

Mémoire présenté le :

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : DINH The Linh

Titre Estimation des courbes d'expositions de marché dans le cadre des traités XS par risque

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

signature

Entreprise : Odyssee Re

Nom :

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : *TESSIER Manon*

Signature :


Invité :

Nom :


Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Institut de sciences financière et d'assurances



Estimation des courbes d'expositions de marché dans le cadre des traités XS par risque



Auteur : The Linh DINH

Tuteur entreprise : Manon TESSIER

Tuteur ISFA : Frédéric PLANCHET

Remerciements

En premier lieu, je souhaite remercier Manon Tessier, ma tutrice de stage, pour sa disponibilité, sa réactivité lors des échanges, ainsi que ses relectures et ses conseils avisés.

Je tiens ensuite à remercier mon tuteur pédagogique, M. Frédéric Planchet, pour son encadrement et ses conseils lors la rédaction de ce mémoire.

Je remercie aussi toute l'équipe Actuariat de Odyssey Re pour son accueil très chaleureux tout le long du stage.

Enfin, je tiens à remercier l'ensemble du corps enseignant de l'ISFA pour son encadrement et sa formation durant ces trois dernières années.

Résumé

Dans le cas des traités excédents de sinistres en réassurance, il est parfois plus adapté d'utiliser une tarification par exposition plutôt que celle par expérience. Cette approche devient même indispensable lors de la tarification des sociétés d'assurances qui ne peuvent fournir des statistiques suffisantes sur le passé, ou bien lorsque le réassureur cherche à tarifier des tranches avec très peu d'expériences.

Le but de ce mémoire est de déterminer les courbes d'expositions de réassurance IARD, par classes d'affaires, adaptées aux marchés nordique (le Danemark, la Norvège, la Finlande et la Suède).

Pour ce faire, nous allons agréger les données fournies par nos cédantes dans le cadre des traités excédents de sinistres par risques, et introduire ensuite une démarche d'estimation de paramètres se basant sur la tarification par expérience (le Burning Cost) et les courbes MBBEFD (Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein et Fermi-Dirac distribution) à un et deux paramètres.

Nous allons ensuite mener des tests de sensibilités de nos paramètres, et des tarifications sur des programmes XS de nos cédantes avant d'en tirer une conclusion sur les courbes obtenues.

Mots Clés : Réassurance, tarification par exposition, taux de Burning Cost , courbes MBBEFD, Racine d'erreur quadratique moyenne (RMSE) , optimisation heuristique.

Abstract

It is sometimes more appropriate to use exposure rating rather than experience rating to price excess of loss treaties in reinsurance. This approach even becomes essential when pricing insurance companies that cannot provide sufficient statistics on the past, or when the reinsurer seeks to price layers with very little experience.

The purpose of this thesis is to determine the property reinsurance exposure curves, by business class, adapted to the Nordic markets (Denmark, Norway, Finland, and Sweden).

To do this, we are going to aggregate the data provided by our ceding companies in the context of excess claims treaties by risk, and then introduce a process for estimating parameters based on pricing by experience (Burning Cost) and MBBEFD curves (Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein, and Fermi-Dirac distribution) with one and two parameters.

We will then conduct sensitivity tests of our parameters, and pricing on the XS programs of our ceding companies before drawing a conclusion on the curves obtained.

Key words: Reinsurance, exposure rating, Burning Cost, MBBEFD curves, root mean square error (RMSE), heuristic optimization

Sommaire

Chapitre 1 : Introduction générale	8
I. Généralités sur la réassurance	8
a. Définition.....	8
b. Le marché de la réassurance	8
c. Intérêt de la réassurance	9
II. Les différentes formes de réassurances.....	10
a. Réassurance facultative et obligatoire	10
b. Réassurance proportionnelle.....	10
c. Réassurance non proportionnelle	13
III. Odyssey Re et le marché d'assurance des pays nordiques.....	15
a. OdysseyRe.....	15
b. Le marché d'assurance danois	16
c. Le marché d'assurance norvégien	16
d. Le marché d'assurance suédois	16
e. Le marché d'assurance finlandais	17
Chapitre 2 : Tarification d'un traité XS par risque.....	18
I. Les objectifs et les besoins de la tarification en réassurance.....	18
a. Principe de la tarification en réassurance.....	18
b. Branche de développement courtes et longues.....	19
c. AAD, AAL et reconstitution des garanties	19
II. La tarification par expérience ou méthode du « Burning Cost »	20
a. Principes et méthodologies	20
d. La revalorisation des sinistres et des primes	20
e. L'obtention du taux Burning Cost pour une tranche à coter	21
III. La tarification probabiliste.....	22
a. Principes et généralités.....	22
b. La loi de fréquence.....	22
c. La loi de sévérité.....	23
f. La simulation de Monte Carlo	24
IV. La tarification par exposition	24
a. Généralités.....	24
b. Motivation et explication de notre démarche de construction de courbe	25
Chapitre 3 : Constitution et traitement des données.....	27
I. Description des données	27
a. La base des sinistres	27
b. La base des primes	29
c. La base des profils de risques	30

II.	Traitement des données	31
a.	Gross up des primes du profil de risque	31
b.	Transformation des limites de tranches EML en TSI	31
c.	Etude des IPC (Indices des Prix à la Consommation)	33
d.	Construction de la base « Commerciale » et « Particulier ».....	35
Chapitre 4 : Premières courbes Burning Cost de marché.....		37
I.	La méthode générale	37
a.	Construction de la courbe Burning Cost de marché	37
b.	Filtration des cédantes pour éliminer l'effet de la troncature à gauche.....	39
II.	Premiers résultats	40
a.	Etude des tendances de sinistres par tranche d'XS.....	40
b.	Courbe Burning Cost de marché commerciale.....	46
c.	Courbe Burning Cost de marché Particulière.....	48
Chapitre 5 : Courbes d'expositions du marché et premières estimations		51
I.	La théorie des courbes d'expositions.....	51
a.	Formulation mathématique.....	51
b.	La famille des courbes MBBEFD	53
c.	Estimation des paramètres sur la courbe d'exposition empirique	56
d.	Méthode de tarification d'un traité XS par exposition :.....	57
II.	Premières courbes d'expositions MBBEFD à un paramètre	58
a.	Résultat obtenu pour la base « Commerciale à 10 cédantes » :.....	58
b.	Résultat obtenu pour la base « Particulier ».....	59
Chapitre 6 : Estimations des courbes par RMSE		62
I.	Présentation des méthodes d'optimisations	62
a.	Introduction du Loss Ratio dans les estimations	62
b.	Utilisation de la fonction <i>Optimize</i> sur R pour l'optimisation unidimensionnelle.....	62
c.	Utilisation de la fonction <i>optim</i> pour l'optimisation multidimensionnelles	65
II.	Application des méthodes d'optimisations	66
a.	Optimisation de la courbe MBBEFD à un paramètre.....	66
b.	Optimisation de la courbe MBBEFD à deux paramètres.....	69
Chapitre 7 : Rajout des cédantes à la classe d'affaire Commerciale pour améliorer l'estimation		72
I.	Courbes de marchés pour les franchises de 12M à 75M DKK.....	72
a.	Nouvelles hypothèses	72
b.	Etude des tendances	73
c.	Courbe de Burning Cost du marché : franchise de 12M à 75M DKK	75
d.	Courbes d'expositions avec les paramètres optimisés	76
II.	Etude de la sensibilité des paramètres	78
a.	Etude de la sensibilité par cross – validation	78
b.	Etude de la prime par Somme Assurée et par Police.....	80
c.	Etude du rapport de la fréquence sur prime	81

Chapitre 8 : Application et synthèse des paramètres retenus	84
I. Calcul des primes pures sur des traités XS	84
II. Synthèse des paramètres finaux	85
CONCLUSION GENERALE	87
Bibliographie.....	89

Chapitre 1 : Introduction générale

I. Généralités sur la réassurance

a. Définition

La réassurance est souvent définie simplement comme « l'assurance de l'assurance ». Cependant, nous allons garder la définition plus complète donnée par Picard et Besson : « Une opération de réassurance est un contrat sur lequel un réassureur (dit cessionnaire) vis-à-vis d'un assureur professionnel (dit cédant) qui répond seul et intégralement vis-à-vis des assurés des risques par lui assurés, prend en charge moyennant rémunération tout ou partie des sommes dues ou versées aux assurés à titre de sinistres. »

b. Le marché de la réassurance

Le marché de la réassurance est un marché cyclique. On se retrouve en « Hard Market » lorsque les prix sont élevés, et « Soft Market » dans le cas inverse.

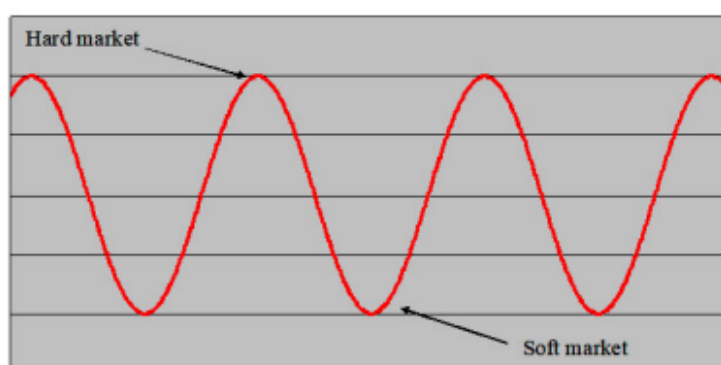


Figure 1.1 Cycle du marché de réassurance

Les cycles de différentes branches de la réassurance ne sont pas corrélés généralement. En prenant par exemple le marché de la réassurance française, nous observons une phase de baisse de prix pour le marché des risques industriels en 2005-2006, alors que le marché de la responsabilité civile automobile voyait une hausse de prix de 20%.

En regardant l'évolution des taux de ratios combinés de la réassurance entre 1988 et 2009, nous remarquons aisément le caractère cyclique du marché :

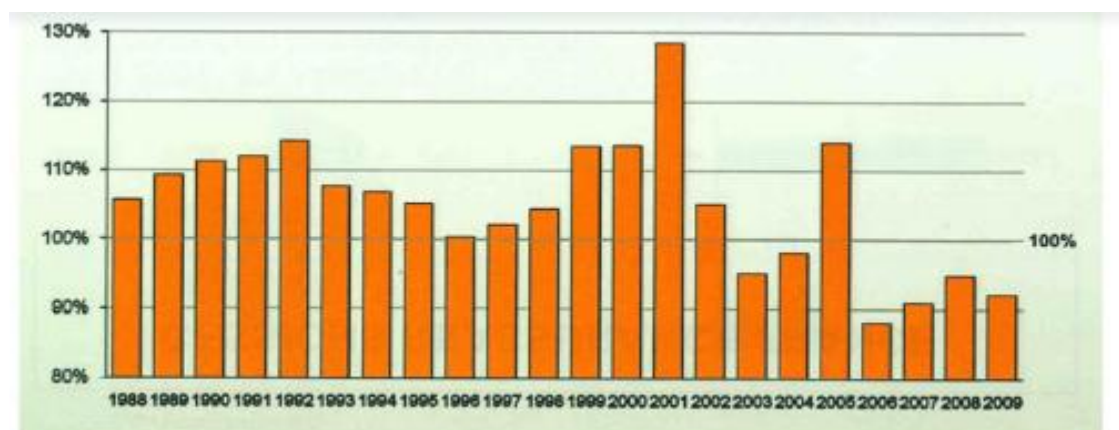


Figure 1.2 Evolution du ratio combiné entre 1988 et 2009

En effet, le marché de la réassurance n'a fait aucun gain technique avant 2003 (ratio supérieur à 100% entre 1988 et 2002). Ceci est directement lié au fonctionnement du cycle inversé de la réassurance : le réassureur touche les primes avant de payer les frais de sinistres. Sur les branches à déroulement long comme la responsabilité civile, le réassureur peut commencer à payer les sinistres des années après avoir encaissé la prime. La gestion d'actifs jouait donc un rôle très important pour les résultats des réassureurs, dans le cadre où le ratio combiné est inférieur à 100%. Cependant, suite à la crise financière post World Trade Center, les réassureurs montrent clairement une volonté de maintenir un ratio combiné inférieur à 100%.

Une augmentation de la fréquence des catastrophes naturelles et les effets résiduels du ralentissement économique sont les causes principales de notre état actuel du « Hard Market ».

Le marché de la réassurance est un marché très concentré, avec un chiffre d'affaires total des 5 plus gros assureurs (à savoir Munich Re, Swiss Re, Hannover Re, Scor SE et Berkshire Hathaway) représentant 45% du marché.

Au niveau mondial, les primes d'assurance cumulées représentent plus de 4,000 milliards d'euros. Les primes de réassurance représentent environ 265 milliards d'euros, la non-vie représentant 70% de ces primes. La réassurance est donc principalement présente en non-vie.

c. Intérêt de la réassurance

La réassurance présente plusieurs utilités :

- **Protéger le bilan** de la cédante contre la survenance d'une charge annuelle exceptionnelle, lié à la survenance de sinistres extrêmes ou au cumul des sinistres « normaux ».

- **Réaliser l'équilibre du portefeuille** de la cédante en prenant en charge une part importante des affaires à forts capitaux assurés ou présentant un potentiel élevé de la sinistralité.
- Augmentation de la **capacité de souscription** de la cédante, aussi bien en termes de montant maximal assuré que du nombre de risques assurés (la cédante peut développer son portefeuille même si elle n'a pas encore les capacités financières suffisantes pour le faire seule, notamment en termes de marges de solvabilité).
- Créer un réseau de distribution ou de **partage de risque** à l'échelle mondiale, contribuer à répartir sur le marché mondial les risques qui dépassent la capacité locale des assureurs.
- Améliore la **marge de solvabilité** de la cédante.
- **Rôle de conseil** : études des cumuls sur le portefeuille de la cédante, conseils pour le lancement d'un nouveau produit ou pour l'évaluation des réserves
- Apporter une **expertise** et une **surveillance** de certains risques technologiques.

II. Les différentes formes de réassurances

a. Réassurance facultative et obligatoire

Il s'agit de deux modes principaux de la réassurance :

- **Contrat facultative** : La cédante cède et le réassureur couvre tout ou une partie du risque par une police d'assurance unique. Dans ce mode, le réassureur est libre de d'accepter ou refuser chacun des risques proposés. Ce mode s'applique notamment dans le cas de risques industriels significatifs et de risques particuliers ou de technologies nécessitant des connaissances spécifiques. La tarification d'un contrat facultative fait souvent appel à des ingénieurs ayant une expertise spéciale du risque.
- **Contrat obligatoire** : Ce contrat est plus récent et beaucoup plus utilisé que le contrat facultatif. Dans ce cas un contrat, que l'on appelle « Traité », définit au préalable les catégories de risques ainsi que les conditions de la souscription. Le réassureur dans ce cas est obligé à couvrir la totalité des risques définis dans le contrat sans effectuer de sélection.

b. Réassurance proportionnelle

On la nomme ainsi car la prime de réassurance et l'indemnisation des sinistres de la Cédante par le Réassureur se calculeront selon le même pourcentage. Ainsi par exemple le Réassureur reçoit 20% de la prime d'un risque et s'engage en contrepartie à couvrir 20% des sinistres affectant ce même risque.

Le réassureur verse également une commission à la cédante, pour participer aux frais de commercialisation des polices directes

Les résultats du Cessionnaire dépendent donc directement de la qualité de souscription de la Cédante, le Réassureur partagera les bénéfices de la Cédante. . . mais aussi ses pertes éventuelles !

Les deux formes classiques de traités de Réassurance proportionnelle sont le Quote Part (Quota share) et l'Excédent de Plein (Surplus) :

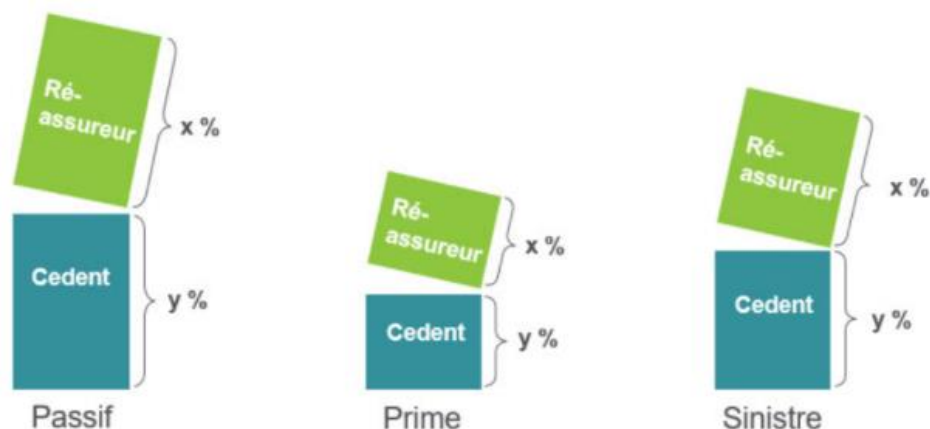


Figure 1.3 La réassurance proportionnelle

Traités en quote part :

C'est la forme la plus simple de la réassurance. Un traité en quote-part est un contrat de réassurance au prorata dans lequel l'assureur et le réassureur se partagent les primes et les sinistres selon un pourcentage fixe. La réassurance en quote-part permet à un assureur de conserver une partie du risque et de la prime tout en partageant le reste avec un assureur jusqu'à une couverture maximale prédéterminée. Le graphique suivant permet d'illustrer nos propos, en utilisant un portefeuille hypothétique de 10 risques :



Figure 1.4 Exemple de traité quote-part

Nous avons ici appliqué sur ce portefeuille une cession en réassurance par le biais d'un traité quote part de 20%, ce qui signifie que l'assureur va conserver 80% et céder 20% à la réassurance. Nous remarquons que les profils de portefeuille conservés et cédés sont demeurés identiques au profil du portefeuille avant cession en réassurance, en termes de proportion relative.

Cette forme de réassurance a pour effet de réduire les risques restant à la charge de l'assureur sans pour autant qu'il y ait un phénomène de nivellement. Les petits risques, tout comme les gros, sont partagés proportionnellement entre réassureur et assureur.

Ce partage a pour conséquent de transférer au réassureur un portefeuille de même qualité que celui souscrit par l'assureur, à savoir même taux de prime moyen et même ratio de Sinistre/Prime. Cependant, le traité en quote part se caractérise par un volume de prime cédées élevé (20% dans notre exemple) .

La réassurance en quote-part est souvent utilisée par les jeunes entreprises ou les entreprises qui étendent leurs activités à de nouvelles domaines, elles souhaitent donc un soutien technique et financier de la part des sociétés de réassurance.

Traités en Excédent de plein :

La réassurance en quote part ne supprime pas les pointes mais les abaisse. La réassurance en excédent de plein propose une autre technique permettant à la cédant de moduler leurs cessions.

Dans un excédent de plein, le réassureur prend en charge uniquement la portion des risques dépassant un niveau de capital appelé rétention (ou plein de conservation). En échange il reçoit, sur chaque risque concerné, la proportion de prime correspondant à ce dépassement.

En reprenant le même portefeuille utilisé pour le traité quote part, la répartition des risques se fait de manière suivante :

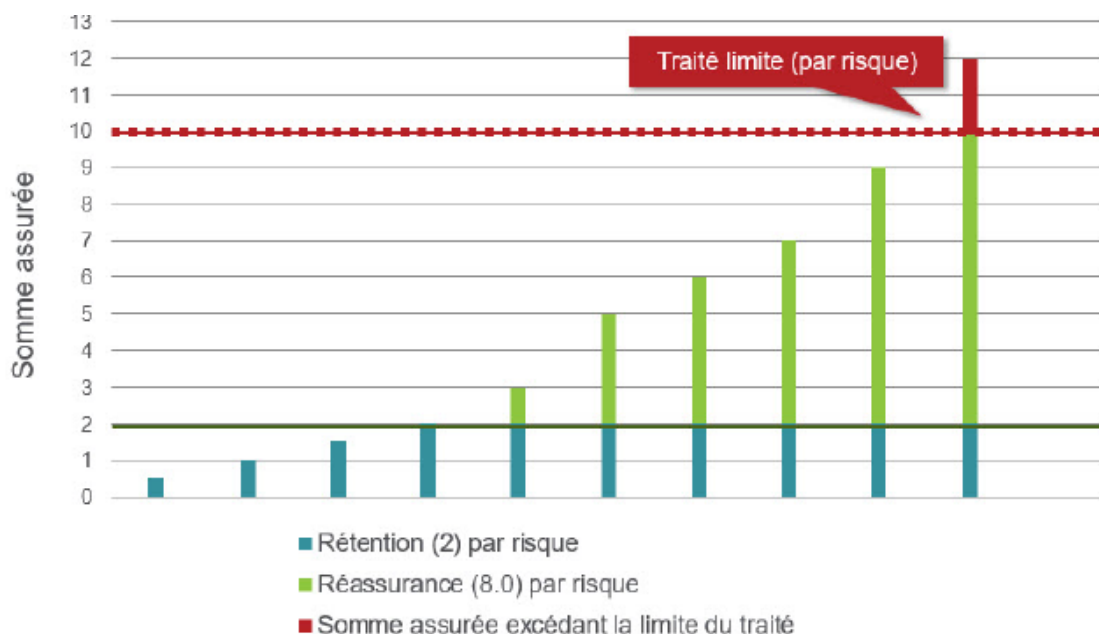


Figure 1.5 Exemple de traité en excédent de plein

Notons que le portefeuille de l'assureur après cession n'est plus du tout le même, il est en effet plus homogène comme les pointes sont transférées au réassureur. Le taux de cession est donc défini mathématiquement de la manière suivante :

$$x_i = \min \left(\max \left(\frac{S_i - R}{S_i}, \frac{C}{S_i} \right), \frac{C}{S_i} \right)$$

S_i capital assuré du risque i

C capacité de l'excédent de plein

R plein de rétention de la cédante

P_i prime du risque i

Le réassureur couvre ainsi les polices à engagement plus important, et ne couvre pas des sinistres à limite faible. Les résultats sont donc bien plus volatils.

c. Réassurance non proportionnelle

Dans la réassurance non proportionnelle, le réassureur s'engage à payer à l'assureur un certain montant lorsqu'un événement défini, un sinistre ou une perte, se réalise. En contrepartie, le réassureur reçoit une prime pour compenser le risque qu'il prend. Comme le nom l'indique, il n'y a pas de relation de proportionnalité entre la prime cédée et le montant que le réassureur s'engage à payer dans les sinistres. Les deux grands types de contrats réassurance non proportionnelles sont : L'excédent de sinistre (XS) et le Stop Loss.

Traité Excédent de Sinistre :

Le traité excédent de sinistre fonctionne comme un contrat d'assurance avec franchise déductible. Ici, la franchise est appelée « priorité » (priority en anglais) ; le réassureur s'engage à payer uniquement le montant de dépassement pour tous les sinistres dépassant la priorité. De plus, ces traités font également mention d'une portée (limit en anglais) qui correspond à l'engagement maximal de l'assureur sur un sinistre. On appelle plafond la somme de la portée et de la priorité.

En appelant X le montant d'un sinistre couvert par un traité XS et S le montant à charge du réassureur, nous avons :

$$S = \min(\max(X - \text{priorité}, 0), \text{portée})$$

Le traité XS peut être découpé en plusieurs tranches, que nous notons *portée XS priorité*.

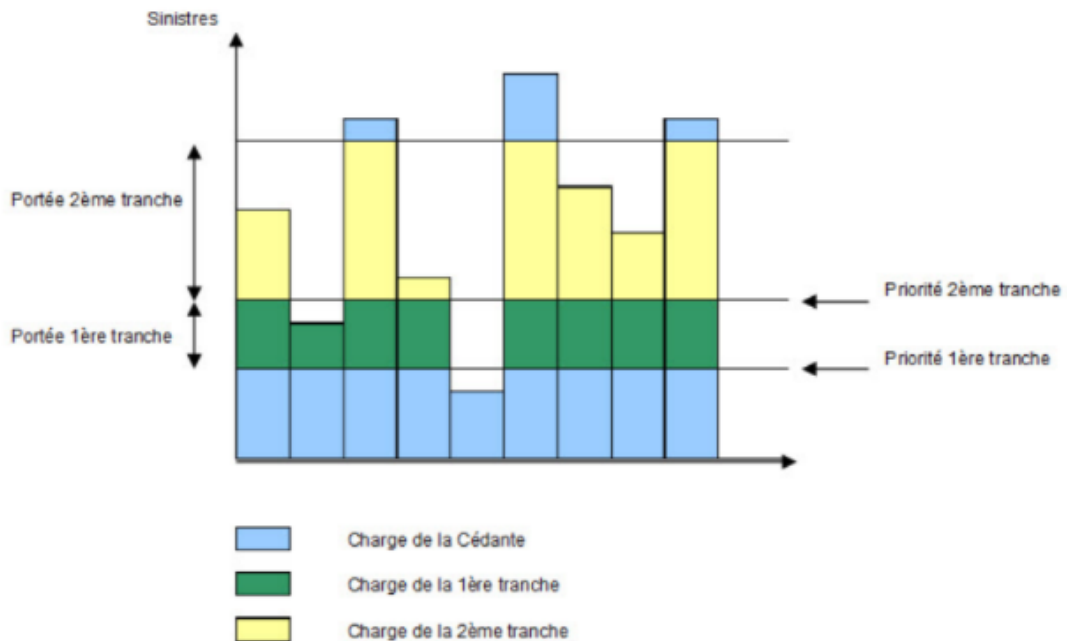


Figure 1.6 Fonctionnement du traité excédent de sinistres

Il existe deux types de traités Excédent de sinistre : le traité XS par risque (XS/risque) et le traité XS par évènement (XS / évènement). Si dans le premier cas, le contrat est destiné à couvrir l'assureur lorsqu'un risque individuel est sinistré, le deuxième contrat n'est pas constitué d'une police sinistrée mais par plusieurs polices sinistrées du fait d'une même cause.

Prenons comme exemple un assureur qui souscrit un traité XS par évènement 5M XS 5M. Supposons que l'assureur enregistre trois sinistres de montants 1M, 3M et 3,5M causé par la survenance d'un incendie dans une zone industrielle. Le cout du traité sera de 7,5M et le réassureur paiera 2,5M (soit 7,5 – 5M). Dans la même situation pour un contrat XS par risque, l'assureur va devoir prendre en charge de l'intégralité des sinistres.

En pratique, la cédante va communiquer une estimation des primes qu'elle va encaisser dans la période de couverture (Estimated Premium Income) et le réassureur sera amené à calculer la prime réassurance en pourcentage de cette estimation.

Dans le cadre de ce mémoire, nous allons s'intéresser uniquement aux traités XS par risque pour nos estimations.

Traités Excédent de perte annuelle ou stop-loss

Ce traité intervient lorsque l'assureur cherche à se prémunir contre les mauvais résultats, et protéger le ratio S/P.

Il est classique d’avoir ce type de contrat pour la grêle, les dégâts des eaux ou le gel par exemple. En effet, ces évènements sont en général très localisés géographiquement et la survenance d’un seul évènement a peu de chances de compromettre le résultat d’une année. Cependant, une fréquence importante pourra compromettre le résultat, et le traité Stop-Loss cherche à protéger contre ces types de survenances.

Le fonctionnement du Stop – Loss est assez similaire à celui de l’excédent de sinistre, mais la portée et la priorité sont généralement exprimées en pourcentage de prime directe. Notons S le sinistre à charge du réassureur, nous avons :

$$S = \min(\max(\frac{\sum X_i}{P} - \text{priorité}, 0), \text{portée}) * P$$

Avec : $X_i, i = 1, \dots, n$ les sinistres de la cédante et P l’assiette de prime de l’assureur.

III. Odyssey Re et le marché d’assurance des pays nordiques

a. OdysseyRe

Odyssey Reinsurance est un souscripteur de traités IARD et de réassurance facultative. Fondée en 1996, Odyssey Re est une filiale en propriété exclusive de Fairfax Financial, une société de portefeuille de services financiers. Siégré à Stamford, Connecticut aux Etats Unis, ses opérations comprennent un réseau mondial de 14 branches et opère à travers 4 divisions : Amériques, EMEA (Europe, Moyen-Orient et Afrique) et Asie Pacifique.

En 2020, Odyssey Re a souscrit une prime brute de 2,2 Milliards Dollars, dont 70% de la prime proviennent des traités IARD.

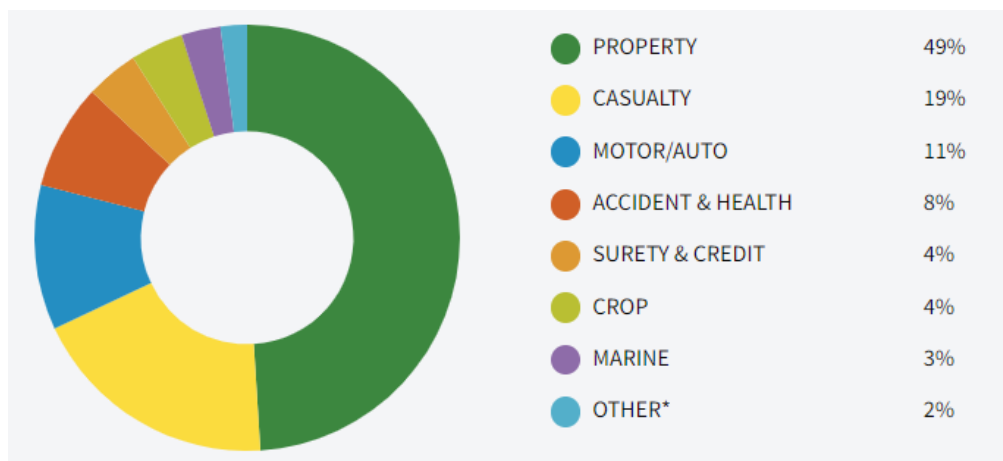


Figure 1.7 Répartition des souscriptions de Odyssey Re

Le bureau Parisien est responsable des traités IARD EMEA, et plus précisément dans le cadre de ce mémoire, les études sont faites sur le marché de l'Europe Nordique (le Danemark, la Norvège, la Finlande et la Suède).

b. Le marché d'assurance danois

Parmi les pays nordiques, la majorité des souscriptions de Odyssey Re proviennent du Danemark.

Malgré sa population relativement petite, le marché d'assurance danois est relativement vaste selon les normes internationales et, en 2017, il était classé 24e au monde en termes de prime non-vie. Le marché est bien développé et sophistiqué avec une pénétration de l'assurance à un niveau élevé, supérieur à la moyenne de l'UE, et par conséquent est considéré comme pratiquement saturé. Le marché non-vie de l'assurance danois représente 22% de la prime du marché total, soit 53,5 Milliards DKK (7 350M Euros) . En 2017, La branche d'assurance « Property » représente 34,6% du marché non-vie au Danemark, soit 18,5 Milliards DKK.

Le marché danois est aussi un marché très concentré, avec 72% du part de marché non-vie appartenant aux cinq plus grands assureurs, et 86% appartenant aux top 10.

c. Le marché d'assurance norvégien

La Norvège est le deuxième pays nordique en termes de nombre de cédantes et de primes souscrites chez Odyssey Re. Avec une prime non-vie de 65,8 Milliards NOK (soit 7,5 Milliards d'Euros), le marché norvégien est un marché développé qui offre une grande diversité de produits d'assurance.

En 2017, le marché non-vie représente 36% du marché total de l'assurance norvégien. Assez similairement au marché danois, la branche « Property » norvégien représente à peu près un tiers (31%) du marché non-vie.

Les cinq plus gros assureurs norvégiens représentent 75% du marché, alors que le top 10 représentent 91% du marché. Au fur et à mesure, le nombre de compagnies d'assurance norvégiennes a considérablement diminué, car les assureurs ont fusionné ou procédé à des acquisitions.

d. Le marché d'assurance suédois

Les primes d'assurance non-vie en Suède n'ont cessé de croître au cours des 10 dernières années. L'augmentation, cependant, a été inégalement répartie entre les branches d'assurance : alors que certaines ont vu leurs revenus de primes doubler, les primes pour les assurances commerciales ont plutôt diminué d'environ 4 %.

En 2017, la part de marché de l'assurance non vie représente 22,6% du marché total de l'assurance suédois, soit une prime de 69,7 Milliards SEK (7,5 Milliards d'Euros) . La branche « Property » domine le marché non-vie avec un part de marché d'environ 41%.

La part de marché des cinq et dix premières entreprises sont respectivement 83% et 92%, caractéristique d'un marché très concentré.

e. Le marché d'assurance finlandais

La prime totale de l'assurance non-vie finlandaise est de 4,24 Milliards Euros en 2017. La branche « Property » représente environ 23% du marché et reste l'une des branches les plus importantes de l'assurance non-vie finlandaise. Contrairement aux autres marchés nordiques, l'exposition du pays aux périls naturels est faible, mais des sinistres importants sont possibles.

Tout comme le reste du marché nordique, l'assurance non-vie au Finlande est concentré, avec 67% du part marché appartenant aux 3 plus gros assureurs.

Chapitre 2 : Tarification d'un traité XS par risque

L'objectif de ce chapitre est de spécifier ce que l'on entend par « tarification » en réassurance, tout en s'appuyant sur des traités excédent de sinistre par risque. Le but ici n'est pas d'expliquer toutes les méthodes de tarifications en réassurances, le sujet étant trop vaste, mais plutôt de présenter les principes généraux des méthodes les plus utilisés dans la tarification des traités XS.

I. Les objectifs et les besoins de la tarification en réassurance

a. Principe de la tarification en réassurance

La tarification technique doit permettre de déterminer le cout engendré par l'ensemble des engagements du contrat pour obtenir un résultat technique équilibré. Pour tarifier un contrat de réassurance, il est nécessaire d'avoir des connaissances sur plusieurs domaines :

- L'environnement :
 - L'économie du pays en question, l'inflation et la croissance
 - Le comportement de la branche d'assurance, l'expérience et l'évolution législative de la branche.
 - Les rapports entre différents assureurs du marché concerné
- La cédante :
 - La tendance de souscription, la nature des risques couvertes, l'exclusions des risques non couverts
 - La composition du portefeuille, la taille des risques et la répartition par classe d'affaire des risques
 - Les franchises et limites en relation avec sa politique tarifaire
 - La gestion des sinistres

Nous pouvons parler de trois méthodes de tarifications principales :

- La tarification par expérience, réalisée à partir de données du passé du portefeuille à couvrir sur plusieurs années. Après redressement des données pour tenir en compte de la situation économique et l'exposition de l'année de cotation, le réassureur calcule la charge de sinistre du contrat correspondant
- La tarification selon des méthodes probabilistes qui se basent sur des lois de probabilité. Cela consiste à créer un modèle de fréquence sévérité dont le réassureur commence par estimer les lois, et ensuite effectue des simulations pour calculer la charge de sinistre du traité.
- La tarification par exposition qui se réalise à partir de la connaissance fine des portefeuilles de risques assurés. Cette méthode est au cœur de notre mémoire, avec la difficulté principale qui se réside dans la construction des courbes d'expositions.

Le choix de la méthode se fera en fonction du type de contrat, son exposition, de la branche (développement court ou long), du marché, des informations disponibles et de leur fiabilité. Une tarification précise nécessite donc :

- D'obtenir des données cohérentes et fiables en relation avec la branche de risque couverte
- D'effectuer un travail préliminaire de redressement, regroupement des données qui seront utiles pour la tarification. Nous allons voir que ce travail est extrêmement dans le cadre de la tarification par exposition au cœur de ce mémoire.
- De choisir la méthode ou lois de probabilités pertinentes en tenant en compte des données.
- De porter un esprit critique en plus que la rigueur mathématique, afin de pouvoir analyser et faire des choix corrects sur les lois ou le modèle utilisés.

b. Branche de développement courtes et longues

En réassurance, nous évoquons souvent la notion de la branche à développement courte et celle à développement longue. La distinction se fait ici sur la durée nécessaire pour que le sinistre soit déclaré et réglé. La branche courte désigne un type d'assurance où les réclamations sont généralement faites pendant la durée du contrat ou peu après son expiration. L'assurance IARD est un exemple de branche courte, comme le remboursement est typiquement fait seulement quelques semaines ou mois après un dégât causé par une incendie ou une tornade.

Le contraire de la branche courte est la branche longue, où la durée entre la déclaration du sinistre et le règlement peut être des années. Un exemple de la branche longue est la responsabilité civile automobile, où il est possible d'avoir des déroulements jusqu'à 20 ans.

Au niveau de la tarification, la plage historique à prendre en compte est aussi différente pour les deux branches. Si pour la branche courte, nous étudions en générale les sinistres sur 5 ans, la durée d'étude est plutôt de l'ordre de 10 ans pour la branche longue. Bien entendu, l'actuaire tarificateur doit garder un esprit critique au cas par cas lors de la cotation, comme il se peut par exemple qu'une nouvelle cédante arrivant sur le marché ne dispose pas des données suffisantes sur son historique.

c. AAD, AAL et reconstitution des garanties

Dans le cadre de la réassurance non proportionnelle, l'actuaire tarificateur doit prendre en compte les clauses particulières lors de la cotation.

L'**AAD** (Annual Aggregate Deductible en anglais) est la clause de franchise annuel. Elle fonctionne comme une franchise annuelle sur la somme agrégée que le réassureur doit payer à l'assureur.

L'**AAL** (Annual Aggregate Limit en anglais) est la clause de plafond annuel. Elle sert à limiter le montant annuel dus au réassureur. Le réassureur ne paiera jamais plus que l'AAL annuellement.

Sans AAL, lorsque le réassureur conclut un traité XS, il s'engage techniquement à payer un montant égal à k fois la portée, pour k allant de 0 à l'infini. Cependant, la mise en place de la clause des **reconstitutions des garanties** permet de limiter l'engagement du réassureur. Lorsqu'un nombre n de reconstitutions est mis en place, le réassureur s'engage à payer au maximum (n+1) fois la portée.

La prime de reconstitution des garanties peut être nulle, et nous parlons dans ce cas de reconstitutions prépayées, c'est-à-dire que le prix des reconstitutions est déjà calculé dans le prix initial du contrat. Si la prime de reconstitution n'est pas gratuite, son prix se calcule à partir d'un taux prédéfini dans le contrat, le montant à reconstituer et la prime de réassurance.

II. La tarification par expérience ou méthode du « Burning Cost »

a. Principes et méthodologies

Cette méthode de tarification repose sur l'expérience statistique du passé et pourra être appliquée dans le cas où nous avons une historique assez importante, c'est-à-dire pour un traité dont il y a une fréquence de sinistres importante.

Le principe de cette méthode est d'utiliser le passé pour connaître l'impact qu'aurait le contrat de réassurance que l'on souhaite tarifier si les mêmes phénomènes se reproduisaient. Le taux d'excédent de sinistre sera donc déterminé à partir de la charge du traité, s'il survenait une sinistralité de même type que la sinistralité passée.

Chaque élément statistique sera donc actualisé afin d'être utilisé comme élément as-if de l'exercice au cours duquel l'excédent de sinistre couvrira le risque. Par conséquent, la mise en situation « as-if » devra non seulement comporter l'actualisation des sinistres compte tenu de l'évolution du prix du risque dans le temps, mais également la prise en compte de l'évolution de tous les facteurs ou paramètres ayant une influence sur la sinistralité (Ex : changement de législation).

d. La revalorisation des sinistres et des primes

Le calcul des valeurs « as-if » va être réalisé en utilisant deux types d'indice de revalorisation :

- L'indice Sinistre, qui doit refléter l'évolution du cout moyen du sinistre, autrement dit l'inflation des composantes du sinistre.
- L'indice Prime, qui doit refléter l'évolution de la prime moyenne compte tenu des variations du tarif de l'assureur et des garanties données.

En pratique, ces indices sont élaborés par des actuaires ou des souscripteurs qui réalisent les tarifications des contrats, pour chaque branche et chaque marché pour lequel le réassureur travaille. La méthode d'obtention de ces indices peut donc varier beaucoup d'un réassureur à l'autre.

Notons $X_{i,j}$ le cout du j-ième sinistre survenu l'année i et I_i la valeur de l'indice de référence cette même année. Nous allons s'intéresser uniquement à l'acroissement des valeurs de l'indice et non pas à sa valeur. Ainsi, pour calculer le cout du j-ième à l'année de cotation (l'année 0), nous appliquons la formule :

$$X_{0,j} = X_{i,j} \frac{I_0}{I_i}$$

Un sinistre passé revalorisé coutera plus cher s'il survient aujourd'hui, ce qui explique la croissance du ratio $\frac{I_0}{I_1}$

Nous allons ensuite revaloriser les primes de la même manière, en utilisant les indices de primes. En effet, nous cherchons à calculer l'assiette de prime acquise si les primes historiques avaient été émises à l'année de cotation.

e. L'obtention du taux Burning Cost pour une tranche à coter

Supposons que nous cherchons à tarifier une tranche L XS F et que la cédante dispose d'une historique de n années. La charge totale à l'année i de la tranche est donné par la formule suivante :

$$S_i = \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{i,j})$$

$Y_{i,j}$ est la charge du réassureur pour le j-ième sinistre de l'année i. Le calcul de cette charge est détaillé dans le Chapitre 1.

n_i est le nombre de sinistres de l'année i.

Nous obtenons ensuite le taux annuel As If tout simplement en divisant la charge totale annuelle S_i par l'assiette de prime revalorisée de l'année i, P_i :

$$\tau_i = \frac{S_i}{P_i}$$

Le taux Burning Cost, qui peut être utilisé comme l'estimateur du taux de prime du réassureur, est finalement calculé comme la moyenne des taux annuels de toutes la plage historique, pondérée par les assiettes de primes « As If » :

$$\tau_{BC} = \frac{\sum_{i=1}^n (\tau_i * P_i)}{\sum_{i=1}^n (P_i)}$$

III. La tarification probabiliste

a. Principes et généralités

Si la tarification par Burning Cost a l'avantage d'être assez simple et intuitive, elle n'est en revanche pas très adaptée à la tarification des tranches non travaillantes, c'est-à-dire les tranches où les fréquences de sinistres sont trop faibles ou bien les tranches où le réassureur n'a simplement pas assez de données historiques pour la cotation. En effet, une tranche avec 0 sinistre dans le passé n'a pas un coût nul.

Pour pallier ce problème, les réassureurs ont développé d'autres approches telles que les méthodes probabilistes, qui ne sont rien autre que l'application des modèles mathématiques. Nous allons dans la suite présenter les lois de fréquences et de coûts utilisés dans la pratique par les actuaires tarificateurs.

b. La loi de fréquence

En pratique, les actuaires n'utilisent seulement deux lois de fréquence :

- La loi de Poisson
- La loi Binomiale Négative

La loi de Poisson est une loi discrète dont la fonction de densité est définie de manière suivante :

$$Pr(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Elle est utilisée pour décrire les phénomènes où la probabilité de survenance de l'événement qui nous intéresse est faible. Cette probabilité doit être constante tout au long de l'expérience. La loi de Poisson peut également être utilisée pour décrire la survenance d'un événement dans un intervalle de temps, autrement nommé le « processus de Poisson ». Pour cette loi, la variance est égale à l'espérance et au paramètre λ .

La loi binomiale négative est aussi une loi de probabilité discrète. Sa fonction de densité est donnée par :

$$Pr(N = n) = \binom{n+r-1}{n} p^r (1-p)^n$$

La variable aléatoire N représente le nombre n d'échecs avant le r -ième succès, dans la situation de tirage indépendants. Nous avons alors :

$$E(N) = r \frac{1-p}{p}$$
$$V(N) = r \frac{1-p}{p^2}$$

Remarquons que comme p est entre 0 et 1, la variance de la loi Binomiale Négative est supérieure à sa moyenne. Le choix de cette loi va donc se traduire par une disparité plus forte des simulations.

D'autres lois qui sont envisageables mais que très rarement utilisés pour la fréquence en pratique sont la loi normale, la loi log-normale, la loi de Pareto et la loi de Gumbel.

Afin de pouvoir déterminer la loi de fréquence adaptée à notre cédante, il est ensuite nécessaire de redresser le seuil des sinistres. Supposons que le seuil des sinistres était à m euros. Si nous gardons ce seuil après revalorisations des sinistres, certains sinistres qui étaient historiquement en dessous de m auraient été revalorisés à des montants supérieurs à ce seuil. Nous devons alors augmenter le seuil des sinistres As If au seuil de la cédante multiplié par le ratio le plus élevé.

La revalorisation du seuil étant faite, nous pouvons aisément obtenir le nombre as if de sinistres au-dessus du seuil par an. Il existe alors plusieurs méthodes de calibrer la loi de fréquence, comme la méthode du maximum de vraisemblance ou la méthode des moments.

c. La loi de sévérité

La loi qui est plus fréquemment utilisée en réassurance pour modéliser les sinistres est la loi de Pareto. La raison principale est que c'est une loi à queue épaisse qui va simuler un nombre non négligeable de sinistres supérieurs au plus grand sinistre observé et utilisé pour estimer la loi.

La fonction de répartition de la loi de Pareto est définie par :

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha$$

La loi de Pareto est définie par deux paramètres :

- q le paramètre d'échelle, qui correspond au plus petit sinistre observé pour le modèle
- a le paramètre définissant la forme de la courbe, encore appelé « paramètre de la loi Pareto ».

Avant d'estimer les paramètres de la loi Pareto, nous devons revaloriser le seuil de la même manière que nous avons fait avec la fréquence. L'augmentation du seuil va réduire la taille de notre échantillon, et c'est sur cet échantillon réduit que nous allons estimer les paramètres en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. En effet, nous avons :

$$\alpha = \frac{n}{\sum \ln \frac{x_i}{\theta}}$$

Avec n le nombre total de sinistres supérieur au seuil q et x_i les sinistres revalorisés. Remarquons que plus a est petit, plus la proportion de grands sinistres est grande. Pour les sinistres incendie, a est typiquement comprise entre 1 et 2.

D'autres lois comme le lognormal, Gamma et l'Inverse Gaussienne sont aussi très fréquemment utilisés comme loi de sévérité.

f. La simulation de Monte Carlo

La tarification nécessite souvent de nombreuses applications de clauses et de formules intermédiaires, il est alors très rare que nous puissions obtenir une forme analytique du taux technique. Nous faisons recours alors à une approche par simulation.

Une fois que nous avons estimé les paramètres de la fréquence et la sévérité, l'algorithme se fait de manière suivante :

- Générer un nombre N de sinistres en utilisant la loi de fréquence
- Pour chaque sinistre, générer le cout en utilisant la loi de sévérité
- Appliquer les conditions du traité à la sinistralité cumulée et calculer la charge

XS

Il suffit de calculer la moyenne de la charge XS sur l'ensemble des années simulées pour obtenir la prime pure du traité. Nous pouvons aussi obtenir par simulation les indicateurs comme les quantiles de la distribution, la variance, les intervalles de confiances, les périodes de retours etc.

La tarification probabiliste est une méthode souvent adaptée et très utilisée, car elle permet de tarifier n'importe quel programme à condition de disposer d'une historique de sinistralité suffisamment conséquent. Cependant, pour les cédantes qui viennent de rentrer dans le marché, qui ont fait un changement radical dans la stratégie de souscription du portefeuille, ou qui ont des données historiques mauvaises, cette méthode n'est pas adaptée.

IV. La tarification par exposition

a. Généralités

La tarification par exposition a été développée pour pallier les insuffisances (peu adapté pour les tranches non travaillantes et pour les nouvelles cédantes entrant dans le marché) de la tarification par expérience et aussi pour utiliser dans la tarification l'information du profil de portefeuille. L'approche de tarification par exposition sur le type de risque Incendie est appelé le Loss Scale, alors que la méthode utilisé pour la réassurance de Responsabilité Civile est le ILF (Increased Limit Factor).

Cette méthode permet de déterminer, pour une tranche XS donné, la part de prime d'assurance qui revient au réassureur.

Pour utiliser cette méthode, il nous faut disposer d'informations détaillées relatives au portefeuille couvert, souvent fournis sous formes de tableau donnant les sommes assurées et les primes d'assurances par bande détaillée. Il nous faut également une courbe d'exposition spécifique au type de risque (commerciale, particulier, industriel...) couvert.

Ces courbes d'expositions, dont les propriétés mathématiques seront détaillées plus tard, donnent la répartition de prime entre l'assureur et le réassureur, en fonction de la franchise exprimée en pourcentage des sommes assurées.

Alors que les premières courbes d'expositions datent des années 60, il n'est pas avant 1970 que les études plus poussées ont été menées par des réassureurs au sujet des courbes d'expositions. Nous pouvons notamment citer les courbes de Swiss Re et de Lloyds.

La tarification par exposition a pour avantage d'être très simple à appliquer une fois que la courbe d'exposition est construite. Elle a cependant certaines inconvénients comme la non prise en compte de l'historique de la cédante, et la nécessité de déterminer un Loss Ratio (ratio de « sinistre sur prime ») de la cédante, qui n'est pas toujours fournie.

b. Motivation et explication de notre démarche de construction de courbe

En général, les courbes d'expositions de référence comme les courbes de Swiss Re, Lloyds, Saltzman etc. sont construites à partir des bases de données très spécifiques et datées, et sont assez limitées. Il est donc préférable pour le réassureur de pouvoir élaborer ses propres courbes à partir de leurs données statistiques.

Cependant, la construction de courbes d'expositions adaptées n'est pas une étape simple et dépend fortement de la qualité et l'exhaustivité des données que possède le réassureur.

Pour un réassureur ayant à disposition suffisamment de statistiques sur les sommes assurées des sinistres individuelles, il est possible de construire des courbes d'expositions empiriques (la méthode sera détaillée plus tard) pour les des classes de risques homogènes.

Ces courbes sont cependant continues par morceaux et ne peuvent être facilement calibrés. Le réassureur peut alors implémenter les courbes paramétriques très utilisés dans la tarification par exposition comme les courbes MBBEFD (dont les propriétés mathématiques seront abordées plus tard) à un et deux paramètres, ou encore les lois log-normaux et Weibull L'estimation des paramètres de ces distributions peuvent se faire par l'estimation de vraisemblance ou encore la méthode des moments, en utilisant la courbe empirique obtenue.

Dans ce mémoire, nous allons proposer une autre démarche d'estimation qui utilise la tarification Burning Cost pour construire les courbes de références. La méthode est motivée par une tentative de dépasser le manque de données sur les sommes assurées individuelles ainsi que les sinistres FGU (From Ground Up) sans seuils, tout en intégrant dans l'estimation les données statistiques propres à notre marché.

Nous commençons par agréger nos données. Le Burning Cost est ensuite calculé sur cette base agrégée sur des tranches XS de portées constantes, en augmentant petit à petit la rétention. Nous espérons observer une courbe lisse décroissante.

Le choix de la rétention est très important, comme le Burning Cost n'est pas adapté pour les tranches avec aucun sinistre. Une base de données de taille conséquente permet d'obtenir un taux Burning Cost non nul sur plus de tranches « hautes », problème que nous observons très souvent sur la tarification d'une cédante individuelle.

En utilisant un raisonnement « inversé », nous savons que la courbe d'exposition adaptée est celle qui permet, suite à la tarification, d'obtenir les mêmes taux sur ces tranches, à un Loss Ratio près. Nous pouvons faire ce postulat car nous estimons que nos courbes Burning Cost reflète bien le marché complet. Ainsi, nos courbes d'expositions ne prennent pas seulement en compte la répartition des portefeuilles du marché mais aussi ses données statistiques.

La méthode proposée s'appuie fortement sur la constitution d'une base de données non seulement conséquentes (ce qui permettra d'obtenir des estimations robustes), mais aussi cohérente et fiable, comme l'application des méthodes de tarifications est plus complexe sur une base agrégée que sur une cédante individuelle.

Chapitre 3 : Constitution et traitement des données

Nous avons récupéré des données sur les sinistres, les primes et les profils de risques à partir des fichiers de cotations fournies par nos cédantes dans le cadre des traités Excédent de Sinistres par risque Dommage de l'année 2020.

Les données ont été obtenues à partir de 41 cédantes de 4 pays : Le Danemark, La Norvège, la Suède et le Finlande.

En effet, même si certaines cédantes nous fournissent des informations détaillées sur la segmentation des primes comme sur la segmentation des profils de risques, cela n'est pas le cas pour toutes les cédantes. Nous devons alors agréger ces informations de façon homogène avant de pouvoir travailler dessus.

Pour cela, nous allons former 3 bases de données : une base de sinistres, une base de primes et une base de profil de risque.

I. Description des données

a. La base des sinistres

Nous avons fait le choix de retenir les variables suivantes :

- **La date du sinistre** : la date d'occurrence du sinistre. Dans le cas où seule l'année est donnée, nous supposons que le sinistre s'est produit au 1/7 de l'année.
- **Cédante** : nom de nos cédantes, cette information va nous permettre dans la suite de récupérer les primes et les profils de risques correspondants.
- **Nom de l'assuré** : l'information n'est pas toujours fournie par nos cédantes.
- **Montant total du sinistre** : From Ground Up Loss, c'est -à - dire la charge du sinistre au premier Euro ou autre monnaie, y compris la franchise.
- **Seuil de communication** : montant à partir duquel les assureurs nous communiquent les sinistres (troncature à gauche). Dans le cas où le seuil n'est pas donné, nous allons prendre simplement le minimum des montants de sinistres de cette cédante comme seuil.
- **Prime historique associée** : Oui si à l'année d'occurrence du sinistre, on a l'information sur le revenu de prime de l'assureur, Non dans le cas contraire.
- **Type de risque** : Catégoriser les sinistres par classes d'affaires : Commerciale, Particulier ou Agriculture. Pour certaines cédantes, le type de risque est déjà classifié parmi ces 3 classes. Pour d'autres, nous avons fait des choix arbitraires en s'appliquant sur les informations comme le type de bâtiment assuré, le montant assuré ou bien la cédante (certaines cédantes assurent seulement les risques particuliers, d'autres les risques commerciaux). Il est à noter que les sinistres de type « Commerciale » regroupent aussi les sinistres industriels, comme nous avons pu observer que nos cédantes couvrent peu de sinistres purement industriels et leurs montants sont en effet comparables aux sinistres de type « Commerciale ».

Lorsqu'aucune information n'est disponible sur le type de risque, nous allons importer le sinistre sous le type "Total".

- **La monnaie** : Unité monétaire : **DKK** pour les cédantes danoises, **NOK** pour les cédantes norvégiennes, **SEK** pour les cédantes suédoises et **EUR** pour les cédantes finlandaises. Nous allons dans la suite travailler principalement en DKK, comme la majorité de nos cédantes sont danoises.

Après suppression de 7 sinistres de montants nulles, nous nous retrouvons avec une base de 4036 sinistres.

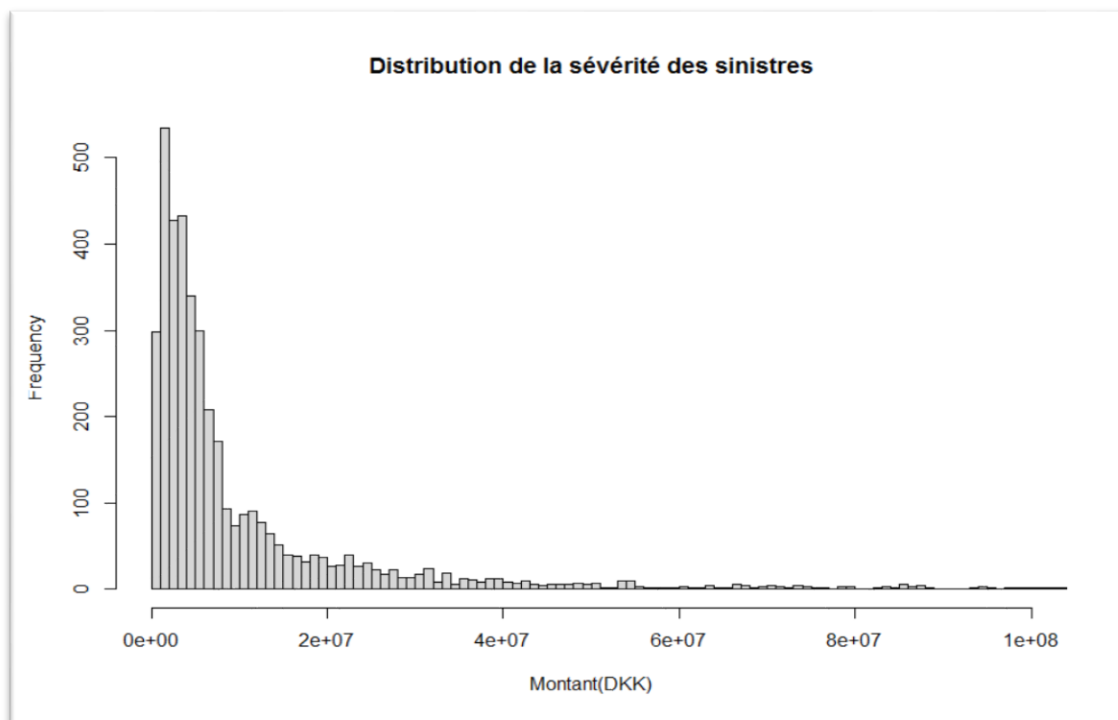


Figure 3.0 Répartition des montants de sinistres jusqu'à 100M DKK

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
1.207e+05	2.370e+06	4.950e+06	1.249e+07	1.168e+07	1.023e+09

Figure 3.2 Statistiques sur les montants de sinistres (en DKK)

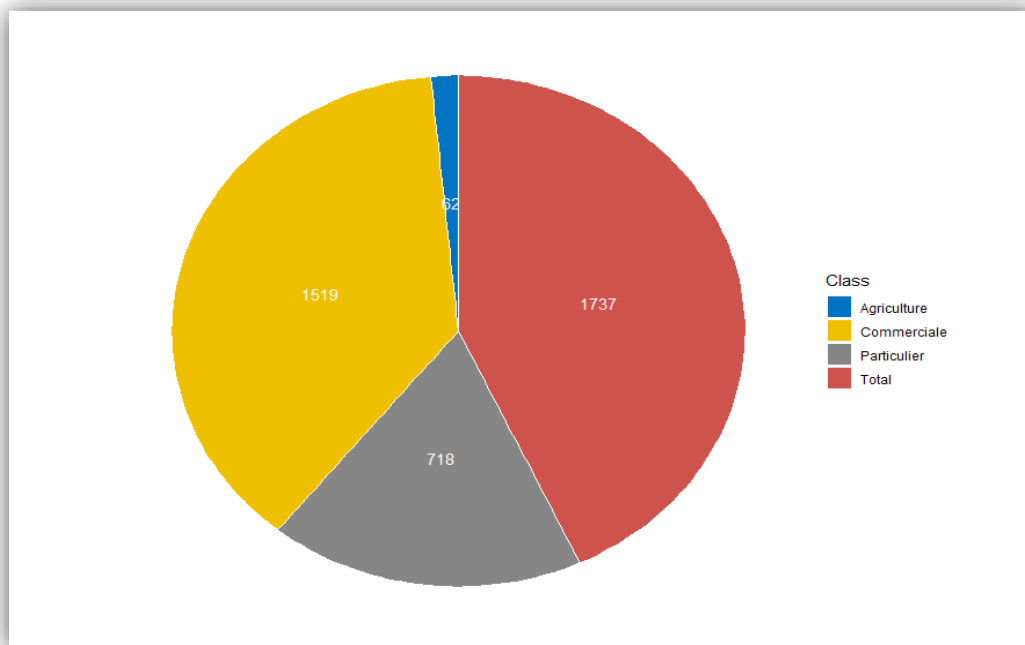


Figure 3.3 Répartition des sinistres par classe d'affaire

Nous remarquons que seule une très faible proportion des sinistres (1.5%) représente les sinistres de type « Agriculture », ce qui va justifier notre choix, lors de la séparation des bases par classe d'affaire, d'abandonner la base de classe « Agriculture ». Dans les parties ultérieures, nous allons soit enlever ces sinistres soit les reclasser dans la base « Commerciale » selon la sévérité.

b. La base des primes

Les variables que nous avons choisies de garder pour cette base sont :

- **L'année de prime** : L'année à laquelle la prime est communiquée. La première année d'expérience de prime de la cédante i correspond à $\min(n_i, m_i)$ avec

n_i : première année dont les informations sur les primes sont communiquées par la cédante i .

m_i : l'année du premier sinistre communiqué par la cédante i

En effet, lors de l'agrégation des bases, il est très important de s'assurer que nous sommes sur les mêmes plages d'expériences pour les primes et les sinistres.

- **Assiette de prime** : Le revenu de prime brute de la cédante
- **Type de risque** : De même que pour la base des sinistres, nous avons des primes « Commerciale », « Particulier », « Agriculture » et « Total »
- **Cédante** : nom de la cédante

- **Nombre de polices** : L'information n'est souvent communiquée que pour les années 2020 et 2019
- **Monnaie** : l'unité monétaire

Pays	Prime	Prime_Marche	Proportion
Denmark	13176176304	18518605080	0.7115102
Norway	16933624331	17727350000	0.9552259
Sweden	14972231442	28576180000	0.5239410
Finland	332380011	833750000	0.3986567

Figure 3.4 Part de primes par pays

Le tableau 3.4 détaille les parts de primes pour chaque pays de notre base, et les comparent aux parts de primes du marché. Notons que nous ne sommes pas beaucoup exposés aux sinistres suédoises et finlandaises.

c. La base des profils de risques

Il s'agit simplement de la concaténation des profils de risques de chacune de nos cédantes. Les variables retenues sont :

- **Limite de bandes** : détermine les limites inférieures et supérieures de la tranche du TSI ou EML.
- **TSI ou EML** : indique si la cédante nous communique la **Somme Assurée (Total Sum Insured)** ou bien l'EML (Estimated Maximum Loss). L'EML représente la perte maximum dans les conditions réalistes, sa valeur est souvent inférieure à la Somme Assurée. Cependant, la détermination de l'EML demande un travail approfondi des experts et la méthodologie varie beaucoup d'un assureur à un autre. Dans le cadre de notre étude, nous allons seulement construire des courbes d'expositions à partir des Sommes Assurées.
- **Type de risque** : De même que pour la base des sinistres et la base de prime, nous avons des profils de type « Commerciale », « Particulier », « Agriculture » et « Total ».
- **Nombre de polices** : le nombre de risques couverts par bande de Somme Assurée ou EML
- **TSI par tranche** : le montant total de la Somme Assurée dans la tranche. Il est à noter que lorsque nos cédantes séparent les Somme Assurées par bâtiment et contenu dans leur profil de risque, nous importons tout simplement la somme des deux.
- **Prime par tranche** : cette prime n'est pas toujours communiquée par nos cédantes.
- **Cédante** : nom de notre cédante
- **Monnaie** : l'unité monétaire

II. Traitement des données

Avant de construire les courbes de marché, nous devons nous assurer que les données sont fiables et utilisables. Pour cela nous avons tout d'abord supprimé les cédantes dont seul l'EML est communiquée ou bien les cédantes dont les profils de risques ne fournissent pas des informations complètes sur les primes.

a. Gross up des primes du profil de risque

En reprenant la nouvelle base avec des profils de risques complets nous allons maintenant sommer les primes de toutes les tranches pour chaque cédante et comparer à la prime de celle-ci à l'année 2020. Nous évaluons alors :

$$r_i = \frac{\sum_{k=1}^{k=l_i} p_{ik}}{P_i}$$

l_i Le nombre de tranches dans le profil de risque de la cédante i

p_{ik} La prime de la tranche k de la cédante i

P_i Le revenu de prime nette de la cédante i pour l'année 2020.

Nous considérons que le profil de risque est fiable si :

$$r_i \in [0.4, 1.1]$$

En effet, les primes communiquées par nos cédantes dans le profil de risque ne sont pas toujours données sur une année entière. Beaucoup de cédantes communiquent le profil de risque au 2^{ème} trimestre, ce qui va donner un rapport r_i proche de 0.5. Pour les autres cédantes, nous allons faire un Gross Up proportionnel en utilisant le coefficient $\frac{1}{r_i}$

Nous allons tout simplement multiplier les nombres de risques, les TSI et les primes par tranche des cédantes concernées par ce coefficient pour homogénéiser la base de prime et la base des profils de risque. Notons que la transformation du nombre de risques est aussi nécessaire pour s'assurer que la Somme Assurée moyenne reste dans la tranche.

b. Transformation des limites de tranches EML en TSI

Certaines de nos cédantes communiquent à la fois le TSI et l'EML. Dans ces cas-là, il est nécessaire de s'assurer que les limites de tranches correspondent bien à la valeur TSI et non pas à celles en EML. Pour cela, nous introduisons calculer l'ASI (Average Sum Insured) défini de manière suivante :

$$ASI = \frac{TSI}{NR}$$

Avec NR le nombre de risques. Si pour une cédante, la valeur de l'ASI est à l'extérieur des limites pour la majorité des tranches alors ces limites sont des EML. Nous allons devoir faire une régression afin de transformer ces limites de tranches en TSI. Pour chaque cédante i et pour la tranche k , calculons le rapport :

$$\frac{EML_{ik}}{TSI_{ik}}$$

Nous allons ensuite faire le fit de ces rapports pour chaque cédante. En fonction de la cédante et de nos critères, la courbe obtenue peut être logarithmique, linéaire ou bien quadratique .

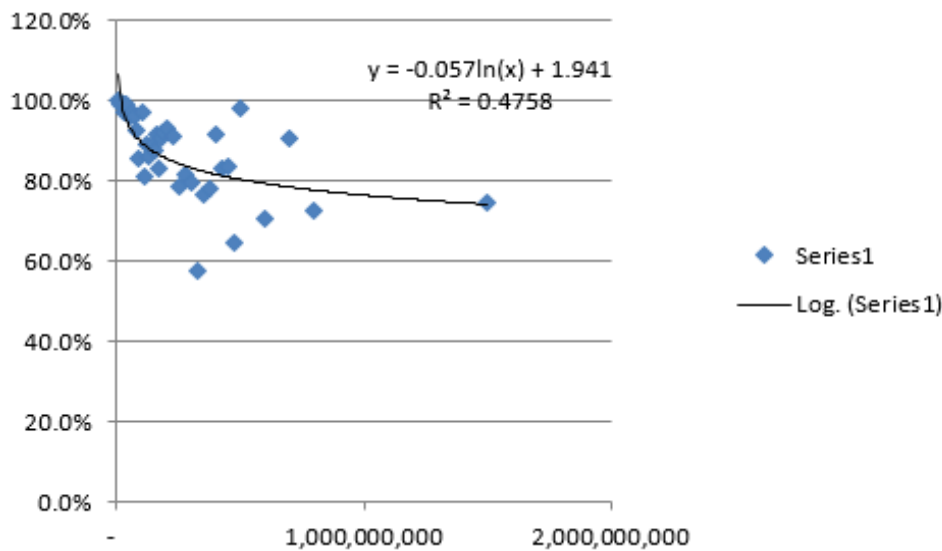


Figure 3.4 Fit du rapport EML sur TSI d'une cédante

Nous pouvons remarquer que les valeurs sont décroissantes avec l'augmentation des limites de tranches. En effet , pour les sites de tailles plus petites, nous avons beaucoup plus de chance d'avoir une perte totale, c'est-à-dire une valeur EML qui se rapproche du TSI. Cela est beaucoup moins probable avec un site de très grande taille ou généralement la valeur EML sera nettement inférieure à celle du TSI due à la faible probabilité de la perte totale.

Il nous reste simplement à multiplier chaque limite de tranche $BEML_k$ par le facteur

$\frac{1}{f(BEML_k)}$ avec f la fonction définie par le fit du rapport EML sur TSI. Nous obtenons ainsi les nouvelles limites de tranches TSI. Dans la majorité des cas, l'ASI est bien comprise entre ces nouvelles limites, même s'il y a des exceptions liées à des variations importantes entre l'EML et le TSI. En effet, nous n'avons pas d'informations exactes sur la méthodologie utilisée par chaque cédante, et certaines cédantes nous fournissent des valeurs de EML beaucoup plus faibles que leurs valeurs de TSI.

c. Etude des IPC (Indices des Prix à la Consommation)

Dans le cadre de la tarification par expérience, nous avons besoin de redresser les sinistres et les primes historiques, autrement dit de calculer les sinistres et les primes *as if*. Chez Odyssey Re, nous utilisons les indices des prix à la consommation pour ces revalorisations. L'IPC est un instrument de mesure de l'inflation, il permet de mesurer la variation moyenne de prix des produits consommés par les ménages entre deux périodes données.

Annee	DKK	Finland	Norway	Sweden
2000	126.8124	127.7084	131.2364	138.6695
2001	129.7771	131.0012	135.1790	142.0059
2002	132.9234	133.0596	136.9184	145.0710
2003	135.6817	134.2271	140.3247	147.8646
2004	137.2480	134.4782	140.9625	148.4171
2005	139.7429	135.3172	143.1222	149.0897
2006	142.4318	137.4372	146.4560	151.1176
2007	144.8436	140.8878	147.4996	154.4606
2008	149.7918	146.6162	153.0367	159.7695
2009	151.7462	146.6162	156.3995	158.9795
2010	155.2529	148.3523	160.1826	160.8205
2011	159.5358	153.4212	162.2409	165.5826
2012	163.3614	157.7298	163.3715	167.0536
2013	164.6504	160.0615	166.8358	166.9796
2014	165.5791	161.7281	170.2421	166.6797
2015	166.3276	161.3918	173.9383	166.6017
2016	166.7434	161.9675	180.1131	168.2415
2017	168.6561	163.1887	183.4904	171.2606
2018	170.0283	164.9574	188.5636	174.6062
2019	171.3174	166.6467	192.6511	177.7215
2020	172.6064	168.3360	196.7387	180.8367

Figure 3.5 Valeurs des IPC en fonction du pays et de l'année

Etudions la fiabilité de ces indices à travers nos bases de données. Commençons par calculer les variations relatives suivantes :

- $\Delta CPI_k = \frac{CPI_k}{CPI_{k-1}} - 1$ CPI_k le CPI à l'année k
- $\Delta X_k = \frac{E(X_k)}{E(X_{k-1})} - 1$ X_k le vecteur des sinistres survenus l'année k

Comme les cédantes nous donnent des sinistres à des seuils de communications différents, la variation des sinistres est assez importante. Pour combler cet effet, nous avons décidé de calculer les variations des sinistres seulement pour ceux dont les montants sont supérieurs à 5 000 000, et le seuil de communication est inférieur à 5 000 000. Le choix de prendre les cédantes qui donnent un seuil de communication inférieur à 5 000 000 permet d'éliminer les cédantes « extrêmes » qui communiquent seulement les sinistres de montants très élevés. Cette restriction réduit cependant considérablement le nombre des sinistres pour les années dont nous n'avons pas beaucoup d'expérience, ce qui va rendre les variations très volatiles. Nous décidons ainsi de comparer la régression linéaire des variations de sinistres au CPI, plutôt que leurs valeurs exactes.

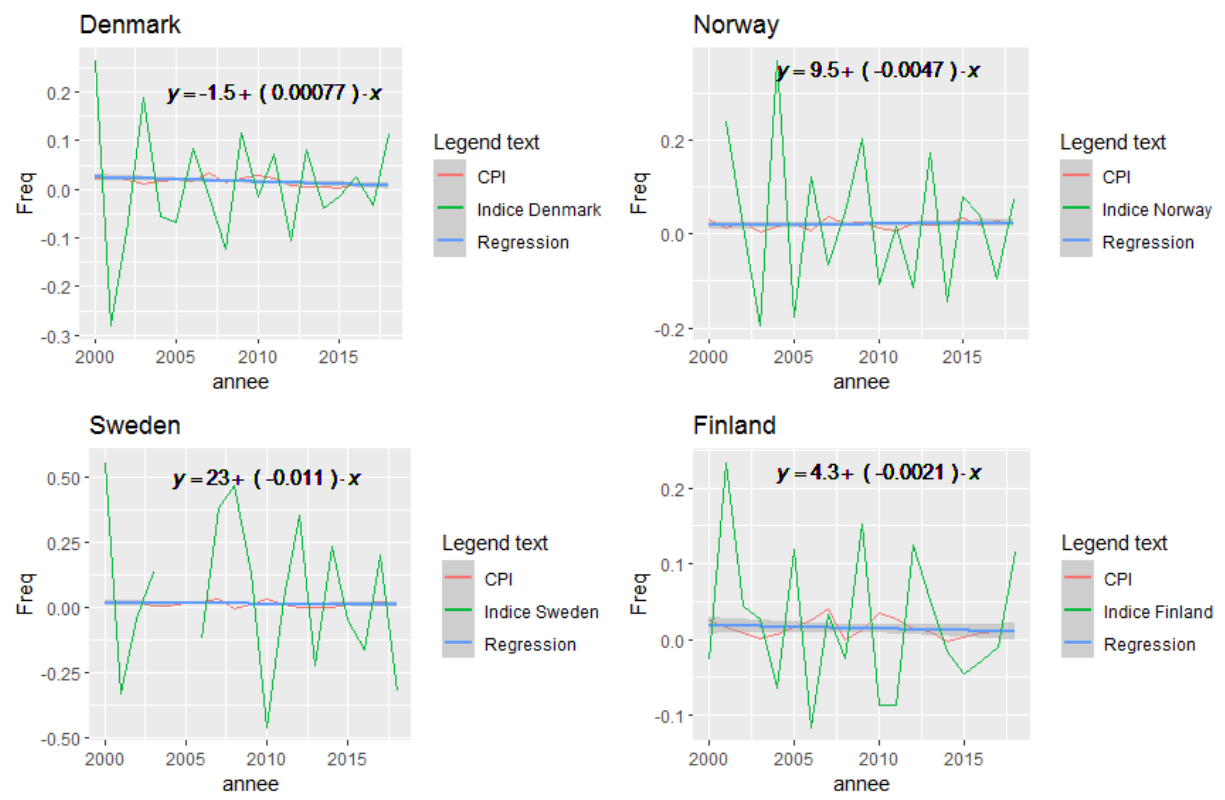


Figure 3.6 Régression linéaire des variations de sinistres

Notons que les variations de sinistres (en vert) sont beaucoup plus volatiles pour la Finlande et la Suède que pour la Danemark et le Norvège comme nous avons peu de cédantes provenant de ces deux pays dans notre base. Observons aussi que pour la Danemark et la Norvège, les plus grandes variations (supérieures à 20%) concernent les sinistres des années 2000, ce qui s'explique par la faible sinistralité due aux manques d'informations.

De manière générale nous pouvons voir que les écarts entre les régressions linéaires et les variations du CPI sont assez négligeables, ce qui va justifier dans la suite l'utilisation du CPI pour le calcul du Burning Cost.

d. Construction de la base « Commerciale » et « Particulier »

Avant de pouvoir construire les courbes de taux de primes, nous allons séparer les bases par classes d'affaires. Comme indiqué dans la partie I.a, nous n'allons pas chercher à créer une base « Agriculture ». Pour séparer la base agrégée, nous allons sélectionner seulement les cédantes qui ont simultanément :

- Des sinistres classifiés en « Commerciale » ou « Particulier »
- Des primes classifiés en « Commerciale » ou « Particulier »
- Des profils de risques classifiés en « Commerciale » ou « Particulier »

Beaucoup de nos cédantes ne satisfont pas ces trois conditions simultanément. En effet, plusieurs cédantes classifient les sinistres mais pas les primes ni les profils de risques. Après avoir filtré les cédantes, nous avons décidé de ne garder seulement les sinistres entre les années 2000 et 2020. Les sinistres sont ensuite filtrés par la variable « Prime historique associée » comme nous ne souhaitons garder que les sinistres dont à la date de survenance, nous avons des informations sur la prime. Puis, nous rajoutons aux bases classifiés une variable Montant_DKK qui permet de convertir les montants selon les taux suivants.

Monnaie	Montant	Montant_DKK
NOK	1	0.73
SEK	1	0.71
EUR	1	7.44

Figure 3.8 Taux de conversion utilisés

Même si notre hypothèse permet de rajouter des sinistres, le tableau 3.9 montre une baisse considérable de notre fréquence de sinistres ainsi que le nombre des cédantes suite à la séparation des bases. Ceci-dit, nous allons voir dans les parties ultérieures, à l'aide d'une étude plus détaillée des fréquences, que ces données sont suffisantes pour la construction de nos courbes d'expositions dans le cadre de ce mémoire.

Base	Nombre_cedantes	Nombre_sinistres
Initiale	41	4039
Commerciale	10	674
Particulier	9	333

Figure 3.9 Comparaison de la base des sinistres agrégée et les bases classées

Ce tableau compare la part des primes des cédantes dans la base Commerciale à celle du marché :

Pays	Prime	Prime_Marche	Proportion
Denmark	9130144460	18518605080	0.4930255
Norway	4423255115	17727350000	0.2495159
Sweden	0	28576180000	0.0000000
Finland	0	833750000	0.0000000

Figure 3.10 Part de primes par pays

Notons que la prime ci-dessus n'est pas la prime commerciale, mais bien la prime totale des cédantes sélectionnées. Comparer seulement la prime commerciale avec la prime marché n'a pas de sens, car nous n'avons pas d'information sur la part de prime de type « Commerciale » du marché.

Nous pouvons aussi remarquer qu'aucune cédante suédoise et finlandaise n'a été sélectionnée dans notre base commerciale. En effet, les deux cédantes suédoises nous fournissent les valeurs d'EML au lieu du TSI, et la seule cédante finlandaise de type « Commerciale » tronque à 5M EUR le profil de risque, ce qui rend leurs profils de risques inutilisables.

En effet, alors que la majorité de la prime acquise par la cédante finlandaise provient des risques de montant entre 0 et 5M EUR, nous n'avons aucune information du profil de risque au niveau de cette bande. Le profil de risque n'étant pas assez granulaire, il serait judicieux d'exclure cette cédante de la

Chapitre 4 : Premières courbes Burning Cost de marché

Ayant à disposition les bases de données traitées et séparées, nous allons dans ce chapitre introduire la méthode de construction de la courbe Burning Cost du marché et présenter les premières courbes obtenues.

Ces courbes serviront de courbes de références pour nos estimations des paramètres des courbes d'expositions. Si la méthode ressemble beaucoup à la méthode de tarification par Burning classique, il y a quand même des subtilités à prendre en compte comme nous travaillons sur une base agrégée et non pas sur une seule cédante.

I. La méthode générale

a. Construction de la courbe Burning Cost de marché

A partir de nos données traitées et séparées, nous allons tarifier plusieurs tranches XS de faibles portées en utilisant la méthode du Burning Cost. Nous cherchons à observer la décroissance du taux en augmentant la rétention des programmes XS.

La courbe de marché du Burning Cost est construite de manière suivante :

- Etape 1 : Définir les limites de franchises et une portée constante pour chaque classe d'affaire. Notons $(A_0, A_1 \dots A_i \dots A_n)$ le vecteur des franchises et d la portée constante, de telle manière que :

$$\forall i \in [1, n] \quad A_i = A_0 + di$$

Nous allons chercher à calculer pour toutes les valeurs de i , le taux Burning Cost de la tranche d xs A_i

- Etape 2 : Mise en as if les sinistres et les primes en utilisant le CPI. Le principe est présenté dans le chapitre 2. Nous commençons par transformer les CPI (Figure 3.5) en ratio de développement à appliquer à nos primes et nos sinistres. Pour chaque pays, nous allons diviser le CPI de l'année de cotation (2020) par les autres valeurs du CPI. Nous obtenons le tableau suivant :

Annee	DKK	Finland	Norway	Sweden
2000	1.361117	1.318129	1.499116	1.304084
2001	1.330023	1.284996	1.455394	1.273445
2002	1.298540	1.265118	1.436905	1.246539
2003	1.272142	1.254114	1.402025	1.222988
2004	1.257625	1.251772	1.395681	1.218435
2005	1.235172	1.244010	1.374620	1.212939
2006	1.211853	1.224822	1.343329	1.196662
2007	1.191675	1.194824	1.333825	1.170762
2008	1.152309	1.148141	1.285565	1.131860
2009	1.137468	1.148141	1.257924	1.137484
2010	1.111776	1.134704	1.228215	1.124463
2011	1.081929	1.097215	1.212633	1.092124
2012	1.056593	1.067243	1.204241	1.082507
2013	1.048321	1.051696	1.179236	1.082987
2014	1.042441	1.040858	1.155641	1.084936
2015	1.037750	1.043027	1.131083	1.085443
2016	1.035162	1.039320	1.092307	1.074864
2017	1.023422	1.031542	1.072202	1.055915
2018	1.015163	1.020482	1.043355	1.035683
2019	1.007524	1.010137	1.021217	1.017529
2020	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

Figure 4.1 ratio de revalorisation

Pour la revalorisation, nous avons simplement à repérer l'année de survenance et la monnaie du sinistre (ou de la prime), puis multiplier le montant par le ratio correspondant. Remarquons que les ratios sont bien croissants au cours du temps, car un sinistre du passé revalorisé coute plus cher s'il survenait aujourd'hui.

- Etape 3 : Calculer le coût à charge du réassureur pour chaque sinistre pour les tranches de réassurance d xs A_i pour i allant de 1 à n . Nous obtenons :

$$Y_k^i = \min(\max(X_k^i - A_i, 0), d)$$

- Y_k^i le cout à charge du réassureur du k -ième sinistre pour la tranche d xs A_i
- X_k^i la valeur as if du k -ième sinistre de la base prise en compte pour la tranche d xs A_i . En effet nous allons voir que notre base va évoluer en fonction de la tranche XS prise en compte. Le k -ième sinistre d'une tranche d xs A_i sera donc différent de celui de la tranche d xs A_j
- A_i la priorité
- d la portée (constante pour toutes les tranches)

- Etape 4 : Calcul de la charge totale pour toutes les tranches d xs A_i

$$S_i = \sum_{k=1}^{n_i} Y_k^i$$

- S_i la charge totale de la tranche d xs A_i
 - n_i nombre de sinistres de la base défini par la tranche d xs A_i
- Etape 5 : Calculer le taux Burning Cost pour toutes les tranches d xs A_i

$$\tau_{BC}^i = \frac{S_i}{P_i}$$

- τ_{BC}^i le taux de Burning Cost de la tranche d xs A_i
- P_i la prime totale de notre base agrégée associée à la tranche d xs A_i

Notons ici que notre base est un agrégat de plusieurs cédantes, le calcul de la prime totale doit être faite avec attention. En effet, comme indiqué précédemment, le choix des cédantes varie en fonction de la tranche d xs A_i . Nous allons donc devoir faire attention à ne pas sommer directement tous les montants dans notre base de primes mais à ne prendre en compte que les primes des cédantes concernées.

Pour nos premières courbes, nous allons prendre les paramètres suivants pour les franchises et la portée :

- Pour la base « Commerciale » : $A_0 = 2\,000\,000$ (DKK), $n = 380$ et $d = 100\,000$ (DKK)
Nous allons computer alors le Burning Cost pour les franchises de 2 000 000 à 40 000 000 DKK, par pas de 100 000.
- Pour la base « Particulier » : $A_0 = 2\,000\,000$ (DKK), $n = 131$ et $d = 100\,000$ (DKK)
Nous allons computer alors le Burning Cost pour les franchises de 2 000 000 à 15 000 000 DKK, par pas de 100 000.

b. Filtration des cédantes pour éliminer l'effet de la troncature à gauche

Comme indiquée dans la partie description des données, nos cédantes nous fournissent des sinistres à partir d'un certain seuil. Nous perdons ainsi toute information avant ce seuil, par effet de troncature à gauche. Pour une franchise A_i , il est nécessaire de sélectionner seulement les cédantes qui donnent des seuils de communications inférieures à A_i . Si nous prenons en compte les cédantes qui communiquent des sinistres à un seuil supérieur à la franchise, la perte d'information à gauche entraînera une sous-estimation des coûts de la tranche, car nous prenons que les sinistres de montants élevés, ce qui va biaiser la moyenne réelle des sinistres.

En effet, il est évident que les cédantes qui communiquent un seuil $l > A_i$ ne vont pas souscrire à une franchise A_i . Une démarche envisageable mais pas menée dans ce mémoire, est tout simplement de considérer le seuil de communication maximal des

cédantes, et supprimer les sinistres en as if inférieurs à ce seuil. Nous avons décidé cependant de garder un maximum d'information sur nos bases de sinistres, étant donné que la séparation des données a considérablement réduit le nombre des cédantes et des sinistres.

L'effet conservatif de la troncature à gauche sur les expositions des sinistres a aussi été démontré en détail dans le mémoire de Ramachandra LOLJEEH sur les estimations de courbes d'exposition en cas de données incomplètes. Le même problème est récurrent dans le cas de la construction d'une courbe d'exposition empirique, c'est-à-dire que la prise en compte seulement des sinistres « importants » entraînent la construction d'une courbe plus conservatrice pour la tarification. Dans ce mémoire, nous utilisons la courbe Burning Cost comme courbe de référence pour estimer les paramètres de la courbe d'exposition, il est donc important dans la suite de reprendre les mêmes bases pour chaque seuil lors des calculs par exposition.

En effet, seule l'information sur le seuil de communication n'est pas suffisante, parce que nous n'avons pas pris en compte l'inflation des sinistres. Nous devons nous assurer que tous les sinistres dans la zone de troncature à gauche de la cédante, une fois revalorisés en as-if, sont toujours inférieurs à la franchise. Les coûts de ces sinistres seront nuls et n'auront donc pas d'impact sur le taux Burning Cost.

Pour cela, nous avons calculé la moyenne des ratios *as if* des 4 pays à l'année 2000, l'année à laquelle les ratios de revalorisations atteignent le max. Nous obtenons une moyenne de 1.37. En prenant l'inverse de cette valeur, nous concluons que les seuils de communications de la franchise A_i doivent être inférieurs à $0.72A_i$. Par principe de prudence, nous avons décidé de prendre un ratio inférieur, 0.65.

En résumé, nous avons décidé de filtrer les cédantes en fonction des tranches XS afin d'éliminer l'effet de la troncature à gauche sur nos courbes de marché. Pour une tranche $d \text{ xs } A_i$, nous allons calculer le Burning Cost seulement pour les cédantes dont le seuil de communication est inférieur ou égal à $0.65A_i$.

Il est à noter que nous allons rajouter des cédantes au fur à mesure tout en gardant les cédantes déjà existantes dans la base. A partir d'un certain seuil, nous allons donc récupérer la base complète.

Nous allons ainsi observer des « sauts » de nos courbes sur les tranches dont les nouvelles cédantes, à seuil de communication supérieur, viennent « s'ajouter » dans la base. Le fait de ne pas observer une courbe lisse n'est pas très important, car nous devons observer les mêmes tendances sur nos courbes d'exposition.

II. Premiers résultats

a. Etude des tendances de sinistres par tranche d'XS

Afin de savoir si la sélection de nos franchises est cohérente pour estimer la courbe d'exposition du marché, nous allons étudier la fréquence annuelle des sinistres qui sont en excès de chaque franchise. Nous nous attendons à voir une tendance décroissante,

comme les sinistres de montants faibles vont toucher de moins en moins les tranches d'XS élevées. Nous verrons aussi des sauts de fréquences, liés au rajout des cédantes au fur à mesure de l'augmentation de la franchise. Etant donné que nos cédantes n'ont pas toutes les mêmes plages d'années d'expériences, nous allons calculer leur moyenne pour chaque tranche. Nous obtenons :

$$n_i = \frac{\sum_{k=1}^{m_i} c_k}{m_i} \quad \text{et} \quad f_i = \frac{\text{card}(H_i)}{n_i}$$

- n_i la moyenne des plages d'années d'expériences de toutes les cédantes de la tranche d xs A_i
- c_k nombre d'années d'expériences de la k -ième cédante
- m_i nombre de cédante de la tranche
- f_i fréquence que l'on cherche à étudier
- H_i l'ensemble des sinistres qui sont en excès de la franchise A_i

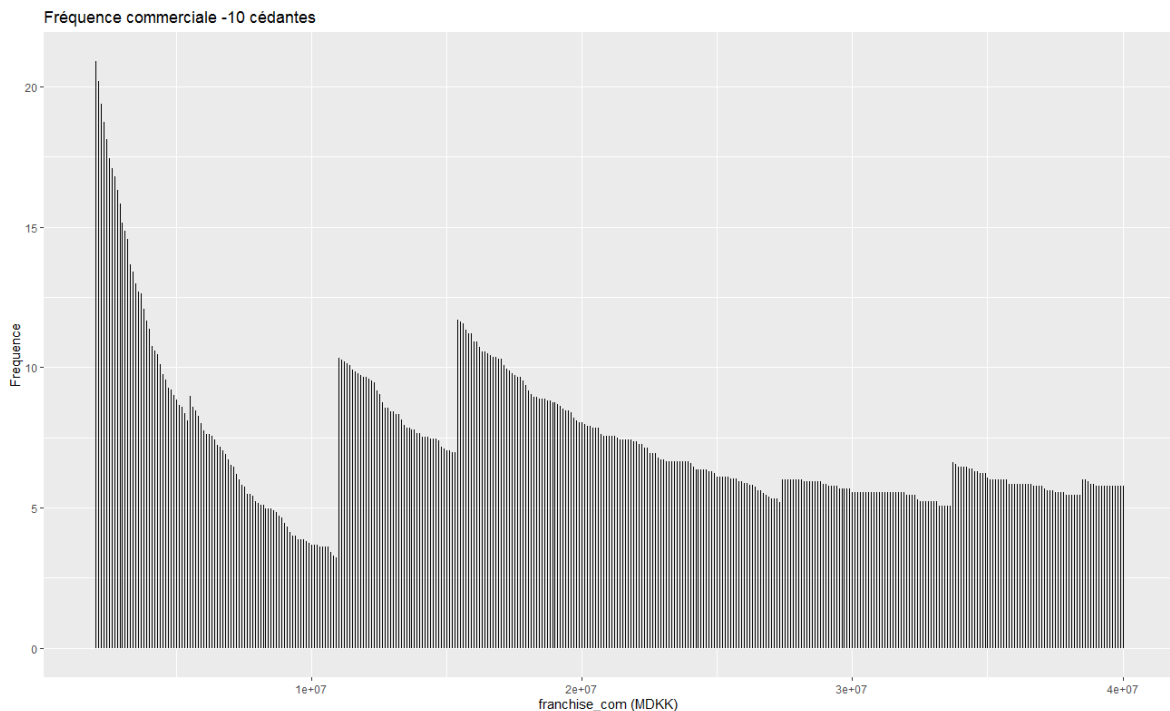


Figure 4.2 Fréquence de la base commerciale à 10 cédantes

Nous obtenons bien des tendances strictement décroissances avec six sauts. Au seuil de communication de 2M DKK, nous avons deux cédantes dans la base. Les autres « point de rajout » de cédantes sont :

- 3 500 000 DKK : une cédante
- 5 500 000 DKK : une cédante
- 11 000 000 DKK : deux cédantes correspondant au deuxième saut de fréquence
- 15 400 000 DKK : une cédante

- 27 400 000 DKK : une cédante correspondant au quatrième saut
- 33 700 000 DKK : une cédante correspondant au cinquième saut
- 38 500 000 DKK : une cédante correspondant au dernier saut

L'évolution du nombre de cédantes en fonction de la rétention est présentée par ce graphique :

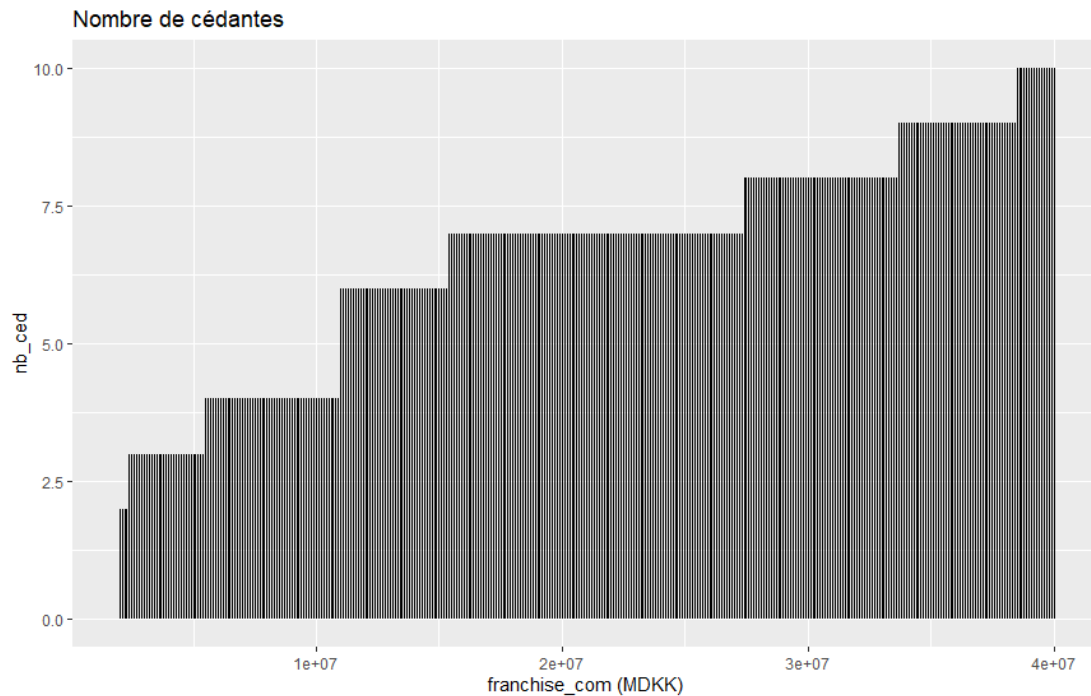


Figure 4.3 Nombre de cédantes en fonction de la rétention

Chaque saut de fréquence correspond forcément à un rajout de fréquence, mais la réciproque n'est pas forcément vraie. En effet, le rajout d'une cédante n'implique pas forcément un saut de fréquence si la sinistralité de cette cédante est assez comparable à celle du marché. Nous nous retrouvons avec une moyenne de 5.7 sinistres annuel à la franchise de 40M DKK. La fréquence étant assez importante, nous allons dans les parties ultérieures augmenter la franchise jusqu'à l'obtention d'une fréquence plus faible, afin de mieux optimiser la courbe d'exposition.

Nous pouvons aussi observer l'évolution de la part de prime « capturée » au fur à mesure de l'augmentation de la rétention à travers le graphique suivant :

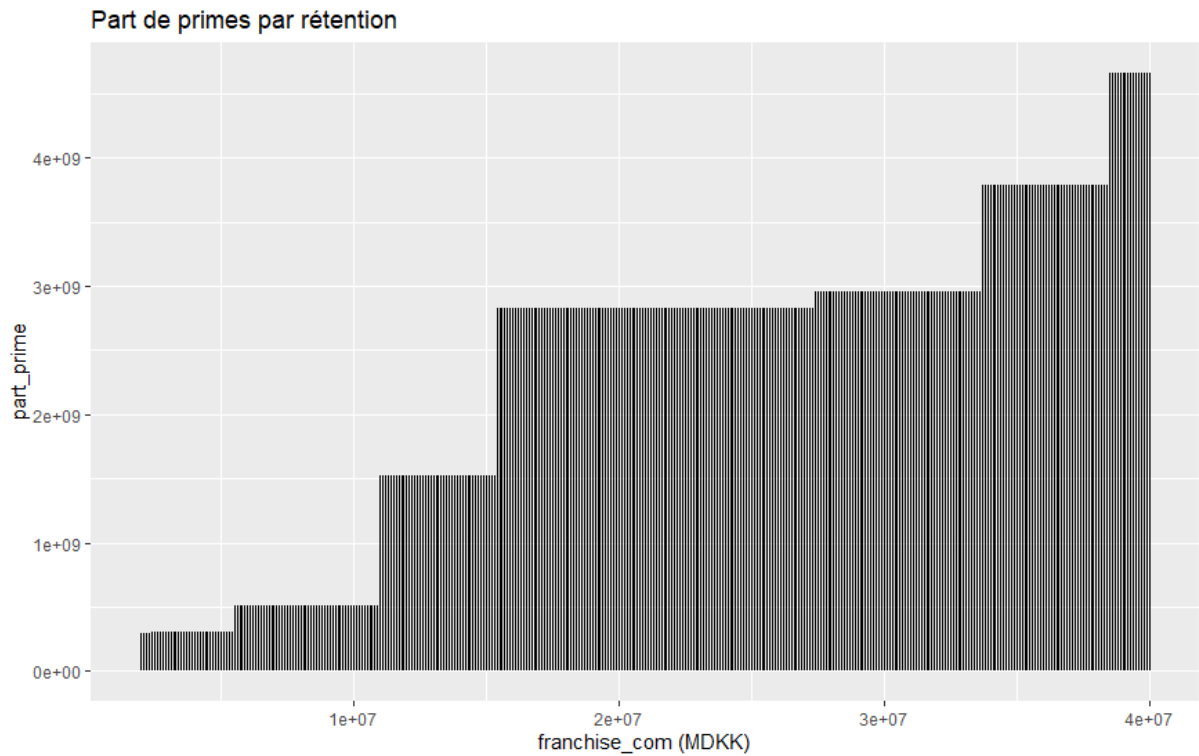


Figure 4.4 L'assiette de prime de la base « Commerciale » en fonction de la rétention

La part de prime n'est pas très significative pour les rétentions de moins de 10M euros, ce qui est logique puisque les cédantes qui donnent les sinistres à un seuil plus faible ont forcément un part de prime petit relativement au marché.

Nous allons dans la suite faire le même travail pour la base « Particulier ».

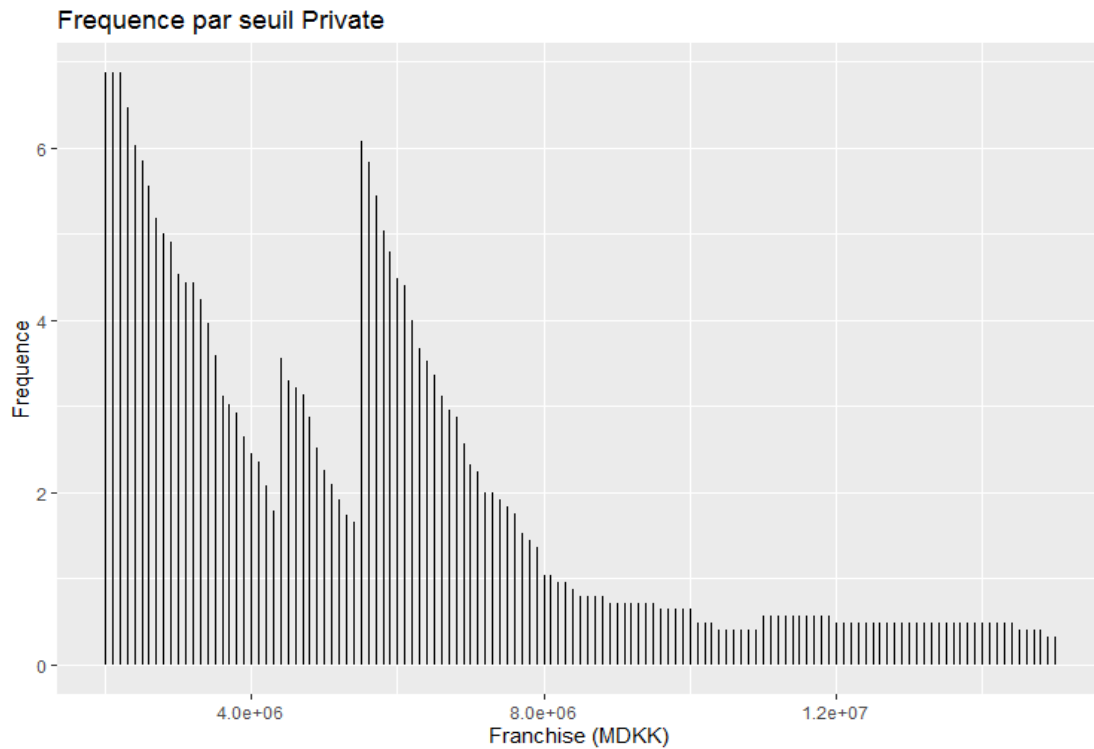


Figure 4.5 Fréquence de la base « Particulier » à 10 cédantes

Contrairement à la base “Commerciale”, nous remarquons que les fréquences ont une décroissance plus « rapide », ce qui est logique car les pertes liées aux sinistres particuliers sont généralement beaucoup moins importantes. Nous considérons dans la suite la possibilité de baisser la franchise pour l’optimisation, au vu de la faible fréquence annuelle (inférieure à 1) pour les seuils au-delà de 8M DKK.

A 2M DKK, nous avons quatre cédantes dans la base. Les seuils de rajout de cédantes sont :

- 2 500 000 DKK : 2 cédantes correspondant au premier grand saut
- 4 400 000 DKK : 1 cédante correspondant au 2^{ème} saut
- 5 500 000 DKK : 2 cédantes correspondant au 3^{ème} saut.
- 11 000 000 DKK : 1 cédante correspondant au dernier saut.

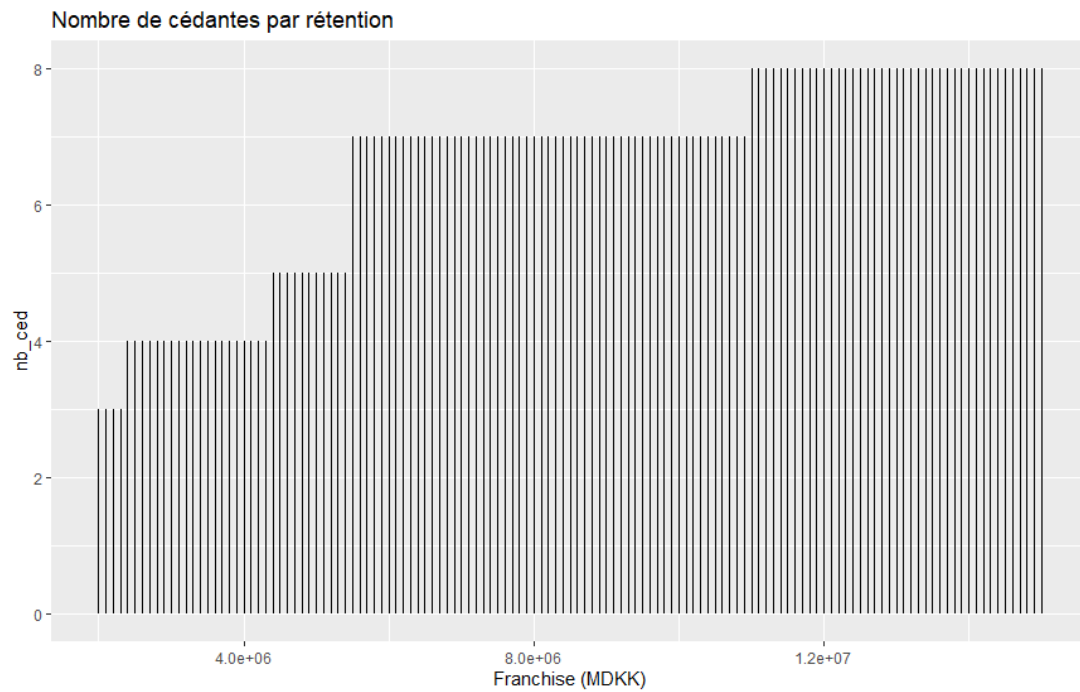


Figure 4.6 Nombre de cédantes par rétention

Comme pour la base Commerciale, les sauts de du nombre de cédantes ne se traduisent pas toujours des sauts de fréquence.

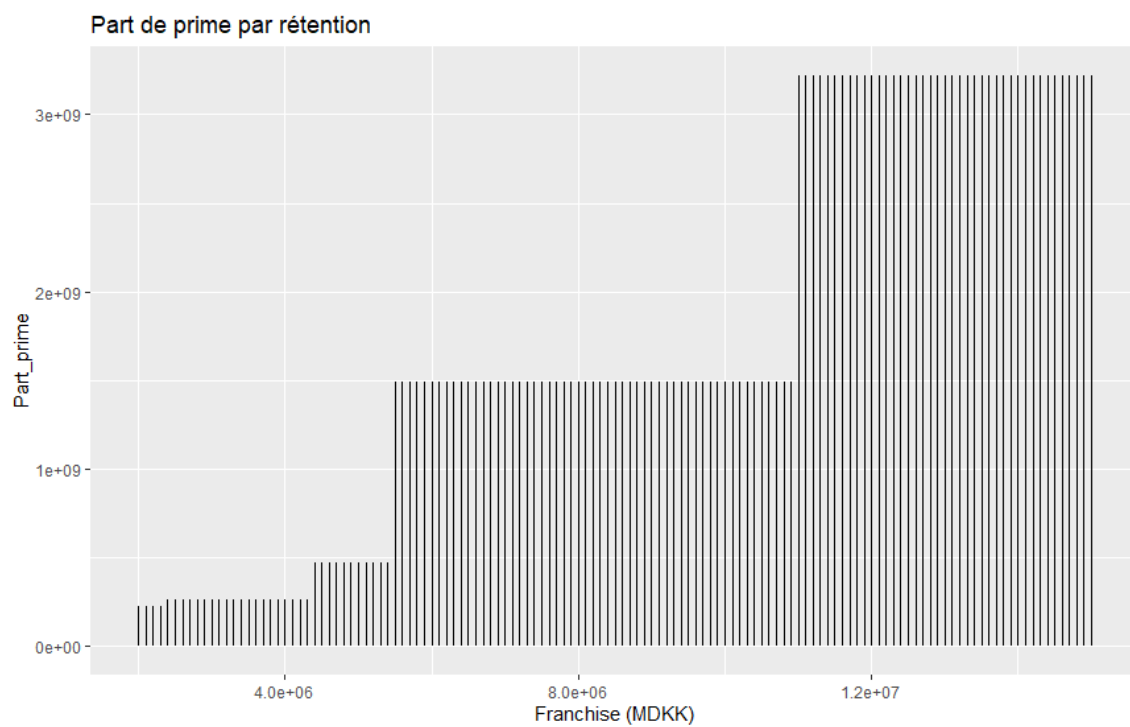


Figure 4.7 Part de primes par rétention de la base « Particulier »

Les sauts des parts de primes de la base « Particulier » sont aussi plus importants, relativement à la part de prime totale de la base. Nous pouvons remarquer que la cédante qui est rajouté au seuil de 11M DKK a quasiment doublé la part de prime.

b. Courbe Burning Cost de marché commerciale

Nous obtenons la courbe suivante pour notre base Commerciale à 10 cédantes :

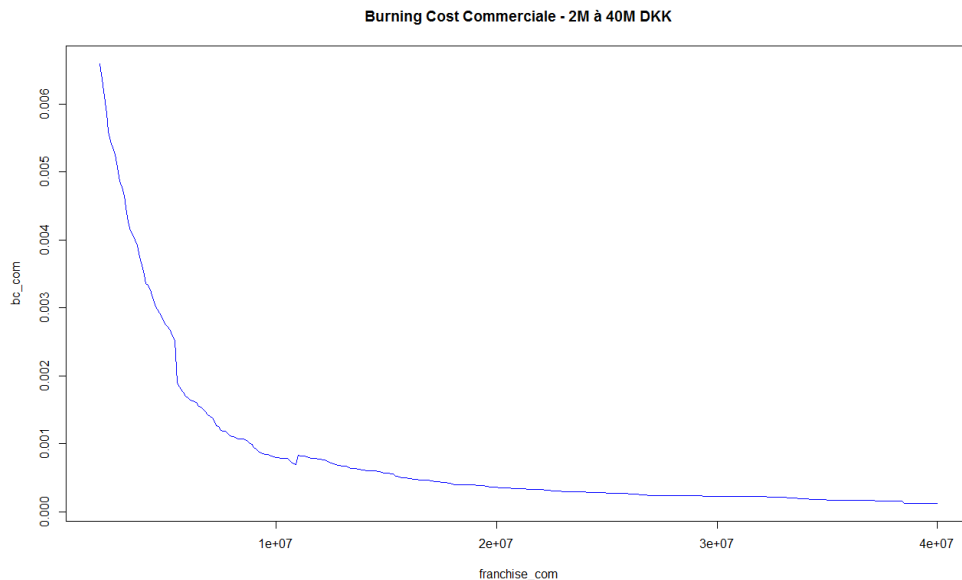


Figure 4.8 Courbe Burning Cost de marché 2M à 40M DKK

Nous observons bien une décroissance logarithmique avec, de même que pour la fréquence, des sauts possibles aux endroits où de nouvelles cédantes viennent se rajouter dans la base.

Pour étudier plus précisément la décroissance, nous avons eu l'idée de faire le rapport de $\frac{\tau_{BC}^i}{\tau_{BC}^0}$ et en faire le fit correspondant. Nous allons faire le même calcul lors de la construction de la courbe d'exposition. De cette manière, nous débutons les 2 courbes à même valeur, et nous optimisons les décroissances plutôt que les valeurs des taux. Nous obtenons :

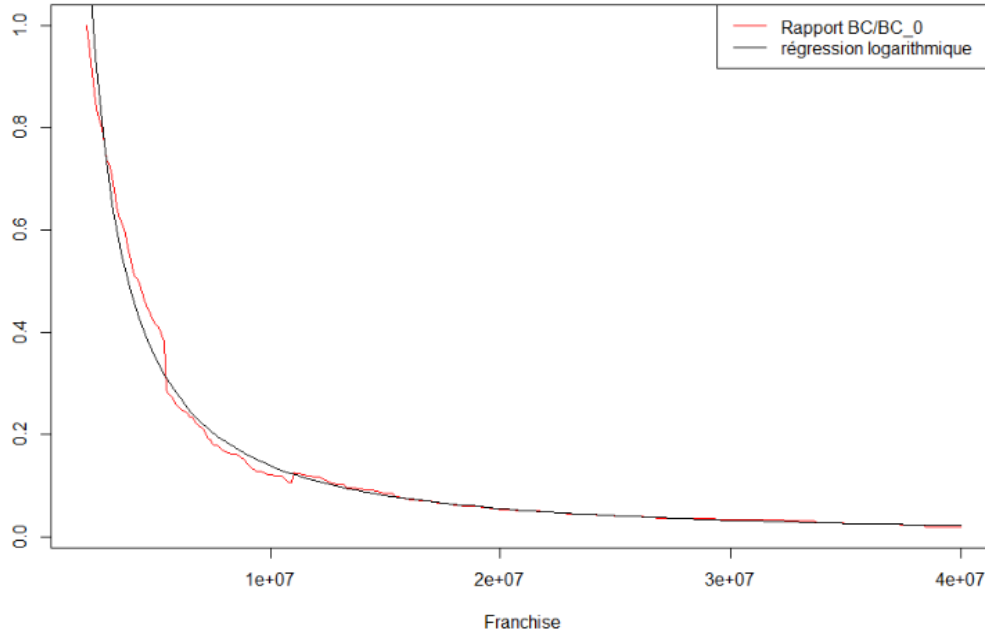


Figure 4.9 Courbe de Burning Cost du marché Commerciale normalisé

Nous avons ensuite étudié la décroissance relative en fonction de la franchise à travers le rapport $\frac{\tau_{BC}^i}{\tau_{BC}^{i-1}}$. Cependant, nous avons pu observer que la décroissance relative était très volatile et n'avait pas de tendance particulière.

Nous s'attendions à voir une forte décroissance pour les faibles rétentions, et une décroissance plus faible pour les rétentions plus élevées. Cependant, les multiples sauts nous empêchent de faire une analyse correcte.

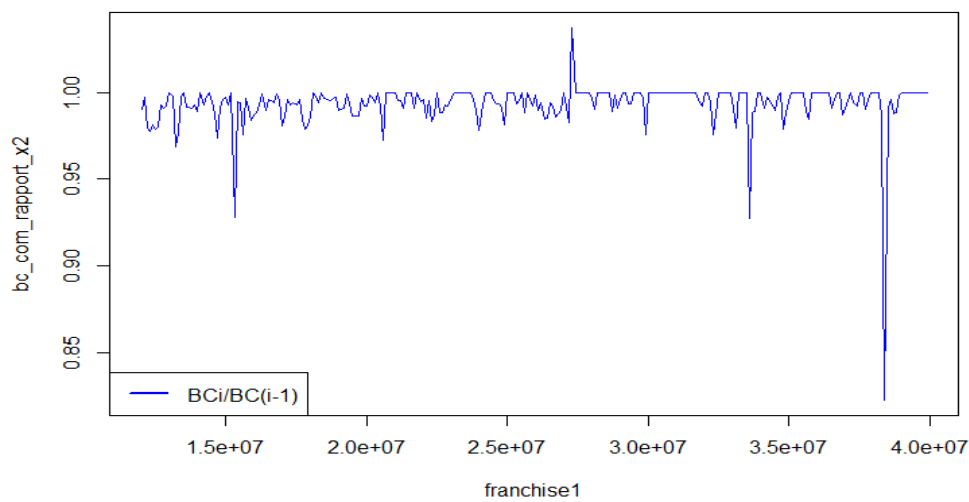


Figure 4.10 Courbe de Burning Cost de BC/BC-1

En revanche, nous remarquons que les décroissances relatives ont des valeurs assez proches (entre 0.98 et 1), et une simple vérification sur R confirme que les valeurs supérieures à 1 ou inférieures à 0.95 correspondent aux « seuils de rajout » décrits précédemment. En dehors de ces franchises, toutes valeurs du rapport sont bien inférieures à 1, ce qui valide la stricte décroissance de la courbe de marché.

c. Courbe Burning Cost de marché Particulière

Nous procédons de la même façon et nous obtenons la courbe suivante pour la courbe de marché Particulière à 10 cédantes :

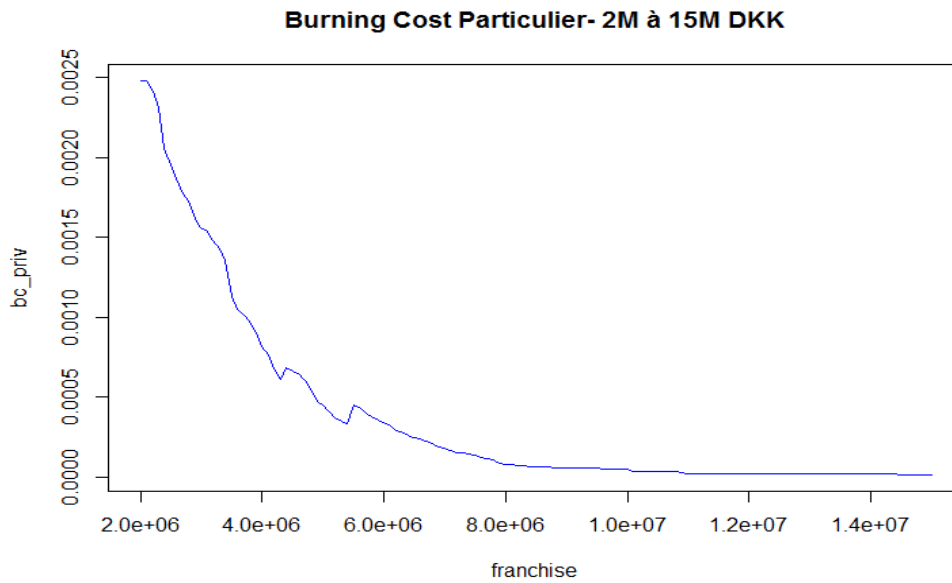


Figure 4.11 Burning Cost « Particulier » de marché

Nous observons, comme pour la courbe Commerciale, une décroissance entre les points de rajouts. Notons cependant que le taux Burning Cost varie beaucoup plus au niveau des points de rajouts, par rapport à la courbe Commerciale. Comme la base « Particulier » a moins de sinistres, le rajout d'une cédante à la base impacte plus nettement sur la courbe de marché. Nous allons étudier la décroissance en utilisant les mêmes rapports $\frac{\tau_{BC}^i}{\tau_{BC}^0}$ et $\frac{\tau_{BC}^i}{\tau_{BC}^{i-1}}$

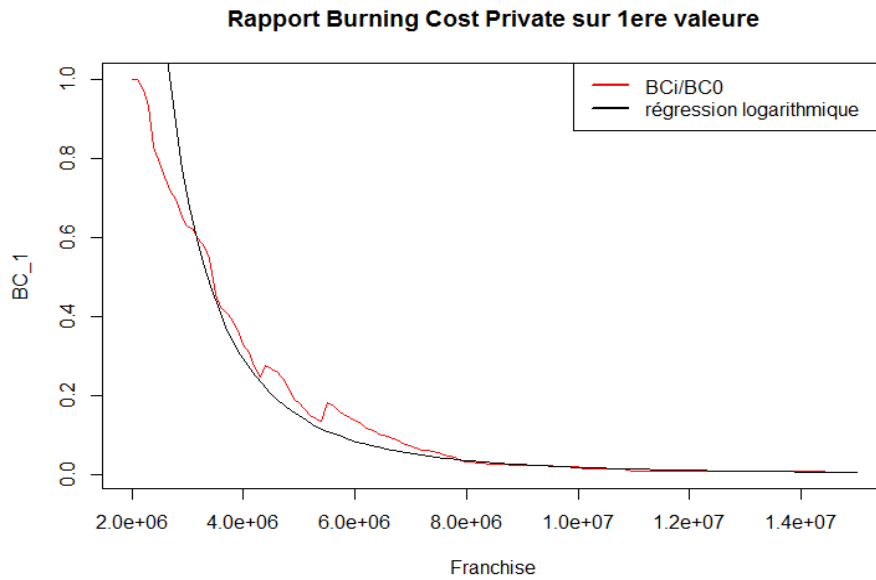


Figure 4.12 Burning Cost « Particulier » normalisée par la première valeur

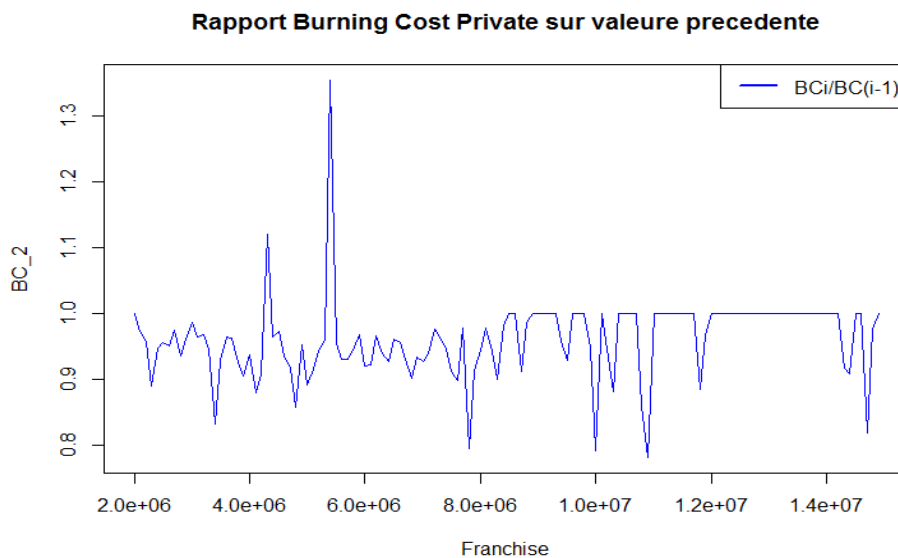


Figure 4.13 Courbe BC/BC-1 « Particulier »

Comme pour la base commerciale, la décroissance relative est très volatile, et nous observons seulement des sauts supérieurs à 1 aux points de rajouts.

Il est aussi intéressant de comparer les décroissances entre les deux bases, comme nous avons normalisé les deux courbes.

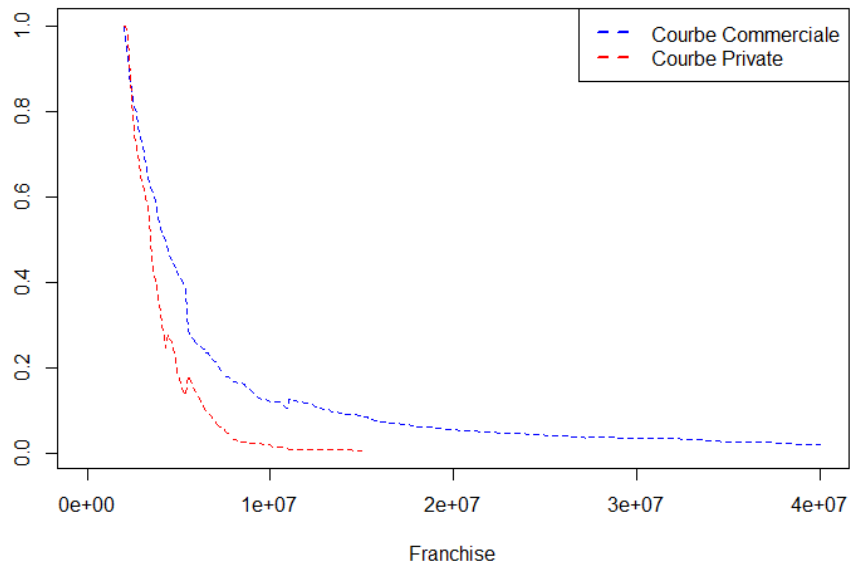


Figure 4.14 Comparaison du Burning Cost « Particulier » et « Commerciale »

Nous observons, comme prévu, une décroissance plus rapide de la courbe de la base « Particulier » comparée à celle de la base « Commerciale ».

Chapitre 5 : Courbes d'expositions du marché et premières estimations

Nous avons présenté brièvement dans le chapitre 2 le principe de la tarification par exposition, sans pour autant s'intéresser aux propriétés mathématiques de ces courbes. Dans cette partie, nous allons s'intéresser à ces courbes de manières plus approfondies. Nous allons dans un premier temps présenter la théorie des courbes d'expositions Ensuite nous allons introduire la famille des courbes MBBEFD (Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein, Femi-Dirac) qui sera utilisée pour la construction de nos courbes de marché. Nous présenterons finalement les résultats obtenus pour les 2 bases « Commerciale » et « Particulier ».

I. La théorie des courbes d'expositions

a. Formulation mathématique

Introduisons la notion de taux de destruction, défini par le ratio du cout du sinistre sur la somme assurée de la police. Supposons que nous avons un portefeuille avec N sinistres (N étant une variable aléatoire) défini par $(X_1, X_2 \dots X_N)$. Notons :

- X la distribution des montants de sinistres
- M la somme assurée (TSI) du portefeuille
- D la franchise
- $x = X/M$ le taux de destruction
- $d = D/M$ la franchise normalisée par le TSI

Notons que le taux de destruction est compris entre 0 et 1, comme la somme assurée ne peut pas dépasser le montant total des sinistres. Définitions : $L(d) = E[\min(d, x)]$ l'espérance du taux de destruction normalisée sous la rétention d. Remarquons alors que :

- $ML(d)$ représente l'espérance de la charge retenue par la cédante sous la rétention d.
- $M(L(1) - L(d))$ représente l'espérance de la charge que doit payer le réassureur sous la rétention d.

Ainsi , le ratio de la prime pure que la cédante doit retenir sous la rétention d sera défini par le ratio $L(d)/L(1)$. Ainsi, la courbe d'exposition est défini par la courbe qui représente :

$$G(d) = \frac{L(d)}{L(1)} = \frac{E[\min(d, x)]}{E[\min(1, x)]} = \frac{\int_0^d 1 - F_x(u) du}{E[x]}$$

En effet $G(d)$ est un rapport de deux primes pures, donc elle ne dépend pas de la somme assurée M ni de l'espérance de la fréquence des sinistres $E[N]$.

Quelques propriétés de la fonction G :

- Elle est strictement croissante
- Elle est concave
- $G(0) = 0$ car $L(0) = 0$
- $G(1) = 1$ car $L(1) = E[x]$

Nous pouvons calculer la dérivée première de la fonction G :

$$G'(d) = \frac{1 - F_x(d)}{E[x]}$$

Comme $F(0)=0$ par définition d'une fonction de répartition, nous avons :

$$\frac{G'(x)}{G'(0)} = 1 - F_x(x)$$

Et finalement :

$$F_x(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 1 - \frac{G(x)}{G'(0)} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

F est la fonction de répartition du taux de destruction normalisé. Cette équation montre que F et G sont deux représentations équivalentes de la courbe d'exposition.

Construction d'une courbe d'exposition empirique :

Supposons que nous avons à notre disposition un portefeuille dont tous les montants From Ground Up sont connus, ainsi que leur Sommes Assurées. Il sera dans ce cas possible de construire une courbe d'exposition empirique. Pour cela, nous allons tout d'abord tracer le graphique des taux de destructions avec :

- En abscisse : le taux de destruction
- En ordonnée : la fréquence des sinistres (en pourcentage) dont le taux de destruction est inférieur à la valeur de l'ordonnée correspondante.

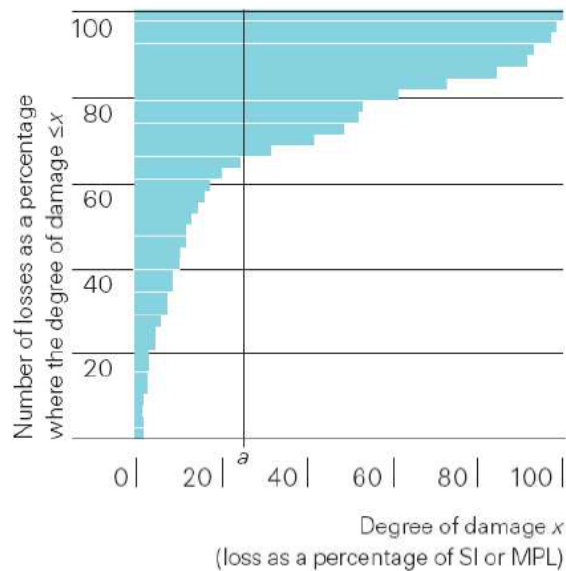


Figure 5.1 Graphique de sévérité empirique

Pour obtenir le taux d'exposition a , il suffit de prendre l'aire à gauche de a divisé par l'aire totale. En répétant cette étape pour n'importe quelle valeur de a entre 0 et 1, nous obtenons une courbe d'exposition empirique. Comme nous avons indiqué au chapitre 2, cette méthode est utilisée par les réassureurs ayant une base de données très grandes avec des informations sur les sommes assurées individuelles.

C'est notamment le cas de Swiss Re qui ont construit les courbes de Gasser en s'appuyant sur les données intitulés "Fire statistics of the Swiss Association of Cantonal Fire Insurance Institutions" datant de 1959 à 1967.

b. La famille des courbes MBBEFD

La classe des distributions MBBEFD (Maxwell-Boltzman , Bose- Einstein, Femi- Dirac) est une classe de distributions très souvent utilisée en mécanique statistique . En 1997, Stefan Bernegger introduit pour la première fois l'utilisation des courbes MBBEFD dans le domaine de l'assurance, et plus précisément dans la modélisation des courbes d'expositions. Notons $G_{a,b}$ la courbe d'exposition MBBEFD à deux paramètres.

$$G_{a,b}(x) = \frac{\ln(a + b^x) - \ln(a + 1)}{\ln(a + b) - \ln(a + 1)}$$

La fonction de répartition correspondante est définie par :

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ \frac{1-(a+1)b^x}{a+b^x} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Nouvelle paramétrisation :

Notons p la probabilité de la perte totale et g son inverse.

$$p = 1 - F(1^-) = \frac{G'(1)}{G'(0)}$$

L'expression de F étant explicitement défini, nous obtenons aisément :

$$g = \frac{a+b}{(a+1)b} \quad \text{et} \quad a = \frac{(g-1)b}{1-gb}$$

Pour avoir p comprise entre 0 et 1 et G bien défini, nous allons restreindre les paramètres : $b \geq 0$ et $g \geq 1$. Il faut tout de même séparer les cas $b=1$, $g=1$ et $bg=1$.

Nous obtenons la fonction G avec les nouvelles paramètres g et b :

$$G_{b,g}(x) = \begin{cases} x & g = 1 \vee b = 0 \\ \frac{\ln(1+(g-1)x)}{\ln(g)} & b = 1 \wedge g > 1 \\ \frac{1-b^x}{1-b} & bg = 1 \wedge g > 1 \\ \frac{\ln(\frac{(g-1)b+(1-gb)b^x}{1-b})}{\ln(gb)} & b > 0 \wedge b \neq 1 \wedge bg \neq 1 \wedge g > 1 \end{cases}$$

En dérivant la fonction G et en appliquant la relation qui donne la fonction de répartition équivalente nous obtenons :

$$F_{b,g}(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x < 1 \wedge (g = 1 \vee b = 0) \\ 1 - \frac{1}{1+(g-1)x} & x < 1 \wedge b = 1 \wedge g > 1 \\ 1 - b^x & x < 1 \wedge bg = 1 \wedge g > 1 \\ 1 - \frac{1-b}{(g-1)b^{1-x}+1-gb} & x < 1 \wedge b > 0 \wedge b \neq 1 \wedge bg \neq 1 \wedge g > 1 \end{cases}$$

Les courbes MBBEFD à un paramètre :

Dans son publication « The Swiss Re Curve Exposure Curves and the MBBEFD distribution class », Stefan Bernegger a montré que les courbes d'expositions « de référence » de Swiss Re peuvent être approchées par la classe des distributions MBBEFD à un paramètre, défini de manière suivante :

$$G_c(x) = G_{b_c, g_c}(x)$$

$$b_c = b(c) = e^{3.1 - 0.15(1+c)c}$$

$$g_c = g(c) = e^{(0.78 + 0.12c)c}$$

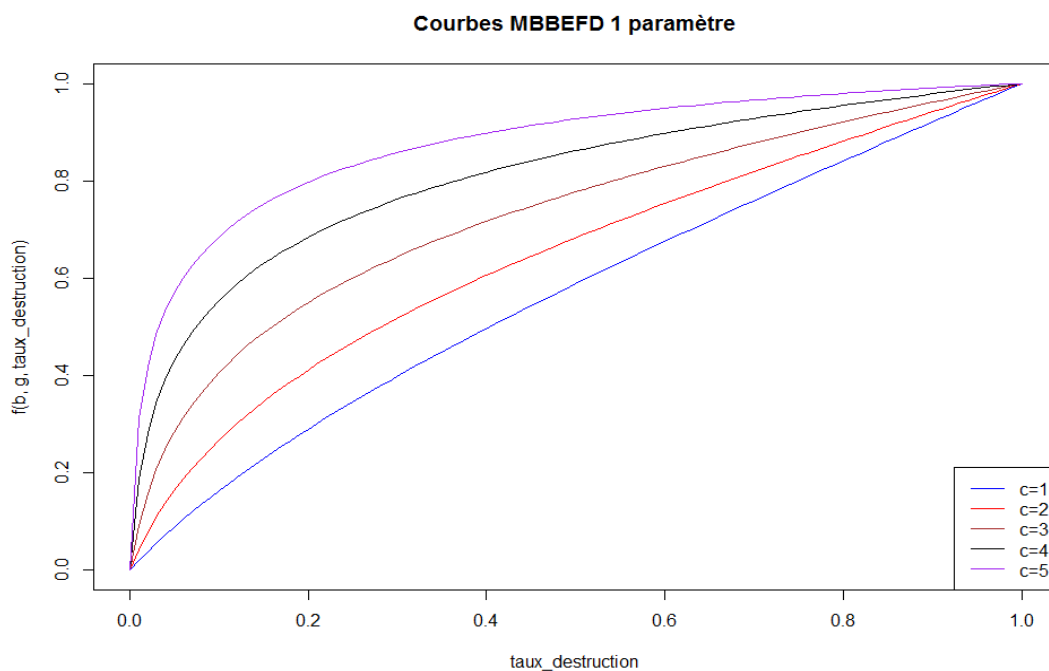


Figure 5.2 Courbes MBBEFD à un paramètre

- Les quatre courbes de paramètre $c=1.5$, $c=2$, $c=3$ et $c=4$ correspondent aux courbes « de référence » définies par Swiss Re.
- La courbe $c=5$ coïncide avec la courbe d'exposition de Lloyd's pour les risques industriels.
- Notons que plus la valeur de c est élevée, plus la courbe devient concave. Cela veut dire que nous avons plus de chance d'avoir un taux de destruction faible. En effet, les plus grandes valeurs de c correspondent généralement aux risques industriels, dont les sinistres sont généralement très élevés mais leurs valeurs en pourcentage de sommes assurées sont plutôt faibles.
- Dans le cas extrême ou $c=0$, la courbe d'exposition coïncide avec la première bissectrice. Dans ce cas, les pourcentages de pertes sont équiprobables, et cette courbe associe la plus grande probabilité aux pourcentages de perte élevés.

c. Estimation des paramètres sur la courbe d'exposition empirique

Nous allons présenter brièvement l'estimation « classique » des courbes MBBEFD, lorsque nous avons à notre disposition la courbe d'exposition empirique. Cette méthode n'est pas au cœur de ce mémoire.

Estimation des paramètres par méthodes des moments

Bernegger a montré que pour chaque couple p et $E(\mathbf{x})$ remplissant la condition $0 \leq p \leq E(\mathbf{x}) \leq 1$, il existe seulement une distribution appartenant à la classe MBBEFD. Le paramètre s s'obtient par la formule :

$$p = P(\mathbf{x} = 1) = \frac{G'(1)}{G'(0)} = \frac{1}{g}$$

et g s'obtient en résolvant l'équation :

$$E(\mathbf{x}) = \frac{\ln(gb)(1-b)}{\ln(b)(1-gb)}$$

Estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance

La fonction de vraisemblance est donnée par :

$$l(b, g) = \prod_{i=1}^N f(x_i | b, g) = \prod_{i=1}^N \frac{(b-1)(g-1) \ln(b) b^{1-x_i}}{\left((g-1)b^{1-x_i} + (1-gb) \right)^2}$$

En prenant le logarithme :

$$\ln l(b, g) = \sum_{i=1}^N \ln \frac{(b-1)(g-1) \ln(b) b^{1-x_i}}{\left((g-1)b^{1-x_i} + (1-gb) \right)^2}.$$

La dernière étape de cette méthode sera de trouver b et g tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln l(b, g)}{\partial b} &= 0 \\ \frac{\partial \ln l(b, g)}{\partial g} &= 0. \end{aligned}$$

La résolution peut se faire numériquement, notamment à travers la méthode de Newton-Raphson (voir [8].)

d. Méthode de tarification d'un traité XS par exposition :

Supposons que nous tarifions un traité L XS D pour un profil de risque donné. Pour avoir la prime que le réassureur doit payer pour une bande de Somme Assurée du profil de risque, calculons d'abord les rapports $\frac{L}{ASI}$ et $\frac{D+L}{ASI}$. Calculons ensuite :

$$conservation_{réassureur} = G\left(\min\left(\frac{D+L}{ASI}, 1\right)\right) - G\left(\min\left(\frac{D}{ASI}, 1\right)\right)$$

pour obtenir le taux de la prime que le réassureur doit payer pour la bande. Multiplions cette valeur par la prime de la tranche pour obtenir la prime allouée à la bande. Il faut ensuite sommer toutes les primes par bandes pour obtenir la prime allouée à la tranche par la prime d'assurance directe.

Cette prime correspond à la prime pure de réassurance si le réassureur a les mêmes chargements que l'assureur, i.e un Loss Ratio de 100%. Lorsqu'il n'est pas le cas, il faut multiplier la prime par le Loss Ratio de l'assureur pour obtenir la prime pure.

En pratique, il est très rare que les assureurs nous fournissent les primes pures dans les profils de risques. L'obtention du Loss Ratio devient alors primordial pour la tarification par exposition.

Exemple pour un profil de risque donné et la courbe d'exposition de paramètre c=4 :

Prime.par.bande	ASI	Conservation_Priorite	Conservation_plafond	Conservation_Reassureur	Prime_Reassureur
7077451.10	609167.6	1.0000000	1.0000000	0.0000000	0.000
9899295.98	1404017.8	1.0000000	1.0000000	0.0000000	0.000
4255148.90	2343627.4	0.9679105	1.0000000	0.0320895	136545.456
676409.62	3370584.1	0.8952666	1.0000000	0.1047334	70842.659
210210.23	4400309.2	0.8426520	1.0000000	0.1573480	33076.164
91766.71	5344538.5	0.8046052	1.0000000	0.1953948	17930.739
79956.15	6431311.1	0.7686178	0.9859176	0.2172998	17374.455
23721.36	7485000.0	0.7392938	0.9553137	0.2160199	5124.286
26421.80	8647333.3	0.7115430	0.9264004	0.2148574	5676.919
13499.15	9760000.0	0.6883890	0.9022951	0.2139061	2887.551
40444.19	10941000.0	0.6666404	0.8796554	0.2130150	8615.220
25006.15	26948000.0	0.4993322	0.7042536	0.2049214	5124.295
31599.31	32296000.0	0.4669456	0.6697161	0.2027705	6407.408

Voici un exemple de calcul pour un profil de risque donné. En sommant la colonne Prime Réassureur, puis en multipliant le résultat par le Loss Ratio, nous obtenons la prime pure.

La conservation de la priorité correspond à $G\left(\min\left(\frac{D}{ASI}, 1\right)\right)$ et la conservation du plafond $G\left(\min\left(\frac{D+L}{ASI}, 1\right)\right)$.

Dans la suite, nous utilisons cette méthode de tarification appliquée au profil de risque agrégée « Commerciale » et « Particulier » pour toutes les tranches XS définies afin d'obtenir la courbe d'exposition du marché.

II. Premières courbes d'expositions MBBEFD à un paramètre

a. Résultat obtenu pour la base « Commerciale à 10 cédantes » :

Nous allons dans un premier temps calculer la prime du réassureur pour chaque tranche XS, en faisant attention à bien reprendre les mêmes cédantes considérées pour le calcul du Burning Cost . Les primes obtenues seront ensuite divisées par la somme des primes par bandes (qui est la somme des EPI des cédantes considérées). Nous obtenons alors le vecteur des ratios de primes : $\tau_e = (\tau_e^0, \dots, \tau_e^i, \dots, \tau_e^n)$ que nous allons pouvoir comparer avec les valeurs calculées par Burning Cost.

Nous allons finalement normaliser par le ratio de la première tranche τ_e^0 comme nous l'avons fait avec la courbe Burning Cost pour neutraliser la composante du Loss Ratio, que nous ne connaissons pas à priori.

Nous utilisons ici les courbes d'expositions MBBEFD à un seul paramètre : $c=1$, $c=2$, $c=3$, $c=4$ pour la tarification. En faisant varier le paramètre c , nous cherchons à se rapprocher au maximum la courbe de marché par exposition de celle obtenue par Burning Cost.

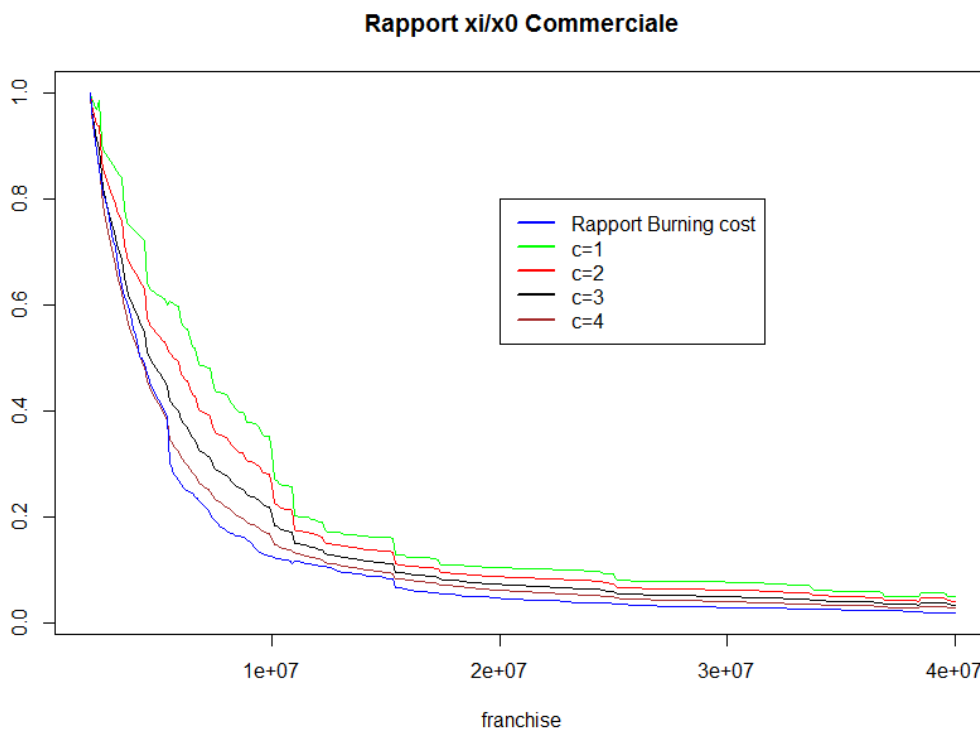


Figure 5. 3 Courbes MBBEFD « Commerciale » à 1 paramètre normalisée par la première valeur

Notons que la forme des courbes d'expositions et la courbe Burning Cost sont comparables, dans le sens où les variations visibles s'effectuent aux mêmes franchises, ce qui rassure que nous avons bien pris en compte les mêmes cédantes pour les courbes.

De première vue, les plus grandes valeurs de c semblent mieux rapprocher la courbe d'exposition du marché de la courbe d'expérience. Une première observation des courbes montre que pour la base Commerciale, les profils de risques fournis sont assez granulaires pour faire une tarification par exposition.

Une première approche simple consiste à tester pour toutes les valeurs de c entre 1 et 10 pour observer le comportement des courbes d'expositions. Nous avons estimé graphiquement que la valeur optimale de c pour cette estimation se trouve entre 4 et 5.

Cependant, cette méthode impose implicitement que le Loss Ratio soit supérieur à 100%, comme les premières valeurs du Burning Cost sont supérieures aux premières valeurs du taux de prime obtenue par exposition pour ces valeurs de c .

Nous pouvons conclure donc que cette méthode ne peut pas être retenue, et qu'il faudra tenir compte du Loss Ratio pour optimiser les courbes.

b. Résultat obtenu pour la base « Particulier »

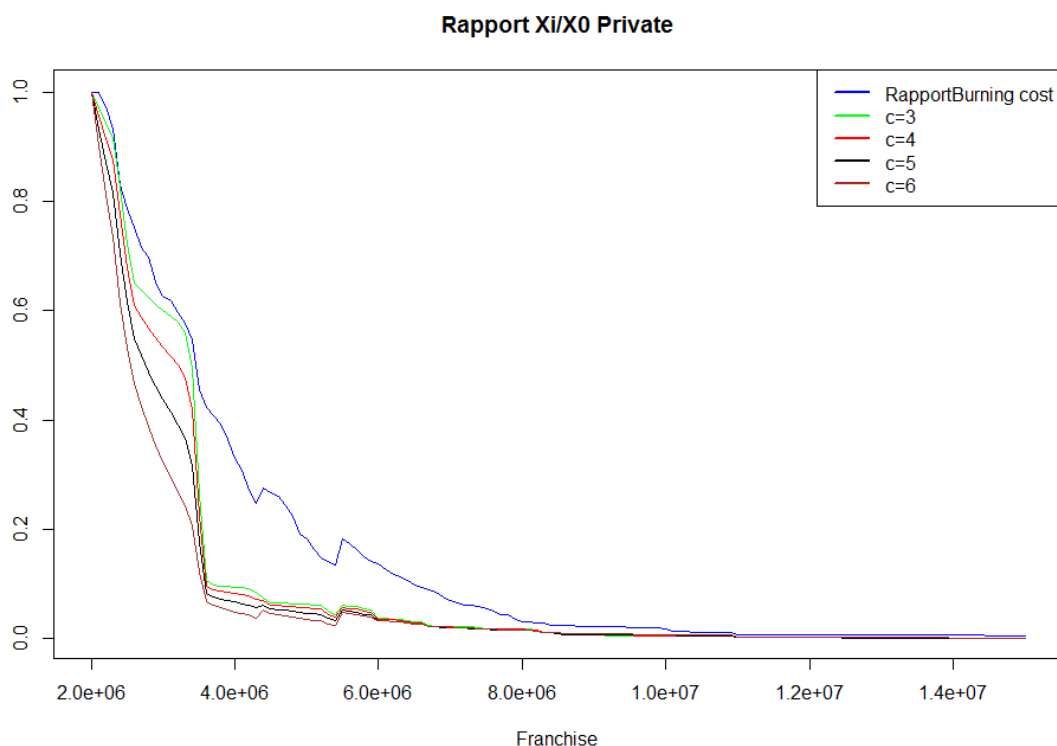


Figure 5.4 Courbes MBBEFD « Particulier » à 1 paramètre normalisée par la première valeur

Contrairement aux courbes de marché de la base Commerciale, nous n'avons pas un bon fit de la courbe d'exposition « Particulier ». Les courbes présentent des gros écarts de 3.5M à 8M DKK, même en faisant varier beaucoup la valeur de c. Cela peut signifier que :

- Les profils de risques ne sont pas représentatifs de la sinistralité. En effet, il se peut que certaines cédantes aient une exposition très importante sans pour autant avoir beaucoup de sinistres, ou bien le cas inverse. En important un maximum d'information sur les sinistres et les profils de risques, nous avons espéré pouvoir dépasser ce problème qui ne devrait pas se reproduire sur le marché. Cependant, le traitement préliminaire a réduit considérablement le nombre de sinistres et de cédantes de type « Particulier ». Ainsi, le taux Burning Cost et le taux d'exposition seront plus sensibles aux anomalies causées par une cédante individuelle.
- Une de nos cédantes ne fournit pas un profil de risque assez granulaire. En effet elle ne nous donne l'information que sur deux bandes TSI : de 0 à 10M DKK et 10M à 20M DKK. Elle est en effet responsable de la chute à 3.8M DKK. Nous allons enlever cette cédante dans la suite.
- Le fait de normaliser par la première valeur, c'est-à-dire de « forcer » la courbe de démarrer à 1 pour étudier les décroissances relatives n'est pas la meilleure démarche pour estimer les courbes. Nous rencontrons en effet le même problème que pour la base « Commerciale », c'est-à-dire que la méthode impose un Loss Ratio supérieur à 100%. Il serait donc plus correct d'étudier les valeurs non normalisées, en introduisant un Loss ratio. C'est ce que nous allons faire dans la partie suivante.

Nous allons maintenant refaire le même graphique en enlevant la cédante dont le profil de risque n'est pas assez segmenté.

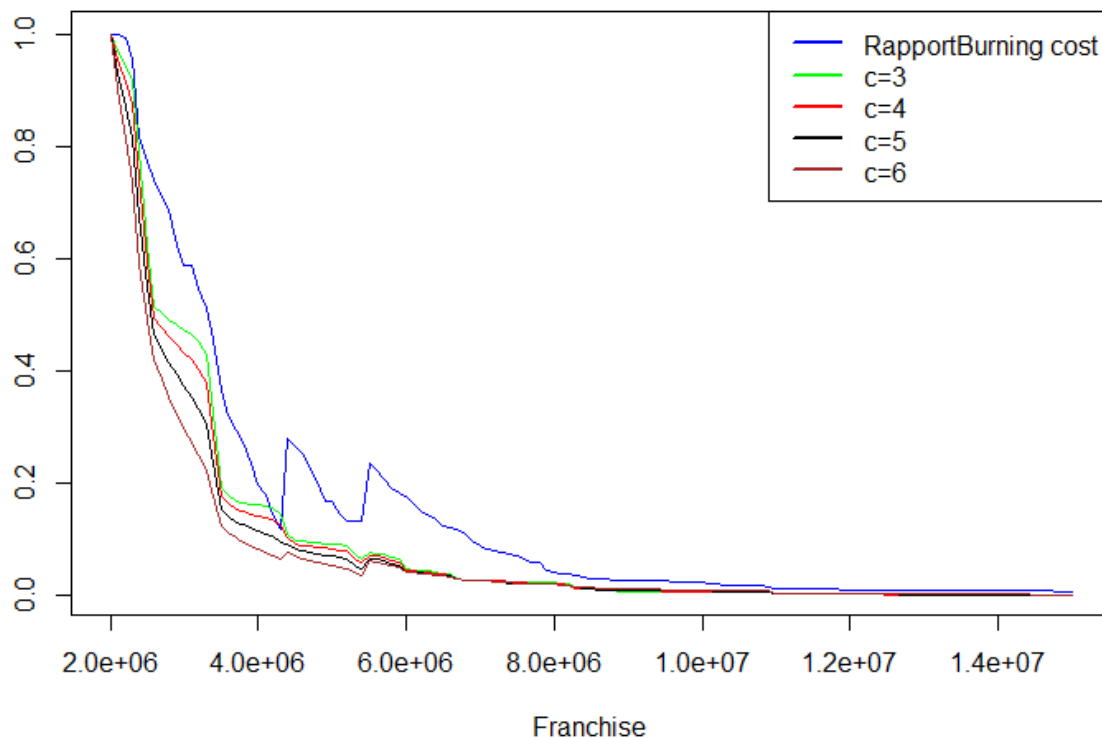


Figure 5.5 Courbes de marchés « Particulier » obtenu en enlevant la cédante ayant un profil de risque pas assez granulaire

Graphiquement, nous observons une amélioration des estimations des courbes. Les variations entre la courbe Burning Cost et les courbes obtenus par la distribution MBBEFD sont comparables, et nous n'observons plus la chute au niveau de 3.8 MDKK. En effet, l'augmentation de la rétention fait que la prime du réassureur devient nulle à partir d'un certain seuil. Lorsque le profil de risque contient trop peu de bandes TSI, la baisse du ratio de prime devient ainsi beaucoup plus importante. Nous n'avons cependant toujours pas un fit très satisfaisant.

Notons cependant que l'estimation de la courbe Particulier est moins importante que celle de la courbe Commerciale pour l'actuaire tarificateur. Sur les marchés nordiques, la rétention des programmes se situe généralement à un niveau où peu de polices particulières exposent et donc en pratique nous n'utilisons pas vraiment les courbes particulières. C'est aussi pourquoi nous avons moins d'information sur ces types de profil de risques.

Dans ce mémoire, nous allons toutefois estimer les meilleurs paramètres de la courbe « Particulier » tout en gardant à l'esprit les problèmes mentionnés.

Chapitre 6 : Estimations des courbes par RMSE

Nous allons dans ce chapitre chercher à estimer les paramètres de la courbe d'exposition de manière plus précise, notamment à travers l'utilisation de la racine de l'erreur quadratique moyenne. (RMSE)

Dans un premier temps, nous détaillerons les méthodes utilisées pour l'optimisation de la courbe MBBEFD à un, puis à deux paramètres. Dans un second temps, nous allons présenter les différentes valeurs des paramètres optimisés et comparer les RMSE entre eux. Finalement nous allons étudier la sensibilité des paramètres en fonction du Loss Ratio, et les variations des primes pures en fonction des paramètres choisies.

I. Présentation des méthodes d'optimisations

a. Introduction du Loss Ratio dans les estimations

Le Loss Ratio est calculé en divisant le total des sinistres encourus par le total des primes d'assurance perçues. Nous souhaitons avoir un Loss ratio inférieur à 100 % pour avoir des bénéficiaires réassureurs. La courbe de marché Burning Cost représente le rapport des sinistres sur l'EPI pour les tranches XS considérées, alors que la courbe d'exposition calcule le rapport des primes obtenus par expositions sur l'EPI. Ainsi, en superposant directement les 2 courbes de marchés, nous avons supposé que le Loss Ratio est à 100%.

Il serait plus cohérent de reprendre les ratios non normalisés et de les estimer en multipliant le ratio de prime de la courbe d'exposition par un Loss ratio p . Nous choisissons ici $p = [0.7, 0.75, 0.8, 0.85]$.

b. Utilisation de la fonction *Optimize* sur R pour l'optimisation unidimensionnelle

Nous cherchons à estimer la courbe d'exposition à la courbe Burning Cost de la manière la plus proche possible en termes de « distance ». Pour mesurer cette distance, nous avons à notre disposition plusieurs statistiques possibles. La MAE (Mean Absolute Error) et le RMSE sont des mesures fréquemment utilisés pour minimiser les résidus.

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\tau_{BC}^i - \tau_e^i|$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tau_{BC}^i - \tau_e^i)^2}$$

La MAE est moins biaisée par rapport aux grandes erreurs, alors que le RMSE va les pénaliser plus. Nous allons dans la suite choisir la statistique du RMSE, qui permet d'avoir plus de contrôle sur les effets outliers. En effet, si l'estimation présente des très grands écarts sur un seuil XS particulier, nous allons vouloir le prendre en compte. D'un point de vue mathématique, le RMSE représente la distance moyenne entre deux vecteurs, ce qui est bien ce que nous cherchons à minimiser.

Pour obtenir la meilleure estimation, nous implémentons sur R une fonction qui prend en entrée les paramètres de la courbe MBBEFD, et qui renvoie en sortie le RMSE entre les deux vecteurs τ_e et τ_{BC} . Nous cherchons à trouver les paramètres d'entrées qui minimisent le RMSE. Cela revient à résoudre un problème d'optimisation de minimum de fonction.

Les calculs faits à l'intérieur de la fonction sont en effet segmentés en plusieurs étapes (définition de la courbe MBBEFD en fonction du paramètre, calcul de τ_e en prenant en compte la variation de la base des cédates, et finalement calcul du RMSE), nous ne pouvons donc pas obtenir une forme analytique directement en fonction des paramètres d'entrées. Toute méthode d'optimisations nécessitant le calcul des matrices de dérivés (méthode de Newton, méthode de gradient etc.) ne seront pas envisageables. Nous allons devoir choisir les méthodes d'optimisations qui prennent en compte seulement les valeurs de la fonction. Pour l'optimisation de la courbe MBBEFD à un paramètre, nous pouvons utiliser la méthode de Brent, qui est implémenté dans R par la fonction *optimize*.

Présentation de la méthode de Brent :

La méthode de Brent est une combinaison de la méthode du nombre d'or et de la méthode d'interpolation parabolique successive. En effet, la méthode du nombre d'or converge toujours vers un minimum, mais seulement à un ordre linéaire. D'un autre côté, l'algorithme d'interpolation parabolique successive ne permet pas de garantir la convergence, mais présente un avantage sur la vitesse de convergence quand cela est possible.

La méthode du nombre d'or permet de trouver l'extremum d'une fonction unimodale, c'est-à-dire que l'extremum recherché est le seul extremum local. En se limitant à c entre 0 et 10 et pour un loss ratio de 0.7, nous pouvons aisément voir le caractère unimodal de notre fonction. *Optimize* est donc appropriée pour trouver le minimum de notre fonction, par la méthode du nombre d'or.

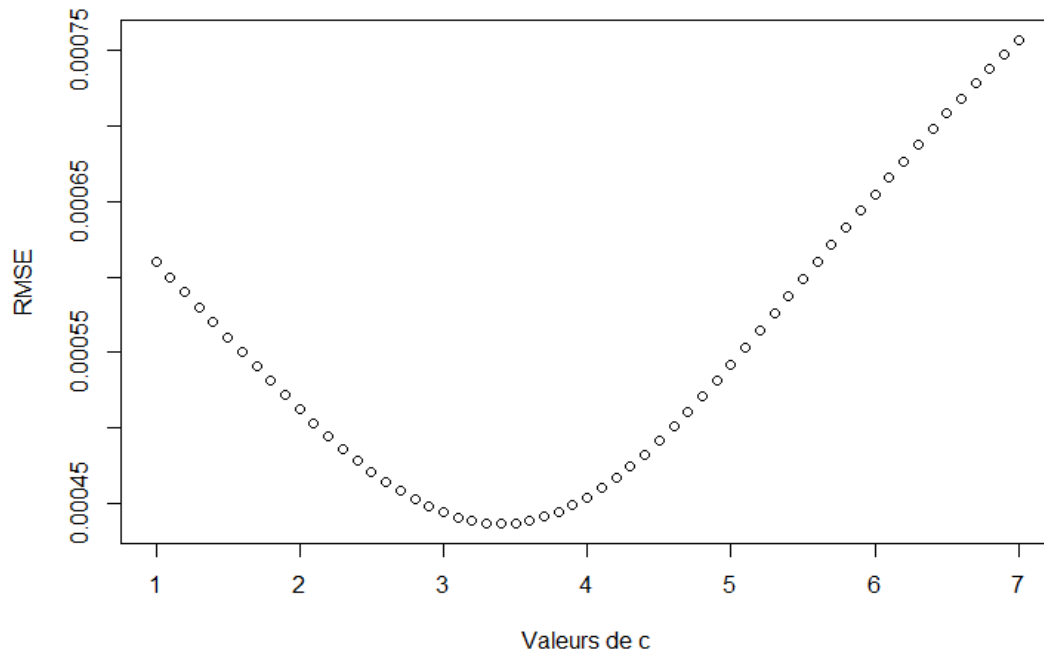


Figure 6.1 RMSE en fonction du paramètre c

La méthode du nombre d'or s'appliquera de manière suivante sur la fonction f unimodale :

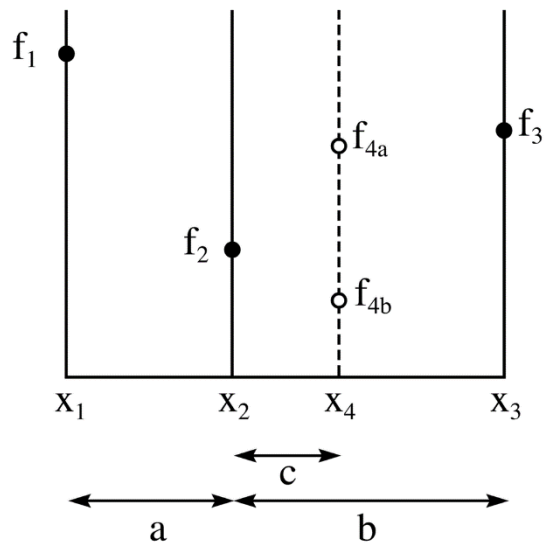


Figure 6.2 Illustration de la méthode du nombre d'or

Le diagramme ci-dessus illustre une itération de la recherche du minimum par nombre d'or. Comme il s'agit ici de la recherche d'un extremum, nous avons besoin d'évaluer la fonction d'abord sur 3 points x_1 , x_2 et x_3 . Grace au caractère unimodal de la fonction et du fait que $f_1 > f_2$ et $f_2 < f_3$, nous pouvons s'assurer que l'abscisse du minimum est comprise entre x_1 et x_3 . Définissons ensuite x_4 dans l'intervalle la plus grande (ici $[x_2 : x_3]$) afin d'évaluer la valeur de la fonction à ce point. Si la valeur obtenue est entre f_1 et f_4 , le minimum se situe entre x_1 et x_2 et nous répétons l'étape précédente avec le triplet x_1 , x_2 , x_4 . Si la valeur obtenue est entre f_2 et f_3 , alors le triplet considéré pour l'étape prochaine sera x_2 , x_4 et x_3 .

La sélection du point x_4 se fait de manière suivante : $x_4 = x_1 + (x_3 - x_2)$. Nous voulons aussi conserver la distance (en termes de proportion) entre les points à chaque étape. En fonction de la nouvelle valeur f_4 obtenue, nous voulons obtenir :

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{a}{b} \\ \frac{c}{b-c} = \frac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \varphi$$

Avec φ le nombre d'or. Ceci justifie le nom de l'algorithme d'optimisation.

c. Utilisation de la fonction *optim* pour l'optimisation multidimensionnelles

Pour l'optimisation à deux dimensions, nous allons utiliser la fonction *Optim* sur R, et plus précisément la méthode heuristique de Nelder –Mead. Au sens large, une heuristique est une méthode de calcul qui fournit rapidement une solution réalisable mais pas nécessairement optimal, pour un problème d'optimisation difficile.

Principe de l'algorithme Nelder-Mead :

Soit f une fonction définie sur un espace à N dimensions. L'algorithme commence par définir un simplexe non dégénéré choisi dans cet espace. La méthode cherche itérativement à trouver le point du simplexe qui maximise la fonction, pour la remplacer ensuite par une symétrie de ce point par rapport au barycentre des points restants

Si la valeur de la fonction à ce nouveau point est plus petite que toutes autres valeurs de la fonction sur les autres points, le simplexe est étiré de manière exponentielle dans cette direction. D'un autre côté, si ce point n'est pas bien meilleur que la précédente, le simplexe se rétrécit sur lui-même, en supposant que la forme locale de la fonction est une vallée. Si cela ne donne toujours pas un meilleur point, le simplexe est réduit par une homothétie centrée sur le point du simplexe où la valeur de la fonction est la plus petite.

Avantages :

- La généralité : la méthode s'applique à une fonction continue sans avoir à évaluer ses dérivées.

- L'application est plutôt directe et simple.
- Cette méthode s'applique à une fonction non dérivable.
- Elle permet d'obtenir une série de valeurs décroissantes.

Inconvénients :

- Si le minimum se retrouve sur une frontière, ou bien si le domaine de définition est trop compliqué, l'algorithme s'applique difficilement.
- L'initialisation du simplexe de départ a un impact sur la performance de l'algorithme
- Une dégradation des performances lorsque la dimension augmente.
- L'optimum obtenu par la méthode peut être un optimum local au lieu de global.

II. Application des méthodes d'optimisations

a. Optimisation de la courbe MBBEFD à un paramètre

Par application de la fonction optimize de R sur la fonction qui calcule le RMSE entre la courbe théorique et la courbe obtenue par expérience, nous obtenons les valeurs optimales de c suivantes :

Loss_Ratio	c_optimized	RMSE
0.70	3.396800	0.0004369
0.75	3.504516	0.0003768
0.80	3.632832	0.0003197
0.85	3.785859	0.0002665

Figure 6.3 Valeurs de c optimisés pour la base « Commerciale »

Ce qui correspond graphiquement à :

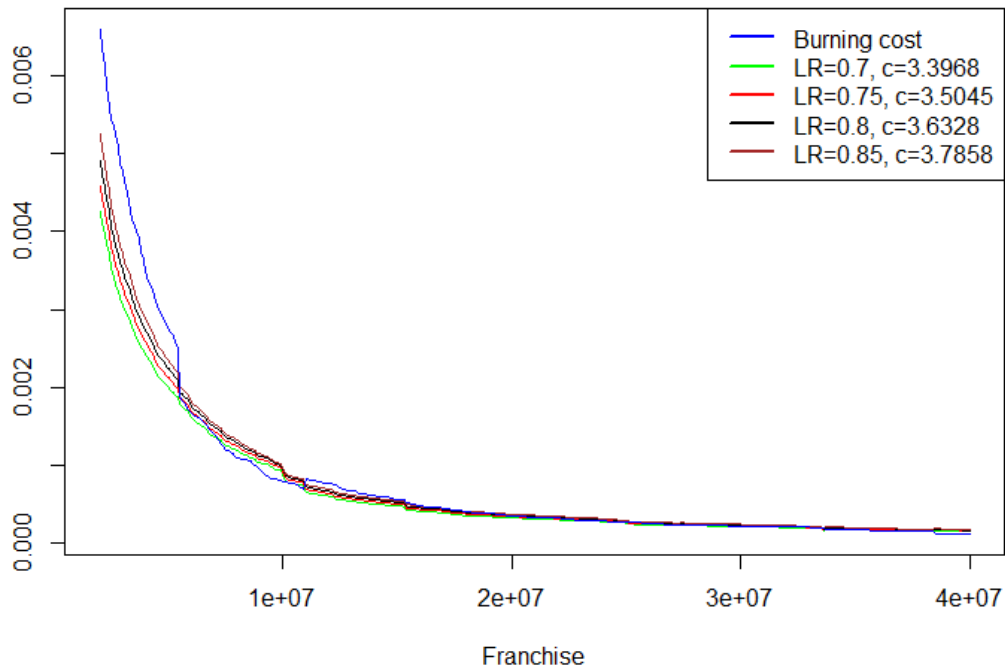


Figure 6.5 Courbes de marchés « Commerciale »

Notons que graphiquement, les plus grands écarts se situent au niveau des franchises faibles (de 2M à 6M DKK). Le RMSE cherche donc à minimiser les écarts pour lesquels les faibles retentions ont un poids élevé (on voit graphiquement que les écarts sont significatifs).

Le point d'entrée d'une cédante à 5.5M DKK semble être un point pivot avant lequel les courbes exposition sont en dessous, et après lequel les courbes sont au-dessus du BC.

Etant donnée qu'avant ce seuil, la tarification sera faite très probablement par expérience (nombre conséquent de sinistres), nous allons nous concentrer sur un fit à partir d'un seuil plus élevé, qui concerne plus de cédantes et donc une représentation du marché plus importante.

Nous allons dans les parties ultérieures améliorer l'estimation de la courbe de ratios Commerciale en redéfinissant les franchises A_0 et A_n .

En implémentant le même algorithme d'optimisation pour la base « Particulier », nous avons :

Loss_ratio	c_optimized	RMSE
0.70	5.193994	0.0001430
0.75	5.289169	0.0001455
0.80	5.376518	0.0001478
0.85	5.457212	0.0001501

Figure 6.5 Valeurs de c optimisés pour la base « Particulier »

Notons que les valeurs de c optimisés sont bien plus élevées par rapport à celles de la base commerciale. Nous devrions cependant observer des valeurs de c plus faibles que pour les polices commerciales, ce résultat est donc contre-intuitif. Cela peut être expliquée par le peu de sinistres à analyser pour la base « Particulier ».

Le Loss Ratio semble aussi avoir moins d'impact sur le RMSE et les valeurs optimales du paramètre.

Ces valeurs correspondent graphiquement à :

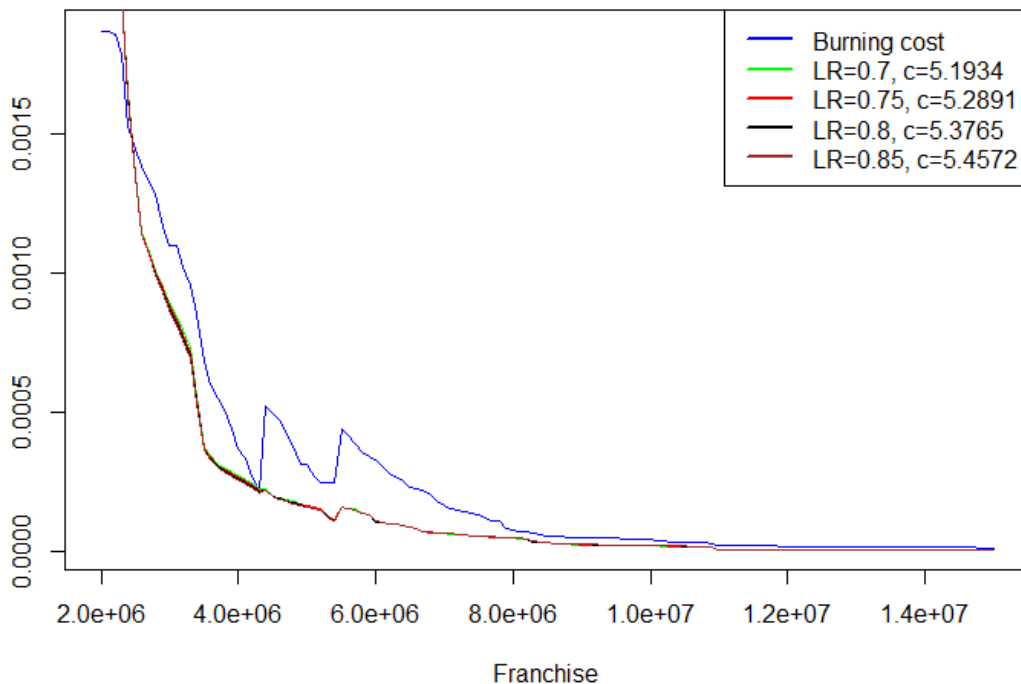


Figure 6.5 Courbes de marchés « Particulier »

L'optimisation du paramètre c ne nous permet toujours pas d'obtenir une estimation graphique satisfaisante de la courbe Burning Cost, ce qui est attendu vue la forme très irrégulière de la courbe d'expérience. Nous notons aussi que les variations du Loss Ratio n'ont pas beaucoup d'impacts sur la forme de la courbe d'exposition. Les taux de primes estimés par exposition semblent alors être sous-estimés vis-à-vis de l'expérience.

b. Optimisation de la courbe MBBEFD à deux paramètres

Nous allons maintenant appliquer l'algorithme d'optimisation de Nelder Mead à dimension $n=2$ pour optimiser les paramètres de la courbe MBBEFD à deux paramètres. La fonction *Optim* de R demande en input les valeurs de paramètres initiales à optimiser. Nous avons initialement fait des tests préliminaires sur les valeurs de b et g aléatoires pour le même Loss Ratio, et nous avons pu remarquer que les extrémums trouvés par notre fonction variaient en fonction du point de départ. En effet, le problème du minimum local soulevé dans la partie théorique est mis en évidence dans ce cas.

Pour s'approcher le plus possible du minimum global ou bien trouver un minimum local satisfaisant (i.e RMSE qui est inférieur ou égal au valeur obtenu par MBBEFD à un paramètre), nous avons décidé de choisir comme point de départ les valeurs de b et g correspondant au c obtenu par *Optimize* dans la partie précédente.

En choisissant ces valeurs de b et g comme points de départ, nous obtenons les minimums suivant à la suite de l'application de l'algorithme :

Loss_ratio	b	g	RMSE
0.70	0.0000000	62300169.865	0.0001362
0.75	0.0000000	3352061.967	0.0000720
0.80	0.0000187	31899.587	0.0000469
0.85	0.0012885	2729.483	0.0000442

Figure 6.6 Paramètres optimisés de la base « Commerciale »

Les nouvelles valeurs du RMSE diminuent pour les quatre valeurs du Loss Ratio mais la baisse est plus significative lorsque le Loss Ratio est plus élevé. Graphiquement, nous pouvons aussi voir l'amélioration des nouveaux fit :

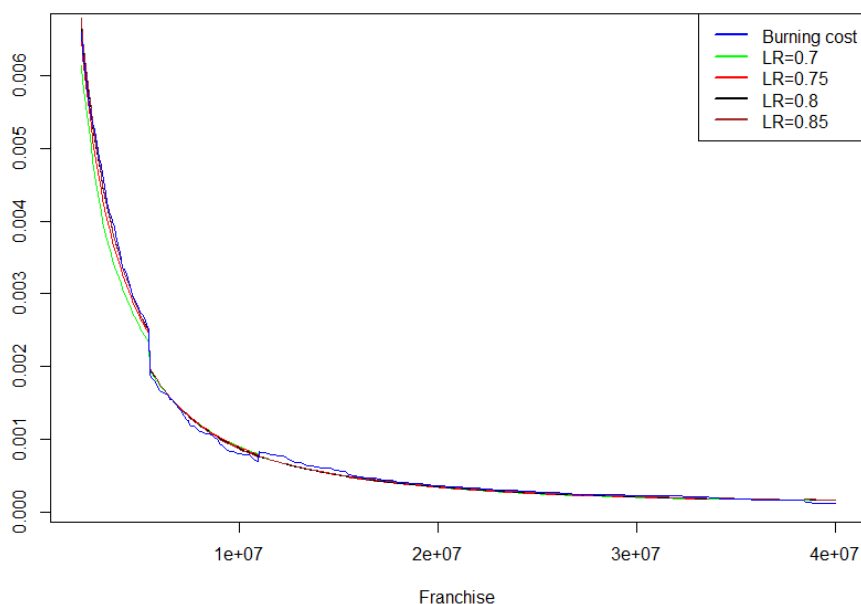


Figure 6.7 Courbes de marché MBBEFD 2 paramètres de la bases « Commerciale »

Même si nous obtenons ici des fits très satisfaisants, il est important de remarquer que les valeurs de b et de g ont beaucoup varié par rapport aux valeurs de départ. Des valeurs extrêmes de ces deux paramètres peuvent entraîner une forme de courbe d'exposition très particulière et risque d'être biaisé pour les nouveaux arrivants du marché. Il serait intéressant dans les prochaines étapes de réduire le nombre d'itérations afin de trouver un compromis entre la minimisation du RMSE et la forme de la courbe d'exposition.

Nous remarquons de même que la baisse du RMSE est surtout visible sur les premières franchises, donc notre idée précédente de réestimer les paramètres en augmentant les franchises de départ et de terminaison reste cohérente.

Nous allons ensuite appliquer le même algorithme, en faisant attention à bien choisir comme points de départ les valeurs de c optimisés, à la base particulière. Nous obtenons le tableau suivant :

Loss_ratio	b	g	RMSE
0.70	288.28235	9.279514e+15	0.0001075
0.75	155.68846	3.756017e+15	0.0001078
0.80	66.82705	2.608900e+14	0.0001084
0.85	78.01632	8.118604e+15	0.0001082

Figure 6.8 Paramètres optimisés de la base « Particulier »

De même que pour la base commerciale, nous observons une baisse du RMSE sur tous les Loss Ratio :

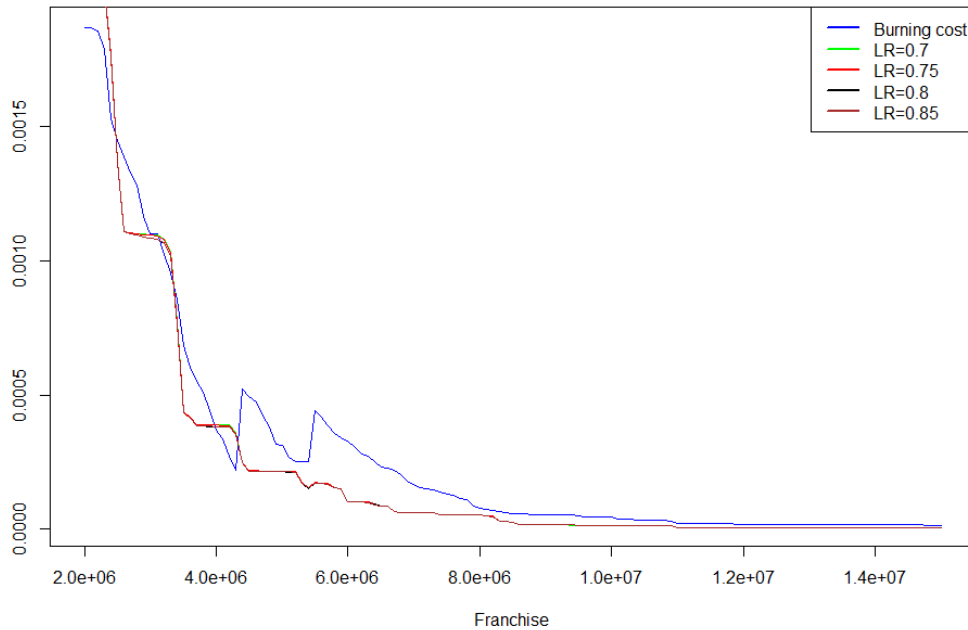


Figure 6.9 Courbes de marché MBBEFD 2 paramètres de la bases « Commerciale »

Le fit obtenu par exposition s'améliore nettement comme le taux de prime n'est plus systématiquement inférieur aux taux Burning Cost sur toutes les tranches XS. Cependant, le taux d'exposition a toujours une tendance de sous évaluer le taux Burning Cost . Nous remarquons aussi que les ordres de grandeurs des paramètres optimisés sont très éloignés que leur valeur de départ, comme pour la base Commerciale, la réduction du nombre d'itération de l'algorithme est donc nécessaire.

Chapitre 7 : Rajout des cédantes à la classe d'affaire Commerciale pour améliorer l'estimation

Dans ce chapitre, nous allons chercher à améliorer notre estimation de la courbe d'exposition de marché « Commerciale ».

Nous avons vu précédemment que les plus gros écarts entre les deux vecteurs de ratios se situent au niveau des franchises faibles (de 1M à 8M DKK). Nous allons ainsi choisir un seuil plus élevé pour l'estimation de la courbe d'exposition de marché. En effet, l'actuaire tarificateur aura besoin d'une courbe d'exposition qui performe bien sur les franchises dont l'expérience est peu connue, ce qui va justifier notre choix d'augmenter le seuil A_0 . Par ailleurs, l'étude faite dans le chapitre 4 a aussi montré que la fréquence des sinistres reste non négligeable à la franchise 40M DKK. Il est ainsi possible d'augmenter aussi le seuil A_n .

Nous allons alors introduire de nouvelles hypothèses qui permettent d'intégrer plus de cédantes, même si celles-ci ne séparent pas les sinistres par classe d'affaire (cédante de type « Totale »). La part de prime considérée serait plus conséquente, ce qui va nous permettre d'obtenir une courbe d'exposition plus représentative du marché.

I. Courbes de marchés pour les franchises de 12M à 75M DKK

a. Nouvelles hypothèses

Nous allons intégrer dans ce chapitre de nouvelles sinistres et cédantes selon les critères suivants :

- Les sinistres déjà inclus dans la base Commerciale restent dans la nouvelle base de sinistre si leur valeurs As If sont supérieurs ou égales à 12M DKK.
- Les sinistres de type « Total » de la base initiale sont rajoutés à la nouvelle base de sinistre si :
 - L'assiette de prime de l'année et de la cédante correspondante est connue.
 - La cédante correspondante a un profil de risque complet et utilisable.
 - La valeur as if du sinistre est supérieure ou égale à 12M DKK.

Ces hypothèses permettent de rajouter des cédantes ayant des parts de primes importantes, ce qui risque de changer les valeurs de nos paramètres précédentes.

Nous avons choisi de garder seulement les sinistres dont les valeurs as if sont supérieurs à 12M DKK car nous considérons que les sinistres ayant un cout plus élevé ont de très grandes chances d'être des sinistres de type « Commerciale ». Ce choix se justifie par le bon sens, mais aussi par des observations obtenues sur les cédantes ayant à la fois des sinistres « Particulier » et « Commerciale ». En effet, seulement 5 sinistres sur 297 de la base « Particulier », soit 4,38%, avait un montant supérieur à 12M DKK.

Par le rajout des nouvelles cédantes de type « Total », nous avons considérablement augmenté l'assiette de prime totale par des primes non commerciales. Cependant, nous cherchons à comparer le rapport obtenu par Burning Cost et celui obtenu par exposition. Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{bc*}^i = \frac{S_{i*}}{P_{i*}} \\ \tau_{e*}^i = \frac{P_{e*}^i}{P_{i*}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{le taux Burning Cost de la nouvelle base} \\ \text{le ratio de prime de la nouvelle base} \end{array}$$

Les dénominateurs :

$P_{i*} = P_i + P_{i_1}$ P_{i_1} la prime des cédantes de type « Total » associée à la tranche i, obtenu par sommation de l' EPI

$P_{e*}^i = P_e^i + P_{e_1}^i$ P_e^i la prime totale de ces mêmes cédantes, obtenus par sommation sur le profil de risque

Comme nous avons déjà fait le traitement préliminaire qui permet de vérifier que les primes dans la base du profil de risque et celle de la base de prime sont comparables, nous pouvons conclure que P_{i*} et P_{e*}^i sont presque égales pour toutes les tranches.

Les numérateurs :

Pour savoir s'il est raisonnable de rapprocher le ratio de prime au taux Burning Cost (à un loss ratio près) , nous allons devoir s'assurer que les numérateurs sont comparables (i.e nous ne comparons pas deux entités complètement différentes) après rajout des cédantes de type « Total ». Pour cela, il suffit d'augmenter la franchise à gauche.

En augmentant la franchise A_0 à 12M DKK, nous s'assurons aisément que les ratios de primes ne sont calculés que pour les bandes supérieures à 12M DKK. De même, les hypothèses imposées au début de ce chapitre permettent d'importer que des sinistres dont le cout est supérieur à 12M DKK.

Ayant supposé que les sinistres de type « Total » sont en effet des sinistres commerciaux à partir de ce seuil, nous sommes en mesure de comparer ces deux rapports même s'ils ne sont pas strictement associés à une base de sinistre « Commerciale ». L'estimation des paramètres sera faite de nouveau sur cette nouvelle base, et nous allons recomparer les nouvelles estimations avec celles obtenus au chapitre 6, avant de fixer sur un résultat final pour la base « Commerciale ».

b. Etude des tendances

Nous rajoutons alors 8 nouvelles cédantes et la nouvelle base « Commerciale » a des caractéristiques suivantes :

Base	Nombre_Cedantes	Nombre_Sinistres
Nouvelle Base Commerciale	18	868

Figure 7.1 Statistique de la nouvelle base « Commerciale »

Comme pour l'ancienne base Commerciale, étudions la tendance des sinistres par tranche afin de trouver la tranche maximale optimale, ayant déjà fixé la première tranche à 12M DKK.

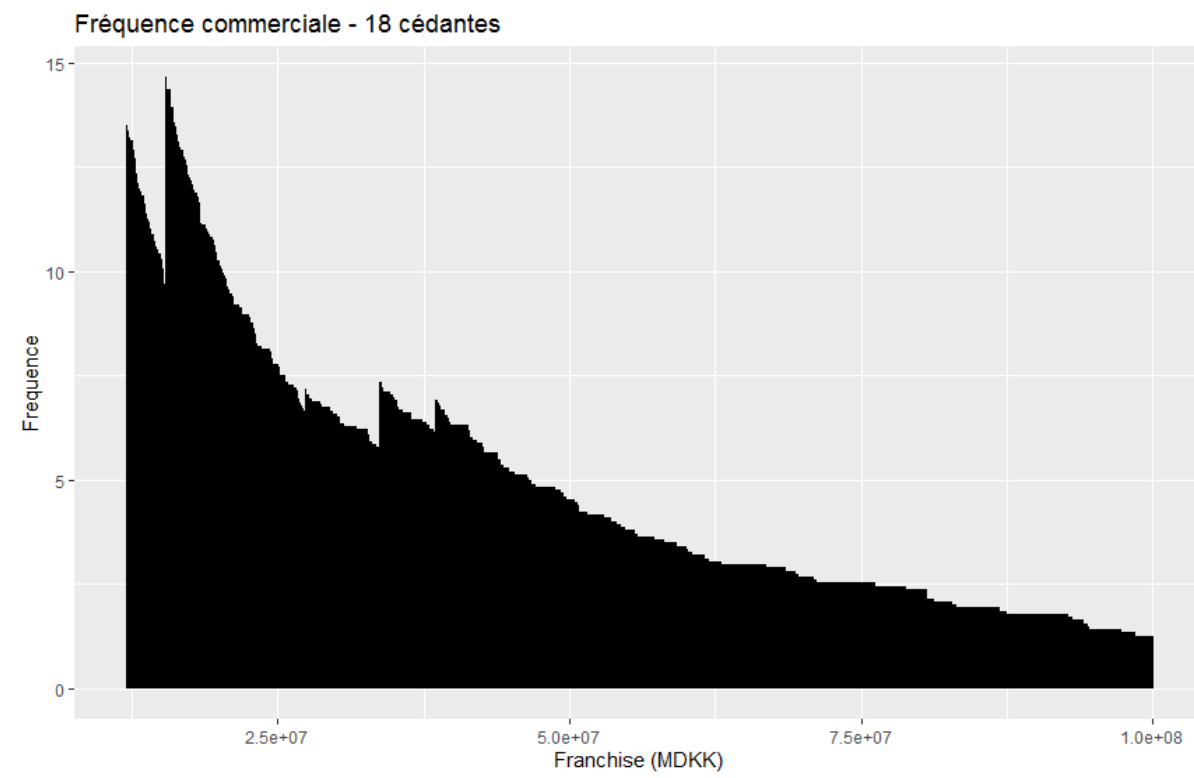


Figure 7.2 Fréquence de la nouvelle base Commerciale

Nous pouvons aussi comparer les fréquences et les parts de primes entre la nouvelle et l'ancienne base Commerciale, pour les rétentions entre 12M et 40M DKK afin de voir comment la nouvelle base permet d'avoir une analyse plus robuste.

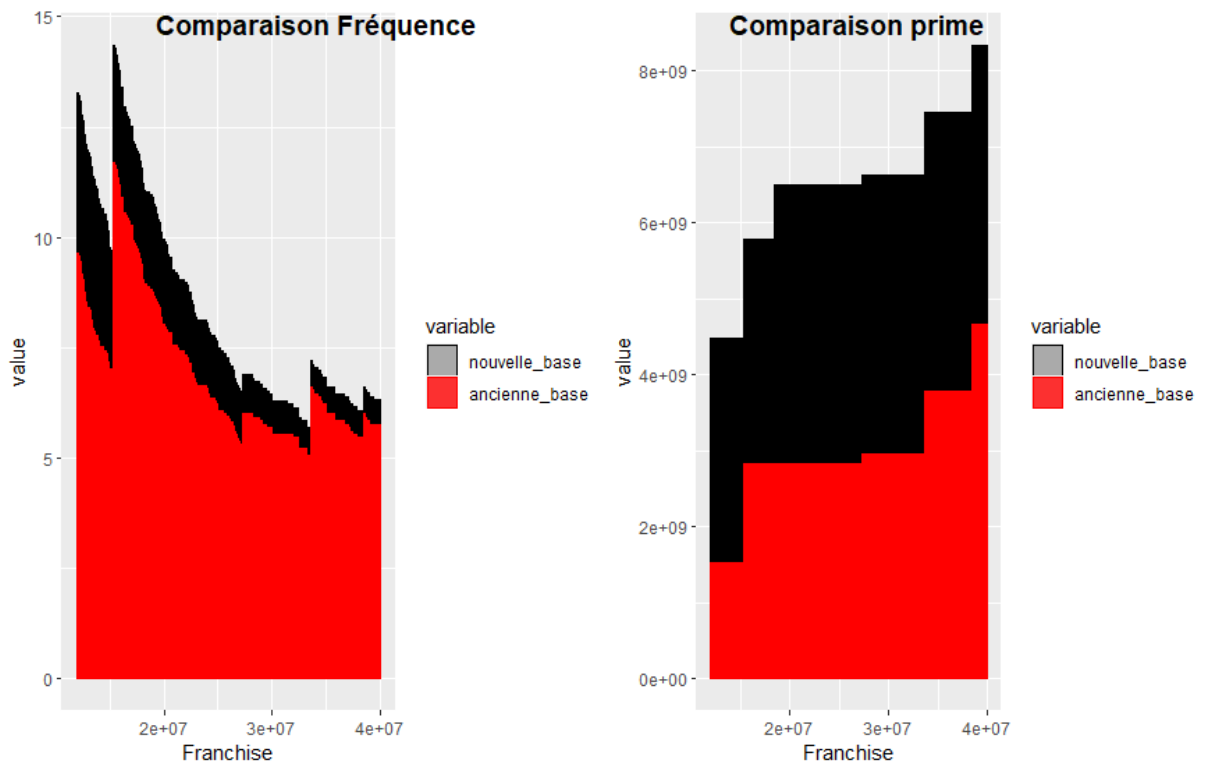


Figure 7.3 Comparaison de la fréquence et part de prime entre l'ancienne et la nouvelle base

Au vu du résultat obtenu, nous allons arbitrairement choisir comme seuil maximal $A_n = 75M$ DKK. En effet, nous jugeons qu'une fréquence inférieure à 2,5 (donc franchise supérieure à 75M DKK) n'est plus assez significative pour prendre en compte dans nos estimations. En augmentant la franchise maximale à 100M DKK, nous allons voir seulement une très légère variation des paramètres, qui ne changera pas beaucoup la forme de la courbe d'exposition. En revanche, la complexité temporelle de l'algorithme d'optimisation va quasiment doubler. Nous allons ensuite répéter les étapes faites dans les chapitres pour la nouvelle base Commerciale.

c. Courbe de Burning Cost du marché : franchise de 12M à 75M DKK

Nous obtenons la courbe de Burning Cost suivante pour notre nouvelle base Commerciale :

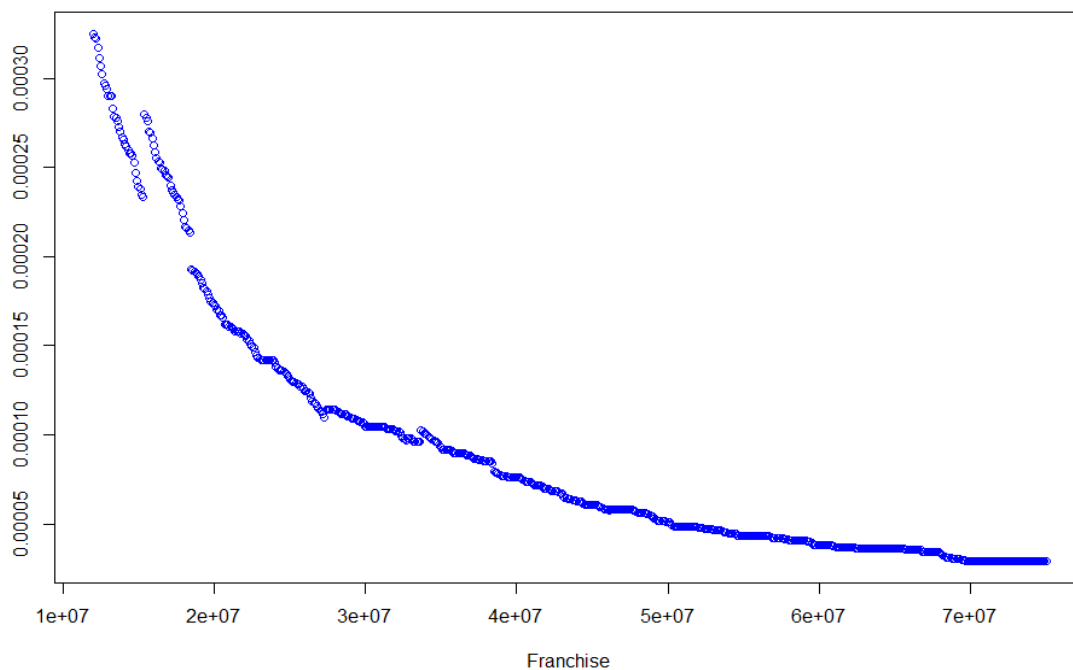


Figure 7.4 Courbe Burning Cost de la base « Commerciale »

D'une manière générale, nous observons toujours une décroissance logarithmique avec des sauts au niveau des points de rajouts de cédantes, tout comme pour l'ancienne base Commerciale. La courbe semble assez lisse à partir de 20M DKK.

Remarquons cependant une baisse de la valeur du taux Burning Cost à la première tranche : $3,4 \times 10^{-4}$ par rapport à 6×10^{-4} pour l'ancienne base. Ceci indique qu'une ou plusieurs cédantes que nous avons rajoutés à la nouvelle base Commerciale ont un taux Burning Cost beaucoup plus faible que le marché, tout en ayant un taux de prime non négligeable.

d. Courbes d'expositions avec les paramètres optimisés

Nous allons dans cette partie estimer les courbes avec un Loss Ratio de 0,7. Pour cela nous allons reprendre les algorithmes déjà utilisés dans les parties précédentes pour estimer la courbe à un paramètre puis celle à deux paramètres. Nous obtenons :

MBBEFD	parametre_1_optimized	parametre_2_optimized	RMSE
1 paramètre	4.6745143		5.8e-06
2 paramètres	0.0698789	649.7219007	5.4e-06

Figure 7.5 Paramètres optimales avec un LR de 0.7

Il est à noter que nous avons limité le nombre d'itérations de l'algorithme de Nelder Mead à 300 (au lieu de la valeur de défaut 500 dans R), pour l'optimisation de la courbe MBBEFD à deux paramètres. Ceci permet d'acquies un compromis entre un RMSE satisfaisant et des valeurs de paramètres raisonnables. Nous jugeons qu'un RMSE inférieur à celle obtenue par la courbe d'un seul paramètre suffit comme critère pour arrêter l'algorithme.

Remarquons aussi que la valeur de c optimisé a drastiquement augmenté par rapport à la valeur obtenue pour l'ancienne base. Ceci est cohérent avec le fait que la nouvelle courbe Burning Cost se situe en dessous de l'ancienne.

Au niveau du résultat graphique, nous obtenons :

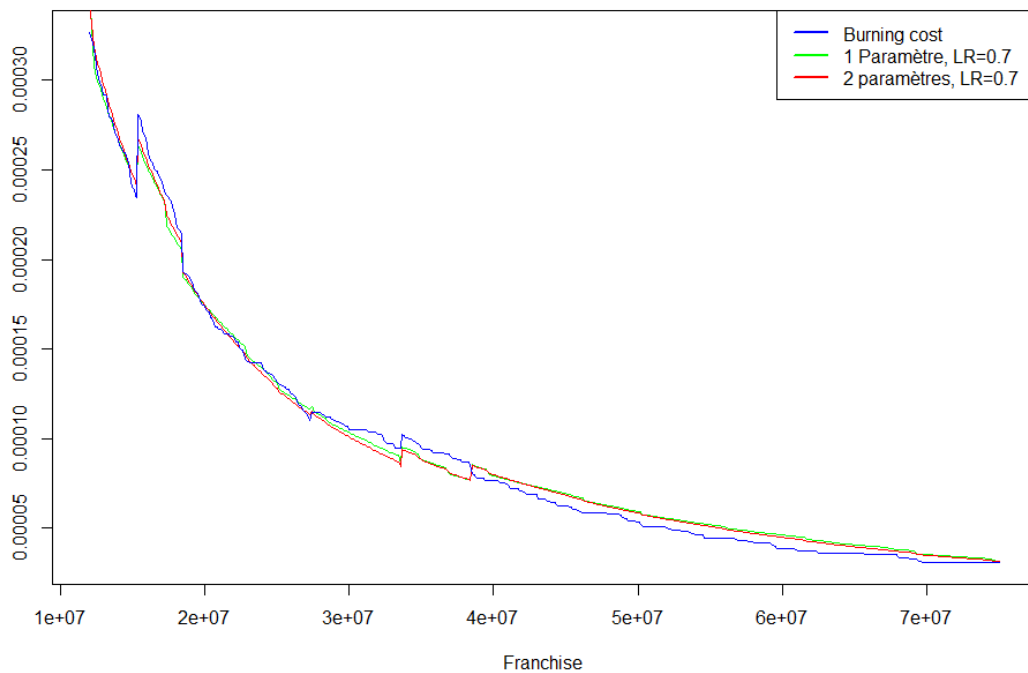


Figure 7.6 Courbes optimisés avec $LR = 0.7$

Les deux courbes MBBEFD d'une et de deux paramètres sont très proches et sont toutes deux de bons fits de la courbe Burning Cost. En observant les courbes de plus près, nous pouvons voir que la courbe de deux paramètres se rapproche plus de la courbe bleue pour les franchises plus faibles (0 à 18M DKK), alors que la courbe à une paramètre prédit mieux la courbe bleue pour les valeurs intermédiaires (25M et 35M DKK).

Notons aussi que les sauts au niveau de la courbe Burning Cost sont reproduits par les deux courbes d'expositions, ce qui est cohérent. Nous allons dans la suite étudier de plus près les cédantes rajoutées afin de fournir une explication pour le changement de la valeur du paramètre.

II. Etude de la sensibilité des paramètres

a. Etude de la sensibilité par cross – validation

Pour étudier la volatilité des paramètres en fonction de nos données, nous avons décidé de faire une boucle d'optimisation. Plus précisément, nous allons estimer les paramètres des courbes MBBEFD en enlevant à chaque itération une cédante de la nouvelle base Commerciale. Bien que cette démarche nécessite une complexité temporelle très importante, nous la jugeons nécessaire pour valider la stabilité de notre estimation malgré l'exclusion de certaines cédantes.

Etant donné la proximité des courbes d'un et de deux paramètres, une étude sur les paramètres c permettront de déterminer les cédantes qui portent un effet outlier sur nos paramètres.

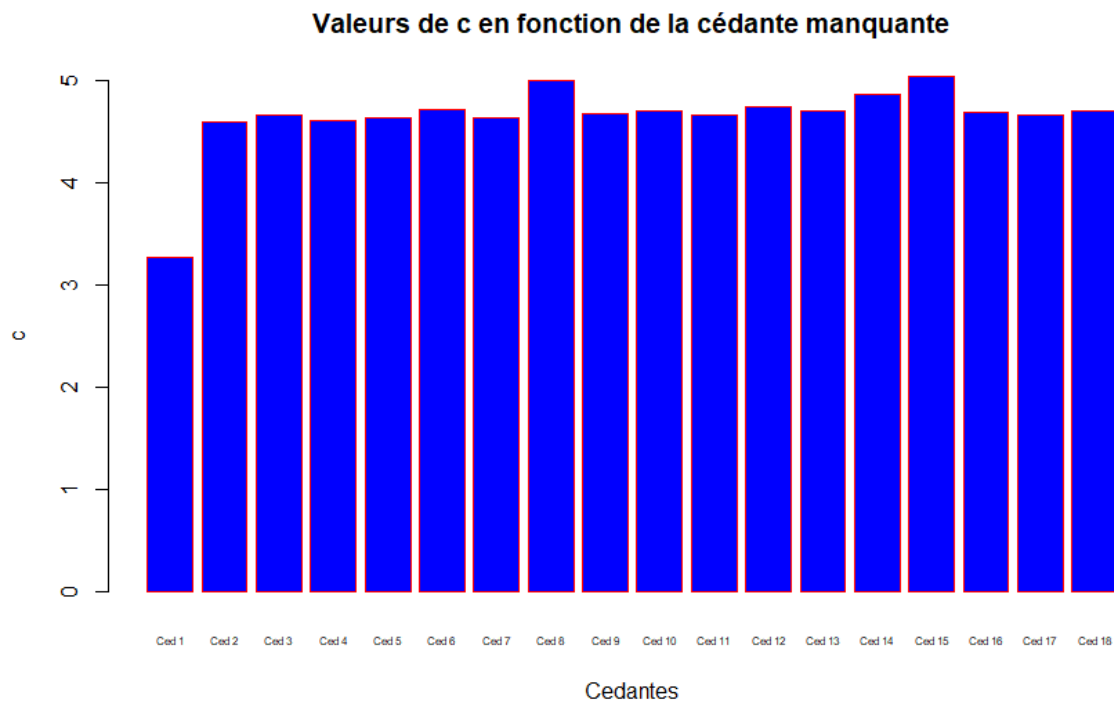


Figure 7.7 Cross validation du paramètre c

Une de nos cédantes, la Cédante 1, augmente considérablement la valeur du paramètre c . En enlevant les autres cédantes du marché, la valeur de c reste relativement stable (entre 4.6 et 5) mais en enlevant la Cédante 1 de la base, nous observons une baisse forte du paramètre optimale, correspondant à une valeur du marché de 3,27.

Une première comparaison du Burning Cost de marché avec et sans la Cédante 1 peut simplement évaluer son impact sur la courbe de marché.

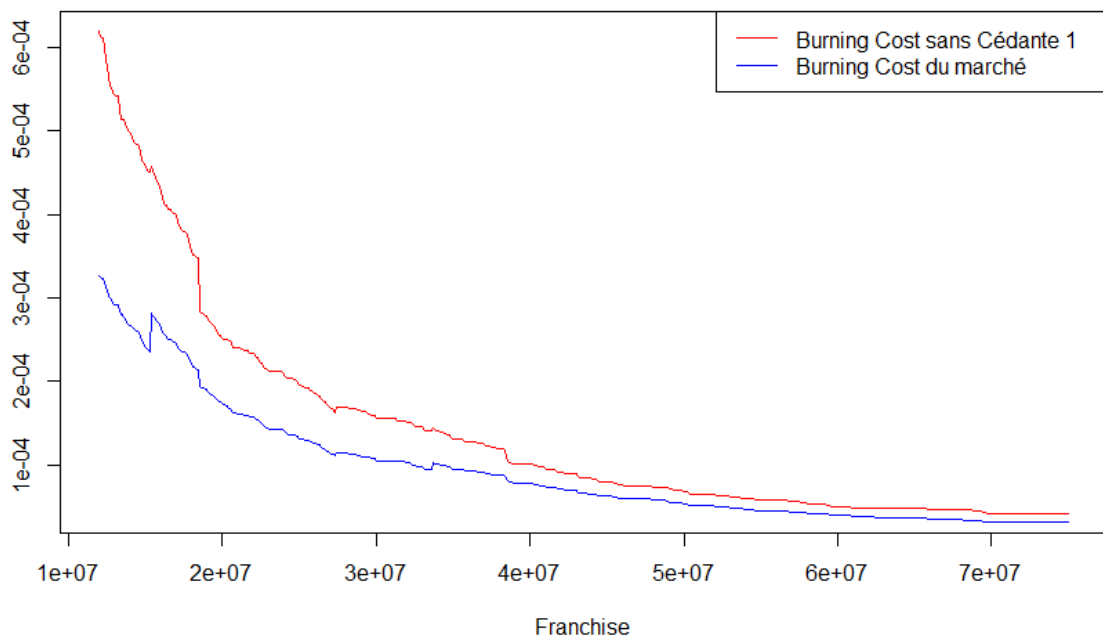


Figure 7.8 Comparaison Burning Cost de la cédante 1 avec le marché

Nous pouvons voir que le rajout de la cédante 1 fait baisser le taux Burning Cost du marché sur toutes les tranches. D'une manière générale, nous pouvons penser que la cédante 1 a soit beaucoup moins de sinistres que le marché, soit charge un taux de prime beaucoup plus élevé que le marché pour les sinistres de même montant.

Afin de savoir si nous pouvons enlever la cédante 1 de la base, nous allons étudier le taux des primes relatives de chaque cédante par rapport au marché. Pour cela, nous utilisons la nouvelle base de prime qui correspond à la base Commerciale avec 18 cédantes. Nous obtenons les taux suivants :

Cedante	Pourcentage_Primes
Cedante 1	0.2998
Cedante 2	0.0910
Cedante 3	0.0138
Cedante 4	0.0789
Cedante 5	0.0248
Cedante 6	0.0453
Cedante 7	0.0041
Cedante 8	0.0320
Cedante 9	0.0009
Cedante 10	0.0180
Cedante 11	0.0087
Cedante 12	0.0267
Cedante 13	0.0045
Cedante 14	0.1537
Cedante 15	0.0829
Cedante 16	0.0987
Cedante 17	0.0002
Cedante 18	0.0160

Figure 7.9 Part de marché par cédante

La cédante que nous cherchons à étudier représente à un tiers de la prime totale du marché, et est aussi la cédante avec le plus grand part de prime du marché. Nous allons tout de même chercher à savoir si la baisse du taux Burning Cost causé par la cédante 1 est liée aux charges de sinistres élevées ou bien une faible fréquence de sinistres, par rapport au marché.

En effet, si nous observons que la cédante 1 charge des couts de sinistre beaucoup plus important que le marché, il sera intéressant de l'enlever pour l'estimation des paramètres. En revanche, si le faible taux de Burning Cost de la cédante 1 s'explique par un bon choix de risques, nous allons garder la cédante dans la base.

b. Etude de la prime par Somme Assurée et par Police

Nous cherchons ici à savoir si la cédante 1 sur-tarifie ses polices par rapport au maché, ce qui pourra justifier la faible valeur du Burning Cost. Pour faire cela, nous allons regarder le rapport de la prime par le nombre de risque et tracer ce rapport pour en fonction de la limite inférieure de la bande du profil de risque correspondant. A partir de ces rapports, nous pouvons faire 18 régressions linéaires et regarder graphiquement si la cédante 1 sur-tarifie ses polices.

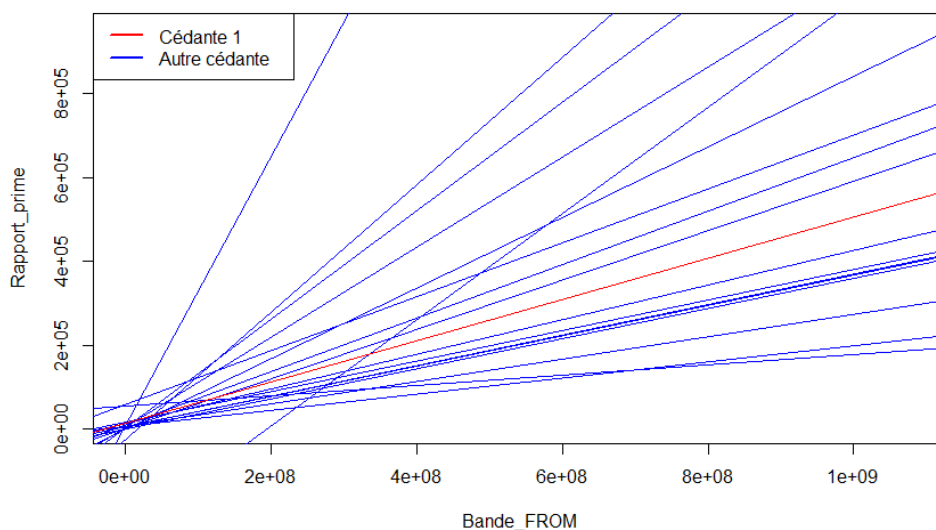


Figure 7.10 Régression linéaire des rapports prime/police

Nous voyons graphiquement que la pente en rouge de la cédante 1 n'est pas une valeur extrême par rapport au marché, ce qui montre que la cédante 1 ne sous-tarifie ni sur-tarifie ses sinistres. Nous allons donc étudier la fréquence des sinistres de cette cédante.

c. Etude du rapport de la fréquence sur prime

Si nous comparons directement, par tranche, la fréquence de la cédante 1 par rapport à celle du marché, ou à celle d'autres cédantes, aucune conclusion peut être tirée. Avant de faire la comparaison, nous allons normaliser cette fréquence par la prime totale soit de la cédante 1, soit du marché, soit celle d'autres cédantes utilisées dans la comparaison.

Les fréquences des sinistres sont très petites par rapport aux primes, nous allons ainsi observer des valeurs très faibles. Le but étant cependant de comparer deux rapports relativement l'une à l'autre (ou plusieurs rapports entre – elles), nous estimons qu'une étude graphique est suffisante pour en tirer des conclusions.

Nous regardons dans un premier temps le rapport Fréquence/Prime de la Cédante 1 et celui de toutes les autres cédantes combinées.

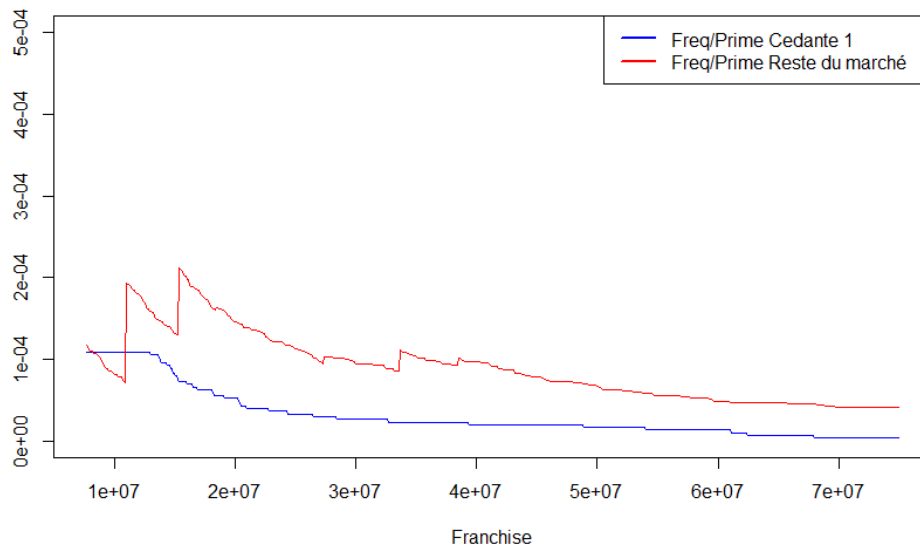


Figure 7.11 Comparaison de la fréquence de la cédante 1 par rapport au marché

La fréquence normalisée de la cédante 1 est clairement plus faible que celle du marché sur la plupart des tranches XS. Notons ici que la fréquence du marché a des sauts due au rajout des cédantes, alors que celle de la cédante 1 est bien strictement décroissante lors de l'augmentation de la franchise. Nous allons ensuite comparer la fréquence normalisée de la cédante 1 avec celle des cédantes ayant les plus grands parts de primes.

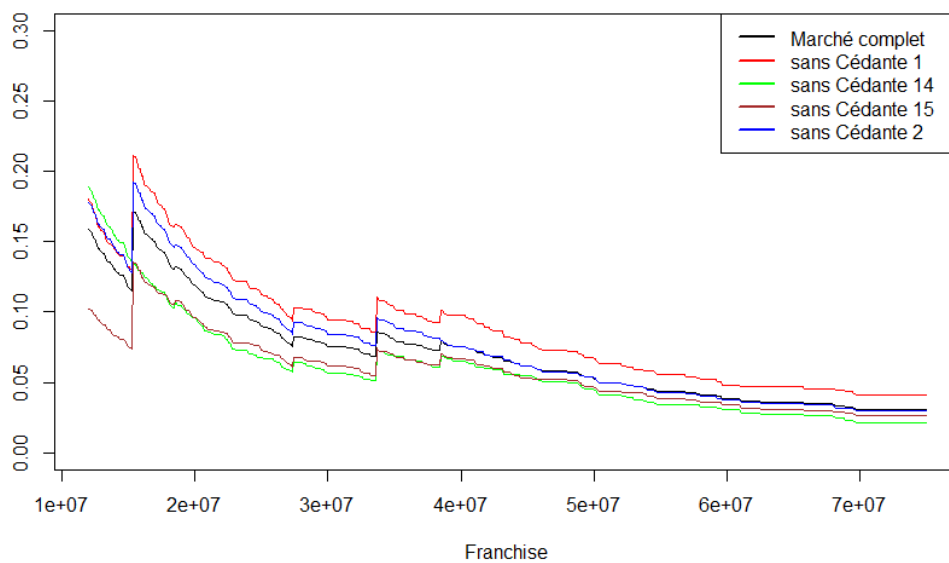


Figure 7.11 Comparaison de la fréquence des plus grandes cédantes par rapport au marché

Outre que la cédante 1, nous choisissons ici les cédantes 2, 14 et 15 pour l'étude des fréquences. Comme pour l'étude des variances, nous enlevons tour à tour des cédantes du marché, et nous comparons les fréquences correspondantes.

L'interprétation graphique est assez intuitive : Les cédantes ayant des courbes en dessous de la courbe de marché (noire) augmentent la moyenne de la fréquence des sinistres du marché, et celles qui ont des courbes au-dessus de la courbe de marché font baisser la moyenne fréquentielle.

Au vu du graphique, cédante 1 est clairement la cédante qui a le taux de fréquence par prime le plus faible. Nous pouvons en déduire que la baisse du taux Burning Cost du marché est liée à la faible fréquence des sinistres sur toutes les tranches de la cédante 1. Etant donné que la cédante 1 charge un coût comparable au marché, tout en ayant un part de prime très important, nous concluons donc qu'il est nécessaire de garder cette cédante dans l'estimation des courbes.

Chapitre 8 : Application et synthèse des paramètres retenus

Nous décidons ainsi de choisir les paramètres optimisés dans la partie I, correspondant à la nouvelle base Commerciale avec 18 cédantes.

Il serait ensuite intéressant d'appliquer les courbes d'expositions pour calculer la prime pure sur certaines traités XS déjà tarifés par nos actuaires, et la comparer par rapport à la prime pure obtenue par nos outils internes de tarification. Etudions deux programmes respectivement à trois et à quatre couches.

I. Calcul des primes pures sur des traités XS

Programme 1 : Cédante 15

	Taux de prime calculé par exposition	Taux de prime calculé par simulation	Taux Burning Cost
50 XS 100	1,96%	1,5%	1.29%
300 XS 150	4,07%	2,0%	2.7%
750 XS 450	2.2%	1.2%	2.0%

Figure 8.1 Taux de primes du programme 1

Programme 2 : Cédante 7

	Taux de prime calculé par exposition	Taux de prime pure calculé par simulation	Taux Burning Cost
6 XS 4	8.55%	3.1%	1.66%
20 XS 10	5.3%	1.5%	0%
50 XS 30	2.2%	0.6%	0%
225 XS 80	0.8%	0.35%	0%

Figure 8.2 Taux de primes du programme 2

Les 2 cédantes que nous avons choisies représentent une part de prime du marché de respectivement 15% de prime et 0,4%. La méthode de tarification par simulation implémentée par nos outils internes prend en compte aussi le taux Burning Cost. La cédante 7 ayant relativement peu de sinistres, nous pouvons voir que l'augmentation de la rétention rend le taux Burning Cost nul. Ce n'est pas pour autant que le cout de la tranche est nul, et les taux obtenus par exposition et simulation montrent bien cela.

Comparaison entre le taux d'exposition et le taux calculé par simulation

Notons que nos courbes MBBEFD sont estimés en utilisant un Loss ratio de 0,7, qui sera donc le ratio que nous utilisons pour calculer les différences relatives.

$$m_1 = \frac{|1,96 \times 0,7 - 1,5| + |4,07 \times 0,7 - 2| + |2,2 \times 0,7 - 1,2|}{3} = 0,44$$

$$m_2 = \frac{|8,55 \times 0,7 - 3,1| + |5,3 \times 0,7 - 1,5| + |2,2 \times 0,7 - 0,6| + |0, \times 0,7 - 0,6|}{4}$$

$$= 2,79$$

Nous remarquons une différence de taux moyenne absolue assez faible sur toutes les tranches pour le premier programme. Le deuxième programme présente cependant des variations plus marquées. Cela peut s'expliquer par les parts de primes que représentent les deux cédantes par rapport au marché. Avec un part de seulement 0,4%, la cédante 7 prend en effet un poids très faible dans la construction de la courbe de marché.

La courbe d'exposition étant optimisée à partir de toutes les cédantes du marché, nous devons dans la plupart des programmes observer des taux de primes comparables à ceux obtenus par nos outils internes. Pour les cédantes qui chargent un cout très différent au marché, ou bien a une différence de fréquence par tranche extrêmes, nous n'allons pas pouvoir comparer simplement la tarification par exposition et simulation.

Nous voyons ici une rapide application de la courbe d'exposition optimale pour la classe d'affaire Commerciale. L'actuaire tarificateur peut utiliser le résultat de la tarification par exposition comme référence avant de se lancer dans le calcul des taux par simulations. Sur les tranches avec peu d'expériences, si l'actuaire tarificateur remarque un écart important entre la tarification par fréquence-cout et celle par exposition, il sera intéressant de prendre en compte le taux de prime pure obtenue par exposition afin d'être cohérent avec le prix du marché.

II. Synthèse des paramètres finaux

Nous avons ainsi retenu les paramètres de courbes MBBEFD à 2 paramètres suivants pour les bases « Commerciale » et « Particulier » :

Base Commerciale	b=0,0698 et g=649,721
Base Particulier	b=288,28 et g=9.27*10 ¹⁵

Figure 8.3 Paramètres finaux

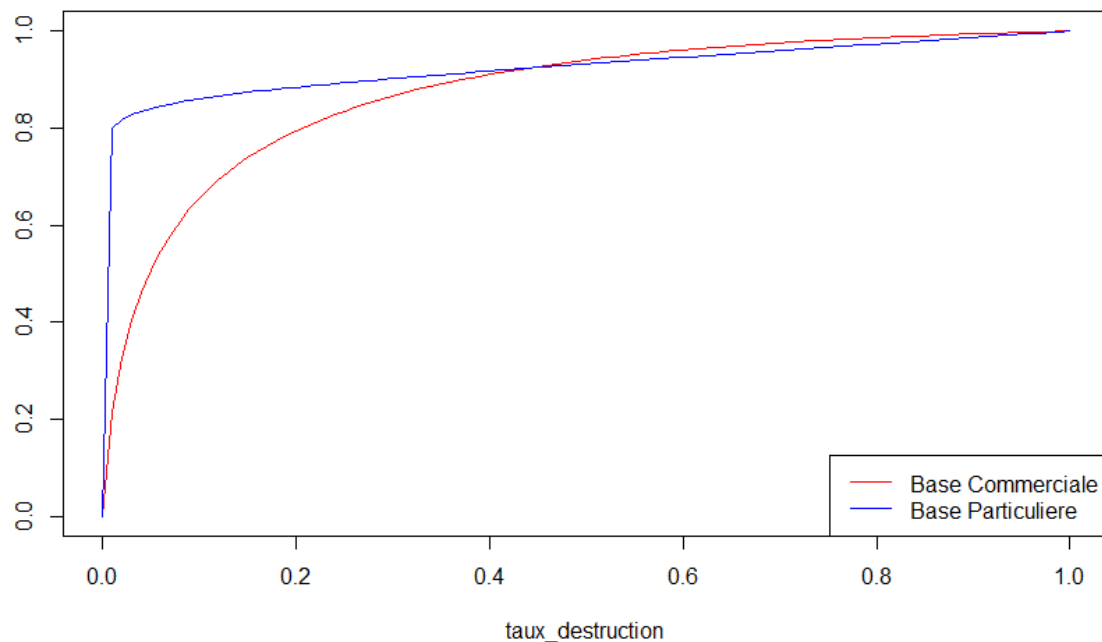


Figure 8.4 Courbes d'expositions avec paramètres optimisés

Nous nous retrouvons avec une courbe assez « classique » pour la base Commerciale, et une courbe très concave pour la base « Particulier ». Comme indiqué précédemment, le peu d'information sur les profils de sinistres particulières est sûrement la cause de la forme particulière de la courbe, elle est donc à être utilisée avec précaution.

CONCLUSION GENERALE

Récapitulatif du travail présenté :

La tarification par exposition est un bon complément pour pallier les défauts de la tarification par expérience. En effet, cette dernière n'est pas adaptée pour tarifier les tranches qui n'ont pas ou peu d'expérience et les nouvelles compagnies pour lesquelles les expériences sont insuffisantes. Par ailleurs, la tarification par exposition a pour avantage de tenir en compte l'information du profil du portefeuille.

Pour pouvoir mettre en place cette méthode de tarification, nous avons ainsi cherché, dans ce mémoire, à construire des courbes d'expositions par classe d'affaire propre au marché nordique dans le cadre de la tarification des traités en excédent de sinistres par risque.

Pour cela, nous avons utilisé les travaux menés antérieurement sur la théorie des courbes d'expositions (notamment sur les courbes MBBEFD), tout en introduisant une nouvelle démarche de construction qui s'appuie sur la tarification par expérience.

En premier lieu, nous avons agrégé les bases de données pour traiter l'ensemble des cédantes comme une seule, afin de pouvoir réaliser nos estimations. Ce processus est cependant assez délicat avec plusieurs précautions et analyses préliminaires à prendre en compte.

Une fois que la base est mise en place, nous avons implémenté une méthode permettant d'obtenir le taux Burning Cost sur de multiples tranches de nos choix. Ces courbes serviront de courbes de références auxquelles nous allons approximer nos courbes d'expositions.

L'étape suivante consiste à utiliser les courbes d'expositions théoriques (notamment les courbes MBBEFD dans le cadre de notre étude) pour calculer les taux de primes allouées par l'assurance directe, sur les mêmes tranches que nous avons choisi précédemment. Nous devons garder en tête que pour obtenir la prime pure, un Loss Ratio doit être introduit.

La méthode d'estimation est relativement directe comme nous cherchons à approximer une courbe paramétrique sur une autre courbe, celle du Burning Cost. Pour cela, la minimisation de la statistique du RMSE semble être adéquat. A l'aide de R, nous avons pu implémenter un algorithme d'optimisation pour les courbes MBBEFD à un et deux paramètres.

Nous avons ensuite cherché à améliorer nos estimations, en rajoutant plus de données. Ce processus doit être fait avec précaution, puisque les risques couverts par les nouvelles cédantes ne sont pas forcément de la même nature que les risques déjà présents dans nos anciennes bases. Nous répétons ainsi les mêmes démarches d'optimisations une fois que la nouvelle base est mise en place, avant de procéder à une étude de la sensibilité de nos paramètres.

Cette étape indispensable nous a montré qu'une cédante modifie beaucoup nos paramètres estimés. Une analyse critique sur le profil de risque et les sinistres de cette cédante a été menée, avant d'arriver à la conclusion de garder la cédante dans la base finale.

L'étape finale consiste à évaluer nos paramètres à travers la tarification de deux programmes XS de nos choix, pour s'assurer que les taux obtenus ne sont pas aberrantes.

A l'issue de ce mémoire, nous avons pu déterminer des paramètres optimaux pour notre courbe de marché « Commerciale ». Cependant, l'estimation de la courbe de la classe d'affaire « Particulier » présente plusieurs problèmes, notamment liés aux manques de données. Pour la même raison, nous n'avons pas pu obtenir une courbe de marché pour la classe d'affaire « Agriculture ».

Limites de notre démarche et développements possibles :

La première question que nous pouvons nous poser serait la généralisation de la méthode pour obtenir une courbe d'exposition de marché sur n'importe quel marché.

A priori, le travail est faisable mais assez contraignant, surtout au niveau de l'étape de l'agrégation des données. Comme nous avons vu dans ce mémoire, plusieurs ajustements a été fait manuellement afin d'obtenir une base de marché cohérente. La faisabilité de la démarche repose ainsi sur la fiabilité et l'exhaustivité de données que fournissent les cédantes, ainsi que la taille de la base des données. Nous pouvons voir facilement que le manque des données sur les types de risques « Agriculture » et « Particulier » aboutit très rapidement à des difficultés voire l'impossibilité de la construction de courbes par cette méthode.

Un autre défaut est le degré important de subjectivité lors du traitement des données. En effet, due à l'incohérence des données fournies par les cédantes, il nous a été obligé de faire des choix quantitatifs, qui sont seulement adaptés pour notre base de données. Nous pouvons penser qu'un autre actuariaire, face aux mêmes problèmes de données, pourra porter d'autres décisions et donc aboutir à d'autres courbes d'expositions.

Dans la suite, nous pouvons toujours améliorer l'estimation des courbes en intégrant d'autres cédantes dans la base de marché. Cependant, comme nous avons vu qu'il se peut que les paramètres soient très sensibles lors du rajout d'une nouvelle cédante, nous devons faire cela avec précaution.

L'optimisations des courbes à plusieurs paramètres est un sujet assez complexe, il est sans doute possible d'améliorer la démarche proposée dans notre mémoire. Nous pouvons notamment essayer d'implémenter la méthode du recuit simulé, qui est une méthode d'optimisation heuristique permettant de trouver le minimum global. Cette méthode a cependant pour inconvénience d'être très lente, et peu documentée.

D'autres lois comme le log normal, Weibull ou bien la loi exponentielle mixte (qui est utilisé en RC) peuvent être étudiées pour remplacer la famille de distribution MBBEFD classique.

Il serait aussi intéressant d'utiliser une démarche de simulation par Fréquence Cout au lieu du Burning Cost pour construire la courbe de référence.

Bibliographie

- [1] Stefan Bernegger (1997), *The Swiss-Re exposure curves and the MBBEFD distribution class*, ASTIN Bulletin Vol 27 N°1 (1997), 99–111.
- [2] J. Ludwig.S (1991), *An exposure rating approach to pricing property excess-of-loss reinsurance*
- [3] Chenut X., Desmedt S., Snoussi M., Walhin J.F. (2006) , *Experience and Exposure Rating for Property per Risk Excess of Loss Reinsurance Revisited* . ASTIN Bulletin vol.42 no1, 233-270
- [4] Ana J. Mata, Mark A. Verheyen, (2005), *An Improved Method for Experience Rating Reinsurance Treaties using Exposure Rating Techniques*
- [5] Evelyne Mlynarczyk (2014) *Techniques et pratiques de la réassurance*
- [6] LOLJEEH Ramachandra (2019) *Estimation des courbes d'exposition via Maximum de Vraisemblance en cas de données incomplètes*, Mémoire ISFA.
- [7] Victor Gillier (2019) *Calibration avancée du modèle de tarification à l'exposition dans le cadre de la réassurance incendie par risque*, Mémoire ISFA.
- [8] Julien SAUNIER (2006) *Courbes d'exposition : Approximation par les distributions MBBEFD et Pareto via maximum de vraisemblance et intervalles de confiance. Analyse en fonction du capital assuré.*
- [9] RICHARD P. BRENT (1972) *ALGORITHMS FOR MINIMIZATION WITHOUT DERIVATIVES*, <https://maths-people.anu.edu.au/~brent/pd/rpb011a.pdf>