sont exprimés en composition simple. Ils s'écrivent en fonction des prix zéro-coupons. En effet, pour tout $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$,

$$F_k(t) = \frac{1}{\tau_k} \frac{1}{P_n(t, T_k)} (P_n(t, T_{k-1}) - P_n(t, T_k))$$

Ainsi, $F_k(t)$ s'écrit comme le prix d'un actif échangeable sur le marché (portefeuille de deux zéro-coupons sur un nominal $\frac{1}{\tau_k}$) divisé par le prix du zéro-coupon de maturité T_k .

Sous la probabilité forward neutre de maturité T_k (que l'on notera Q^k), $(F_k(t))_{t \in [0, T_{k-1}]}$ est une martingale et sa dynamique s'écrit :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t) F_k(t) dW_k(t)$$

où W est un mouvement brownien N -dimensionnel sous la probabilité forward Q^k et σ_k une fonction déterministe du temps définie sur l'intervalle $[T_0, T_{k-1}]$.

Comme montré par J. Hull dans *Options, Futures and other Derivatives* [3], il est possible de diminuer la dimension du brownien par le biais de la relation des prix Zéro-Coupons. A partir

de ces informations et de la dynamique des Libor forwards, la formule explicite ci-dessous définit l'équation différentielle stochastique du LMM.

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sigma_k(t) \times \left(\sum_{j=m(t)}^k \sigma_j(t) \frac{F_j(t)}{F_j(t) + \frac{1}{\tau_j}} dt + dZ_k(t) \right)$$

où Z est un mouvement brownien dont les composantes sont corrélées via une matrice de corrélation ρ définie positive de taille $N \times N$ et $m(t)$ est le dernier Libor en cours et représente le plus petit entier tel que $t \leq T_{m(t)}$ ($T_{m(t)}$ est la première maturité qui suit t).

La dynamique de $\ln(F_k(t))$ sous la probabilité spot Libor est donnée par :

$$d\ln(F_k(t)) = \sigma_k(t) \sum_{j=m(t)}^k \frac{\tau_j F_j(t) \sigma_j(t) \rho_{j,k}}{1 + \tau_j F_j(t)} dt - \frac{\sigma_k^2(t)}{2} dt + \sigma_k(t) F_k(t) dZ_k(t)$$

$$\mu_n(t) = \sigma_n(t) \sum_{j=1}^n \frac{\frac{1}{12} F_j(t) \sigma_j(t) \rho_{j,n}}{1 + \frac{1}{12} F_j(t)} \text{ est le } drift.$$

Dans le générateur de scénarios économiques, les différents taux forward sont parfaitement corrélés, c'est-à-dire qu'on a pour tout couple $(k, l) \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^2$, $\rho_{k,l} = 1$. On a donc, pour tout $(k, l) \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $Z_k^d = Z_l^d$.

Après discrétisation, tous les F_k au cours du temps peuvent être déterminés de la façon suivante :

$$\ln F_k^{\Delta t}(t+\Delta t) = \ln F_k^{\Delta t}(t) + \sigma_k(t) \sum_{j=m(t)}^k \frac{\tau_j F_j^{\Delta t}(t) \sigma_j(t) \rho_{j,k}(t)}{1 + \tau_j F_j^{\Delta t}(t)} \Delta t - \frac{\sigma_k^2(t)}{2} \Delta t + \sigma_k(t) (Z_k(t+\Delta t) - Z_k(t))$$

$$Z_k(t + \Delta t) - Z_k(t) = \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

où ϵ est une loi normale centrée réduite.

Dans le GSE, l'implémentation est réalisée avec un pas de temps mensuel ($\Delta t = \tau$).

4.2.2 Volatilité

Le modèle LMM laisse une entière liberté à l'utilisateur en ce qui concerne le choix des structures de volatilité. La forme retenue pour la volatilité σ du taux forward dans le GSE est la suivante :

$$\sigma_k(t) = \phi_t \times ([b (T_{k-1} - t) + a] e^{-c(T_{k-1}-t)} + d)$$

où $\phi_t = (\phi_1 + (1 - \phi_1) e^{-\phi_2 \times t})^+$.

Cette formulation correspond à la formulation 7 proposée par Damiano Brigo et a été retenue afin d'améliorer la calibration du modèle à la nappe de volatilité des swaptions car elle permet d'obtenir de nombreuses formes différentes en faisant varier les paramètres a , b , c et d .

4.2.3 Inputs

Pour diffuser les taux Libor Forward dans le Libor Market Model, différentes données sont nécessaires en input :

- Les taux forwards initiaux
- Les volatilités des différents taux Libor
- Les corrélations entre les différents Libor
- Le shift, qui sera étudié par la suite.

Ces inputs ne sont pas directement observés sur le marché, mais dérivés d'instruments qui sont échangés sur le marché.

4.2.4 Calibration du modèle

Le modèle doit être calibré :

- En taux
- En volatilité.

Le calage en taux est inhérent au modèle LMM. La problématique concernera donc essentiellement le calage de la volatilité de taux. Celle-ci peut être calibrée soit avec des instruments de type *cap* ou *floor*, soit avec des instruments de type *swaption*. Avec le LMM shifté (décrit ci-dessous), il est possible d'obtenir des formules fermées sur les volatilités de taux swap et sur les prix de swaptions. Il est donc généralement calibré sur ces instruments.

On distingue deux catégories de *swaptions* :

- Une **swaption payeuse** européenne est une option donnant le droit (et non l'obligation) à son détenteur d'entrer dans un swap de taux payeur à une date future pré-définie, appelée maturité de la swaption.
- Une **swaption receveuse** qui permet de manière identique d'entrer dans un swap receveur.

Les swaptions sont cotées en volatilité (volatilité implicite du modèle de Black ou volatilité implicite du modèle de Bachelier).

Le prix de chaque instrument financier peut être calculé par méthode de Monte Carlo [3] :

$$\text{Prix} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{Pay-off de l'instrument } i \text{ pour le scénario } n \times \text{Déflateur associé à ce pay-off}$$

Avec N le nombre de simulations.

4.2.5 DDLMM

Depuis que les taux négatifs sont devenus une réalité, le LMM pose des problèmes de calibration notables :

- Le modèle LMM étant log-normal, les taux négatifs de la courbe des taux swap doivent être remis en territoire positif.
- Compte tenu des niveaux de volatilité constatés, la proportion de taux très élevés devient trop importante.

L'utilisation de ce modèle en norme Solvabilité 2 pourra donc avoir des conséquences non négligeables sur le ratio de solvabilité.

Le modèle LMM avec shift ou DDLMM (Displaced Diffusion Libor Market Model) est une évolution du modèle LMM standard décrit précédemment. Alors que dans ce dernier la diffusion des taux était log-normale et donc à support strictement positif, dans le modèle LMM shifté, ce sont les taux forward shiftés qui sont log-normaux. Les taux forward ont alors pour support $] \text{shift}, +\infty[$. L'intégration d'un shift va permettre la modélisation de taux négatifs et limitera l'apparition des taux explosifs grâce à l'utilisation d'une volatilité locale.

Sans shift, la dynamique du forward se formule ainsi :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t)dZ_k(t)$$

Après intégration du shift, la dynamique du forward est la suivante :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)(F_k(t) + \alpha_k)dZ_k(t),$$

le vecteur α représentant le shift appliqué à chaque forward.

Finalement, les simulations sont réalisées selon le processus suivant :

$$\overline{F}_k^{\Delta t}(t) = F_k^{\Delta t}(t) + \alpha_k$$

$$F_k^{\Delta t} \text{ est issu de la courbe spot (swap)}$$

$$\begin{aligned} \ln \overline{F}_k^{\Delta t}(t+\Delta t) &= \ln \overline{F}_k^{\Delta t}(t) + \sigma_k(t) \sum_{j=m(t)}^k \frac{\tau_j \overline{F}_k^{\Delta t}(t) \sigma_j(t) \rho_{j,k}(t)}{1 + \tau_j(\overline{F}_k^{\Delta t}(t) - \alpha_j)} \Delta t - \frac{\sigma_k^2(t)}{2} \Delta t + \sigma_k(t)(Z_k(t+\Delta t) - Z_k(t)) \\ Z_k(t + \Delta t) - Z_k(t) &= \epsilon \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

En supposant que le déplacement shift (ou *displacement*) a la forme paramétrique suivante :

$$\text{displacement}(t) = |a_{\text{shift}}| \times \max(b_{\text{shift}} + (1 - b_{\text{shift}}) \times e^{-c_{\text{shift}} \times k}, 0)$$

4.3 Modèle de taux réels

4.3.1 Principe du modèle Hull&White [2]

Le modèle de taux réels a pour vocation de diffuser la courbe des taux réels. Cette dernière est construite à partir des taux nominaux et des taux zéro coupon inflation, qui sont directement observables sur le marché.

Le modèle initialement implémenté est un modèle de Hull&White, qui est un cas particulier du modèle de Heath-Jarrow-Morton (HJM) avec une forme de volatilité déterministe.

On note $P_r(t, T)$ pour $0 \leq t \leq T$ le prix en t d'un zéro-coupon réel délivrant l'indice inflation en T et r_s le processus de taux court réel.

Le cadre du modèle HJM est :

$$\frac{dP_r(s, T)}{P_r(s, T)} = r_s ds + \Gamma(s, T) dW_s$$

En considérant que $d < W >_t = dt$, on obtient avec la formule d'Itô :

$$d \log P_r(s, T) = r_s ds + \Gamma(s, T) dW_s - \frac{1}{2} \Gamma(s, T)^2 ds$$

En intégrant entre 0 et t , on a :

$$\frac{P_r(t, T)}{P_r(0, T)} = \exp\left(\int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s, T) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma(s, T)^2 ds\right)$$

Et en évaluant en t et T :

$$P_r(t, T) = \frac{P_r(0, T)}{P_r(0, t)} \exp\left(\int_0^t [\Gamma(s, T) - \Gamma(s, t)] dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t [\Gamma(s, T)^2 - \Gamma(s, t)^2] ds\right)$$

Le modèle de Hull&White correspond à ce cadre, avec la formulation de volatilité suivante :

$$\Gamma(s, T) = \frac{\sigma}{a} (1 - e^{-a(T-t)})$$

Où :

- σ est un facteur de volatilité de prix d'obligation
- a est le coefficient de retour à la moyenne, il représente l'amortissement d'un choc de taux en fonction de la maturité du zéro-coupon.

Soit :

$$P_r(t, T) = \frac{P_r(0, T)}{P_r(0, t)} \exp\left(\frac{\sigma}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})(1 - e^{-a(T-t)}) + 2(1 - e^{-at})^2\right)$$

Le terme $\left(\int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s\right)_{t \geq 0}$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Il est possible d'établir le lien de récurrence suivant :

$$OrnU(t_n) = \int_0^{t_n} e^{-a(t_n-s)} dW_s = e^{-a(t_n-t_{n-1})} \times OrnU(t_{n-1}) + \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(t_n-t_{n-1})}}{2a}} \times \epsilon_n$$

Pour retrouver l'ensemble des prix zéro coupon à une date donnée, on peut réécrire :

$$P_r(t_n, t_n + M) = \frac{P_r(0, t_n + M)}{P_r(0, t_n)} \exp\left(\frac{\sigma}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) OrnU(t_n) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(M)}) ((1 - e^{-2at_n})(1 - e^{-a(M)}) + 2(1 - e^{-at_n})^2)\right)$$

Où M est la durée de l'obligation.

4.3.2 Calibration du modèle

L'objectif est de trouver des valeurs pour les paramètres du modèle (ici a et σ), afin que les prix des produits financiers calculés par les formules fermées du modèle correspondent aux prix de ces produits sur le marché.

Mathématiquement, cela se traduit par un problème d'optimisation : minimiser la différence entre les prix estimés et les prix de marché. La méthode la plus courante, et utilisée ici, est celle des moindres carrés. En notant $\Theta^* = (a, \sigma)^*$ la solution optimale, et $\Theta = (a, \sigma)$ les paramètres à optimiser, le problème d'optimisation à résoudre est le suivant :

$$\Theta^* = \operatorname{argmin}_{\Theta} \sum (\text{prix marché} - \text{prix modèle})^2$$

4.4 Modèle inflation

4.4.1 Le modèle de Jarrow-Yildirim

En 2003, Jarrow et Yildirim proposent un modèle d'inflation de type Heath-Jarrow-Morton (HJM). Ils modélisent les taux d'intérêt nominal et réel ainsi que l'indice des prix à la consommation. Dans leur article, le CPI est vu comme le taux de change entre l'économie nominale et l'économie réelle.

Le modèle de Jarrow-Yildirim considère les trois dynamiques suivantes sous la mesure martingale $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} df_n(t, T) = \alpha_n(t, T)dt + \sigma_n(t, T)dW_n(t) \\ df_r(t, T) = \alpha_r(t, T)dt + \sigma_r(t, T)dW_r(t) \\ dI(t) = I(t)\mu_I(t)dt + I(t)\sigma_I dW_I(t) \end{cases}$$

Avec :

- $f_{n/r}(0, T)$ le taux forward instantané, respectivement nominal/réel, observé sur le marché en 0, pour une maturité T
- W_n, W_r, W_I des mouvements browniens de corrélation $\rho_{n,r}, \rho_{n,I}, \rho_{r,I}$ tel que :

$$dW_x \cdot dW_y = \rho_{x,y} dt$$

- $(\alpha_r(t))_{t \geq 0}, (\alpha_n(t))_{t \geq 0}, (\mu_I(t))_{t \geq 0}$ sont des processus $(\mathcal{F}_{t \geq 0})$ -adaptés
- σ_n, σ_r des fonctions déterministes
- σ_I une constante positive

Le modèle retenu dans le GSE pour diffuser l'indice des prix à la consommation $I(t)$ est un modèle de Jarrow-Yildirim où la volatilité de l'inflation est supposée nulle ($\sigma_i = 0$) et les taux nominaux sont modélisés par un DDLMM au lieu d'un modèle de Hull & White. En notant r et n les processus des taux courts nominaux et réels respectivement, la valeur à la date t du CPI est :

$$I(t) = \exp\left(\int_0^t (n(s) - r(s))ds\right)$$

Cette formule correspond à celle figurant dans [1].

En supposant que les processus n et r sont constants par morceaux sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$I(t + \Delta t) = I(t) \exp((n(t) - r(t))\Delta t)$$

En utilisant une composition simple pour les taux réels et nominaux, on obtient :

$$I(t + \Delta t) = I(t) \left(\frac{1 + n(t)\Delta t}{1 + r(t)\Delta t} \right)$$

Cependant, les taux courts nominaux et réels ne sont pas directement diffusés dans les modèles de taux utilisés (LMM/DDLMM pour les taux nominaux, H&W pour les taux réels). La formule de récurrence réellement utilisée dans le GSE pour la diffusion de l'indice inflation est :

$$I(t + \Delta t) = I(t) \frac{P_r(t, t + \Delta t)}{P_n(t, t + \Delta t)}$$

La calibration de l'inflation pourra se faire de manière empirique, en calculant le *payoff* du cap inflation du modèle à l'aide des simulations de Monte Carlo ou à l'aide de données historiques.

La formulation utilisée pour valoriser un cap inflation est définie ci-dessous :

$$\text{Cap Inflation}_T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max\left(\frac{\text{indice inflation}_{i,T}}{\text{indice inflation}_0} - (1 + k_T)^T; 0\right) * DF_{i,T}$$

où N est le nombre de simulations, k_T le strike et $DF_{i,T}$ le déflateur du scénario i au temps T .

4.4.2 Calibration de la volatilité du modèle Hull & White

On utilise des cotations d'options sur inflation, plus précisément des Cap inflation zéro coupon, en utilisant les données disponibles sur Bloomberg. Cependant, le modèle utilisé ne fournit pas de formule fermée pour reproduire directement les prix des Cap inflation. Nous calibrons donc la volatilité de l'inflation en calculant le paiement du Cap inflation du modèle à l'aide de simulations.

Pour ce faire, nous effectuons plusieurs simulations en Monte Carlo afin de calculer des prix et de déterminer les valeurs des deux paramètres du modèle Hull&White qui servent à reproduire les taux réels (le modèle de taux nominaux étant déjà calibré). Cette méthode de calibrage, empirique, permet d'obtenir des résultats satisfaisants et de pallier les limites de l'estimation de la volatilité historique, qui n'est pas toujours cohérente avec une approche market-consistent.

4.5 Limites du model actuel

4.5.1 Ecart de valorisation

Aux paragraphes 4.4.2 et 4.4.1, on a vu que l'on peut, après calibration de la volatilité, comparer la valorisation de produits calculée par le modèle aux prix réellement observés sur le marché. Dans le GSE, cette comparaison est réalisée sur les Cap inflation.

Le tableau ci-dessous nous donne une comparaison des valeurs (obtenues par méthode Monte-Carlo) des caps inflation à la monnaie, calculés par le modèle avec les données de marché de fin 2016, et une valorisation Bloomberg à fin 2017 :

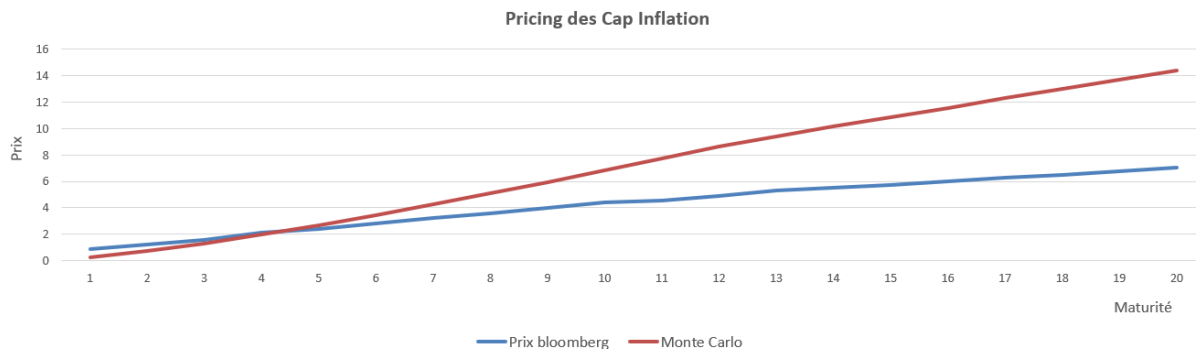


FIGURE 8 – Pricing des cap inflation avec l'ancien modèle fin 2016-

On constate une bonne homogénéité entre ce que calcule Bloomberg et ce que calcule le modèle sur les maturités jusqu'à 10 ans (avec un paramétrage fondé sur l'observation du passé pour ce qui concerne la volatilité des taux réels). Les écarts résultent de la valeur fixée du paramètre a qui empêche le modèle de reproduire les prix de marché.

Seulement, sur les dernières années, l'écart entre la valorisation du modèle est celle du marché s'est creusé, avec une tendance forte à surestimer cette valorisation. Fin 2022, on avait :

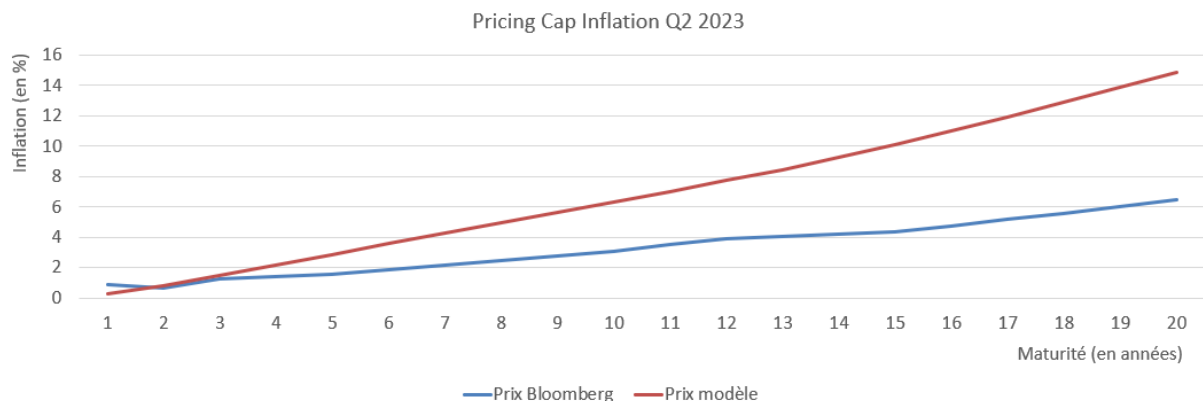


FIGURE 9 – Pricing des cap inflation avec l'ancien modèle fin 2022

Ces résultats de valorisation ne satisfont pas à l'exigence de *market-consistency* qui est requise par le cadre réglementaire de Solvabilité 2. En effet, le modèle actuel engendre une surestimation du prix des Cap Inflation, et cela en particulier sur les maturités long terme.

Les flux sortant contiennent différents types de frais, notamment les frais suivants :

- Frais administratifs
- Frais de gestion des placements
- Frais de gestion des sinistres

— Commissions apporteurs

qui dépendent de l'inflation.

Une mauvaise modélisation de l'inflation dans le générateur de scénarios économiques entraîne une mauvaise évaluation du risque lié à l'inflation dans le passif de l'assureur vie, ce qui peut affecter la gestion des engagements à long terme et la solidité des projections financières.

4.5.2 Dynamique du modèle

Le modèle DDLMM suppose une dynamique log-normale des taux forward sous leur probabilité neutre respective, tandis que le modèle de Hull & White postule que les taux courts ont une distribution normale. Les dynamiques log-normales ont tendance à produire des trajectoires plus volatiles et asymétriques que les dynamiques normales. Dans un contexte où les taux nominaux sont plus volatils que les taux réels, cette formulation peut conduire à des estimations d'inflation plus sensibles aux mouvements brusques des taux nominaux. Cela introduit une dissymétrie dans les caractéristiques de volatilité et de distribution entre les deux types de taux.

L'inflation étant évaluée selon un différentiel de taux :

$$I(t) = \exp\left(\int_0^t (n(s) - r(s))ds\right),$$

Il est donc crucial de choisir des dynamiques adéquates pour les taux courts nominaux et réels, car des variations significatives dans ces dernières peuvent entraîner des fluctuations amplifiées dans le calcul de l'inflation. Par conséquent, l'implémentation d'un nouveau modèle se fondera sur des dynamiques similaires pour les deux taux afin de garantir une cohérence et une précision accrues dans l'estimation de l'inflation.

Conclusion

Cette partie a permis de souligner l'importance cruciale de la maîtrise des concepts financiers de base, tels que l'inflation, dans le contexte spécifique de l'assurance vie.

Il a été démontré que la prise en compte de l'inflation, tant au niveau de la valorisation des passifs que dans la gestion des risques, est indispensable pour répondre aux exigences réglementaires. Cette analyse préliminaire établit les fondements nécessaires pour aborder les questions plus complexes de modélisation et de calibration des modèles économiques, tout en mettant en évidence les enjeux spécifiques liés à l'évolution récente du contexte économique.

Deuxième partie

Implémentation d'un modèle

La deuxième partie du mémoire est dédiée à l'implémentation d'un modèle d'inflation dans le générateur de scénarios économiques.

Après une analyse critique des principaux modèles de taux existants, les critères de choix du modèle le plus pertinent pour ce contexte sont discutés. Ce processus implique la sélection des modèles répondant aux exigences de cohérence de marché et de martingalité, ainsi que leur calibration rigoureuse afin de garantir leur adéquation avec les données de marché. Les étapes de mise en œuvre sont également détaillées, fournissant une vue d'ensemble sur la manière dont ces modèles peuvent être intégrés dans un générateur de scénarios économiques.

5 Revue des principaux modèles de taux

Les modèles de taux d'intérêt jouent un rôle fondamental dans la gestion des portefeuilles d'assurance vie. Ils sont utilisés pour évaluer les produits dérivés basés sur les taux, projeter les trajectoires futures des taux d'intérêt, et gérer les risques financiers.

Les modèles de taux d'intérêt se regroupent en plusieurs catégories, chacune ayant ses propres caractéristiques et applications spécifiques.

5.1 Modèles d'Équilibre et Modèles de Taux Court

Ces modèles décrivent l'évolution des taux d'intérêt à partir de processus stochastiques, souvent utilisés pour simuler l'évolution des taux à court terme et leur retour vers une moyenne.

5.1.1 Modèles d'Équilibre

Les modèles d'équilibre expliquent les taux d'intérêt en fonction des forces économiques fondamentales telles que l'offre et la demande de fonds, l'inflation, et les politiques monétaires.

Les modèles d'équilibre décrivent l'évolution des taux d'intérêt en fonction d'un retour à une moyenne ou d'autres mécanismes d'équilibre économique. Leur dynamique est généralement exprimée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = \theta(\mu - r_t) dt + \sigma dW_t$$

où :

- r_t est le taux d'intérêt à l'instant t ,
 - θ est la vitesse de retour à la moyenne,
 - μ est le taux d'intérêt moyen ou l'équilibre à long terme,
 - σ est la volatilité du taux d'intérêt,
 - W est un mouvement brownien standard.
-
- **Modèle de Vasicek (1977) [1]** : Ce modèle à un facteur suppose que les taux d'intérêt suivent un processus de retour à la moyenne. Les taux ont tendance à revenir vers une valeur moyenne à long terme, ce qui permet de modéliser une certaine stabilité des taux. Cependant, le modèle peut prédire des taux d'intérêt négatifs, ce qui est parfois irréaliste dans des conditions économiques réelles.

- **Modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) (1985) [1]** : Ce modèle est similaire au modèle de Vasicek mais inclut une racine carrée dans le terme de volatilité pour garantir que les taux restent positifs. La propriété de retour à la moyenne est garantie grâce à la forme du drift identique à celle du modèle de Vasicek. Il est souvent utilisé pour modéliser les taux d'intérêt de manière plus réaliste.

5.1.2 Modèles de Taux Court [2]

Les modèles de taux court se concentrent sur la dynamique des taux d'intérêt à court terme. Ces modèles sont souvent utilisés pour évaluer les instruments financiers à court terme et les produits dérivés.

Les modèles de taux court se concentrent sur les dynamiques des taux d'intérêt à court terme. Leur forme générale est :

$$dr_t = \theta(t) dt + \sigma(t) dW_t$$

où :

- $\theta(t)$ est le terme déterministe ou la dérive,
 - $\sigma(t)$ est la volatilité dépendante du temps,
 - W est un mouvement brownien standard.
-
- **Modèle de Vasicek et CIR** : Déjà mentionnés ci-dessus, ces modèles se concentrent également sur le taux instantané, ce qui est crucial pour la valorisation des obligations et des produits dérivés à court terme.

5.2 Modèles à Absence d'Arbitrage (AOA) et Modèles de Marché

Ces modèles sont orientés vers la tarification des instruments financiers et utilisent des informations de marché pour la calibration des paramètres.

5.2.1 Modèles à Absence d'Arbitrage (AOA)

Les modèles AOA assurent que les prix modélisés des instruments financiers sont cohérents avec les prix observés sur le marché, éliminant ainsi les opportunités d'arbitrage.

Les modèles à absence d'arbitrage garantissent qu'il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage sur le marché. Leur dynamique est souvent donnée par :

$$dP(t, T) = P(t, T) (\theta(t) dt + \sigma(t) dW_t)$$

où :

- $P(t, T)$ est le prix d'une obligation à maturité T à l'instant t ,
- $\theta(t)$ est le terme de drift,
- $\sigma(t)$ est la volatilité,
- W est un mouvement brownien standard.

- **Modèle de Ho-Lee (1986)** : Ce modèle à un facteur suppose que les taux d'intérêt suivent un processus gaussien. Il est utilisé pour construire des courbes de taux cohérentes avec les prix observés des obligations.
- **Modèle de Hull-White** : Le modèle de Hull & White est une extension du modèle de Vasicek qui inclut un terme de correction pour mieux ajuster la courbe des taux actuelle. Ce modèle est flexible et permet une meilleure adéquation avec les données de marché.

5.2.2 Modèles de Marché

Les modèles de marché intègrent des informations de marché pour calibrer les paramètres et capturer les dynamiques complexes des taux d'intérêt.

Les modèles de marché ajustent les dynamiques des taux d'intérêt en fonction des données de marché. Leur forme générale est :

$$dr_t = \alpha(t) dt + \sigma(t) dW_t$$

où :

- $\alpha(t)$ est une fonction du temps représentant la dérive,
- $\sigma(t)$ est une fonction du temps représentant la volatilité,
- W est un mouvement brownien standard.
- **Modèle de Hull-White** : Ce modèle est un bon exemple de modèle de marché car il est souvent calibré en fonction des données de marché pour assurer une cohérence avec les prix observés.

5.3 Modèles à Structure par Terme

Les modèles à structure par terme se concentrent sur la forme de la courbe des taux en fonction des différentes maturités et permettent d'ajuster les courbes observées.

Les modèles à structure par terme modélisent la courbe des taux en fonction de la maturité. Leur forme générale est souvent :

$$y(t, \tau) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}}{\frac{\tau}{\tau_1}} + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}}{\frac{\tau}{\tau_1}} - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_2}}}{\frac{\tau}{\tau_2}} - e^{-\frac{\tau}{\tau_2}} \right)$$

où :

- $y(t, \tau)$ est le taux d'intérêt pour la maturité τ ,
- $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ sont des paramètres à estimer,
- τ_1, τ_2 sont des paramètres de maturité.
- **Modèle de Nelson-Siegel (1987)** : Ce modèle est utilisé pour ajuster les courbes de taux d'intérêt avec trois paramètres qui permettent de modéliser diverses formes de courbes telles que croissante, décroissante ou en cloche.

- **Modèle de Svensson (1994)** : Le modèle de Svensson est une extension du modèle de Nelson-Siegel qui ajoute deux termes supplémentaires pour une plus grande flexibilité dans l'ajustement des courbes. Ce modèle permet de capturer des formes de courbes de taux plus complexes, adaptées à des environnements économiques plus volatils..

Type de modèle	Avantages	Inconvénients
Modèles d'Équilibre	— Simplicité d'implémentation et bonne tractabilité analytique. — Permettent de comprendre les dynamiques économiques fondamentales des taux d'intérêt. — Utile pour les prévisions à long terme et les analyses économiques.	— Moins adapté pour modéliser les conditions de marché extrêmes ou les taux négatifs. — Peut ne pas capturer correctement les dynamiques à court terme ou la structure complexe des courbes de taux. — Les hypothèses économiques sous-jacentes peuvent être trop simplistes.
Modèles de Taux Court	— Bonne modélisation des dynamiques à court terme des taux d'intérêt. — Permettent une évaluation efficace des produits financiers à court terme.	— Moins efficace pour les projections à long terme. — Difficulté à capturer la structure par terme complète des courbes de taux. — Peut nécessiter des ajustements fréquents des paramètres.
Modèles à Absence d'Arbitrage (AOA)	— Garantit l'absence d'opportunités d'arbitrage, assurant la cohérence avec les prix observés sur le marché. — Précis pour la tarification des produits dérivés. — Utilise les données de marché pour calibrer les paramètres du modèle.	— Complexité accrue et mise en œuvre plus difficile. — Sensible aux changements dans les conditions de marché. — Les modèles peuvent être limités par des structures plus simples.

Modèles de Marché	— Alignement direct avec les taux observés sur le marché. — Précis pour la tarification des dérivés complexes et la gestion actif-passif. — Intégration des données de marché actuelles pour des évaluations précises.	— Peut être très complexe et computationnellement intensif. — Requiert des hypothèses spécifiques sur la dynamique des taux, ce qui peut introduire des biais. — Sensibilité aux fluctuations des conditions de marché.
Modèles à Structure par Terme	— Capacité à modéliser la courbe des taux d'intérêt complète avec flexibilité. — Permet d'ajuster les courbes de taux observées et de projeter les taux futurs. — Peut refléter diverses formes de courbes de taux.	— Complexité accrue et calculs intensifs pour l'ajustement des courbes. — Sensibilité aux spécifications de la volatilité et des paramètres. — Peut être difficile à calibrer avec précision pour refléter toutes les dynamiques du marché.

6 Processus de choix de modèle

6.1 Définition des critères de sélection

Pour sélectionner un modèle d'inflation adapté au cadre réglementaire de Solvabilité II et aux besoins spécifiques des compagnies d'assurance-vie, plusieurs critères essentiels ont été définis. Ces critères garantissent que le modèle retenu soit à la fois robuste, cohérent avec les données de marché, et capable de répondre aux exigences réglementaires. Les critères principaux sont les suivants :

— Cohérence avec le marché (Market-Consistency)

Le modèle doit être capable de reproduire fidèlement les prix des instruments financiers liés à l'inflation observés sur le marché, tels que les caps d'inflation et les swaps d'inflation. Cette cohérence est essentielle pour respecter les exigences de Solvabilité II, qui imposent que les provisions techniques soient évaluées en tenant compte des conditions de marché.

— Martingalité

Le modèle doit respecter la propriété de martingalité en univers risque-neutre, c'est-à-dire que les prix actualisés des actifs doivent être des martingales sous la mesure risque-neutre. Cela garantit l'absence d'opportunités d'arbitrage et la justesse des prix des actifs.

— Précision des projections d'inflation

Le modèle doit fournir des projections d'inflation précises et réalistes, en particulier pour

les maturités courtes (moins de 10 ans) où les modèles existants montrent des lacunes. Cette précision est cruciale pour la valorisation des passifs ajustés à l'inflation.

— Robustesse face aux changements de conditions de marché

Le modèle doit être capable de maintenir sa cohérence et sa précision même dans des environnements économiques volatils ou soumis à des chocs importants, tels que des variations brutales des taux d'intérêt ou de l'inflation.

— Facilité de calibration et de mise en œuvre

Le modèle doit être relativement simple à calibrer et à implémenter dans un générateur de scénarios économiques (GSE), tout en restant suffisamment flexible pour s'adapter à différentes configurations de marché.

— Respect des exigences réglementaires de Solvabilité II

Le modèle doit permettre de respecter les exigences quantitatives et qualitatives de Solvabilité II, notamment en termes de calcul des provisions techniques (Best Estimate) et des exigences de capital (SCR).

6.2 Contexte réglementaire

Le choix du modèle de taux est motivé par l'utilisation que l'on souhaite en faire. La norme Solvabilité II est une réglementation mise en place pour régir le secteur de l'assurance et de la réassurance. Elle comprend diverses exigences et lignes directrices concernant la gestion des risques, y compris la modélisation des taux d'intérêt pour évaluer les engagements des assureurs. Elle définit notamment les attentes suivantes :

1. Adaptabilité à la nature et taille de l'entreprise

" Les méthodes et techniques [...] sont proportionnées à la nature, à l'ampleur et à la complexité des risques supportés par les entreprises d'assurance et de réassurance" (article 86)

2. Adaptabilité aux obligations et contrats d'assurance :

Solvabilité II exige que les modèles utilisés par les assureurs soient adaptés à leurs obligations et contrats spécifiques :

"Il est nécessaire que la valeur actuelle probable des engagements d'assurance soit calculée sur la base d'informations à jour et dignes de foi et d'hypothèses réalistes, en tenant compte des garanties financières et options figurant dans les contrats d'assurance et de réassurance"

"Les entreprises d'assurance et de réassurance tiennent compte de la valeur des garanties financières et de toute option contractuelle incluses dans leurs contrats d'assurance et de réassurance." (article 79)

Cela garantit que les projections intègrent de manière précise les garanties financières et les options offertes par les contrats d'assurance, permettant de refléter fidèlement les risques spécifiques inhérents aux obligations contractuelles de chaque assureur.

3. Cohérence avec les données de marché :

"Le calcul des provisions techniques utilise, en étant cohérent avec elles, les informations fournies par les marchés financiers et les données généralement disponibles sur les risques de souscription (cohérence avec le marché)." (article 76)

Le choix du modèle de taux dans le générateur après prise en compte de la réglementation dépend de différents facteurs :

- Les objectifs du modèle
- La complexité et flexibilité du modèle
- Les données disponibles
- La facilité de calibration
- L'expertise et les ressources disponibles au sein de l'entreprise

7 Première approche : Le modèle de Jarrow-Yildirim

Initialement, l'idée était de conserver les modèles existants de taux nominaux (DDLMM) et de taux réels (Hull & White) en introduisant une volatilité d'inflation non nulle. Pour rappel, le modèle d'inflation initial suit la dynamique du modèle de Jarrow-Yildirim, avec un modèle DDLMM à la place d'un Hull & White pour les taux nominaux et avec une volatilité σ_I initialement nulle :

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = \mu_I(t) dt + \sigma_I dW_I(t)$$

Avec $I(t)$ l'indice d'inflation, $\mu_I(t)$ le terme de dérive moyenne de l'inflation à l'instant t , σ_I la volatilité de l'inflation et W_I un mouvement brownien.

Quant au modèle Hull & White des taux réels avant modification, il se formulait ainsi :

$$dr(t) = [\theta(t) - a_r r(t)]dt + \sigma_r dW_r(t)$$

Avec $r(t)$ le taux court réel à l'instant t , θ une fonction du temps qui permet de calibrer le modèle pour qu'il soit en accord avec la courbe des taux observée, a_r la vitesse de retour à la moyenne, σ_r la volatilité des taux réels et W un mouvement brownien.

La calibration était réalisée en ajustant les valeurs de a_r et σ_r en fonction du contexte économique, de façon empirique.

Pour adapter le modèle des taux réels lorsque σ_I n'est pas nul, les travaux de J. Roza exposés dans le document *Market-consistent valuation of inflation-linked liabilities* ont servi de support. La modification apportée au modèle de taux réels était la suivante :

$$dr(t) = [\theta_r(t) - \rho_{r,I}\sigma_I\sigma_r - a_r r(t)]dt + \sigma_r dW_r(t)$$

Cela revient à incorporer le terme $\rho_{r,I}\sigma_I\sigma_r$ dans le shift du modèle dans le but d'assurer la martingalité du modèle.

L'objectif était d'établir si une variation de σ_I pouvait permettre d'influencer les niveaux d'inflation à long terme. L'absence de formule fermée ne nous permettant pas de calibrer le paramètre σ_i , l'approche envisagée était une boucle sur les valeurs de ce paramètre.

Pour ce faire, une boucle sur les valeurs de σ_I et la génération d'un aléa W_I lié au terme de volatilité ont été implémentés. Ainsi, le but était d'observer l'influence du paramètre σ_I pour déterminer la valeur qui minimisait l'écart de volatilité. Pour la génération des browniens, la méthode utilisée était similaire à celle utilisée pour la génération des autres aléas dans les modèles du générateur de scénarios économiques, soit une fonction de Mersenne twister.

Pour la boucle sur le paramètre σ_I , l'idée était d'évoluer à partir des valeurs initiales suivantes issues du document de J. Roza, soit :

parameter	value
σ_n	0.0103
σ_r	0.0093
σ_i	0.0108
a_n	0.82
a_r	0.88

FIGURE 10 – Paramètres initiaux issus des travaux de J. Roza

A terme, l'objectif était de mettre en place une boucle trimestrielle englobant les trois paramètres a_r , σ_r , et σ_I dans le but de déterminer la combinaison optimale de ces paramètres adaptée à chaque date d'utilisation du GSE.

Seulement, la formulation proposée par J. Roza s'applique dans le contexte d'un modèle de Jarrow-Yildirim, c'est-à-dire lorsque les taux nominaux et les taux réels sont tous deux diffusés selon un modèle de Hull & White. Dans notre cas, avec les taux nominaux suivant un modèle DDLMM et les taux réels un modèle de Hull & White, le modèle inflation ne satisfaisait pas les tests martingales :

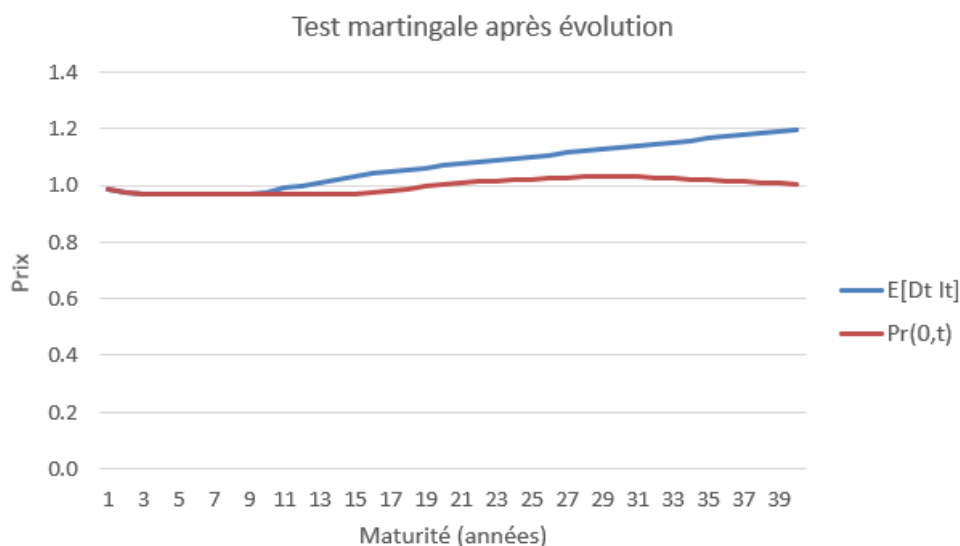


FIGURE 11 – Test martingale avec la première approche

En effet, voici à quoi ressemblaient ce test avant l'évolution du modèle :

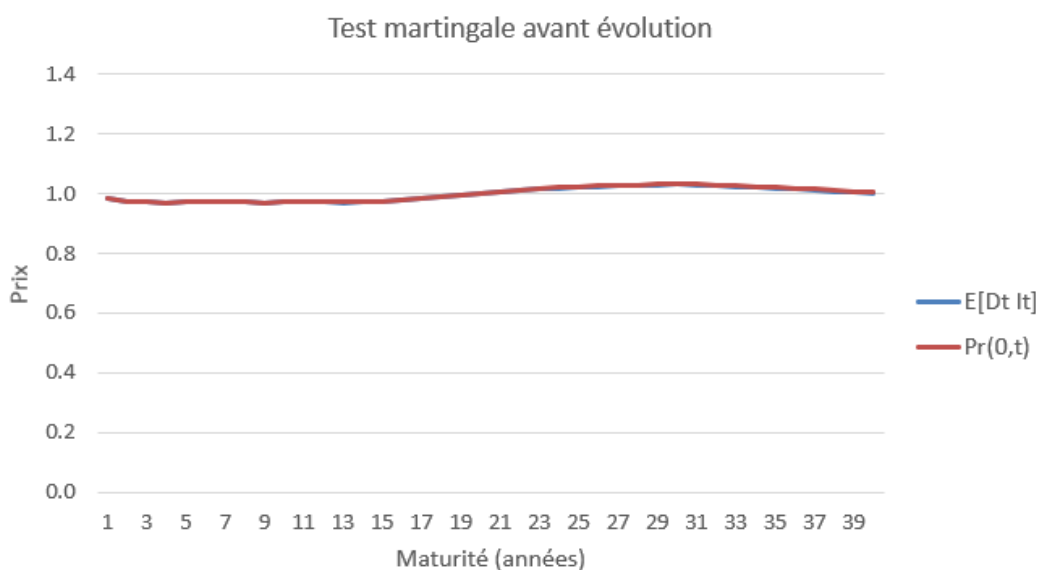


FIGURE 12 – Test martingale avant évolution du modèle

Remarque importante : Pour rappel, dans l'ensemble du mémoire, le terme "test" est utilisé par abus de langage. Il ne s'agit pas de test statistique. L'hypothèse du caractère market consistent est validée à l'aide de seuils définis en interne.

Les modèles du GSE doivent impérativement vérifier la propriété de martingalité pour pouvoir satisfaire les exigences réglementaires. Cela assure l'absence d'opportunité d'arbitrage et la justesse des prix des actifs, tout en permettant des projections à long terme et un équilibre adéquat entre risque et rendement. En garantissant que les prix reflètent toute l'information disponible, la martingalité évite les possibilités de profits sans risque, essentielle pour une valorisation correcte des actifs financiers et une gestion prudente des risques futurs. Elle joue également un rôle clé dans la calibration rigoureuse des modèles, assurant que les scénarios économiques produits sont à la fois réalistes et cohérents avec les dynamiques des marchés financiers.

Les différences dans les processus de diffusion des taux nominaux et des taux réels entraînent des dérives sous la mesure risque-neutre en raison des ajustements nécessaires pour refléter le risque de marché. Ces ajustements, qui varient selon que la diffusion est log-normale (pour les taux nominaux) ou normale (pour les taux réels), créent des incohérences dans les prévisions des prix futurs des actifs indexés sur l'inflation. En conséquence, ces actifs ne peuvent pas respecter la condition de martingale, car leurs prix actualisés ne correspondent plus fidèlement à leur valeur actuelle, introduisant des biais qui empêchent une évaluation correcte sous la mesure risque-neutre.

Cette approche n'a donc pas été retenue pour modéliser l'inflation dans le GSE.

8 Nouveau modèle

8.1 Approche

La première approche s'étant avérée infructueuse en raison de la non-martingalité du modèle, nous avons donc exploré une nouvelle idée : adopter un modèle DDLMM pour les taux réels (au lieu du modèle de Hull & White), suivant la même dynamique que celui utilisé pour les taux nominaux, tout en maintenant une volatilité nulle dans le modèle d'inflation.

La formulation du calcul de l'inflation demeure alors inchangée, seule la structure du modèle des taux réels est modifiée.

Pour rappel, le Displaced Diffusion Libor Market Model (DDLMM), ou modèle LMM shifté à n -facteurs, suit la structure suivante pour les taux forward : Pour toutes dates $T_0 \leq t \leq T_{N-1}$ et $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$,

$$dF_k(t) = \sigma_k^{DDLMM}(t)(F_k(t) + \alpha_k)dZ_k(t)$$

Où Z est un mouvement brownien uni-dimensionnel sous Q^k (la probabilité forward neutre de maturité T_k), α le vecteur représentant le shift et σ_k une fonction déterministe du temps définie sur l'intervalle $[T_0, T_{k-1}]$.

La structure du modèle est alors la suivante :

- Maintien du modèle DDLMM pour les taux nominaux, inchangé par rapport à l'ancien modèle
- Implémentation d'un modèle DDLMM pour les taux réels, qui remplace le modèle Hull&White précédent
- Maintien de la formulation de l'inflation, s'inspirant de celle du modèle de Jarrow-Yildirim en fixant la volatilité de l'inflation à 0, soit :

$$dI(t) = \mu_{I(t)}I(t)dt$$

où $I(t)$ est l'inflation en t et $\mu_{I(t)} = n(t) - r(t)$

Nous présenterons dans la suite la calibration des différents paramètres de chacun de ces 3 modèles.

8.2 Constat sur la volatilité du modèle

Le décalage des distributions observé entre les modèles Hull & White (qui suit une distribution normale) utilisé pour les taux réels et DDLMM (qui suit une distribution log-normale) pour les taux nominaux, comme expliqué au paragraphe 4.5.2, est au cœur de la problématique de calibration du modèle d'inflation. Dans ce contexte, il a été envisagé d'implémenter un modèle similaire à celui utilisé pour les taux nominaux afin de l'appliquer également aux taux réels.

L'objectif de cette implémentation est de réduire les écarts de volatilité entre les deux modèles.

Le choix d'un modèle DDLMM pour les taux réels (plutôt qu'un modèle Hull & White pour les taux nominaux) est motivé par son aptitude à capturer plus précisément la dynamique des taux nominaux, notamment en raison de sa capacité à modéliser la volatilité et les mouvements non linéaires des taux d'intérêt. Ce modèle, grâce à l'ajout d'un terme de déplacement dans la diffusion, permet de mieux représenter les comportements empiriques observés, comme les asymétries ou les chocs de taux, qui sont cruciaux pour des scénarios économiques complexes. De plus, le DDLMM s'avère plus flexible pour modéliser des dérivés de taux tels que les swaps, les caplets ou les floors, en raison de sa capacité à mieux saisir les structures de volatilité et les courbes de taux à terme. En revanche, bien que le modèle Hull & White soit simple à calibrer et efficace pour la modélisation des taux d'intérêt à court terme, il se révèle limité pour reproduire avec précision les courbes de taux nominaux à long terme ou pour capturer les dynamiques complexes observées dans des environnements économiques instables. Ainsi, pour des applications nécessitant une modélisation détaillée des taux à long terme et des instruments financiers dérivés, le DDLMM offre une meilleure adaptabilité et une représentation plus réaliste des comportements de marché.

8.3 Calibration du DDLMM taux nominaux

8.3.1 Génération des aléas

L'une des principales problématiques est de choisir la source d'aléa la plus appropriée pour optimiser la vitesse de convergence. C'est ici que les méthodes de Monte Carlo et de quasi-Monte Carlo se distinguent. Dans un Monte Carlo classique, on génère des réalisations d'une gaussienne centrée réduite. En revanche, en quasi-Monte Carlo, la démarche est la suivante : les réalisations du mouvement brownien sont générées de manière quasi-aléatoire plutôt que purement aléatoire. Au lieu d'utiliser des variables aléatoires, on utilise des variables déterministes, distribuées de manière plus uniforme. En effet, on veille à ce que les nombres choisis soient uniformément répartis, ce qui améliore nettement la convergence du Monte Carlo.

Les suites de nombres quasi-aléatoires générées dans le GSE sont des suites de Sobol. Les aléas sont générés avec la fonction Mersenne Twister. Les nombres aléatoires uniformes ainsi générés sont ensuite transformés en réalisation de loi normale par l'algorithme d'inversion de la loi normale de Moro.

Mersenne Twister

L'algorithme et l'implémentation de la distribution uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ suivent les propositions de Makoto Matsumoto et Takuji Nishimura. La documentation détaillée et le code source (MT19937) sont disponibles dans une documentation publique en ligne. Quant à la distribution normale, elle est générée en utilisant la méthode de Gauss-Moro. Les suites à faible discrédance de Sobol visent à optimiser l'occupation de l'espace et à accélérer la convergence.

Un code source distribué par les mathématiciens Stephen Joe et Y. Kuo a été utilisé pour l'algorithme de calcul des suites de Sobol.

On peut visualiser l'occupation de l'espace lors de la génération d'aléa par suites de Sobol versus lors de la génération d'aléa par Excel (qui utilise une distribution uniforme sur $[0, 1]$) :

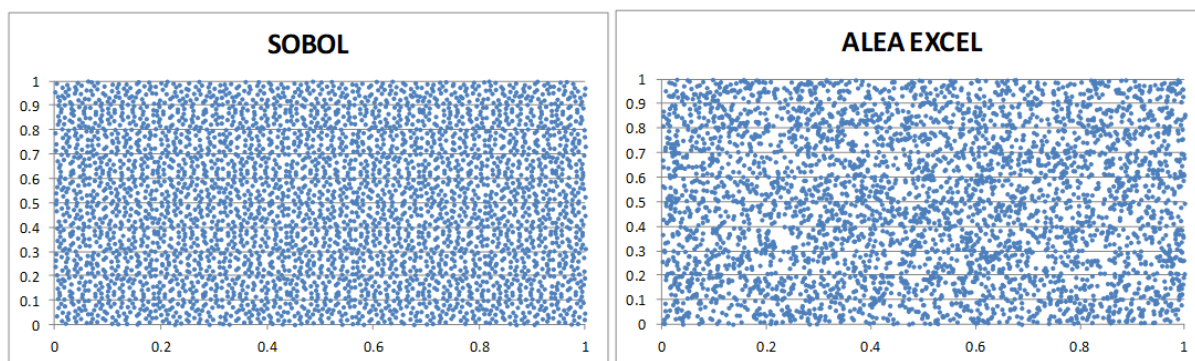


FIGURE 13 – Comparaison des aléas générés avec les suites de Sobol et avec la fonction ALEA d'Excel

8.3.2 Calibration des paramètres [6]

Cadre réglementaire :

Le GSE doit satisfaire aux exigences de l'article 22§3 a. à c. du règlement délégué. Celui-ci prévoit que le niveau des taux doit être, en moyenne, cohérent avec la courbe de taux sans risque EIOPA à la date du calcul, que les scénarios respectent le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), et enfin, que les prix d'actifs générés par le modèle sont cohérents avec les prix observés sur les marchés financiers. Le GSE intègre en entrée des prix d'actifs (par exemple des swaptions pour les taux), qui sont utilisés pour calibrer les paramètres du modèle afin de refléter la volatilité des marchés et la courbe de taux sans risque EIOPA.

Le modèle LMM shifté du GSE est calibré en minimisant la somme des écarts quadratiques pondérés des prix des swaptions. Le choix de minimiser des écarts de prix plutôt que de volatilités n'est pas contradictoire avec la réglementation puisque les volatilités ne sont qu'une traduction des prix de marché dans un modèle donné. Les volatilités extraites de Bloomberg sont associées aux prix de marché des swaptions et à la courbe de taux swap. Le changement de courbe de taux (de celle de marché à celle S2), tout en conservant les volatilités, nécessite de modifier les prix des swaptions (ces trois quantités étant liées). Deux approches sont possibles : la conservation des volatilités Black ou Bachelier. Comme l'ont soulevé Dimitroff et al. (Lognormal vs Normal Volatilities and Sensitivities in Practice, 2016), les volatilités Bachelier sont moins sensibles à un changement de la courbe de taux et sont définies même en cas de taux swap négatifs. Elles se sont avérées historiquement plus stables que celles de Black. Les volatilités de Bachelier sont donc retenues comme élément invariant lors du changement de la courbe de taux.

On a supposé que le shift avait la forme suivante [1] :

$$\mu_k(t) = |a_{shift}| \times \max(b_{shift} + (1 - b_{shift}) \times e^{-c_{shift} \times t}, 0)$$

On conserve la même forme de volatilité que précédemment :

$$\sigma_i(t) = \phi(t) * ([b(T_{i-1} - t) + a] * e^{-c(T_{i-1} - t)} + d)$$

On suppose que les ϕ_t ont la forme paramétrique suivante :

$$\phi(t) = \max(\phi_1 + (1 - \phi_1) * e^{-\phi_2 * t}, 0)$$

Les paramètres à calibrer sont $a, b, c, d, a_{shift}, b_{shift}, c_{shift}, \phi_1, \phi_2$. A chaque actif sur lequel calibrer est associé un poids, lequel représente l'influence de cet actif sur le Best Estimate.

L'erreur ϵ à minimiser sur les prix de swaptions est définie par :

$$\epsilon(a, b, c, d, a_{shift}, b_{shift}, c_{shift}, \phi_1, \phi_2) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^S \text{poids} \times (\text{swaption}_{DDLMM}(a, b, c, d, a_{shift}, b_{shift}, c_{shift}, \phi_1, \phi_2, M_j, T_i, S_l) - \text{swaption}_{market}(M_j, T_i, S_l))^2$$

Avec N le nombre de ténors, M le nombre de maturités, S le nombre de strikes, T_i les ténors, M_i les maturités considérées, S_l les strikes, swaption_{DDLMM} les prix des swaptions obtenus par formule fermée et swaption_{market} les prix des swaptions observées sur le marché.

Même s'il serait théoriquement idéal de calibrer chaque point de la surface de volatilité, il est en pratique difficile d'obtenir des données liquides pour certains instruments financiers. Pour la calibration de la nappe de volatilité ATM, les poids associés aux volatilités sont déterminées à

l'aide du Vega.

Les volatilités de référence utilisées pour la calibration proviennent des volatilités implicites des swaptions disponibles sur Bloomberg. Les points manquants sont obtenus par interpolation et extrapolation. Les pondérations attribuées à chaque swaption, initialement fixées à dire d'expert, sont maintenant déterminées par la sensibilité du Best Estimate aux volatilités des swaptions de manière annuelle. Cette sensibilité est mesurée par le Vega :

$$Vega = \frac{\Delta BE}{\Delta \text{Volatilité}}$$

La méthode adoptée pour calculer le Vega s'inspire des techniques utilisées pour évaluer le Vega des produits structurés. Le principe consiste à choquer une des volatilités de swaptions et à mesurer l'impact sur le BE.

Plus le Vega est élevé, plus la swaption influence le BE. Ainsi, lors de la calibration, un poids plus important est attribué aux swaptions ayant le plus grand impact sur le BE.

Ce choc s'ajoute à la volatilité initiale des taux forward. On peut écrire :

$$\bar{\sigma}_i(t) = \phi_t([b(T_{i-1} - t) + a]e^{-c(T_{i-1} - t)} + d) + \epsilon \mathbb{1}_{i=k, t=t_{stress}} = \sigma_i(t) + \epsilon \mathbb{1}_{i=k, t=t_{stress}}$$

Avec $\epsilon \mathbb{1}_{i=k, t=t_{stress}}$ la perturbation appliquée à la volatilité initiale σ_i , au temps t_{stress} .

Le Vega du modèle s'écrit :

$$Vega_{DDLMM} = \frac{\partial BE}{\partial \bar{\sigma}_k(t)} = \sum_{\alpha=1}^{30} \sum_{\beta=1}^{30} \frac{\partial BE}{\partial \theta_{\alpha\beta}} \times \frac{\partial \theta_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\sigma}_k(t)}$$

Avec :

- $\frac{\partial BE}{\partial \bar{\sigma}_k(t)}$ l'impact sur le BE, obtenu par Monte-Carlo
- $\frac{\partial BE}{\partial \theta_{\alpha\beta}}$ l'impact sur le BE d'un changement de volatilité de la swaption, que l'on cherche à déterminer
- $\frac{\partial \theta_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\sigma}_k(t)}$ l'impact sur la volatilité de la swaption d'un changement de volatilité du taux forward

On obtient le Vega du modèle par résolution d'un système linéaire. On peut alors construire un lot de surfaces de volatilités stressées, puis calculer l'impact estimé de chaque swaption sur le BE :

$$Impact = \sum vega_{i,j} \times \Delta vol_{i,j}$$

8.3.3 Résultat de la calibration

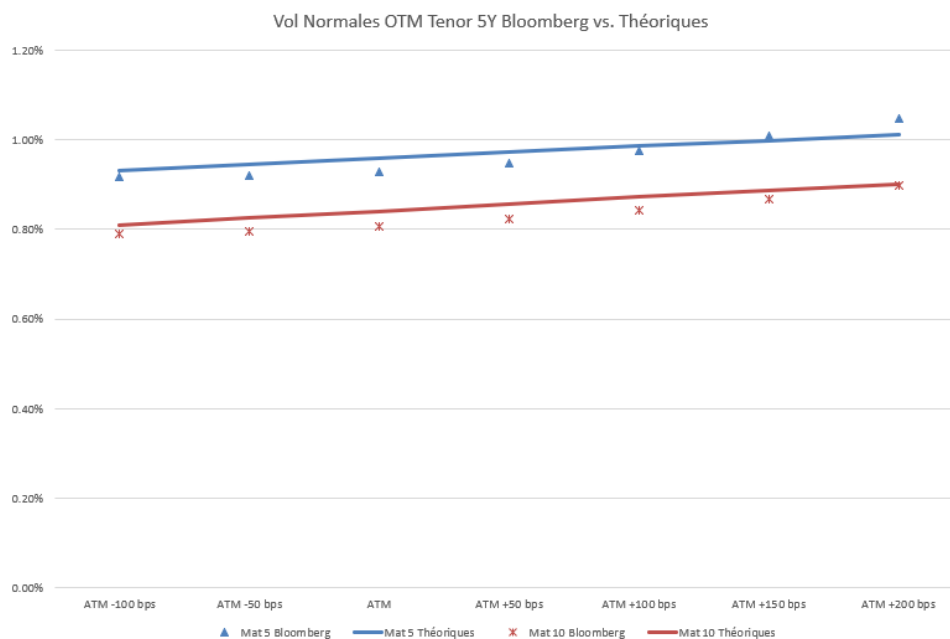
Au premier trimestre de 2023, les paramètres de volatilité sont les suivants :

parametre de vol	valeur
a	0.017%
b	0.782%
c	5.792%
d	2.844%

Les paramètres du shift sont les suivants :

phi_param1	1669.885716
phi_param2	0.000000001
a	23.439%
b	3.096%
c	6.755%

Les graphiques ci-dessous présentent les volatilités Bloomberg et les volatilités théoriques du modèle pour différents strikes et maturités 5 et 10 ans en 2023 :



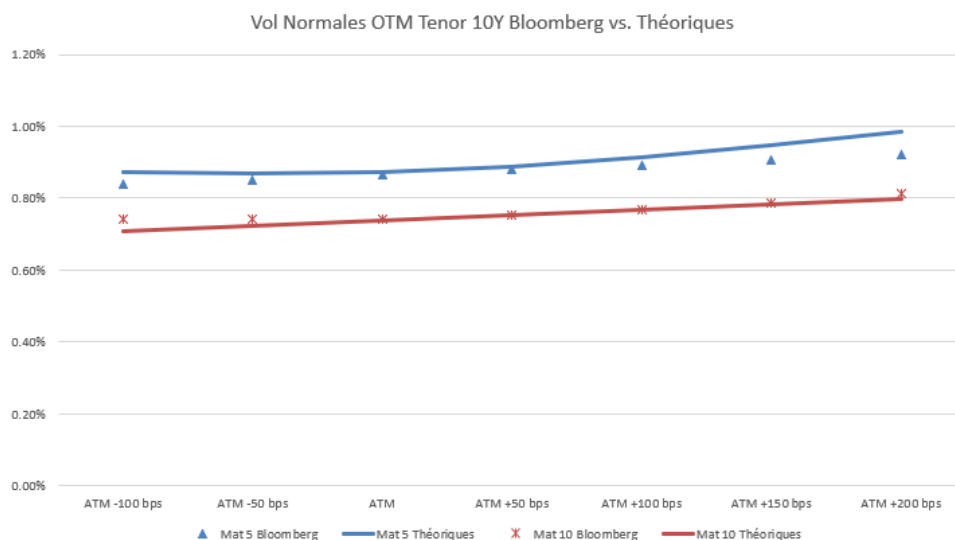


FIGURE 14 – Volatilités Bloomberg et théoriques pour les maturités 5 et 10 ans en 2023

On peut calculer la différence entre les volatilités calculées et celles Bloomberg :

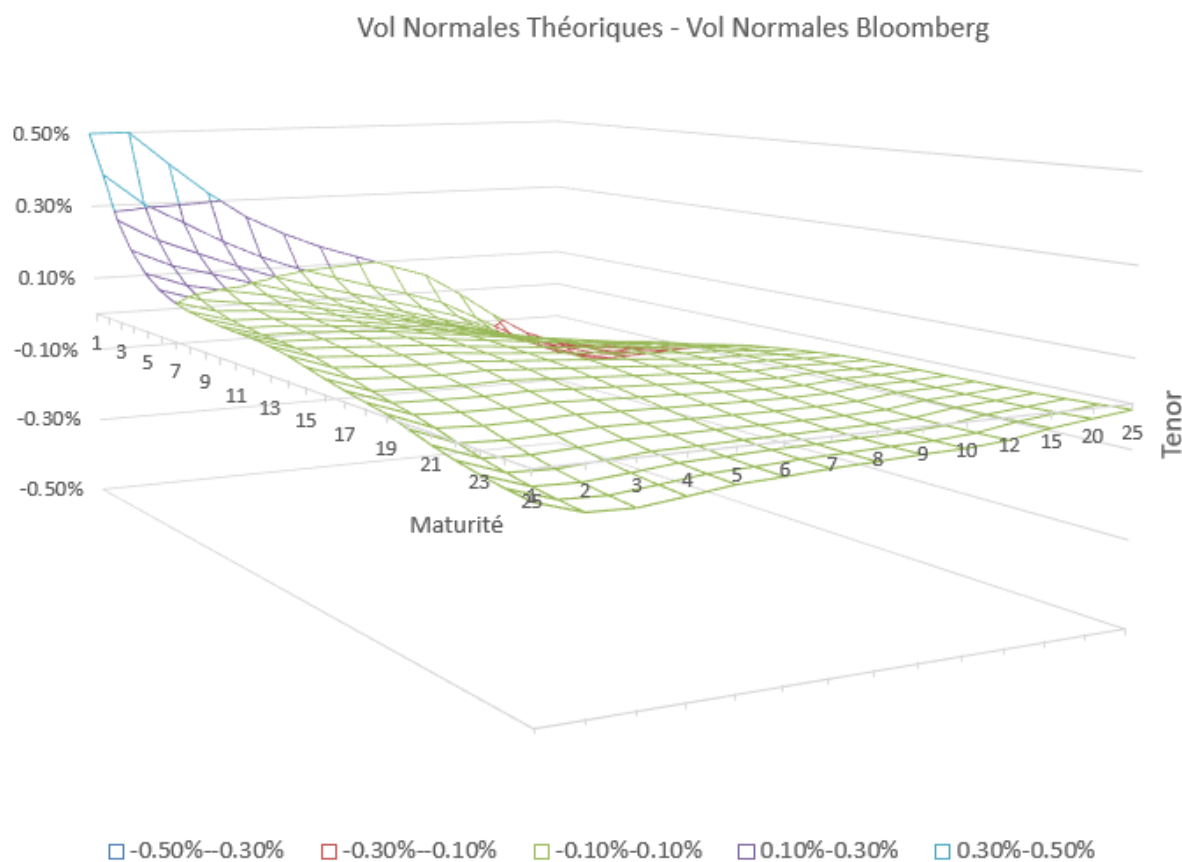


FIGURE 15 – Différence entre les volatilités théoriques et Bloomberg

Le résultat de la calibration est satisfaisant au vu des graphiques.

8.3.4 Réduction à 3 facteurs [6]

Dans sa forme complète, le Libor Market Model utilise un nombre de facteurs égal au nombre de périodes de taux Libor modélisés, ce qui peut devenir très complexe et difficile à gérer. Par exemple, 20 périodes de taux modélisées nécessitent la gestion de 20 processus de Wiener différents, chacun avec ses propres paramètres de dérive et de volatilité. Cette complexité entraîne des défis considérables en termes de calibration du modèle, de temps de calcul, et de stabilité numérique. En pratique, une telle complexité peut rendre les simulations et les calculs de prix de produits dérivés extrêmement lourds. C'est pourquoi la réduction de la dimension du modèle est souvent nécessaire pour des raisons pratiques d'implémentation et de complexité.

Pour ce faire, la matrice de corrélation entre les processus de Wiener $\rho \in \mathcal{M}_{N,N}(\mathbf{R})$ du modèle doit être :

- Symétrique
- Définie positive

On cherche alors la matrice $A \in \mathcal{M}_{N,N}(\mathbf{R})$ telle que $\text{rang}(A) = d \leq N$ où $d \in \mathbf{N}^*$ et $\rho \simeq AA^T$.

Cela revient à minimiser la quantité $\|\rho - AA^T\|$, où $\|\cdot\|$ est une norme matricielle.

La réduction à trois facteurs est une méthode couramment utilisée pour simplifier le LMM sans perdre trop de précision. Cette réduction repose sur l'idée que la plupart des mouvements des taux d'intérêt peuvent être capturés par seulement trois sources principales de risque (ou facteurs de risque). Le processus de réduction se déroule généralement en trois étapes clés :

1. Analyse en Composantes Principales (ACP) :

L'Analyse en Composantes Principales est une méthode statistique utilisée pour transformer un ensemble de variables potentiellement corrélées en un ensemble de variables non corrélées appelées composantes principales. L'objectif principal de l'ACP est de réduire la dimensionnalité des données tout en conservant autant d'information que possible. Cela se fait en trouvant de nouvelles variables (les composantes principales) qui sont des combinaisons linéaires des variables d'origine, de manière à capturer la variance maximale des données. En réduisant le nombre de variables, l'ACP simplifie l'analyse et la visualisation des données tout en facilitant l'identification de structures et de relations cachées entre les variables. Les composantes principales sont ordonnées en fonction de l'importance de leur contribution à la variance totale des données, permettant ainsi de déterminer quelles composantes principales expliquent le mieux les variations observées dans les données d'origine.

Une ACP est effectuée sur les données historiques des taux à terme pour identifier les directions principales de la variance. L'ACP décompose les mouvements des taux en plusieurs composantes orthogonales, chacune représentant une part de la variance totale. Les trois premières composantes principales sont souvent suffisantes pour capturer la majeure partie de la variance des taux à terme. Typiquement, ces trois premières composantes souvent plus de 90% de la variabilité observée.

Deux nouvelles matrices, P^3 (de dimension $[3, 3]$) et D^3 (de dimension $[N, 3]$), sont alors

créées après sélection des 3 valeurs significatives.

On avait :

$$\rho = PDP^T = P\sqrt{D}(P\sqrt{D})^T$$

Avec P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de ρ et D est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de ρ , on écrit maintenant :

$$\rho^3 = P^3\sqrt{D^3}(P^3\sqrt{D^3})^T = A^3(A^3)^T$$

Cette matrice est symétrique et définie positive par construction. Seulement, ce n'est pas une matrice de corrélation car la diagonale n'est pas composée de 1 (la matrice a été déformée par le retrait d'information par la réduction). On écrit alors :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \rho_{i,j}^{ACP} = \frac{\rho^3}{\sqrt{\rho_{i,i}^3 \rho_{j,j}^3}}$$

2. Décomposition du mouvement brownien :

Les processus brownien initiaux sont décomposés en trois nouveaux browniens Z_1 , Z_2 et Z_3 correspondant aux trois principaux facteurs de risque identifiés par l'ACP.

Chaque taux $F_i(t)$ est alors modélisé en termes de ces trois nouveaux processus. La dynamique de chaque taux est exprimée comme une somme pondérée de trois facteurs :

$$dZ_k(t) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{k,j}(t, F(t)) dZ_j(t)$$

où $\sigma_{i,j}(t, F(t))$ représente la sensibilité du taux $F_i(t)$ au facteur j .

3. Calibration et simulations :

Les paramètres du modèle, notamment les sensibilités $\sigma_{i,j}$, sont calibrés à partir des données de marché afin de s'assurer que le modèle réduit capture correctement la dynamique des taux d'intérêt.

Les simulations et les calculs de prix sont ensuite effectués en utilisant ces trois facteurs principaux, ce qui réduit considérablement la complexité computationnelle et permet des calculs plus rapides.

En résumé, la réduction à 3 facteurs présente les avantages suivants :

— Simplicité computationnelle :

Réduire le nombre de processus stochastiques simplifie grandement les calculs. Avec seulement trois facteurs, les simulations et les calculs de prix deviennent beaucoup plus rapides et moins coûteux en termes de ressources informatiques.

— **Efficacité de la calibration :**

La calibration du modèle est plus simple avec moins de paramètres à ajuster. En se concentrant sur trois facteurs principaux, il est plus facile de trouver des solutions stables et bien ajuster le modèle aux données.

— **Précision raisonnable :**

La majorité des mouvements de taux d'intérêt est capturée par les trois principaux facteurs. Cela signifie que, malgré la réduction du nombre de facteurs, le modèle reste suffisamment précis pour de nombreuses applications pratiques, y compris le pricing et la gestion des risques de produits dérivés.

Le brownien Z est alors réduit à trois degrés de liberté. On l'exprimera comme la composée de trois mouvements browniens :

$$dZ(t) = \beta_k^1(t) * dZ_1(t) + \beta_k^2(t) * dZ_2(t) + \beta_k^3(t) * dZ_3(t)$$

8.3.5 Calibration des corrélations inter-forwards

Lorsque nous nous plaçons dans un modèle LMM à n facteurs, il est nécessaire de spécifier une structure de corrélation pour les taux forwards diffusés qui sont considérés comme des processus corrélés. Il s'agit alors de déterminer les paramètres $\rho_{j,k}$.

Deux approches sont envisageable :

- Déterminer les corrélations sur les données historiques.
- Déterminer une forme paramétrique des corrélations calibrée sur le prix de marché de certains produits financiers.

L'estimation de la corrélation dans cette étude est basée sur un historique de taux ZC .

La méthodologie générale adoptée est la suivante :

1. Utilisation d'un historique de taux que l'on interpole linéairement
2. Calcul des corrélations historiques entre les log-ratios des valeurs absolues de taux forwards shiftés
3. Ajustement d'une forme paramétrique de corrélation, sur la matrice calculée à l'étape précédente

Discrétisation :

On se place en vision time-to-expiry : la corrélation dépend du temps restant à expiration.

On rappelle que le taux forward $F_k(t)$, $t \in [0, T_k]$ est défini par :

$$F_k(t) = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{P_n(t, t+k)}{P_n(t, t+k+1)} - 1 \right)$$

où $P_n(t, T_k)$ est le prix à la date t d'un zéro-coupon de date de maturité T_k et $\tau_k = T_{k+1} - T_k = 1$.

Après discrétisation, on a :

$$\ln F_k^{\Delta t}(t+\Delta t) = \ln F_k^{\Delta t}(t) + \sigma_k(t) \sum_{j=m(t)}^k \frac{\tau_j F_j^{\Delta t}(t) \sigma_j(t) \rho_{j,k}(t)}{1 + \tau_j F_j^{\Delta t}(t)} \Delta t - \frac{\sigma_k^2(t)}{2} \Delta t + \sigma_k(t) (Z_k(t+\Delta t) - Z_k(t))$$

Avec $m(t)$ le dernier *Libor* en cours, et qui représente le plus petit entier tel que $t \leq T_{m(t)}$.

Calcul des log-ratios :

Les forwards étant calculés, on calcule les log-ratios de forward shiftés puis les corrélations entre ces log-ratios :

$$\log \text{ratio}_k(t) = \log \text{ratio}[t, k] = \ln \left(\frac{|F_k(t+1) + \delta|}{|F_k(t) + \delta|} \right)$$

La valeur du paramètre δ est fixée à dire d'expert, de manière à s'assurer que les forwards historiques soient positifs sans altérer les corrélations entre log-ratio de forwards shiftés. En 2017, cette valeur était fixée à 0.5%.

Dans les projections du GSE, la corrélation inter-forwards est supposée varier au cours du temps, et est définie par date d'expiration. Ainsi, il est nécessaire que les forwards utilisés pour le calcul de la corrélation inter-forwards soient en vie à toutes les dates de constatation des taux.

Le calcul de la matrice est ensuite défini de la manière suivante :

$$\rho_{j,k} = \text{corr}[\log \text{ratio}[, k]; \log \text{ratio}[, j]]$$

Matrice de corrélation paramétrique

L'un des avantages principaux de la spécification en time-to-expiry pour la forme de corrélation est qu'elle permet une estimation historique plus robuste et plus naturelle au regard des historiques de courbes dont on dispose. En effet, pour la spécification en expiration constante, l'estimation des paramètres β associés à des dates d'expiration élevées nécessitent d'utiliser des taux de ténors élevés (moins fiables) associés à des profondeurs historiques restreintes (moins robustes).

$$\text{cor}(\ln(\frac{F_k(T_{j+1}) + \alpha}{F_k(T_j) + \alpha}), \ln(\frac{F_l(T_{j+1}) + \alpha}{F_l(T_j) + \alpha})) \approx \sum_{q=1}^{n_f} \beta_k^q(T_j) \beta_l^q(T_j)$$

Avec, pour $\beta_k^q(t)$ constante par morceaux, $j < k \in \mathbb{N}^*$, pour $q \in 1, 2, 3$ et pour $t \in [T_{j-1}, T_j[$:
 $\beta_k^q(t) = b_{k-(j-1)}^q$,

$$\text{cor}(\ln(\frac{F_k(T_{j+1}) + \alpha}{F_k(T_j) + \alpha}), \ln(\frac{F_l(T_{j+1}) + \alpha}{F_l(T_j) + \alpha})) \approx \sum_{q=1}^{n_f} b_{k-j}^q b_{l-j}^q$$

Remarque : le shift étant déterministe dans le modèle LMM utilisé, il est fixé à sa moyenne en fin d'année pour l'estimation des corrélations historiques.

On pose :

$$c_j(u) = \frac{a_j(u)}{a(u)}$$

$$a_1(u) = b_1 e^{-\lambda_1 * u}$$

$$a_2(u) = b_2 e^{-\lambda_2 * u}$$

$$a_3(u) = b_3 e^{-\lambda_3 * u}$$

$$a(u) = \sqrt{a_1(u)^2 + a_2(u)^2 + a_3(u)^2}$$

Et pour $j < k$, pour $q \in 1, 2, 3$ et pour $t \in [T_{j-1}, T_j[$,

$$\beta_k^q(t) := b_{k-j}^q = c_q(k - (j - 1))$$

On a alors la formulation suivante :

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \mu_k(t)dt + \beta_k^1(t) * dZ_1(t) + \beta_k^2(t) * dZ_2(t) + \beta_k^3(t) * dZ_3(t)$$

Avec μ_k le *drift*.

Le calibrage des paramètres se fait ensuite grâce à la matrice de corrélation historique calculée précédemment.

L'erreur ϵ_1 à minimiser sur les corrélations est définie par :

$$\epsilon_1(b_1, b_2, b_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M (\text{correl paramétrique}(b_1, b_2, b_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, i, j) - \text{correl historique}(i, j))^2$$

Le paramètre M permet de spécifier la zone de corrélation cible ($M = 200$ mois pour notre calibrage). Les paramètres à calibrer sont donc $b_1, b_2, b_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ils sont déterminés en minimisant ϵ_1 à l'aide de l'algorithme de Nelder Mead.

Début 2023, les paramètres de corrélation obtenus sont les suivants :

b1	8.06915
b2	1.81333
b3	0.00549
lambda1	0.96854
lambda2	0.41085
lambda3	-0.17576

On peut alors en déduire les valeurs de a_1 , a_2 et a_3 pour chaque τ , puis en déduire a , c_1 , c_2 et c_3 . Par exemple, les premières valeurs sont :

τ	a_1	a_2	a_3	a	c_1	c_2	c_3
0	8.069	1.813	0.005	8.270	0.976	0.219	0.00
$\frac{1}{12}$	7.443	1.752	0.005	7.647	0.973	0.229	0.00
$\frac{2}{12}$	6.866	1.693	0.005	7.072	0.971	0.239	0.00

On peut alors observer les facteurs c_1 , c_2 et c_3 pour chaque τ_j . On assimile c_1 à la translation, c_2 à la courbure et c_3 à la pentification.

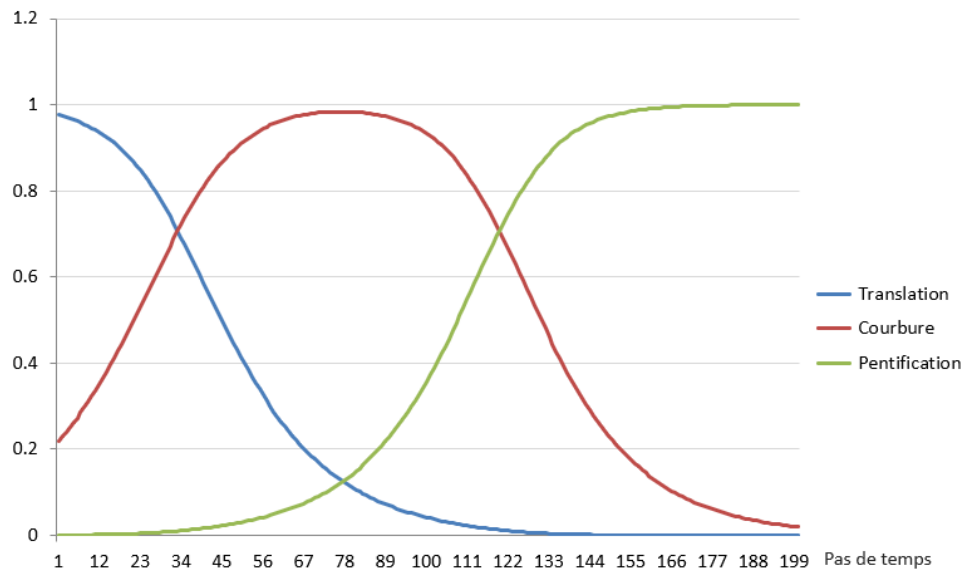


FIGURE 16 – Représentation des facteurs de translation, courbure et pentification

Ces trois facteurs capturent les mouvements principaux de la courbe de taux :

— **Translation :**

La translation capture le mouvement parallèle de toute la courbe de taux. Un changement de translation affecte tous les taux de manière égale, augmentant ou diminuant le niveau général des taux.

— **Courbure :**

La courbure capte les changements de la forme de la courbe de taux. Elle décrit la manière dont les taux à différents termes évoluent de façon non uniforme, créant des concavités ou convexités. Un changement de courbure affecte la différence entre les taux à court terme et à long terme de manière non symétrique.

— **Pentification :**

La pentification capture les variations de la pente de la courbe des taux. Cela représente la différence entre les taux à court terme et à long terme, modifiant la pente de la courbe. Un changement de pentification affecte la courbe de telle manière que les taux à court terme et à long terme bougent dans des directions opposées.

Ces trois facteurs permettent d'influencer différents pas de temps de manière distincte. En effet, les courbes associées à ces facteurs indiquent le poids appliqué à chaque pas de temps. Le facteur de courbure impacte davantage les maturités intermédiaires, créant une bosse ou une vallée dans la courbe des taux. En ajustant le facteur de pentification, on peut se concentrer principalement sur les maturités à long terme, ce qui permet de moduler la pente de la courbe des taux et de mettre en évidence les variations entre les taux courts et longs. Cette approche permet une manipulation fine et ciblée de la courbe des taux en fonction des besoins spécifiques de l'analyse ou de la stratégie financière adoptée.

On peut observer la structure de corrélation inter-forwards obtenue au Q2 2023 :

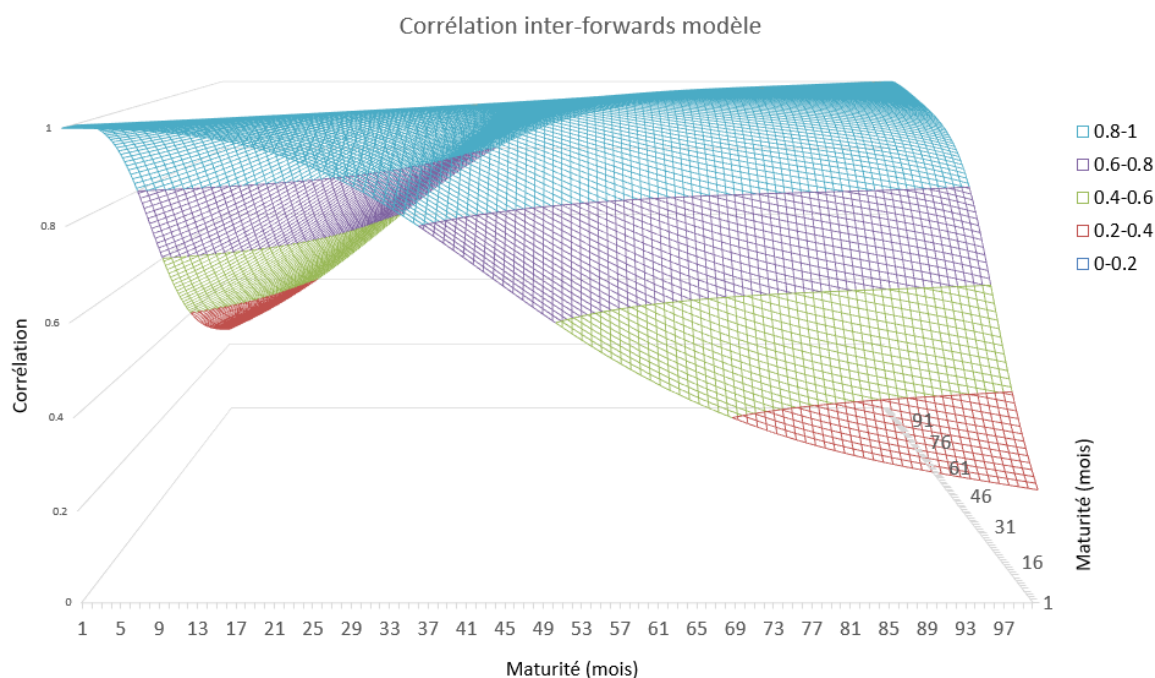


FIGURE 17 – *Corrélation inter-forwards*

8.4 DDLMM taux réels

Pour modéliser les taux réels, le modèle Hull&White initial est remplacé par un modèle de type DDLMM. La valeur cible à calibrer étant l'inflation, déterminée par la différence des taux nominaux et réels selon la formulation suivante : $I(t) = \exp(\int_0^t (n(s) - r(s))ds)$, on cherche à calibrer la différence entre les formules des taux nominaux et réels soit deux DDLMM.

L'objectif de la calibration est donc de s'assurer que la différence entre les formules des taux nominaux et réels reproduit correctement l'inflation observée sur le marché. Cependant, il est important de noter qu'il n'existe pas de formule fermée pour calculer des cap à partir de la différence entre deux modèles de taux DDLMM. La difficulté à obtenir des formules fermées réside dans la nature du modèle DDLMM. En effet, le Libor Market Model est un modèle stochastique régi par une équation différentielle stochastique (EDS) qui inclue des termes de diffusion (volatilité) et de dérive.

$$d\ln(F_k(t)) = \sigma_k(t) \sum_{j=m(t)}^k \frac{\tau_j F_j(t) \sigma_j(t) \rho_{j,k}}{1 + \tau_j F_j(t)} dt - \frac{\sigma_k^2(t)}{2} dt + \sigma_k(t) F_k(t) dZ_k(t)$$

Les formules fermées existent lorsque des solutions des EDS peuvent être exprimées explicitement en termes de fonctions connues. Dans le cas des DDLMM, les interactions entre les termes de dérive et de volatilité des deux modèles rendent ces solutions analytiques impraticables : les équations résultantes de la différences de deux DDLMM impliquent des intégrales stochastiques et des interactions non linéaires complexes. Les termes de volatilité et de dérive ne se soustraient pas simplement en raison des dépendances complexes et des corrélations possibles entre les modèles. Par exemple, les termes de volatilité impliquent des intégrales stochastiques dont la solution analytique est souvent impossible à obtenir sans simplifications drastiques. De plus, les corrélations croisées entre les processus stochastiques des deux DDLMM augmentent encore la complexité.

Pour déterminer les paramètres du shift et de la volatilité du DDLMM pour les taux réels, une solution alternative a été mise en place. Cette méthode repose sur l'implémentation de deux boucles distinctes : une pour les paramètres de volatilité et une autre pour les paramètres de corrélation.

La forme de la volatilité reste inchangée par rapport au modèle des taux nominaux :

$$\sigma_i^{real}(t) = \phi^{real}(t) \times ([b^{real}(T_{i-1} - t) + a^{real}] * e^{-c^{real}(T_{i-1}-t)} + d^{real})$$

La boucle sur les corrélations concernera les corrélations entre les trois facteurs c_1 , c_2 et c_3 (translation, courbure et pentification).

Quant aux paramètres du *shift*, ils seront fixés identiques à ceux des taux nominaux.

8.4.1 Boucles de calibration

Afin de pouvoir tester l'influence des paramètres a, b, c et d et des facteurs de corrélations entre les taux nominaux et réels, des boucles d'optimisation sont intégrées dans le GSE.

Boucle sur les paramètres

La première boucle concerne les paramètres de la volatilité du modèle DDLMM des taux réels. Pour rappel, cette volatilité est de la forme suivante :

$$\sigma_k(t) = \phi_t \times ([b (T_{k-1} - t) + a] e^{-c(T_{k-1}-t)} + d)$$

Elle se trouve sous cette forme dans le GSE :

Boucle param inflation				
Paramètre de vol	Valeur	Min	Max	Pas
a	0.0%	0.0%	10.1%	2.0%
b	0.0%	0.0%	10.1%	2.0%
c	10.0%	0.0%	10.1%	2.0%
d	8.0%	0.0%	10.1%	2.0%

FIGURE 18 – Boucle sur les paramètres de volatilité du modèle DDLMM de taux réels

Au lancement du GSE, un interrupteur permet de choisir si la boucle sur les paramètres est lancée ou non. Lorsqu'elle n'est pas lancée, le générateur utilise les valeurs fixes de la colonne "Valeur".

Pour chaque passage dans la boucle, on trouve en sortie dans un onglet GSE les valeurs suivantes :

- Valeur des paramètres a , b , c , d
- Pricing des Cap inflation 1,5, 10, 20, 40 ans
- Erreur quadratique sur les pricings 1, 5, 10, 20, 40 ans par rapport aux prix observés sur le marché
- Erreur quadratique globale sur les pricings

Boucle sur les corrélations

Boucle corrélations			
CORRELATION	min	max	pas
tr1/tn1	40%	40%	10%
tr1tn2	0%	0%	100%
tr1/tn3	0%	0%	100%
tr2/tn1	0%	0%	100%
tr2/tn2	100%	100%	100%
tr2/tn3	0%	0%	100%
tr3/tn1	0%	0%	100%
tr3/tn2	0%	0%	100%
tr3/tn3	100%	100%	100%

FIGURE 19 – Boucle sur les corrélations entre les différents facteurs des modèles de taux réels et nominaux

Pour chaque valeur testée de paramètre de volatilité ou de corrélation, on retrouve également en sortie :

- Valeur des corrélations entre les différents facteurs 1, 2 et 3 du modèle de taux nominaux et du modèle de taux réels
- Pricing des Cap inflation 1, 5, 10, 20, 40 ans
- Erreur quadratique sur les pricings 1, 5, 10, 20, 40 ans par rapport aux prix observés sur le marché
- Erreur quadratique globale sur les pricings

Corrélation historique

Pour chaque passage dans une boucle, le GSE affiche également en sortie la corrélation entre le taux ZC 1 an et le taux réel 1 an obtenus par Monte Carlo. Le but est de vérifier que la corrélation obtenue avec les paramètres testée est cohérente avec la corrélation historique cible. Un seuil d'erreur relative par rapport à la corrélation cible a été fixé en interne.

8.4.2 Gestion du *shift*

Le principal avantage d'introduire un *shift* dans le modèle DDLMM est de permettre la modélisation correcte des taux d'intérêt. Sans *shift*, les modèles de diffusion peuvent produire des résultats économiquement incohérents, notamment lors d'un contexte de taux bas ou négatifs.

Dans un premier temps, nous avons exploré la possibilité d'ajuster le *shift*, en parallèle des boucles sur les paramètres de volatilité et de corrélation. Cependant, cette approche a considérablement accru la complexité du générateur de scénarios économiques, nécessitant des algorithmes coûteux en termes de temps de calcul.

De plus, en modifiant le *shift* des taux réels par rapport à celui des taux nominaux, les distributions de ces deux variables se différencient. Cette divergence rend plus compliquée la gestion de la différence des deux taux. Or, pour rappel, l'objectif est de calibrer la différence entre les taux nominaux et les taux réels pour qu'elle puisse reproduire l'inflation observée sur le marché.

Afin d'optimiser l'efficacité, nous avons décidé d'utiliser le même *shift* pour les taux nominaux et les taux réels, en adoptant celui des taux nominaux, dont la calibration a été détaillée précédemment en 8.3.2. Cette approche permet de maintenir une certaine stabilité dans la structure des deux courbes de taux, ce qui facilite grandement la calibration de leur différence. En utilisant un *shift* uniforme, nous simplifions les calculs tout en assurant une cohérence entre les distributions des taux nominaux et réels.

9 Convergence de la courbe initiale

Précédemment, la courbe initiale d'inflation était obtenue par interpolation cubique des taux d'inflation zéro-coupon observés. Au deuxième trimestre de 2023, cette courbe convergait à 3% sur une période de 30 ans, demeurant stable au-delà (en l'absence d'informations supplémentaires, l'interpolation cubique extrapole en utilisant la dernière valeur observée pour les maturités supérieures à la dernière maturité observée).

Les données utilisées pour obtenir la courbe des taux d'inflation initiale sont les suivantes :

ticker	Maturité	ZC inflation
FRSWI1 Curncy	1	2.62
FRSWI2 Curncy	2	2.60
FRSWI3 Curncy	3	2.64
FRSWI4 Curncy	4	2.67
FRSWI5 Curncy	5	2.70
FRSWI6 Curncy	6	2.72
FRSWI7 Curncy	7	2.73
FRSWI8 Curncy	8	2.74
FRSWI9 Curncy	9	2.75
FRSWI10 Curncy	10	2.77
FRSWI15 Curncy	15	2.83
FRSWI30 Curncy	30	2.98

FIGURE 20 – Données en input pour la construction de la courbe d'inflation

Il est essentiel de prendre en considération le caractère peu liquide des caps inflation de maturité 30 ans. Les caps inflation à long terme peuvent être sujets à une liquidité limitée sur le marché, ce qui pose des défis dans l'estimation précise des prix et des volatilités nécessaires à l'élaboration de scénarios économiques réalistes.

9.1 Construction

L'idée est d'interpoler et d'extrapoler une courbe d'inflation à partir de données discrètes issues du marché.

9.1.1 Méthode de Smith-Wilson

La nouvelle courbe initiale est obtenue avec la méthode de Smith-Wilson. Cette méthode permet simultanément l'interpolation et l'extrapolation de taux. Dans un but d'interpolation, la méthode recherche l'ajustement parfait à toutes les données de marché observées tout en garantissant le caractère le plus lisse possible à la courbe. Les taux à long terme, qui eux ne sont pas observables, sont extrapolés à partir du dernier point liquide disponible (Last Liquid Point ou LLP) vers un taux ultime que l'on renseigne en entrée de l'algorithme (l'UFR pour *Ultimate Forward Rate*), en utilisant les taux de marché liquides dont la maturité est inférieure au LLP. Cette méthode est utilisée par l'EIOPA pour la construction de la courbe des taux sans risque.

9.1.2 Paramètres

A partir de 15 ans, un objectif de convergence vers un taux ultime de 2% est mis en oeuvre afin de s'aligner avec la cible d'inflation long terme de la BCE.

L'horizon de 15 ans a été fixé suivant l'existence des obligations indexées sur l'inflation. Début 2024, les OAT indexées sur l'inflation (OATi) émises par l'Etat français sont :

Echéance	Taux	Encours (€)
1 mars 2025	0.1%	12 793 000 000
1 mars 2028	0.1%	15 859 000 000
1 mars 2029	3.4%	9 781 144 000
1 mars 2032	0.1%	6 663 000 000
1 mars 2036	0.1%	9 133 000 000

TABLE 2 – OATi émises par l'Etat français

Les OATi émises par l'Etat français ont pour échéance maximale 2036, soit 12 ans début 2024. Le début de la convergence a alors été fixé à 15 ans, seuil à partir duquel il semble raisonnable de considérer les produits indexés sur l'inflation française comme peu liquides.

On renseigne également une vitesse de convergence α . Celle-ci est obtenue par optimisation en utilisant l'algorithme de l'EIOPA. Il s'agit de la plus petite valeur avec une précision de 6 décimales telle que le taux forward instantané vérifie : $|\ln(1 + UFR) - f(0, T)| < 10^{-4}$ où T est le point de convergence.

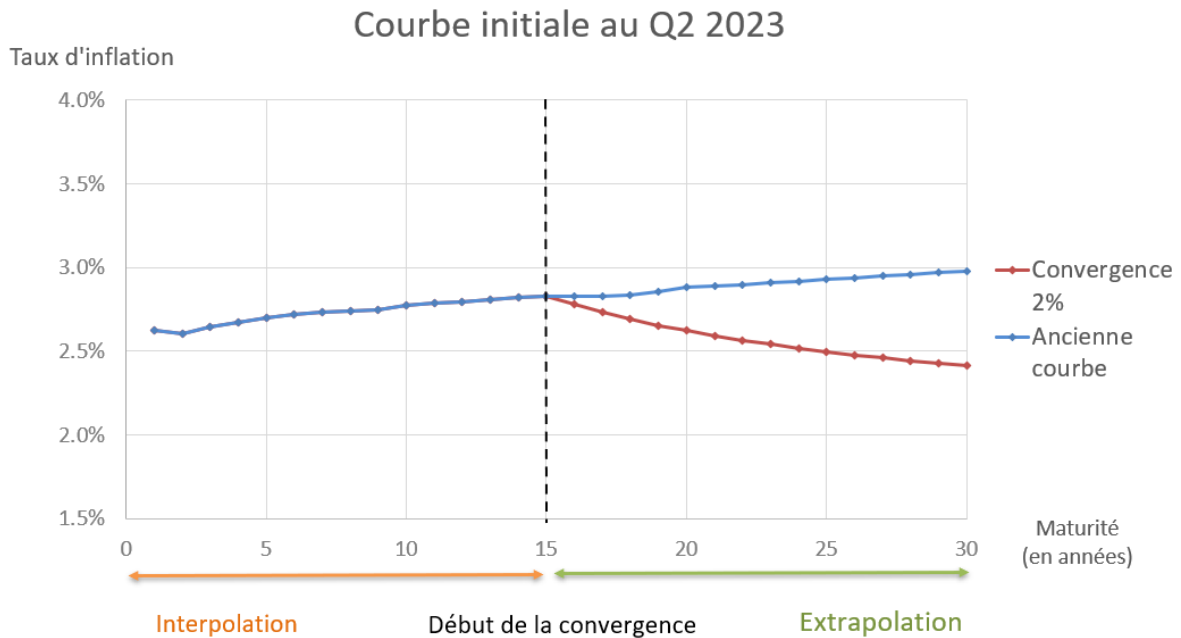


FIGURE 21 – Méthode de construction de la courbe initiale

10 Test Market-Consistent

Pour rappel, le cadre réglementaire de Solvabilité 2 impose que :

"Le calcul des provisions techniques utilise, en étant cohérent avec elles, les informations fournies par les marchés financiers et les données généralement disponibles sur les risques de souscription (cohérence avec le marché)." (article 76)

Avec la nouvelle formulation, la valorisation des Cap inflation est cohérente avec leur valeur de marché sur les maturités liquides :

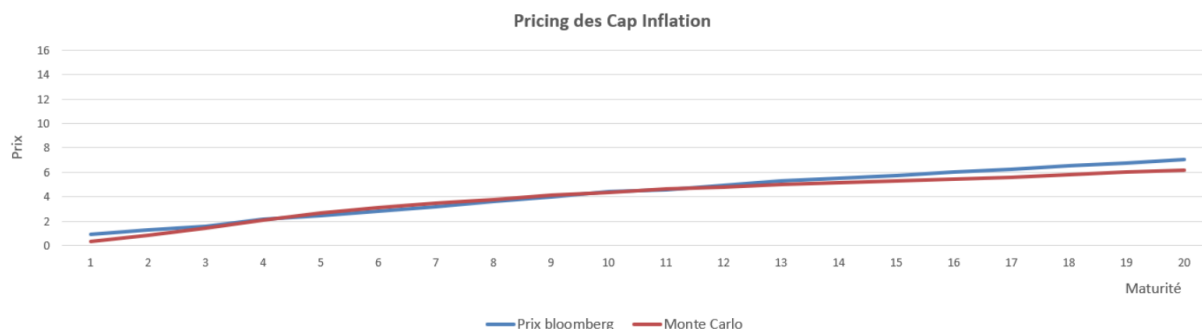


FIGURE 22 – Pricing des cap inflation avec le nouveau modèle

Le nouveau modèle respecte donc le critère de *market-consistency*, dépassant ainsi les limites de l'ancien modèle et permet ainsi une meilleure estimation du risque lié aux frais et aux fluctuations de marché des obligations indexées inflation au sein du calcul du Best Estimate.

11 Test de martingalité

Les tables générées comportent 2000 scénarios. Le pas de temps de l'actif est mensuel. L'horizon de projection est de 40 ans.

Le test de martingalité pour l'inflation vérifie l'égalité :

$$\mathbb{E}[D_t I_t] = P_r(0, t)$$

Où $P_r(0, t)$ est la valeur en 0 d'une obligation zéro-coupon réelle de maturité t et I_t est l'inflation en t .

Ce test vérifie que, en moyenne, le prix de l'actif actualisé est compris dans l'intervalle de confiance bilatéral pour un seuil de confiance de 5%. Avec cette nouvelle formulation, le test de martingalité d'inflation réalisé sur les tables de sortie est validé :

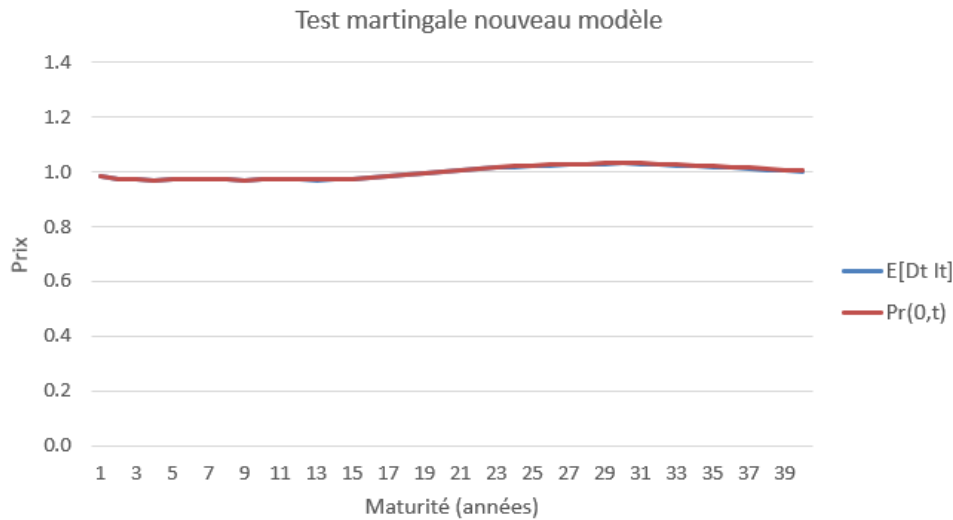


FIGURE 23 – Test de martingalité du nouveau modèle

Ce test a été réalisé à quatre autres dates afin de valider la pertinence du modèle.

Rappel : La martingalité, vérifiée par les tests suivants, implique que les prix projetés actualisés convergent vers leur valeur initiale. Cette propriété est une condition nécessaire pour la cohérence du modèle avec les marchés.

Remarque sur le test de martingalité de l'inflation :

Comme évoqué précédemment, le test de martingalité de l'inflation ne constitue pas à proprement parler un test statistique, mais plutôt une vérification visuelle de la cohérence entre les valeurs simulées et les valeurs réelles. Une piste d'amélioration consisterait à formaliser cette validation en intégrant un véritable test statistique, avec la définition d'un seuil d'acceptabilité, permettant ainsi de valider de manière plus rigoureuse le test de martingalité, en remplacement de la vérification actuelle sur les sorties du GSE.

Conclusion

Le choix méthodologique s'est orienté vers un modèle capable de s'adapter aux spécificités du cadre réglementaire tout en offrant une flexibilité suffisante pour répondre aux défis posés par un environnement économique incertain.

La calibration effectuée permet d'assurer une cohérence avec les données de marché, ce qui est fondamental pour garantir la fiabilité des projections futures. Cette partie ouvre ainsi la voie à l'évaluation des performances du modèle, tout en soulignant l'importance de choix rigoureux dans la modélisation pour répondre aux exigences réglementaires et opérationnelles.

Troisième partie

Résultats et impact

La troisième partie du mémoire se focalise sur l'analyse des résultats issus de l'implémentation du modèle d'inflation. Il s'agit ici d'évaluer l'impact de ce modèle sur la valorisation des passifs d'assurance vie, ainsi que sa capacité à se conformer aux exigences de Solvabilité II.

En outre, cette section examine la manière dont le modèle réagit à des conditions de marché changeantes, un aspect crucial pour garantir la robustesse et la résilience du modèle face à des environnements économiques volatils. L'objectif est d'analyser la pertinence et la performance du modèle dans divers scénarios économiques, afin de s'assurer qu'il répond aux attentes en matière de gestion des risques et de stabilité financière.

12 Pricing

12.1 Market-consistency

Pour rappel, le défaut du précédent modèle résidait dans son incapacité à répliquer les prix de marché des Cap inflation sur les maturités inférieures à 10 ans, invalidant donc la propriété de *market consistency*, exigée par le cadre réglementaire de Solvabilité 2 et diminuant la qualité d'estimation du Best Estimate.

Au 2^{ème} trimestre de 2023, on avait :

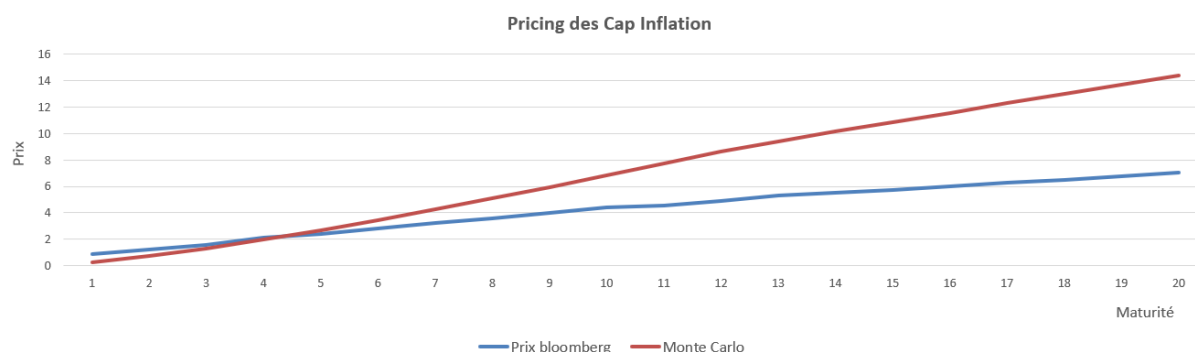


FIGURE 24 – Pricing des cap inflation au Q2 2023 avec l'ancien modèle

Avec le nouveau modèle et après estimation des meilleurs paramètres à la même date, on a :

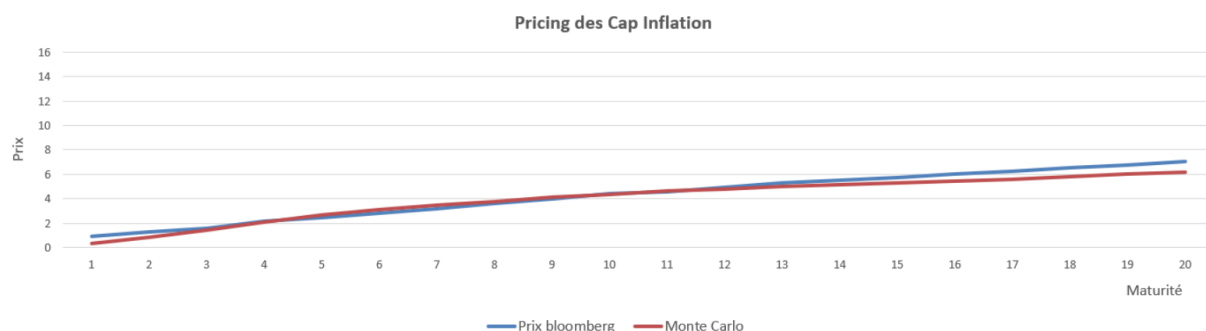


FIGURE 25 – Pricing des cap inflation au Q2 2023 avec le nouveau modèle

Le nouveau modèle réplique de manière plus précise les valeurs des prix de cap inflation osbervés sur le marché, satisfaisant alors le critère de *market consistency*.

12.2 Répartition des valeurs d'inflation

Afin d'observer l'impact des évolutions sur la distribution de l'inflation, on peut observer l'évolution de la répartition de l'indice inflation annuel calculé par l'ancien modèle (**off**), puis après l'ajout du modèle DDLMM pour la modélisation des taux réels (**lmm**) et après ajout de la convergence de la courbe initiale vers 2% (**cv**) :

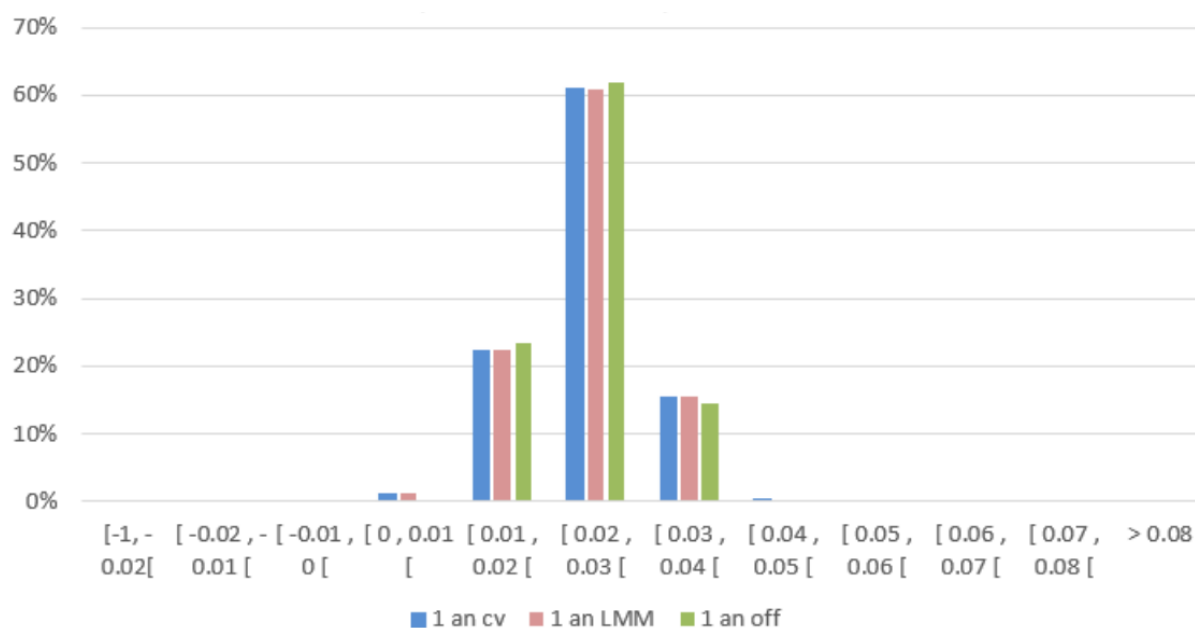


FIGURE 26 – Répartition de l'indice inflation 1 an

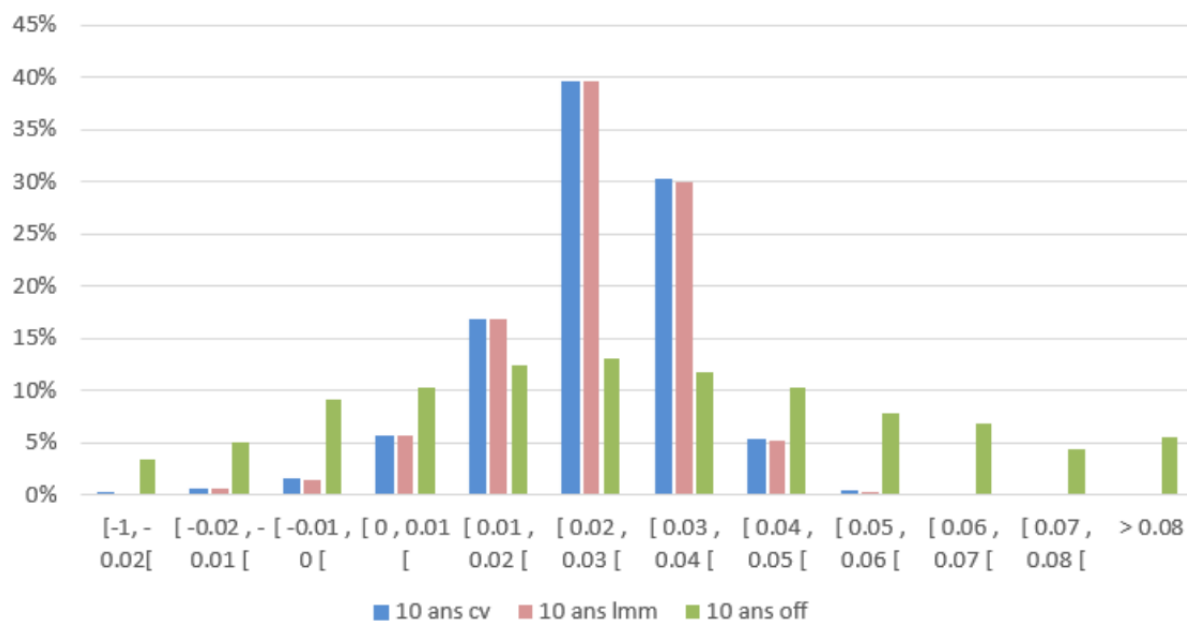


FIGURE 27 – Répartition de l'indice inflation 10 ans

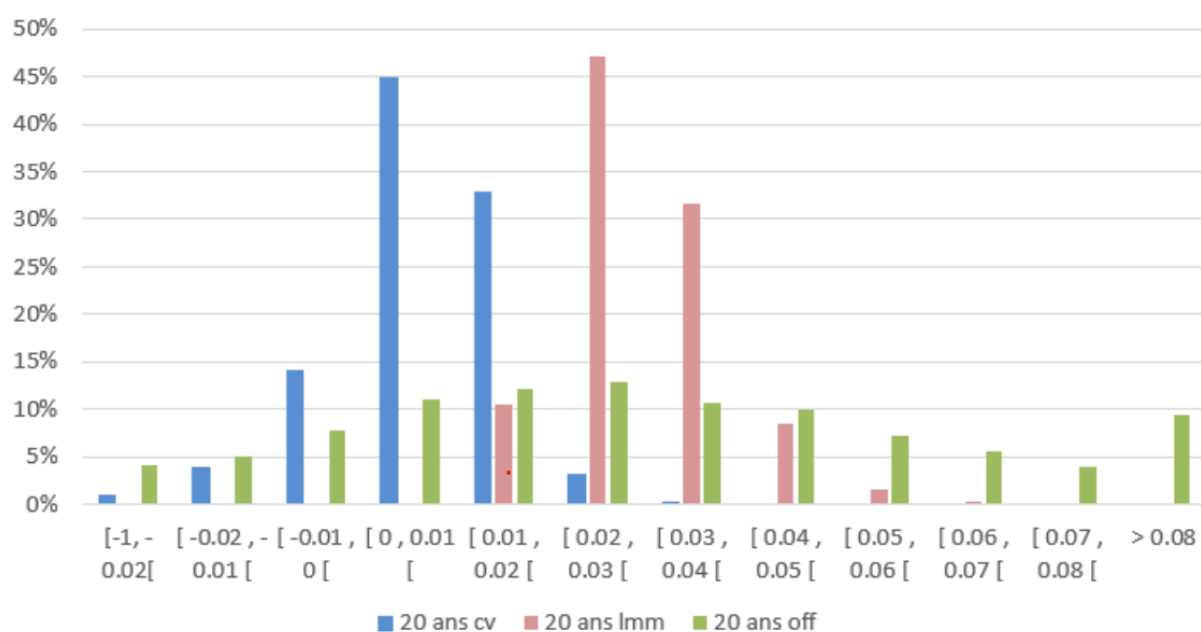


FIGURE 28 – Répartition de l'indice inflation 20 ans

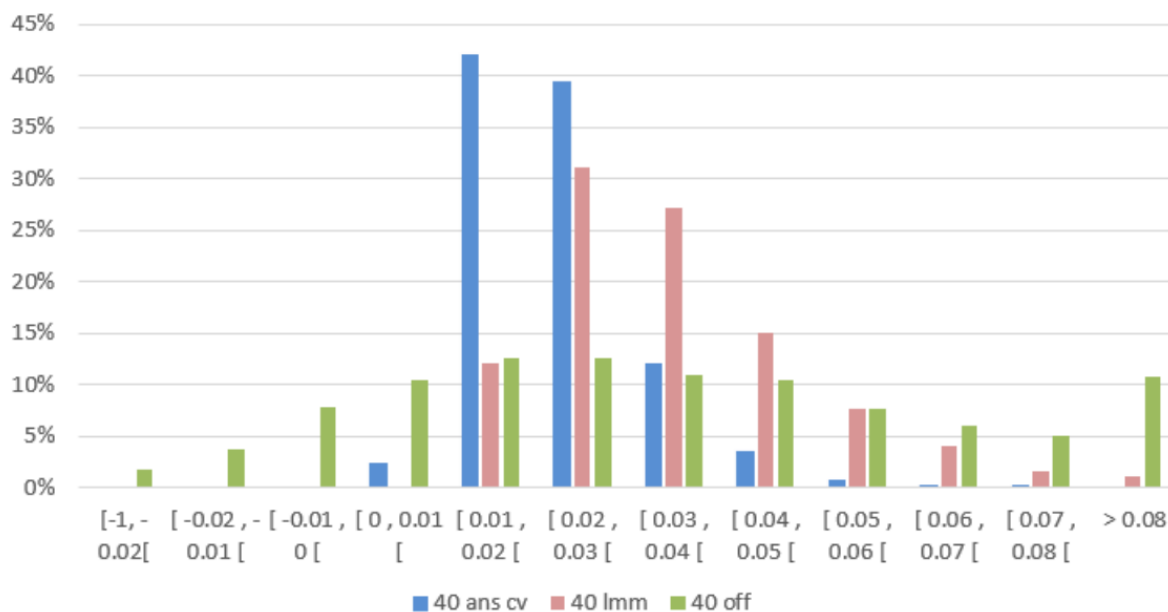


FIGURE 29 – Répartition de l'indice inflation 40 ans

On observe que les deux évolutions ont permis de maîtriser les valeurs d'inflation annuelle estimées par le modèle et d'obtenir des valeurs plus cohérentes qu'avec l'ancien modèle.

La disparition des valeurs extrêmes projetées par l'ancien modèle permet de résoudre des problèmes de lancement du modèle, qui étaient liés aux valeurs aberrantes d'inflation entrées dans le modèle.

Cette stabilité des projections inflationnistes est un atout essentiel pour la gestion des passifs à long terme, particulièrement dans l'assurance vie où les engagements peuvent s'étendre sur plusieurs décennies. En assurant une meilleure prévisibilité des scénarios à long terme, les compagnies peuvent plus sereinement ajuster leurs réserves, ce qui est crucial pour les décisions stratégiques d'investissement dans un contexte économique incertain.

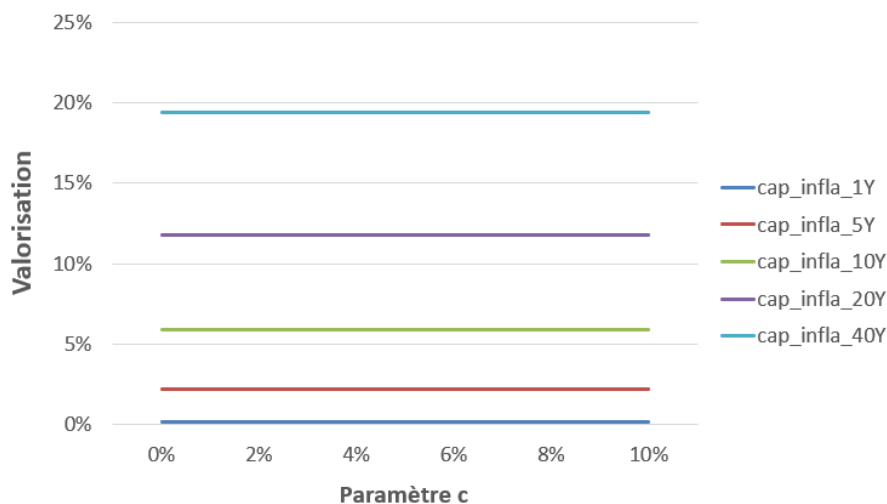
13 Maîtrise du modèle

A une date donnée, on peut observer l'influence de chaque paramètre a, b, c et d de la volatilité du modèle LMM shifté des taux réels et de chaque valeur des différents facteurs de corrélation entre les taux nominaux et les taux réels.

Pour rappel, la forme de volatilité retenue est la suivante :

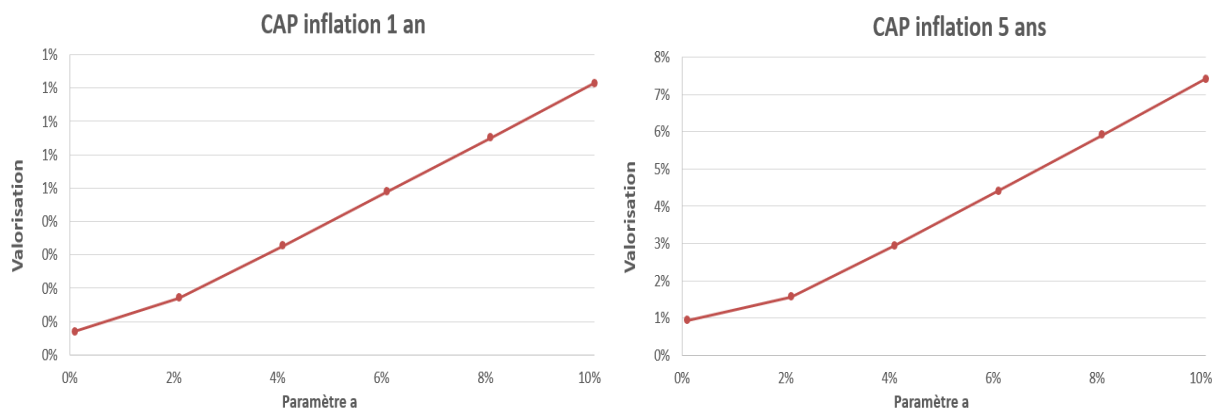
$$\sigma_k(t) = \phi_t \times ([b (T_{k-1} - t) + a] e^{-c(T_{k-1}-t)} + d)$$

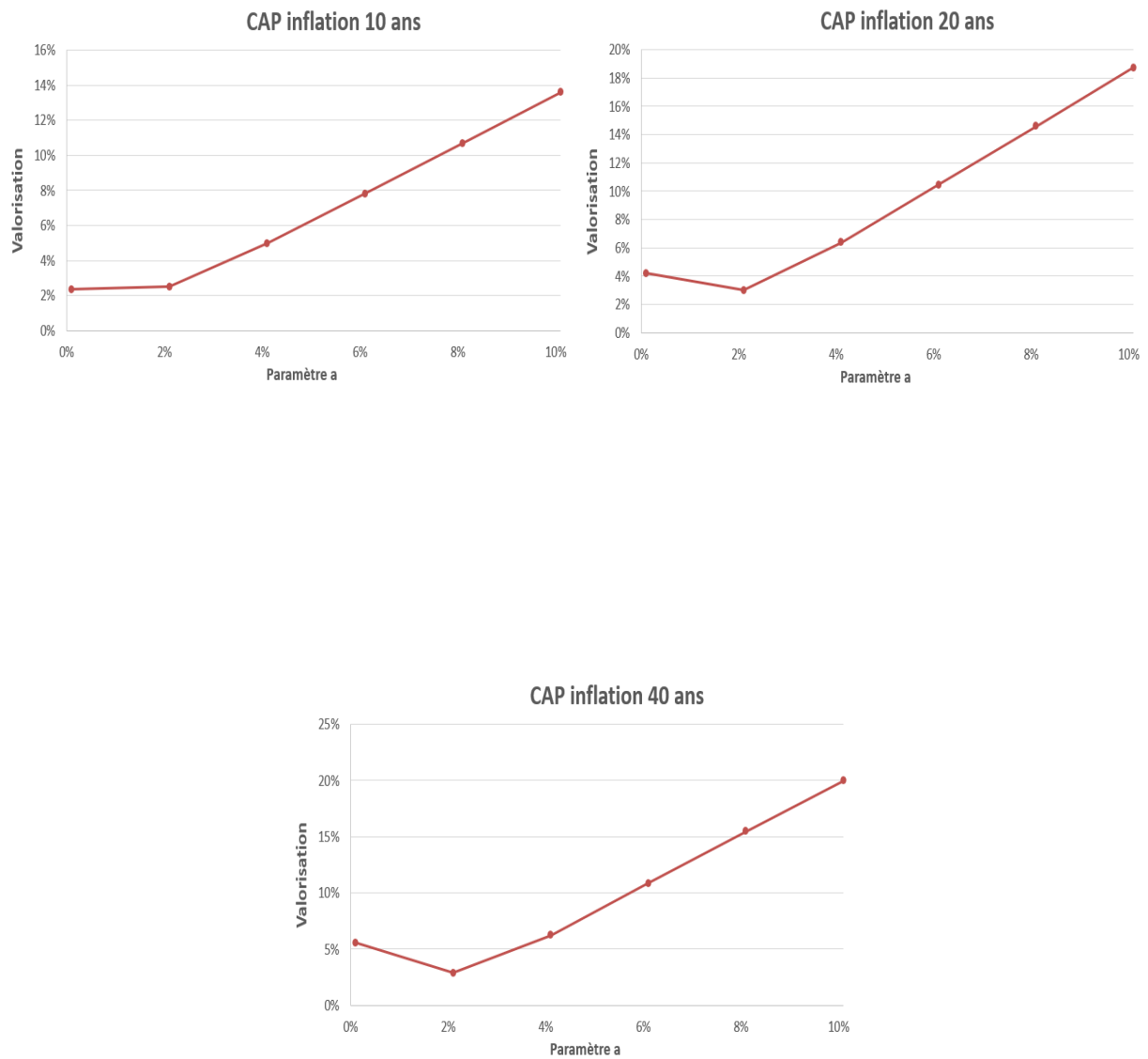
Cette forme de volatilité implique que, lorsque les paramètres a et b sont tous deux nuls, le paramètre c n'a pas d'influence sur la volatilité et donc sur la valorisation du cap inflation. C'est bien ce qu'on observe dans nos sorties en fixant $a = b = d = 0$:



En lançant une boucle sur différentes valeurs de chaque paramètre, on peut alors observer l'influence de chacun.

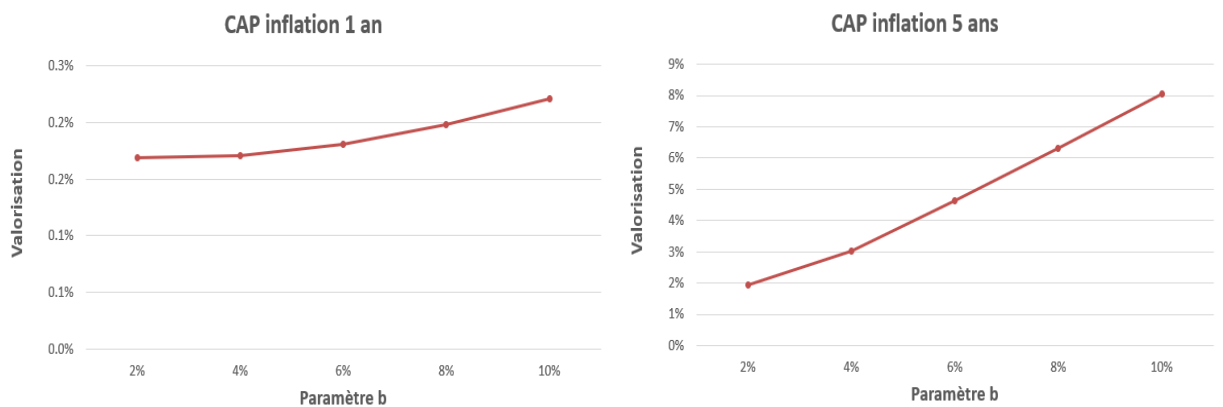
13.0.1 Paramètre a

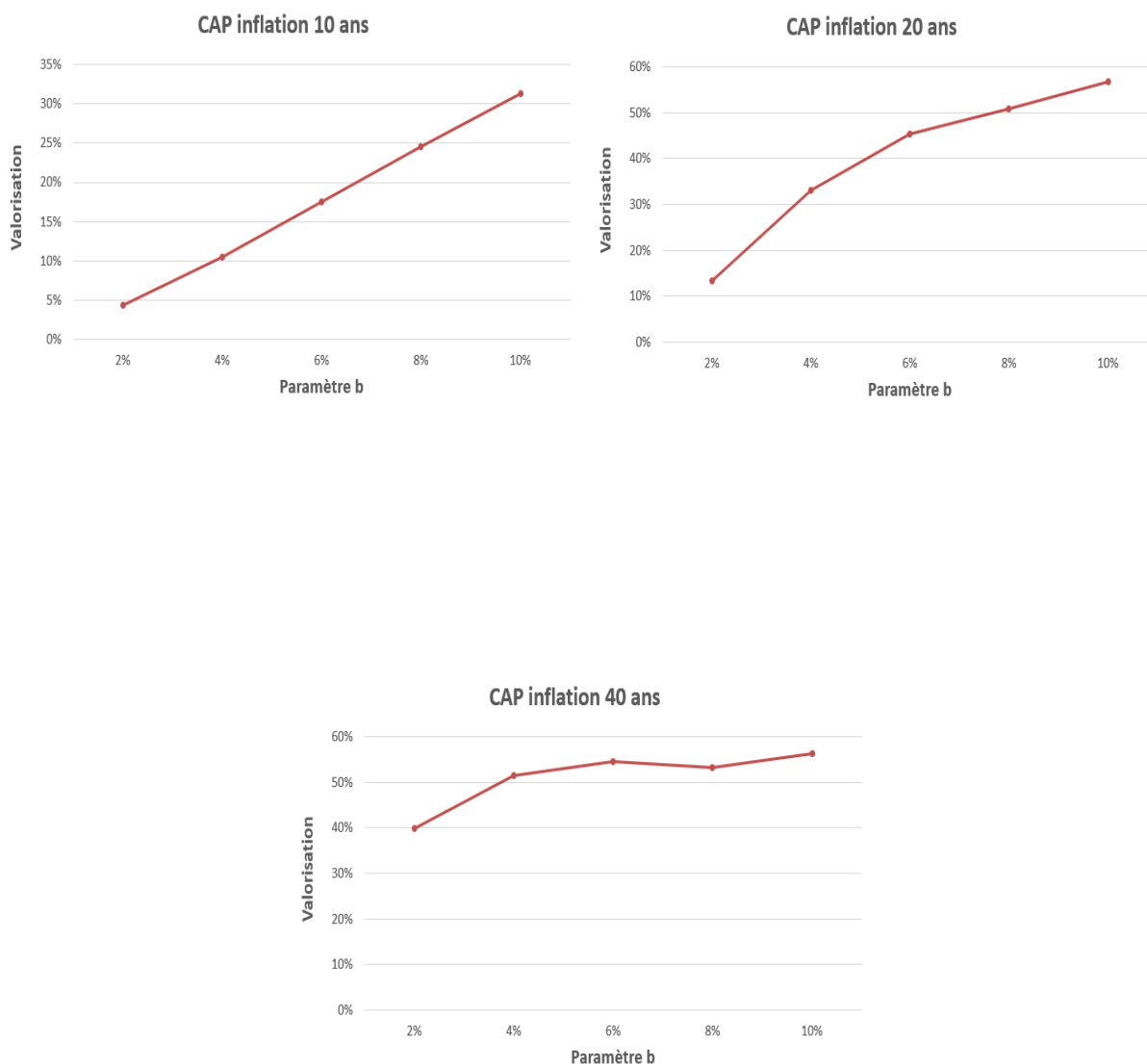




13.0.2 Paramètre b

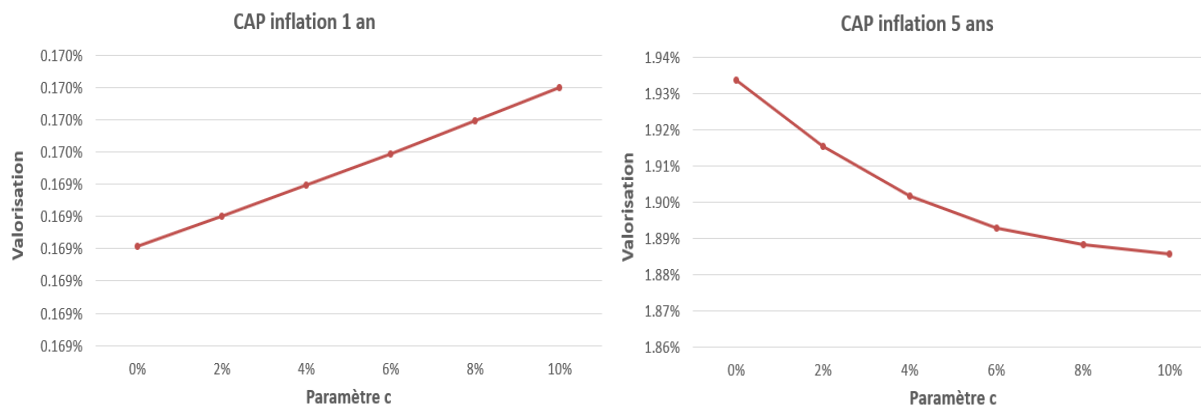
En fixant $a = c = d = 0$, on observe l'influence du paramètre b sur la valorisation des Cap inflation :

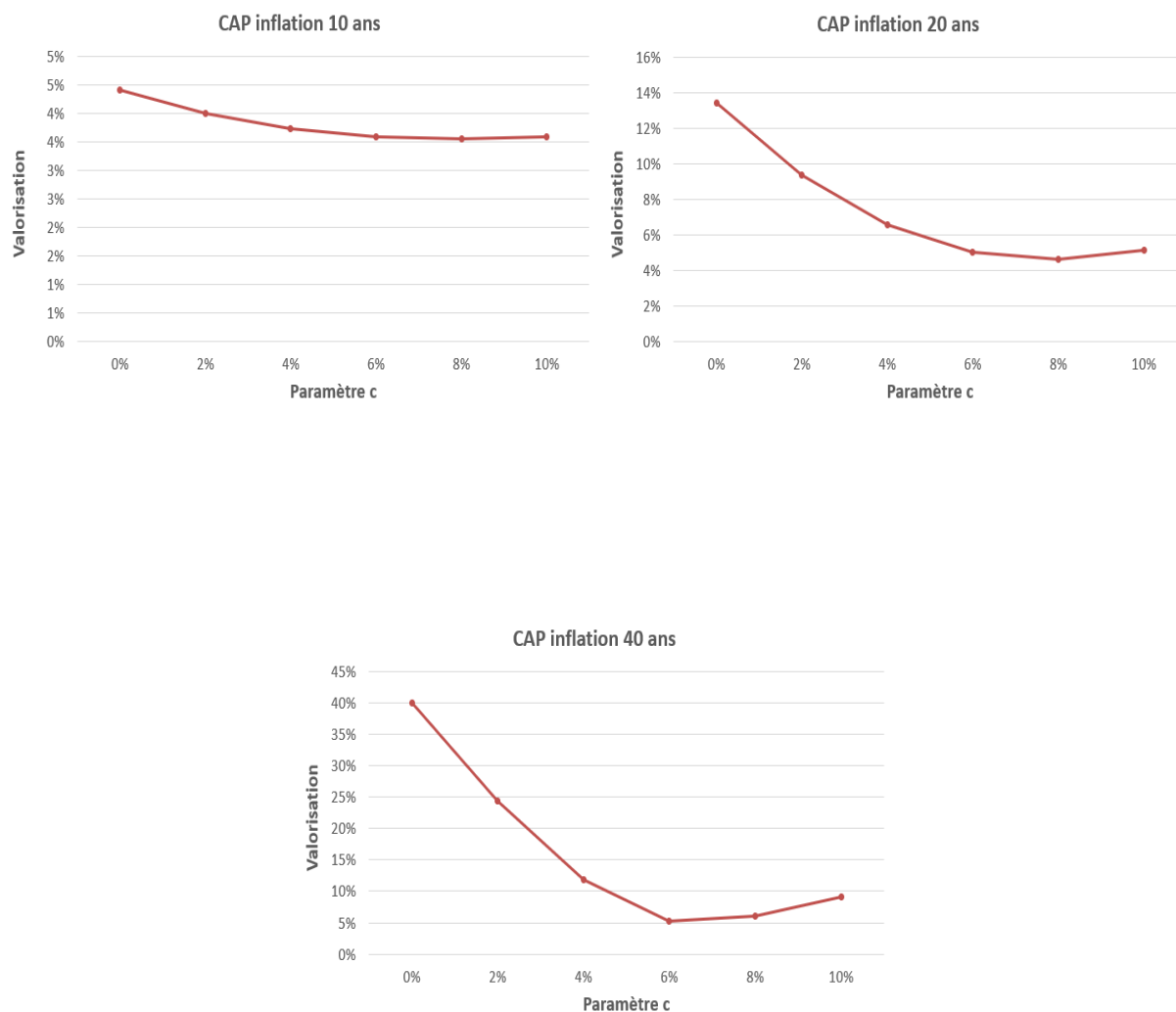




13.0.3 Paramètre c

En fixant $a = 0$, $b = 2\%$ (on a vu précédemment que si $a = b = 0$ la valorisation des CAP inflation ne dépend pas de c en raison de la forme de volatilité adoptée) et $d = 0\%$, on a les variations suivantes :

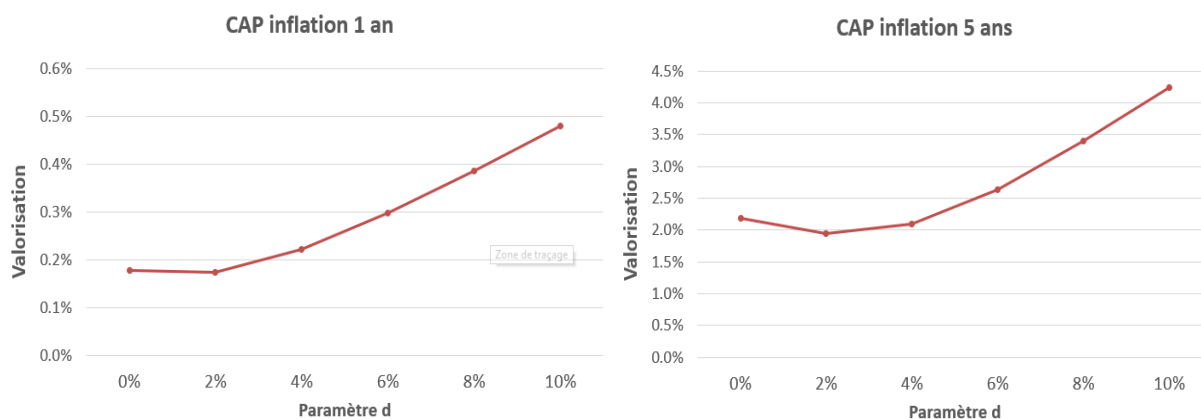


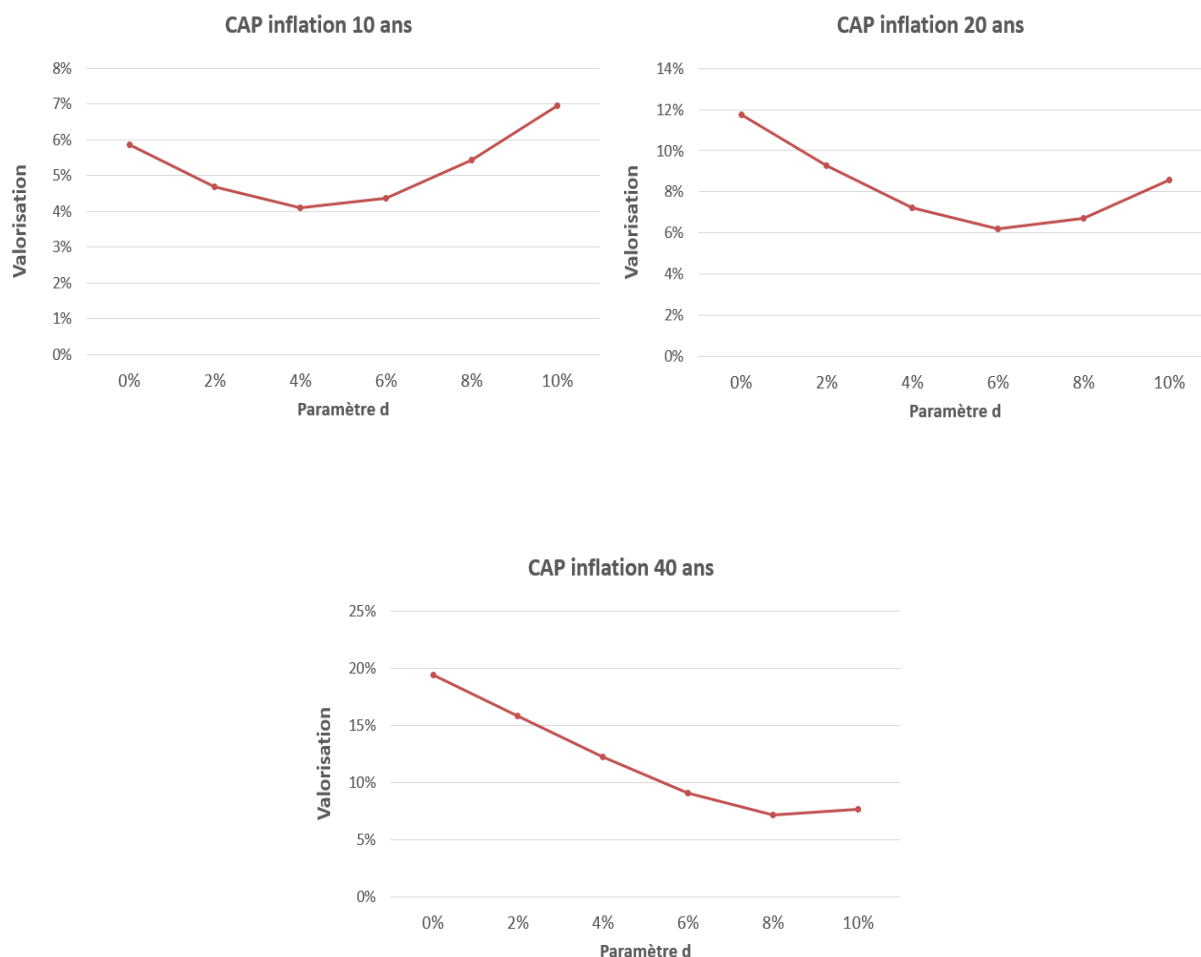


Le paramètre c a tendance à faire fortement diminuer la valorisation sur les CAP de maturités élevées.

13.0.4 Paramètre d

En fixant les paramètres a, b, c à 0 et en faisant varier le paramètre d entre 0 et 10%, on peut observer son influence sur la valeur des CAP inflation 1 an, 5 ans, 10 ans, 20 ans et 40 ans.





13.0.5 Résumé des impacts

On peut donc résumer l'impact de l'augmentation individuelle de chaque paramètre dans le tableau suivant :

Augmentation du paramètre (entre 0% et 10%)	CAP 1 an	CAP 10 ans	CAP 20 ans	CAP 40 ans
a	↗	↗	↗	↗
b	↗	↗	↗	↗
c	↗	↘	↘	↘
d	↗	Pas monotone	Pas monotone	↘

Des essais analogues ont été menés pour évaluer l'impact d'une modification simultanée de plusieurs paramètres. Cependant, les résultats obtenus se sont révélés non concluants par rapport aux objectifs de calibration.

14 Changement de condition de marché

Dans le cadre de l'ORSA du 31/12/2023, le processus a été effectué avec le nouveau modèle, permettant ainsi de tester sa capacité à répliquer les prix des cap inflation dans des scénarios différents. Pour la mise en oeuvre de l'ORSA, un ensemble de sept jeux de scénarios économiques sont générés :

- Scénario central : Les indicateurs économiques sont gardés constant de la date d'inventaire considérée jusqu'aux différentes dates d'évaluation du ratio de solvabilité, et le bilan est vieilli de la date d'inventaire jusqu'aux dates d'évaluation selon un business plan défini.
- Scénario "Sextuple hit" : Spreads et indices action subissent différents chocs entre la date d'inventaire et la date d'évaluation du ratio. Un choc de rachat massif aux dates d'évaluation et une surmortalité constante par rapport au scénario central sont également appliqués. Le bilan est vieilli de la date d'inventaire jusqu'aux dates d'évaluation selon un business plan défini pour ce scénario.
- Scénario "Low for long" : Taux, spreads et indices action subissent différents chocs entre la date d'inventaire et la date d'évaluation du ratio. Un choc de rachat massif aux dates d'évaluation et une surmortalité constante par rapport au scénario central sont également appliqués. Le bilan est vieilli de la date d'inventaire jusqu'aux dates d'évaluation selon un business plan défini pour ce scénario.

En plus des scénarios ORSA décrits supra, sont également à évaluer :

- Le besoin global de solvabilité
- Le besoin global de solvabilité « souverain »
- L'impact d'un choc climatique (risque de transition)

Les stress sur les taux sont prévus d'une part sur l'ajustement pour volatilité et d'autre part sur les taux sans risque 5 ans et 10 ans de la courbe des taux initiale d'évaluation.

Le test du nouveau modèle dans des scénarios économiques particulièrement adverses révèle une robustesse accrue face aux chocs. Le modèle préserve une cohérence de ses projections même lorsque les paramètres inflationnistes subissent des variations extrêmes. Cette capacité à maintenir une fiabilité des estimations malgré des conditions macroéconomiques instables permet aux compagnies d'assurance de mieux se préparer aux crises financières futures.

15 Résultats Solvabilité 2

15.1 Impact sur les frais et le ratio

Pour estimer l'impact de l'évolution du modèle, les études réalisées au deuxième trimestre de 2023 ont été reproduites avec le nouveau modèle. Il est notamment possible d'observer les valeurs d'inflation générées avec le nouveau modèle par rapport à celles du modèle initial, à date et contexte identique.

Un scénario stochastique pour lequel les projections d'inflation étaient anormalement élevées a été étudié. Ce scénario engendrait notamment des frais très importants, qui étaient source d'erreurs de compilation dans le modèle de projection.

Les valeurs d'inflation sur les 2000 scénarios sont également contenues dans un spectre de valeurs plus restreint qu'avec le précédent modèle :

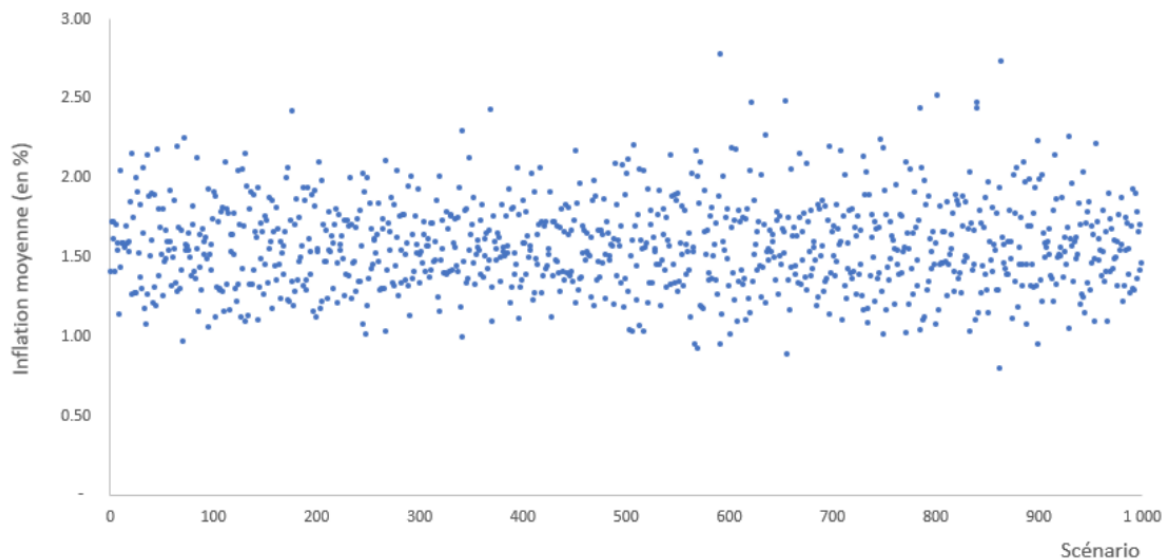


FIGURE 30 – Inflation moyenne par pas de temps (nouveau modèle)

En effet, on avait les valeurs suivantes avec l'ancien modèle :

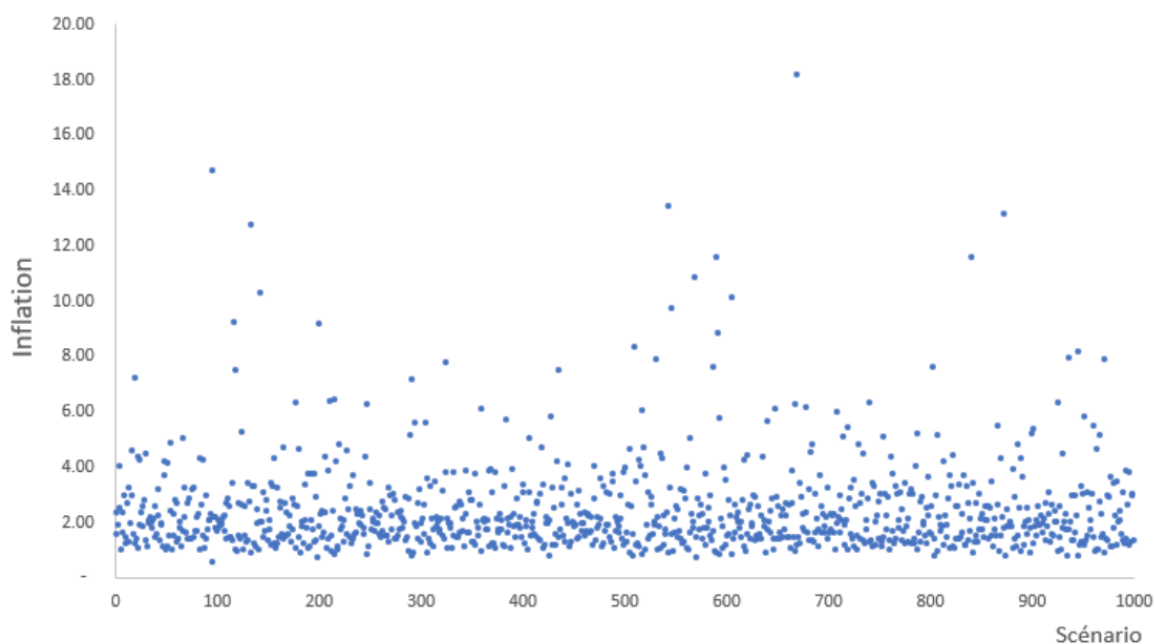


FIGURE 31 – Inflation moyenne par pas de temps (ancien modèle)

Avec le nouveau modèle, sur un scénario identique, les valeurs d'inflation sont maîtrisées :

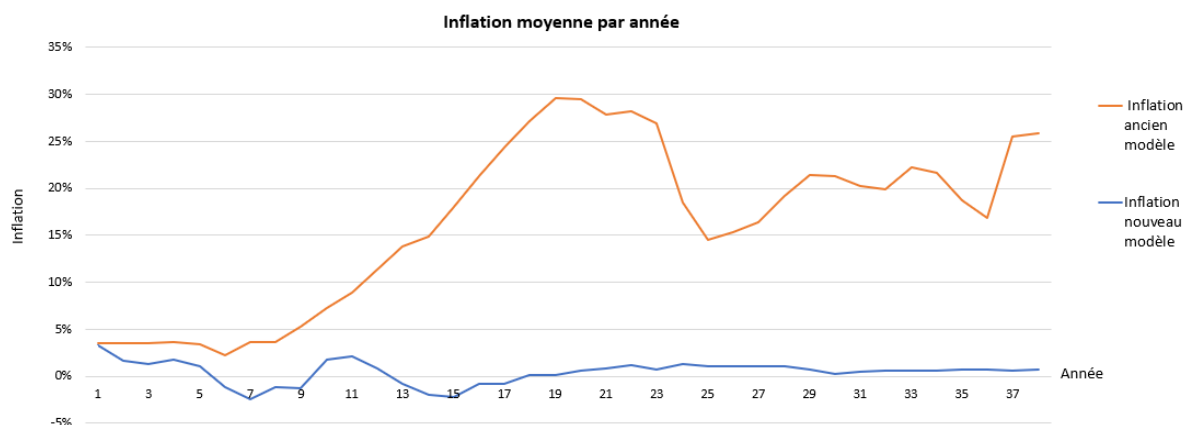


FIGURE 32 – Comparaison de l'inflation pour le nouveau et l'ancien modèle sur un scénario identique

15.1.1 Compte administratif

Le résultat administratif désigne le solde des recettes et des charges liées à l'administration des contrats d'assurance, comme la gestion des primes, des charges financières, des commissions, des frais de gestion, des taxes, etc.

Il se calcule comme le solde des chargements diminué des frais administratifs :

Les chargements correspondent aux chargements prélevés sur les primes versées par les assurés au titre de la gestion des contrats.

Les frais administratifs incluent les éléments suivants du compte de résultat :

- Frais d'acquisition,
- Frais d'administration,
- Autres charges

Sur le même scénario que pour la comparaison d'inflation moyenne par année présentée ci-dessus, les valeurs du résultat administratif sont moins volatiles avec le nouveau modèle.

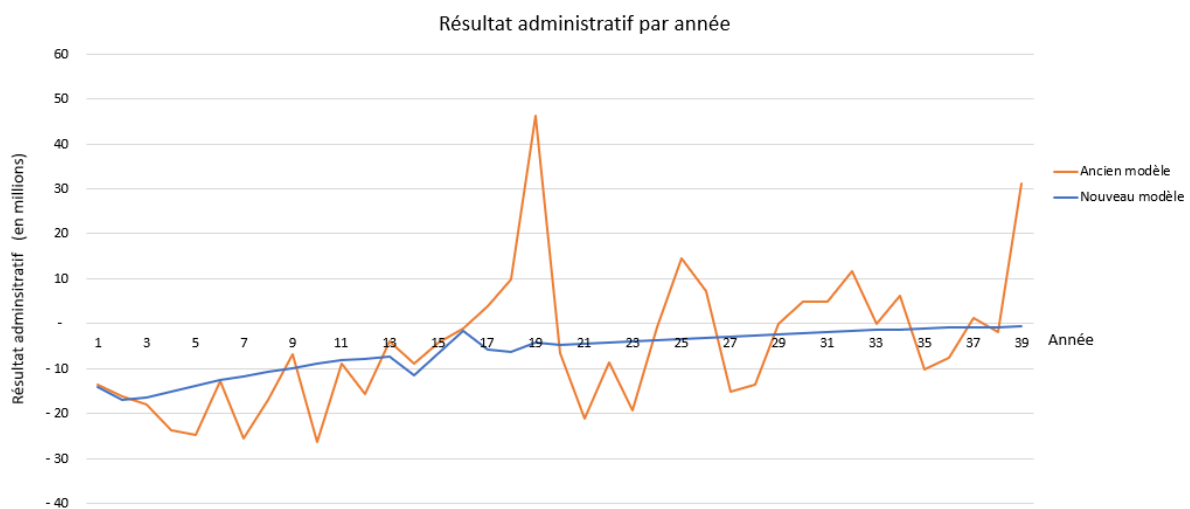


FIGURE 33 – Comparaison des résultats administratifs annuels

15.2 Levée de la correction sur les trajectoires

Les majorations représentent des leviers de pilotage qui sont activés en réaction à une situation défavorable conduisant à une dégradation du profil de risque. Dans le cadre de l'ORSA, un cap sur l'inflation utilisée pour le calcul des frais dans le modèle avait été mise en place pour contrer les situations où des valeurs trop élevées d'inflation, résultant d'une mauvaise modélisation, entraînaient une augmentation anormale des frais projetés.

Au deuxième trimestre 2023, la majoration permettait au ratio de solvabilité d'atteindre 227%.

Le nouveau modèle permet de ne plus avoir à utiliser le cap et amène le ratio à 229%.

	Ratio de solvabilité
Nouveau modèle	229 %
Ancien modèle avec correction de trajectoire permettant de palier aux problèmes de run explosifs	227%

Ce résultat est cohérent, car l'intégration du calibrage par les caps inflation dans le nouveau modèle permet de mieux maîtriser les valeurs d'inflation. Cela permet ainsi de répliquer sensiblement l'effet de la majoration.

16 Vérification des critères de sélection

Après avoir effectué les tests et analysé les résultats, il est essentiel de vérifier que le modèle respecte bien les critères de sélection définis initialement. Cette vérification permet de confirmer que le modèle est adapté aux besoins des compagnies d'assurance-vie et qu'il constitue une amélioration significative par rapport aux modèles existants.

Critère	Mise en oeuvre
Cohérence avec le marché (Market-Consistency)	Comparaison des prix des caps d'inflation générés par le modèle avec ceux observés sur le marché (via Bloomberg). Les résultats montrent une bonne adéquation pour les maturités de 1 à 10 ans. Critère respecté.
Martingalité	Tests de martingalité réalisés sur les trajectoires générées par le modèle. Les prix actualisés des actifs respectent la propriété de martingalité sous la mesure risque-neutre. Critère respecté.
Précision des projections d'inflation	Comparaison des projections d'inflation avec les données historiques et les attentes du marché. Le nouveau modèle montre une meilleure précision, notamment pour les maturités courtes. Critère respecté.
Robustesse face aux changements de marché	Tests dans des scénarios économiques adverses (scénarios "Sextuple hit" et "Low for long" de l'ORSA). Le modèle maintient sa cohérence et sa précision même dans ces conditions. Critère respecté.
Facilité de calibration et de mise en oeuvre	Calibration réalisée en utilisant des données de marché et des méthodes de Monte Carlo. Le modèle reste suffisamment flexible pour être implémenté dans le GSE. Critère respecté.
Respect des exigences réglementaires de Solvabilité II	Utilisation du modèle pour calculer les provisions techniques (Best Estimate) et les exigences de capital (SCR). Vérification de la conformité avec les principes de Solvabilité II, notamment la cohérence avec les scénarios de stress et les tests de sensibilité. Les résultats montrent que le modèle permet de respecter les exigences réglementaires. Critère respecté.

En résumé, le modèle retenu répond à l'ensemble des critères de sélection définis. Il est cohérent avec les données de marché, respecte la propriété de martingalité, fournit des projections d'inflation précises, reste robuste face aux changements de conditions de marché, et permet de respecter les exigences réglementaires de Solvabilité II. Ces vérifications confirment que le modèle est adapté aux besoins des compagnies d'assurance-vie et constitue une amélioration significative par rapport aux modèles existants.

17 Limites et ouverture

Une limite mise en lumière de ce modèle est que la calibration par l'utilisation des cap par méthode de Monte Carlo est plus longue qu'une calibration par formule fermée. Le nouveau modèle a donc une complexité computationnelle plus importante que le modèle précédent.

Une autre approche qu'il pourrait être intéressant d'étudier est la suivante :

Envisager, dans le cadre du modèle Jarrow-Yildirim :

$$\begin{cases} df_n(t, T) = \alpha_n(t, T)dt + \sigma_n(t, T)dW_n(t) \\ df_r(t, T) = \alpha_r(t, T)dt + \sigma_r(t, T)dW_r(t) \\ dI(t) = I(t)\mu_I(t)dt + I(t)\sigma_I dW_I(t) \end{cases}$$

d'ajouter une volatilité d'inflation σ_i non nulle. Cette volatilité pourrait permettre d'ajouter un degré de maîtrise sur les valeurs d'inflation projetées. Cependant, sa calibration augmenterait la complexité de l'outil.

Conclusion

L'analyse des résultats obtenus montre que le modèle implémenté parvient à offrir une représentation fidèle et cohérente des risques économiques, en particulier en matière de valorisation des passifs d'assurance vie. Sa capacité à maintenir une cohérence avec les prix de marché dans des conditions variées renforce son utilité comme outil de gestion des risques.

Toutefois, l'étude révèle également des domaines où des améliorations pourraient être apportées pour renforcer encore la précision et la fiabilité du modèle, notamment dans des contextes de changements soudains des conditions de marché. Cette section conclut en soulignant l'importance d'une modélisation robuste pour assurer la résilience financière des compagnies d'assurance face à des scénarios économiques incertains.

18 Conclusion

Cette recherche met en lumière l'importance d'une modélisation précise de l'inflation dans le cadre de Solvabilité II pour les compagnies d'assurance-vie. Le modèle existant du générateur de scénarios économiques, bien que fonctionnel, a montré ses limites face au contexte inflationniste récent. En particulier, il a été incapable de reproduire de manière fidèle les prix de marché des dérivés d'inflation pour des maturités inférieures à dix ans, ce qui peut entraîner des erreurs d'estimation des passifs et, par conséquent, des réserves de capital possiblement insuffisantes. Ces imprécisions ont également mis en lumière un non-respect des exigences réglementaires imposées aux compagnies d'assurance-vie, notamment la notion de market-consistency, qui exige que les modèles utilisés soient cohérents avec les données de marché observées.

Pour répondre à ces défis, cette étude propose un nouveau modèle d'inflation qui intègre un Libor Market Model shifté (DDLMM) pour les taux réels, couplé à un mécanisme de convergence vers une cible d'inflation à long terme. Ce modèle a été conçu pour pallier les lacunes du modèle précédent, en particulier son incapacité à reproduire les prix des caps d'inflation pour des maturités courtes. La calibration de ce nouveau modèle garantit que les valorisations des produits dérivés d'inflation correspondent aux données de marché, respectant ainsi la cohérence de marché exigée par Solvabilité II. De plus, le modèle satisfait les tests de martingalité, une propriété essentielle en univers risque-neutre qui assure l'absence d'opportunités d'arbitrage et la justesse des prix des actifs.

Les tests empiriques réalisés dans le cadre de cette étude montrent que le nouveau modèle améliore de manière significative la fiabilité des projections d'inflation. Cette amélioration affecte directement la précision de la valorisation des passifs des assureurs vie et la suffisance de leurs réserves de capital. En particulier, le modèle permet une meilleure projection des frais encourus par l'assureur, ce qui est essentiel pour la gestion des risques financiers à long terme. Dans un scénario où les projections d'inflation étaient anormalement élevées avec l'ancien modèle, entraînant des frais très importants et des erreurs de compilation dans le modèle de projection, le nouveau modèle a permis de maîtriser ces valeurs d'inflation, réduisant ainsi la volatilité des résultats administratifs et améliorant la stabilité des projections financières.

L'adaptabilité du modèle a également été validée lors de son utilisation pour l'ORSA, un processus clé dans le cadre de Solvabilité II qui permet aux assureurs d'évaluer leurs risques et leur solvabilité dans divers scénarios économiques. Le modèle a démontré sa capacité à maintenir une cohérence et une précision même dans des conditions de marché adverses, telles que les scénarios "Sextuple hit" et "Low for long", qui simulent des chocs économiques importants. Cette robustesse face aux changements de conditions de marché est un atout majeur pour les compagnies d'assurance, car elle leur permet de mieux se préparer aux crises financières futures et de maintenir leur stabilité financière dans des environnements économiques volatils.

En résumé, le nouveau modèle d'inflation non seulement répond plus efficacement aux normes réglementaires de Solvabilité II, mais renforce également les capacités de gestion des risques des compagnies d'assurance-vie. En fournissant un outil plus précis pour estimer les passifs ajustés à l'inflation, cette recherche contribue à la robustesse globale du modèle sous les exigences rigoureuses de Solvabilité II et offre aux assureurs un outil pour mieux anticiper les fluctuations économiques, tout en garantissant une protection accrue pour les assurés. Les travaux futurs pourraient explorer l'évolution du modèle d'inflation en introduisant une volatilité d'inflation non nulle, ce qui permettrait de mieux capturer les dynamiques complexes de l'inflation et de renforcer encore la fiabilité des projections. De plus, l'intégration de tests statistiques plus formels pour valider la martingalité des projections pourrait améliorer la rigueur du modèle. Ces améliorations permettraient de répondre encore plus efficacement aux défis réglementaires

et opérationnels auxquels sont confrontées les compagnies d'assurance-vie dans un contexte économique en constante évolution.

Bibliographie

- [1] BRIGO D., MERCURIO F. (2006), *Interest Rate Models - Theory and Practice*
- [2] HULL J., WHITE A. (1990), *Pricing interest rate derivative securities*
- [3] HULL J. (2004) , *Options, futures et autres actifs dérivés*
- [4] HENRY-BIABAUD L. (2018), *Générateur de scénarios économiques risque neutre & Calibrage. Mémoire d'actuariat*
- [5] CART P. (2018), *Calcul de l'UFR (Ultimate Forward rate) à partir de données de marché et impact Solvabilité 2. Mémoire d'actuariat*
- [6] BENNOUNA M. (2017), *Calibrage du Libor Market Model dans le cadre d'un Générateur de Scénarios Economiques risque-neutre. Mémoire d'acturiat*
- [7] LOPEZ T., *Modélisation risque neutre de l'inflation, appliquée aux régimes de retraites. Mémoire d'actuariat*
- [8] ROSSPOFF B. (2013) , *Modèles historique et risque neutre de taux et d'inflation pour l'assurance. Mémoire d'actuariat*
- [9] ACPR (2020), *Générateur de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques*
- [10] BRAVO A. (2007/2008), *Analyse de marge en assurance-vie. Mémoire d'actuariat*
- [11] SAGAZAN G. (2023), *Implémentation de modèles d'inflation dans un générateur de scénario économique en risque neutre et étude d'impact sur un portefeuille d'assurance vie. Mémoire d'actuariat*
- [12] ANG A., BEKAERT G., WIE M. (2008) , *The Term Structure of Real Rates and Expected Inflation , Journal of Finance*
- [13] RACICOT F.E., THEORET R. (2006) *Les modèles HJM et LMM revisités et leurs versions étendues , Cahier de Recherche n°08-2006, UQAM.*
- [14] ARMEL K., PLANCHET F. (2018), *Comment construire un générateur de scénarios économiques risque neutre destiné à l'évaluation économique des contrats d'épargne ?*
- [15] PLANCHET F. (2011) *Générateur de scénarios économiques : choix du modèle de taux, blog Actu d'actuaire*