



Union Mutualiste Retraite



Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du  
Diplôme d'Actuaire EURIA  
et de l'admission à l'Institut des Actuaires

le 9 Septembre 2022

Par : ANDRE Maxime

Titre : Optimisation de l'allocation d'actifs pour un produit de branche 26 avec analyse du gap de duration

Confidentialité : Oui - (Durée: 2 an)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

***Membre présent du jury de l'Institut***

***des Actuaires :***

Marine HABART

Florent WILHELMY

Mathieu LIMOUZIN

***Entreprise :***

Union Mutualiste Retraite

Signature :

***Membres présents du jury de l'EURIA : Directeur de mémoire en entreprise :***

Rainer BUCKDAHN

Laurence MARTINEZ

Signature :




***Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion  
de documents actuariels***

*(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :



EURIA  
EURO Institut  
d'Actuariat

6, avenue le Gorgeu  
CS 93837  
29238 Brest Cedex 3

T +33 (0)2 98 01 66 55  
euria@univ-brest.fr

## Résumé

L'UMR est une mutuelle qui gère des produits d'épargne retraite et notamment un produit de branche 26 pour un montant d'encours d'environ 8Mds.

L'allocation d'actifs est une étape particulière dans la gestion actif-passif, le but étant de maximiser un rendement sur les classes d'actifs tout en restant en adéquation avec les engagements futurs. De plus les régimes de retraite nécessitent de gérer des engagements longs et par conséquent des actifs longs ce qui complexifie la gestion actif/passif. Dans le contexte actuel de volatilité des marchés financiers nous devons prêter une attention particulière au gap de duration inhérent au régime. Ce mémoire propose de traiter ces problématiques d'allocation d'actifs sous plusieurs angles :

- Une étude sur les maturités de réinvestissement afin de limiter le gap de duration.
- Une étude sur le choix d'allocation d'actifs avec un état de l'art des techniques théoriques notamment d'immunisation du portefeuille ou basées sur la notion de surplus comme Markowitz et Sharp and Tint. Pour la réalisation de l'étude, nous avons choisi de s'écarter de ces méthodes théoriques, qui reposent sur des hypothèses peu réalistes fortes. L'allocation optimale est donc choisie parmi un large panel et suivant nos propres métriques de performances et de risques (en Stochastiques Monde Réel ou Risque Neutre).

Afin de s'assurer de la robustesse de l'allocation obtenue, des tests de sensibilités sur des scénarios choqués sont effectués en regardant différents indicateurs. De plus, dans le contexte de passage d'une réglementation Solvabilité 2 à FRPS, l'impact de l'allocation d'actifs sera mesuré.

**Mots clefs:** Allocation d'actifs, gestion actif-passif, gap de duration, Markowitz, Sharp and Tint, allocation optimale, Stochastiques, Monde Réel, Risque Neutre, frontière efficiente, tests de sensibilités.



## Abstract

The UMR is a mutual company that manages pension products and in particular a branch 26 product for an amount of 8 billion euros.

Asset allocation is a particular stage in asset-liability management, the aim being to maximise the return on asset classes while remaining in line with future commitments. Moreover, pension schemes need to manage long liabilities and consequently long assets, which makes asset/liability management more complex.

In the current context of volatile financial markets, we must pay particular attention to the duration gap inherent in the to the duration gap inherent to the plan. This thesis proposes to address these asset allocation issues from several angles :

- A study on reinvestment maturities to limit the duration gap.
- A section on the choice of asset allocation with a state of the art of theoretical techniques such as portfolio immunisation or those based on the notion of surplus such as Markowitz and Sharp and Tint. For the purposes of this study, we have chosen to depart from these theoretical methods, which are based on unrealistic assumptions. The optimal allocation is therefore chosen from a large panel and according to our own performance and risk metrics (in Real World Stochastic or Neutral Risk).

In order to ensure the robustness of the allocation obtained, sensitivity tests on shocked scenarios are carried out by looking at different indicators. In addition, in the context of the transition from Solvency 2 to FRPS regulation, the impact of the asset allocation will be measured.

**Keywords:** Asset allocation, asset-liability management, duration gap, Markowitz, Sharp and Tint, optimal allocation, Stochastics, Real World, Neutral Risk, efficient frontier, sensitivity testing.



# Note de synthèse

## Introduction

Dans le contexte actuel de crise, avec un redressement de l'économie suite à la période de pandémie et maintenant la guerre en Ukraine sans oublier la croissance de l'inflation, les marchés financiers deviennent de plus en plus volatils. Les organismes d'assurances doivent redoubler de vigilance et prêter une forte attention sur les risques inhérents à leurs activités. En effet, les régimes de retraites sont particulièrement exposés aux risques financiers (risque actions, spread, crédit, change, . . .) ainsi que des risques dits « actuariels » (risque de longévité, de souscription, . . .) de par leurs engagements à long terme.

De plus la forte volatilité de la courbe des taux oblige les assureurs à effectuer un travail sur leur gap de duration afin de limiter l'impact de ces variations sur leurs activités.

C'est pourquoi l'allocation d'actifs représente un enjeu capital, elle doit permettre au portefeuille d'actifs d'obtenir, au cours du temps, des performances suffisantes pour pouvoir couvrir les engagements futurs et respecter les objectifs fixés.

Sous Solvabilité 2, l'allocation d'actifs amène souvent les assureurs à trop sous représenter la poche action afin de minimiser le besoin en SCR (Solvency Capital Requirement). Or dans le cas des régimes de retraite la norme solvabilité 2 n'est pas adaptée et donc la norme FRPS lui est préférée de par son horizon de calcul plus élevé, en adéquation avec la réalité de l'activité retraite.

L'objectif de ce mémoire est donc de proposer une méthode permettant de trouver une allocation d'actifs respectant ces différentes problématiques. La particularité de cette étude repose sur la singularité du régime étudié qui est de branche 26.

## Étude sur le gap de duration

L'objectif de cette partie préliminaire est de pouvoir définir une maturité de réinvestissement optimale prenant en compte le gap de duration.

La **duration** définie par Macauley s'exprime comme suit :

$$Duration = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \times \frac{F_{t_i}}{(1+r_a)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+r_a)^{t_i}}}$$

- $r_a$  : Le taux actuariel
- $F_{t_i}$  : Les flux financiers
- $t_i$  : le pas de temps

Ensuite le gap de duration permet de mesurer l'impact d'une variation de taux sur la valeur économique d'un portefeuille. C'est un outil important dans la gestion de portefeuille. Il se construit comme ceci :

$$\text{Gap de duration} = \text{Duration}_{\text{Actif}} - \text{Duration}_{\text{Passif}} \times \frac{1}{\phi}$$

- $\phi = \frac{VM_{\text{Actif}}}{VA_{\text{Passif}}}$  : le ratio de financement
- $VM_{\text{Actif}}$  : Valeur de marché du portefeuille d'actifs
- $VA_{\text{Passif}}$  : Valeur actuelle du passif

Afin de limiter ce *gap de duration* plusieurs maturités de réinvestissement ont été testées dans le but de dégager la maturité optimale.

Le modèle fonctionne de telle sorte que pour une maturité de réinvestissement donnée  $m$ , le réinvestissement en obligation se fera comme suit :

- 33%  $\Rightarrow$  Obligations à maturité  $m - 5$
- 33%  $\Rightarrow$  Obligations à maturité  $m$
- 33%  $\Rightarrow$  Obligations à maturité  $m + 5$

4 niveaux de maturités ont été testés (5,10,15 et 20 ans)

Nous devons définir un cadre de sélection pour la valeur optimale, c'est-à-dire définir des indicateurs pour mesurer l'impact de la maturité de réinvestissement sur la performance du régime.

Indicateurs choisis :

- Taux de rendement comptable (Revenus COREM / Valeur Nette Comptable COREM)
- Taux de couverture du COREM

Pour faire cette étude, le lancement se fait en stochastique Monde réel avec 1000 scénarios projetés sur 10 ans en gardant les hypothèses initiales notamment l'allocation d'actifs, seules les maturités d'investissement changent.

Les deux graphes suivant permettent de visualiser les 1000 scénarios suivant les différents indicateurs en fonction de la maturité de réinvestissement.



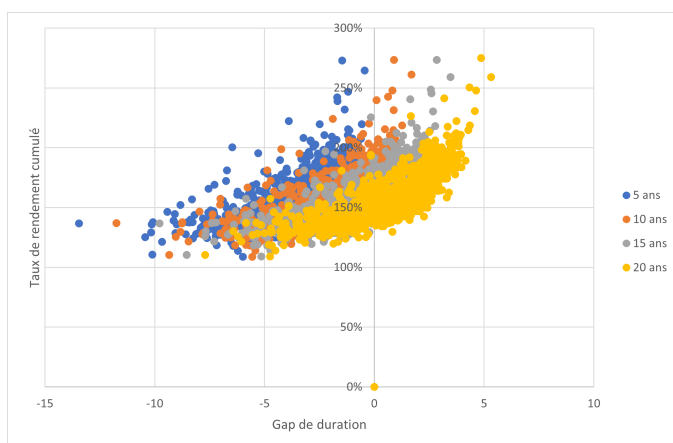


FIGURE 1 – Évolution du taux de rendement par maturité



FIGURE 2 – Évolution du taux de couverture par maturité

Le gap de durée est impacté par la maturité de réinvestissement avec une réduction (en valeur absolue) de ce dernier à chaque augmentation de la maturité de réinvestissement. Quant aux indicateurs, ils ne semblent pas impactés par le changement de maturité.

En prenant une VaR à 90% sur les deux indicateurs pour les différents scénarios, une seule valeur représentative est gardée pour l'ensemble du jeu de scénarios.

	5 ans	10 ans	15 ans	20 ans		5 ans	10 ans	15 ans	20 ans
$VaR_{90\%}$	3.437%	3.458%	3.487%	3.493%	$VaR_{90\%}$	97.47%	99.05%	100.17%	101.43%

TABLE 1 –  $VaR_{90\%}$  Taux de rendement cumulé

TABLE 2 –  $VaR_{90\%}$  Taux de couverture en 2031

En augmentant la maturité du portefeuille obligataire, donc en augmentant la dura-

tion de l'actif et de fait diminuer le gap de duration, le taux de rendement comptable s'améliore légèrement, avec une très faible augmentation entre les maturités de réinvestissement à 15 et 20 ans. De même pour le taux de couverture.

L'étude pousse à vouloir choisir 20 ans comme maturité de réinvestissement mais nous devons prendre en compte la pertinence de ces investissements. Dans le modèle, le réinvestissement se fait en obligations d'Etat et en Corporate. Or, dans le marché réel il existe des actifs moins liquides que d'autres. Les obligations Corporate à long terme sont très peu liquides et donc l'achat de ces obligations à 20 ans paraît compromis. De ce fait la maturité optimale qui a été choisie pour la suite du mémoire est  $m = 15$  ans.

## Choix de l'allocation optimale

L'objectif de cette partie est de constituer un panier d'allocations candidates et de trouver celle qui offre la meilleure performance avec le moins de risque possible.

La première étape dans la recherche d'une allocation d'actifs optimale est la détermination de la poche monétaire. Une étude a été réalisée sur le gap de trésorerie afin de s'assurer que le portefeuille initial détient une quantité suffisante de cash pour subvenir aux besoins de trésorerie futurs. Suite à cette analyse la poche monétaire a été fixée à 2%

## Construction du panier d'allocations

Après la fixation du niveau de la poche monétaire, la seconde étape est de sélectionner un panier d'allocations d'actifs à tester. Étant donné le temps de calcul le panier a été restreint à seulement 12 allocations, 6 en favorisant les classes d'actifs "risqués" et 6 en favorisant la partie "non-risqué" avec les obligations à taux fixe. Les nouvelles allocations ont été construites en modifiant les curseurs sur les différentes classes d'actifs par rapport à l'allocation initiale.

Les différentes allocations obtenues sont :

	Alloc 1	Alloc 2	Alloc 3	Alloc 4	Alloc 5	Alloc 6
<b>OPCVM</b>	14%	10%	10%	12%	13%	11%
<b>Alternatif</b>	4%	4%	6%	5%	7%	0%
<b>Actions</b>	20%	24%	22%	20%	20%	25%
<b>Non cotées</b>	8%	8%	8%	8%	4%	8%
<b>Immobilier</b>	11%	11%	11%	12%	13%	13%
<b>Obligation</b>	41%	41%	41%	41%	41%	41%
<b>Monétaire</b>	2%	2%	2%	2%	2%	2%

TABLE 3 – Allocations risquées

	A 1.1	A 1.2	A 1.3	A 1.4	A 1.5	A 1.6
<b>OPCVM</b>	4%	4%	5%	4%	9%	10%
<b>Alternatif</b>	0%	4%	3%	3%	4%	4%
<b>Actions</b>	13%	13%	16%	18%	18%	18%
<b>Non cotées</b>	4%	4%	4%	4%	4%	5%
<b>Immobilier</b>	7%	7%	8%	11%	9%	11%
<b>Obligation</b>	70%	66%	62%	58%	54%	50%
<b>Monétaire</b>	2%	2%	2%	2%	2%	2%

TABLE 4 – Allocations non-risquées

## Choix des métriques

Afin de définir une allocation optimale il faut choisir certains critères de sélections, appelés métriques d'optimisation. Certaines métriques évaluent la performance et d'autres le niveau de risque.

La solution choisie pour définir la métrique de performance est un indicateur basé sur la revalorisation cumulée que l'on notera par simplification  $REVCum$  :

$$REVCum = \prod_{t=1}^T (1 + REV_t)$$

avec  $REV_t$  : la revalorisation de l'année  $t$

Pour la métrique de risque deux indicateurs ont été choisis :

- La  $VaR_{90\%}$  du taux de couverture de la dernière année, c'est à dire le niveau minimum atteint par le taux de couverture dans 90% des cas.
- Le  $ratio_{REV}$  reflétant le risque réel du régime par points, la variation de la vsp (valeur de service du point). Il se définit comme suit :

$$ratio_{REV} = \frac{1 - REVCum_{baisse}}{REVCum}$$

$$\text{avec } REVCum_{baisse} = \prod_{t=1}^T (1 + REV_t \times 1_{(REV_t < 0)})$$

## Segmentation

L'appétence aux risques a été définie en prenant une  $VaR_{90\%}$  du taux de couverture et le seuil a été fixé à 99.5%. De même le niveau minimum de performance a été fixé en conservant une  $REVCum$  de 170

Le graphe suivant présente les résultats obtenus sur les différentes allocations ainsi que la frontière représentant l'appétence aux risques :

Seulement 5 allocations respectent les seuils de performance et de risque. Ces allocations sont ensuite représentées dans le plan suivant la deuxième métrique de risque  $ratio_{REV}$  afin de ne retenir que les points efficients.

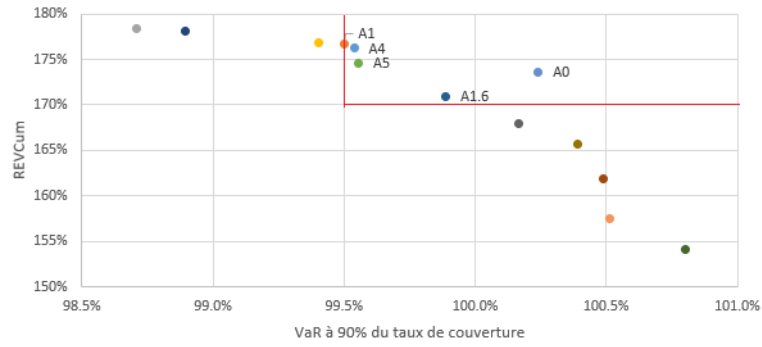


FIGURE 3 – Frontière d'appétence aux risques

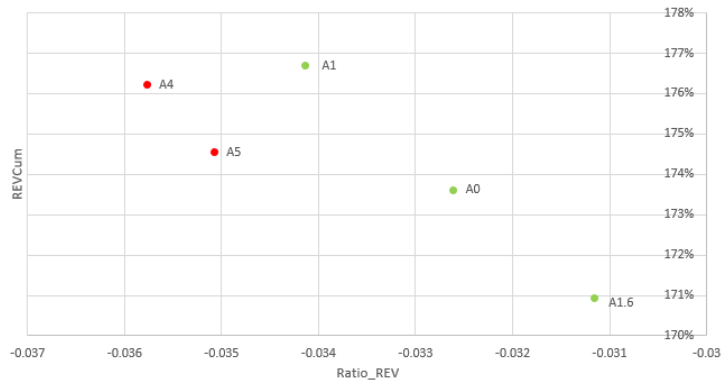


FIGURE 4 – Points efficaces

2 allocations efficaces ainsi que l'allocation initiale sont retenues :

	<b>A0</b>	<b>A1</b>	<b>A1.6</b>
<b>OPCVM</b>	10%	14%	10%
<b>Alternatif</b>	4%	4%	4%
<b>Actions</b>	18%	20%	18%
<b>Non cotées</b>	8%	8%	5%
<b>Immobilier</b>	11%	11%	11%
<b>Obligation</b>	47%	41%	50%
<b>Monétaire</b>	2%	2%	2%

TABLE 5 – Allocations efficaces

## Étude prospective

L'analyse précédente a permis de distinguer 2 allocations. Des tests de sensibilités sont réalisés sur différents scénarios afin d'évaluer leur robustesse.

Les différentes allocations restantes diffèrent par leur poche obligataire ainsi que sur la part en action et OPCVM. Afin de pouvoir les challenger 3 scénarios ont été choisis :

- Scénario choc de taux 1 : taux 10 ans à 1% en 2023 puis cristallisation de la courbe des taux.
- Scénario choc des taux 2 : taux 10 ans à 1.5% en 2026 et 1% en 2033 et les courbes intermédiaires sont construites par translation linéaire.
- Scénario choc action : scénario central en 2023 ensuite la performance action à -25% en 2024 puis retour au scénario central.

La résistance des allocations face à des scénarios choqués sera mesurée suivant deux normes :

- Solvabilité 2
- Norme FRPS (Fonds de Retraite Professionnelle Supplémentaire)

### Solvabilité 2

Dans le but de trouver une allocation optimale et robuste, les deux allocations retenues dans la partie précédente ont été challengées par rapport à l'allocation initiale sur les différents scénarios choqués.

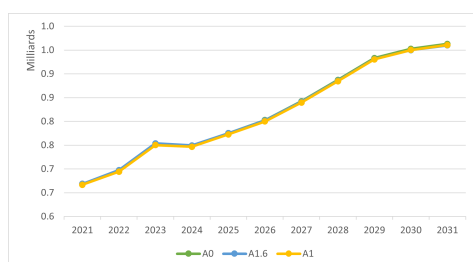


FIGURE 5 – Évolution des fonds propres des différentes allocations sur le scénario choc action

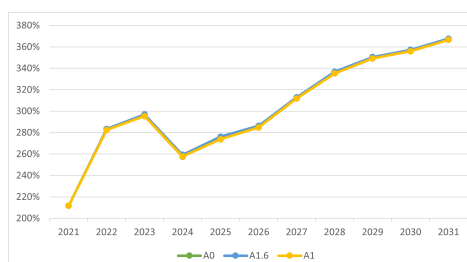


FIGURE 6 – Évolution du taux de couverture SCR des différentes allocations sur le scénario choc action

Dans un premier temps l'analyse est faite sur le scénario action. Pour les deux figures nous avons les courbes qui se confondent ce qui signifie que les deux allocations n'ont pas d'impact significatif par rapport à l'allocation initiale. Une des raisons qui expliquent cela est le fait que les modifications de l'allocation cible ne se font que sur un produit particulier le COREM (Branche 26). Or, grâce à la possibilité de revalorisation de la valeur de service du point, les modifications d'allocations aboutissent toujours à un  $SCR_{COREM}$  nulle ce qui ne modifie que peu le  $SCR_{global}$ . Cette conclusion se vérifie sur les deux autres scénarios choqués.

## FRPS

De la même façon que dans la partie Solvabilité 2, les allocations retenues sont challengées par rapport à l'allocation initiale sur les différents scénarios choqués.

Pour simplifier le propos l'analyse est faite sur le scénario de choc 1 et sera prolongée pour les deux autres scénarios.

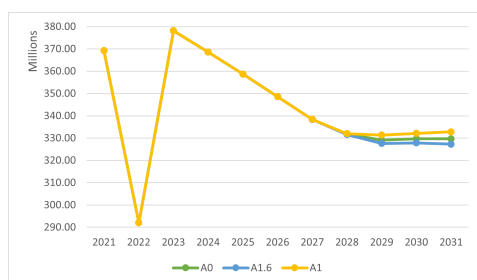


FIGURE 7 – Évolution de l'EMS des différentes allocations pour le scénario choc des taux 1

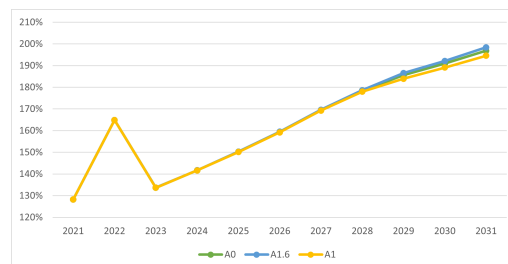


FIGURE 8 – Évolution du taux de couverture FRPS des différentes allocations pour le scénario choc des taux 1

Les modifications d'allocations sont uniquement sur le produit COREM et donc les variations de l'EMS proviennent par définition de la PMT COREM (5.2). Les variations s'expliquent par des revalorisations différentes dû aux managements actions 4.1.2.

Cette hypothèse est vérifiée par l'histogramme suivant des revalorisations de PMT par année.

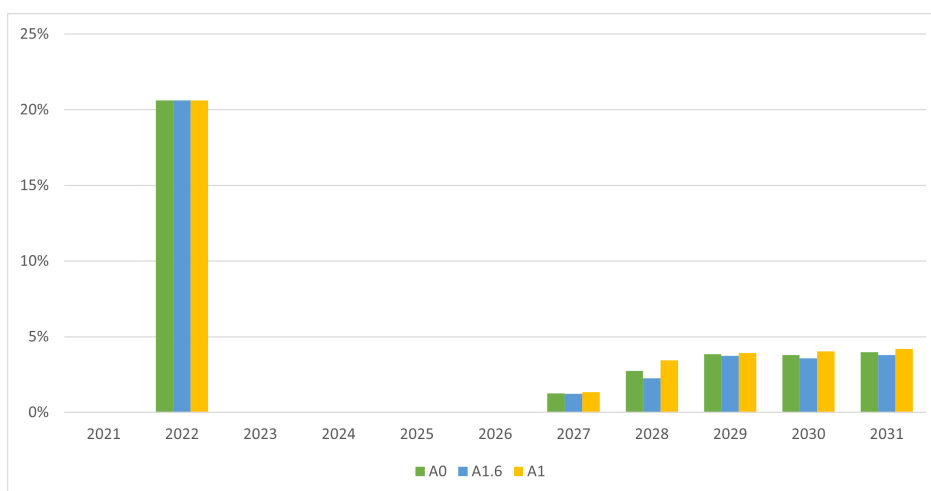


FIGURE 9 – Évolution des revalorisations COREM des différentes allocations pour le scénario choc taux 1

L'allocation A1.6 avec une poche obligataire plus importante implique une baisse

de performance sur le portefeuille d'actifs ce qui engendre des revalorisations moins importantes. D'autre part, l'allocation risquée confère plus de revalorisation mais cet écart n'est pas immédiat car la PVL (Plus-Value Latente) sur les actions se constitue au cours des années. Étant donné que ce mécanisme est le même sur les différents scénarios, des conclusions peuvent en être déduites :

D'après l'analyse précédente l'allocation A1.6, la moins risquée, permet d'améliorer légèrement le taux de couverture FRPS ce qui représente une sécurité selon la vision UMR. A contrario, l'allocation A1 amène plus de revalorisation de PMT, quel que soit le scénario choqué, en raison de sa part plus élevée d'actifs risqués. De ce fait le taux de couverture FRPS diminue or la revalorisation de PMT représente un gain pour les adhérents. Cependant les conclusions sont à nuancer car les écarts sont très faibles. De plus l'étude montre qu'il existe une relation directe entre les revalorisations COREM et le taux de couverture FRPS global. La revalorisation de la valeur de service du point conduira à une diminution du taux de couverture FRPS. Ceci met en évidence que les décisions de revalorisation devront se faire à la fois dans l'intérêt des adhérents mais en conservant un niveau de risque maximum limitant l'impact sur le taux de couverture FRPS.

## Conclusion

Au vu des résultats, même s'il y a des variations sur l'EMS qui sont relativement faibles en fin de période, l'allocation initiale reste toujours la plus pertinente. Ce qui renforce le fait que le régime reste bien couvert malgré des modifications sur l'allocation d'actif.





# Executive summary

## Introduction

In the current context of crisis, an economic recovery from the pandemic period and now the war in Ukraine, not to mention rising inflation, financial markets are becoming increasingly volatile. Insurance organisations need to be extra vigilant and pay close attention to the risks inherent in their business. Indeed, pension schemes are particularly exposed to financial risks (equity, spread, credit, foreign exchange,...) as well as so-called "actuarial" risks (longevity risk, underwriting risk,...) due to their long-term commitments.

Moreover, the high volatility of the yield curve forces insurers to work on their duration gap in order to limit the impact of these variations on their activities.

The objective of this thesis is therefore to propose a method for finding an asset allocation that respects these different issues. The particularity of this study is based on the singularity of the studied scheme, which is of branch 26.

Under Solvency 2, asset allocation often leads insurers to under-represent the equity component in order to minimise the SCR (Solvency Capital Requirement). However, in the case of pension schemes, the Solvency 2 standard is not adapted and therefore the FRPS standard is preferred due to its longer calculation horizon, in line with the reality of the pension business.

The objective of this thesis is therefore to propose a method for finding an asset allocation that respects these different issues. The particularity of this study is based on the singularity of the studied scheme, which is of branch 26.

## Study on the duration gap

The objective of this preliminary part is to be able to define an optimal reinvestment maturity taking into account the duration gap.

The duration defined by Macauley is expressed as follows :

$$Duration = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \times \frac{F_{t_i}}{(1+ra)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+ra)^{t_i}}}$$

- $r_a$  : The actuarial rate
- $F_{t_i}$  : Financial flows
- $t_i$  : Time step

Secondly, the duration gap makes it possible to measure the impact of an interest rate variation on the economic value of a portfolio. It is an important tool in portfolio management. It is constructed as follows :

$$Duration\ gap = Duration_{Assets} - Duration_{Liabilities} \times \frac{1}{\phi}$$

- $\phi = \frac{VM_{Assets}}{VA_{Liabilities}}$  : the funding ratio
- $VM_{Asset}$  : Market value of the asset
- $VA_{Liabilities}$  : present value of the liabilities

In order to limit this duration gap, several reinvestment maturities were tested in order to identify the optimal maturity.

The model works in such a way that for a given reinvestment maturity  $m$ , the reinvestment in bonds will be as follows :

$$\begin{aligned} 33\% &\Rightarrow \text{Bonds maturing } m - 5 \\ 33\% &\Rightarrow \text{Bonds maturing } m \\ 33\% &\Rightarrow \text{Bonds maturing } m + 5 \end{aligned}$$

4 levels of maturities were tested (5, 10, 15 and 20 years).

We need to define a selection framework for the optimal value, i.e. define indicators to measure the impact of the reinvestment maturity on the performance of the scheme.

Selected indicators :

- Accounting rate return (COREM income / COREM net book value)
- COREM coverage rate

In order to carry out this study, the launch is done in real world stochastic with 1000 scenarios projected over 10 years, keeping the initial hypotheses, notably the asset allocation, only the investment maturities change.

The following two graphs show the 1000 scenarios according to the different indicators and the reinvestment maturity.

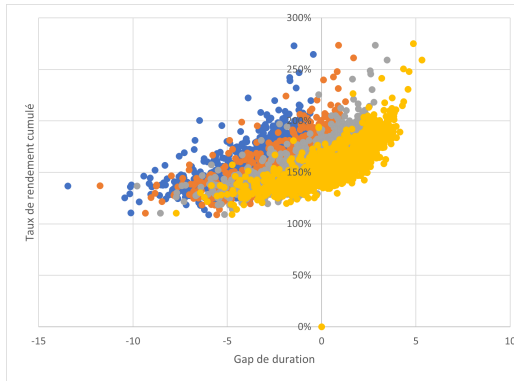


FIGURE 10 – Evolution of the rate of return by maturity

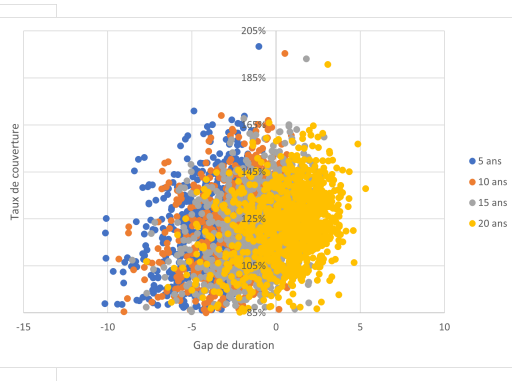


FIGURE 11 – Evolution of the coverage rate by maturity

The duration gap is impacted by the reinvestment maturity with a reduction (in absolute value) of the latter with each increase in the reinvestment maturity. As for the indicators, they do not seem to be impacted by the change in maturity.

By taking a 90% VaR on both indicators for the different scenarios, only one representative value is kept for the whole set of scenarios.

	5 years	10 years	15 years	20 years		5 years	10 years	15 years	20 years
$VaR_{90\%}$	3.437%	3.458%	3.487%	3.493%	$VaR_{90\%}$	97.47%	99.05%	100.17%	101.43%

TABLE 6 –  $VaR_{90\%}$  Rate of cumulative return

TABLE 7 –  $VaR_{90\%}$  coverage rate in 2031

By increasing the maturity of the bond portfolio, thus increasing the duration of the assets and thus decreasing the duration gap, the accounting rate of return improves slightly, with a very small increase between the 15 and 20 year reinvestment maturities. The same is true for the hedging rate.

The study leads us to choose 20 years as the reinvestment maturity but we have to take into account the relevance of these investments : in the model, reinvestment is done in government and corporate bonds. In the model, reinvestment is in government bonds and corporate bonds, but in the real market there are assets that are less liquid than others. Long-term corporate bonds are very illiquid and therefore the purchase of these bonds at 20 years seems compromised. Therefore, the optimal maturity that has been chosen for the remainder of the brief is  $m = 15$  years.

## Choosing the optimal allocation

The objective of this part is to build a basket of candidate allocations and find the one that offers the best performance with the least risk.

The first step in the search for an optimal asset allocation is the determination of the cash pocket. A cash gap study was carried out to ensure that the initial portfolio held sufficient cash to meet future cash requirements. Following this analysis, the cash position was set at 2

### Construction of the basket of assets allocation

After setting the level of the money pocket, the second step is to select a basket of asset allocations to test. Given the computation time, the basket was restricted to only 12 allocations, 6 favouring the "risky" asset classes and 6 favouring the "non-risky" part with fixed rate bonds. The new allocations were constructed by modifying the sliders on the different asset classes compared to the initial allocation.

The different allocation obtained are :

	Alloc 1	Alloc 2	Alloc 3	Alloc 4	Alloc 5	Alloc 6
<b>OPCVM</b>	14%	10%	10%	12%	13%	11%
<b>Alternative</b>	4%	4%	6%	5%	7%	0%
<b>Actions</b>	20%	24%	22%	20%	20%	25%
<b>Unlisted</b>	8%	8%	8%	8%	4%	8%
<b>Real estate</b>	11%	11%	11%	12%	13%	13%
<b>Obligation</b>	41%	41%	41%	41%	41%	41%
<b>Monetary</b>	2%	2%	2%	2%	2%	2%

TABLE 8 – Risky allocations

	A 1.1	A 1.2	A 1.3	A 1.4	A 1.5	A 1.6
<b>OPCVM</b>	4%	4%	5%	4%	9%	10%
<b>Alternative</b>	0%	4%	3%	3%	4%	4%
<b>Actions</b>	13%	13%	16%	18%	18%	18%
<b>Unlisted</b>	4%	4%	4%	4%	4%	5%
<b>real estate</b>	7%	7%	8%	11%	9%	11%
<b>Obligation</b>	70%	66%	62%	58%	54%	50%
<b>Monetary</b>	2%	2%	2%	2%	2%	2%

TABLE 9 – Non-risky allocations

### Choice of metrics

In order to define an optimal allocation, certain selection criteria, called optimisation metrics, must be chosen. Some metrics evaluate performance and others the level of risk.

The solution chosen to define the performance metric is an indicator based on the cumulative revaluation, which for simplicity will be noted as *REVCum* :

$$REVCum = \prod_{t=1}^T (1 + REV_t)$$

avec  $REV_t$  : lthe revaluation of year  $t$

For the risk performance metric two indicators were chosen :

- La  $VaR_{90\%}$  of the coverage rate of the last year, i.e. the minimum level reached by the coverage rate in 90% of cases.
- Le  $ratio_{REV}$  reflecting the real risk of the points-based scheme, the variation of the vsp (service value of the point). It is defined as follows :

$$ratio_{REV} = \frac{1 - REVCum_{down}}{REVCum}$$

$$\text{avec } REVCum_{down} = \prod_{t=1}^T (1 + REV_t \times 1_{(REV_t < 0)})$$

## Segmentation

The risk appetite was defined by taking a  $VaR_{90\%}$  of the coverage rate and the threshold was set at 99.5%. Similarly, the minimum level of performance was set by maintaining an REVCum of 170%.

The following graph presents the results obtained for the different allocations as well as the risk appetite frontier :

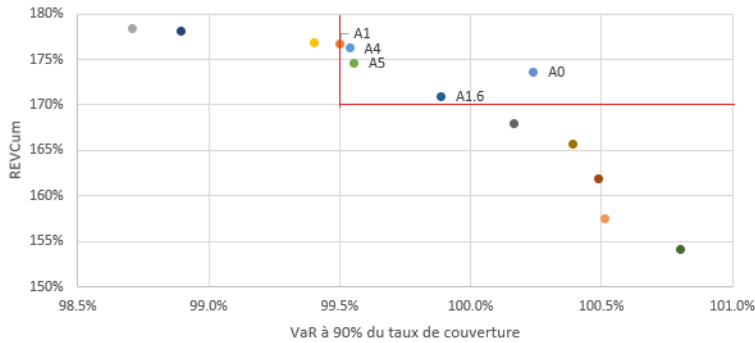


FIGURE 12 – Risk appetite boundary

Only 5 allocations meet the performance and risk thresholds. These allocations are then represented in the plan following the second risk metric  $ratio_{REV}$  in order to retain only the efficient points.

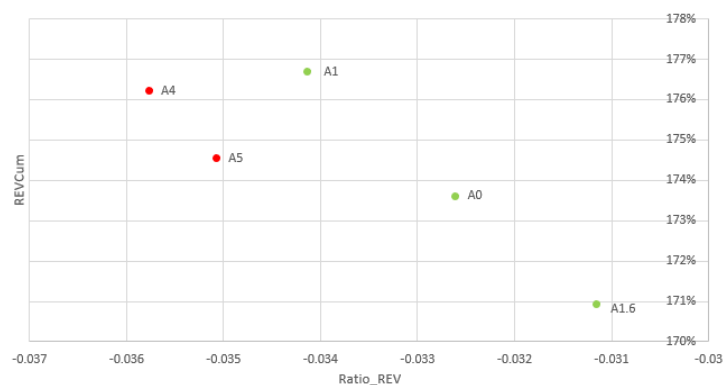


FIGURE 13 – Efficient points

2 efficient allocations as well as the initial allocation are retained :

	<b>A0</b>	<b>A1</b>	<b>A1.6</b>
<b>OPCVM</b>	10%	14%	10%
<b>Alternative</b>	4%	4%	4%
<b>Actions</b>	18%	20%	18%
<b>Unlisted</b>	8%	8%	5%
<b>Real estate</b>	11%	11%	11%
<b>Obligation</b>	47%	41%	50%
<b>Monetary</b>	2%	2%	2%

TABLE 10 – Efficient allocations

## Prospective study

The previous analysis allowed to distinguish 2 allocations. Sensitivity tests are carried out on different scenarios to assess their robustness.

The various remaining allocations differ in their bond holdings as well as in the share of equities and OPCVM. In order to be able to challenge them, three scenarios were chosen :

- Rate shock scenario 1 : 10-year rate at 1% in 2023 then crystallisation of the rate curve.
- Rate shock scenario 2 : 10-year rate at 1% in 2023 then crystallisation of the rate curve.
- Equity shock scenario : central scenario in 2023 then equity performance at -25% in 2024 then back to central scenario.

The resilience of the allocations to shocked scenarios will be measured according to two standards :

- Solvency 2
- Norme FRPS (*Fonds de Retraite Professionnelle Supplémentaire*)

## Solvency 2

In order to find an optimal and robust allocation, the two allocations retained in the previous section were challenged against the initial allocation in the different shocked scenarios.

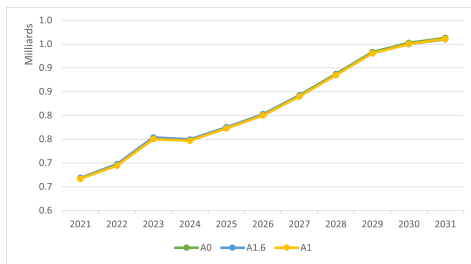


FIGURE 14 – Evolution of the equity of the different allocations in the equity shock scenario

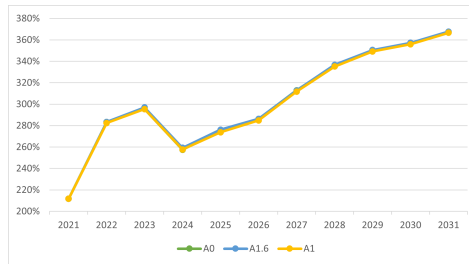


FIGURE 15 – Evolution of the SCR coverage rate of the different allocations in the equity shock scenario

In a first step, the analysis is made on the equity scenario. For both figures, the curves merge, which means that the two allocations do not have a significant impact on the initial allocation. One of the reasons for this is the fact that target allocation changes are only made on a particular product, COREM (Branch 26). However, thanks to the possibility of revaluing the service value of the point, changes in allocations always result in a zero  $SCR_{COREM}$ , which only slightly modifies  $SCR_{overall}$ . This conclusion holds for the other two shocked scenarios.

## FRPS

FRPS In the same way as in the Solvency 2 section, the allocations retained are challenged in relation to the initial allocation for the different shocked scenarios.

To simplify the discussion, the analysis is based on shock scenario 1 and will be extended to the other two scenarios.

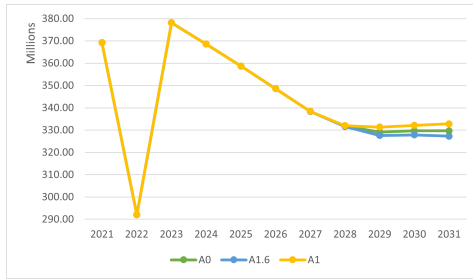


FIGURE 16 – Evolution of the MSE of the different allowances for the rate shock scenario 1

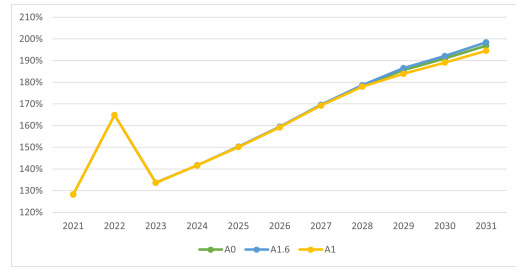


FIGURE 17 – Evolution of the FRPS coverage rate of the different allocations for the rate shock scenario 1

The changes in allocations are only on the COREM product and therefore the variations in the EMS come by definition from the PMT COREM (5.2). The variations are explained by different revalorisations due to management action (4.1.2).

This assumption is verified by the following histogram of LMP revalorisations per year.

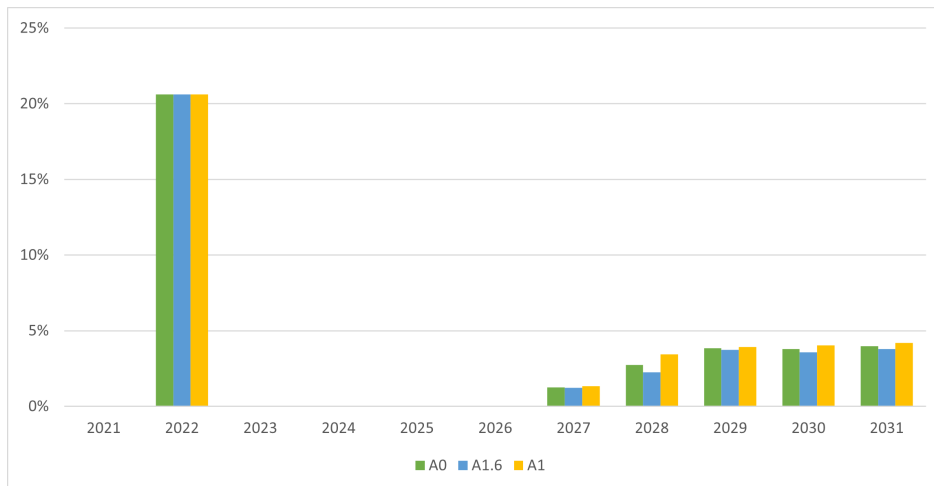


FIGURE 18 – Evolution of COREM revalorisations of the different allowances for the rate shock scenario 1

The A1.6 allocation with a larger bond pocket implies a lower performance on the asset portfolio, which results in lower returns. On the other hand, the risky allocation confers more revaluation but this difference is not immediate because the PVL (Latent Value Gain) on equities builds up over the years. Given that this mechanism is the same for the different scenarios, some conclusions can be drawn :

According to the previous analysis, allocation A1.6, the least risky, allows for a slight improvement in the FRPS coverage rate, which represents a security according to the



UMR vision. On the other hand, the A1 allocation brings more PMT revaluation, whatever the shocked scenario, because of its higher share of risky assets. As a result, the FRPS coverage rate decreases and the PMT revaluation represents a gain for the members. However, the conclusions must be qualified because the differences are very small. Moreover, the study shows that there is a direct relationship between COREM revalorisations and the overall FRPS coverage rate. The revaluation of the service value of the point will lead to a decrease in the FRPS coverage rate. This highlights that revaluation decisions should be made in the interest of the members, while maintaining a maximum level of risk that limits the impact on the FRPS coverage rate.

## Conclusion

In view of the results, even if there are variations on the MSE which are relatively small at the end of the period, the initial allocation is still the most relevant. This reinforces the fact that the scheme remains well covered despite changes in asset allocation.



# Remerciements

Dans un premier temps, je tiens à remercier l'ensemble du corps pédagogique de l'EURIA, les professeurs autant que les intervenants qui m'ont permis de poser les bases nécessaires pour la réalisation de ce mémoire.

Ensuite, j'aimerais remercier LEFUMAT Corinne, intervenante de BNP Paribas en Master 2, dont les conseils m'ont permis de poser le cadre de mes travaux.

Je remercie naturellement FRANKE Brice, mon tuteur académique, pour m'avoir accompagné au cours de cette année d'alternance.

Je me dois de remercier tout particulièrement ma tutrice d'alternance, MARTINEZ Laurence pour son expertise, ses retours sur le mémoire, et son assistance qui m'ont été d'une aide essentielle.

Je tiens également à remercier BLAIZE Ronan, MOUNIR Driss, FRAPPIER Clément et PITON Mathilde, mes collègues, qui ont pu m'épauler pour les problèmes rencontrés ainsi que pour la relecture.

Mes remerciements s'étendent à tous mes collègues de UMR pour leur accueil chaleureux au sein de l'entreprise, qui ont rendu cette année très agréable.

Un grand merci à ma famille, ainsi qu'à tous mes amis pour leurs encouragements.



# Table des matières

Résumé	i
Abstract	iii
Note de synthèse	v
Executive summary	xv
Remerciements	xxv
Introduction	1
<b>1 Contexte</b>	<b>3</b>
1.1 La retraite en France . . . . .	3
1.2 Le produit COREM . . . . .	6
1.3 Description de l'Actif . . . . .	11
1.3.1 Obligations . . . . .	11
1.3.2 Actions . . . . .	12
1.3.3 Fonds d'investissement . . . . .	12
1.3.4 Immobiliers . . . . .	13
1.3.5 Gestion alternative . . . . .	13
<b>2 Gap de Duration</b>	<b>15</b>
2.1 Calcul de la duration et Gap de duration . . . . .	15
2.2 Application à notre portefeuille . . . . .	17
2.2.1 Étude sur la maturité optimale de réinvestissement . . . . .	17
<b>3 Allocation d'actifs</b>	<b>23</b>
3.1 Méthodes classiques déterministes . . . . .	23
3.1.1 Immunisation du portefeuille . . . . .	23
3.1.2 Modèle de Markowitz . . . . .	24
3.1.3 Méthodes basées sur la notion de surplus . . . . .	26
3.2 Stratégies d'allocations d'actifs . . . . .	30
3.2.1 Stratégie Buy and Hold . . . . .	30

3.2.2	Stratégie Fixed Mixed . . . . .	30
3.2.3	Stratégie CPPI . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Modèle ALM et GSE</b>	<b>33</b>
4.1	Description du modèle ALM . . . . .	33
4.1.1	Actifs . . . . .	34
4.1.2	Passif . . . . .	36
4.1.3	Paramètres généraux . . . . .	37
4.2	Générateur de scénarios économiques . . . . .	38
4.2.1	Méthode de simulation . . . . .	38
4.2.2	Smith Wilson . . . . .	38
4.2.3	Taux . . . . .	41
4.2.4	Actions . . . . .	42
4.2.5	Immobiliers . . . . .	43
4.2.6	Inflation . . . . .	44
4.2.7	Corrélation . . . . .	45
4.2.8	Validation . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Application et étude prospective</b>	<b>51</b>
5.1	Allocation optimale . . . . .	51
5.1.1	Gap de Trésorerie . . . . .	51
5.1.2	Construction du panier d'allocations . . . . .	54
5.1.3	Choix des métriques . . . . .	55
5.1.4	Première segmentation . . . . .	56
5.1.5	Deuxième segmentation . . . . .	57
5.2	Étude prospective . . . . .	59
5.2.1	Scénarios de tests . . . . .	59
5.2.2	Solvabilité 2 . . . . .	60
5.2.3	FRPS . . . . .	63
5.2.4	Résultats . . . . .	64
	<b>Conclusion</b>	<b>79</b>
	<b>A Compléments résultats Solvabilité 2</b>	<b>87</b>
	<b>B Compléments résultats FRPS</b>	<b>89</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>91</b>

# Introduction

Dans le contexte actuel de crise, avec un redressement de l'économie suite à la période de pandémie et maintenant la guerre en Ukraine sans oublier la croissance de l'inflation, les marchés financiers deviennent de plus en plus volatils. Les organismes d'assurances doivent redoubler de vigilance et prêter une forte attention sur les risques inhérents à leurs activités. En effet, les régimes de retraites sont particulièrement exposés aux risques financiers (risque actions, spread, crédit, change, ...) ainsi que des risques dits « actuariels » (risque de longévité, de souscription, ...) de par leurs engagements à long terme.

De plus la forte volatilité de la courbe des taux oblige les assureurs à effectuer un travail sur leur gap de duration afin de limiter l'impact de ces variations sur leurs activités.

C'est pourquoi l'allocation d'actifs représente un enjeu capital, elle doit permettre au portefeuille d'actifs d'obtenir, au cours du temps, des performances suffisantes pour pouvoir couvrir les engagements futurs et respecter les objectifs fixés.

Sous Solvabilité 2, l'allocation d'actifs amène souvent les assureurs à trop sous représenter la poche action afin de minimiser le besoin en SCR (Solvency Capital Requirement). Or dans le cas des régimes de retraite la norme solvabilité 2 n'est pas adaptée et donc la norme FRPS lui est préférée de par son horizon de calcul plus élevé, en adéquation avec la réalité de l'activité retraite.

L'objectif de ce mémoire est donc de proposer une méthode permettant de trouver une allocation d'actifs respectant ces différentes problématiques.

L'étude se déroule en 5 parties :

La première partie présente le contexte avec un bref rappel historique sur la retraite en France puis la présentation du régime étudié, le COREM, ainsi que du portefeuille d'actifs.

Dans le but de limiter le gap de duration inhérent au portefeuille, une étude sur la maturité optimale de réinvestissement est proposée dans la seconde partie.

Ensuite dans une troisième partie, un état de l'art sur différentes techniques théoriques d'allocations d'actifs est réalisé afin de mettre en lumière le principe d'allocation d'actifs. D'abord avec la méthode de Markowitz qui optimise le couple rendement/risque sur le portefeuille d'actifs indépendamment des engagements. Puis avec d'autres méthodes basées sur la notion de surplus nous verrons comment le passif peut être pris en compte.

La quatrième partie est consacrée dans un premier temps à la description du modèle ALM utilisé pour les différentes simulations monde réel. Puis dans un second temps sont présentés les différents modèles de simulations des variables économiques (Taux, Actions, Inflation et Immobilier).

La dernière partie se décompose en deux sous parties : La première a pour objectif de constituer un panier d'allocations d'actifs puis en fonction de métriques de risque et de performance choisies de définir une ou plusieurs allocations optimales. Pour cela une étude sur le besoin en trésorerie est faite en amont afin de fixer la poche monétaire. Ensuite dans la seconde sous-partie les allocations candidates retenues sont challengées suivant 3 scénarios choqués, 2 chocs de taux et un choc action. L'analyse est faite suivant les deux normes prudentielles (Solvabilité 2 et FRPS) afin d'évaluer le potentiel impact du changement de norme. Les simulations se font alors en déterministe monde réel et en stochastique risque neutre afin de pouvoir calculer le SCR. Ces stress tests visent à évaluer la robustesse des allocations d'actifs.



# Chapitre 1

## Contexte

Dans cette première partie nous ferons un petit rappel sur la retraite en France puis nous présenterons les particularités du régime étudié, qui est un régime dit de branche 26. Ensuite nous décrirons les portefeuilles d'actifs et de passifs.

### 1.1 La retraite en France

Le premier régime de "retraite" en France est apparu au XVIIème siècle sous Louis XIV et il était réservé aux marins blessés ou invalides. C'est seulement en 1945 que l'idée prend forme avec l'apparition de la sécurité sociale sous forme d'un régime par répartition. D'abord dédié au secteur privé, l'objectif était ensuite de pouvoir couvrir la population complète. Cependant, certaines branches professionnelles voulaient conserver leur propre système ce qui créera les régimes spéciaux. A cette époque l'âge minimum à la retraite est 65 ans.

En 1947 est créée l'Agirc (Association générale des institutions de retraite des cadres), un régime complémentaire fonctionnant par points et réservé exclusivement aux cadres. Puis en 1949 une caisse de retraite est créée pour les professions indépendantes : CNAVPL (Caisse nationale d'assurance vieillesse professions libérales), CANCAVA (Caisse Nationale de Compensation d'Assurances Vieillesse des Artisans) , ORGANIC (Organisation Autonome Nationale d'Assurance Vieillesse de l'Industrie et du Commerce).

En 1956, le minimum de vieillesse est créé, financé par les impôts, qui assure un revenu minimal aux personnes n'ayant pas suffisamment cotisé.

Seulement en 1961 est créée l'ARRCO (Association pour le régime de retraite complémentaire) afin que les salariés non-cadres puissent bénéficier aussi d'une complémentaire retraite. La première réforme arrive en 1971 visant à augmenter le niveau des retraites pour que la période des trente glorieuses profite à tout le monde. La retraite complémentaire devient obligatoire un an après cette réforme.

L'âge de la retraite a été fixé à 60 ans pendant le septennat de François Mitterrand et ce n'est qu'en 1991 avec la création du Livre blanc par Michel Rocard, alors premier ministre, que les questions du vieillissement de la population et de l'équilibre du système de retraite se posent. S'ensuit la réforme Balladur avec :

- L'allongement du nombre de trimestres requis
- Le changement du mode de calcul des pensions (10 meilleures années -> 25 meilleures)
- L'indexation sur les prix et non sur les salaires
- La création du FSV (Fonds de Solidarité de Vieillesse)

Lionel Jospin crée en 1999 le FRR (Fonds de Réserve des Retraites) visant à limiter l'impact du papy-boom sur les systèmes de retraite. Un an après, le COR (Conseil d'Orientation de Retraites) est créé pour surveiller et suivre l'évolution du système des retraites afin de se mettre d'accord sur le constat et d'être force de proposition pour le pouvoir public.

Ensuite 4 réformes se sont succédées :

- Réforme Fillon (2003) : avec l'allongement de la durée de cotisation à 41 ans, l'instauration de la surcote pour retarder le départ à la retraite, la création du Perp, Perc, PERE ainsi que de la RAFP (Retraite additionnelle de la fonction publique).
- Réforme 2007 : les régimes spéciaux s'alignent progressivement sur le régime de la fonction publique.
- Réforme Woerth (2010) : des mesures sont prises car les réformes précédentes ne suffisent pas à financer le système des retraites et le déficit augmente suite à la crise de 2008.
- Réforme Touraine (2014) : afin d'avancer le départ à la retraite dans certains métiers un compte de pénibilité est créé. La durée d'assurance est rallongée (172 trimestres), les nouveaux droits à la retraite dans le cadre d'un cumul emploi-retraite sont supprimés et des possibilités de rachat de trimestres sont ajoutées.

C'est en 2019 que AGIRC et ARRCO fusionnent pour ne former qu'une seule réserve financière et limiter les risques de faillite du système de retraite. De plus, cela a permis d'harmoniser les règles des retraites complémentaires.

Il faut savoir que la retraite en France fonctionne sur trois niveaux :

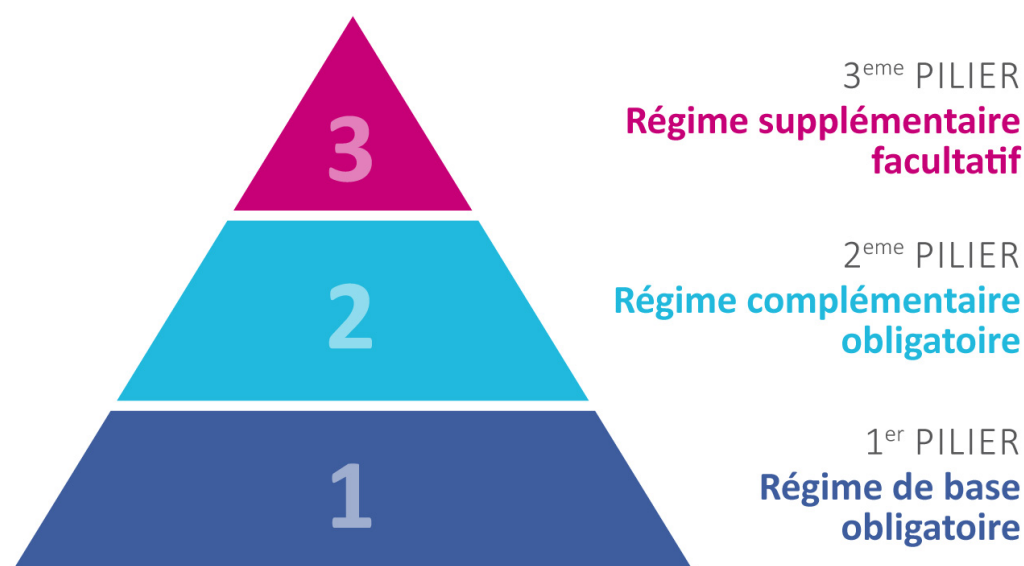


FIGURE 1.1 – 3 piliers de retraite en France

- **Régime de base (obligatoire)** : Fondé sur le principe d'un système par répartition : Les actifs cotisent pour la retraite de leurs aînés et acquièrent le droit à une pension de vieillesse.
- **Régime complémentaire (Obligatoire)** : Le régime fonctionne également par répartition. La cotisation est directement prélevée sur le salaire par l'employeur qui la verse à une caisse de retraite complémentaire. Les points sont accumulés puis au moment de la retraite un montant équivalent au nombre de points multiplié par la valeur du point en vigueur est ajouté à votre retraite de base.
- **Régime supplémentaire (Facultatif)** : Il fonctionne par capitalisation et peut être individuel (PERP, Madelin, COREM) ou collectif (Art.39 et Art.83) et permet de se constituer un complément de retraite en plus des deux régimes obligatoires.

L'activité de l'UMR relève du 3<sup>ème</sup> pilier et concerne plus particulièrement la retraite individuelle avec plusieurs produits qui se différencient en trois branches :

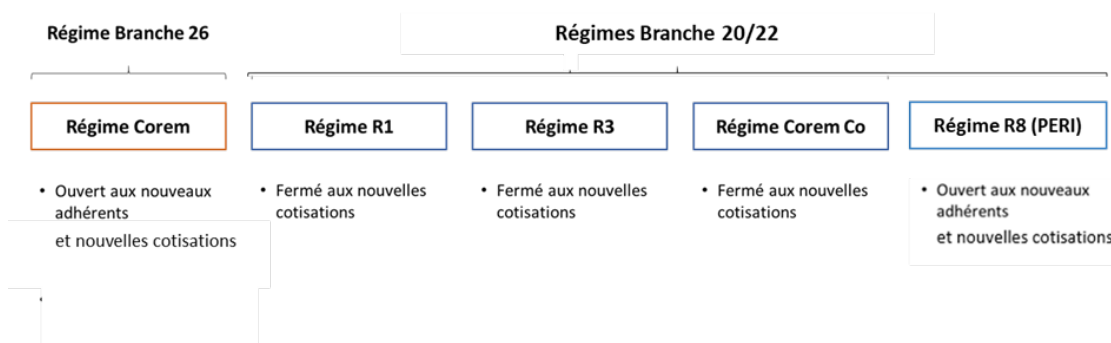


FIGURE 1.2 – Différents régimes gérés par l'UMR

L'étude proposée dans ce mémoire est basée sur les données du portefeuille aux 31/12/2021 avec la composition suivante :

	R1	Corem	R3	Corem Co	PERvie et marques blanches et PER Patrimoniaux	CRY
Branche au 31/12/2021	20	26	20	20	20/22	20/22
Régime ouvert / fermé	Fermé	Ouvert	Fermé	Fermé	Ouvert	Ouvert
Nombre de sociétaires	110 368	326 678	1 293	1 566	1 255	90
Cotisants « non actifs »	11 393	49 381	193	1 510	103	78
Cotisants « actifs »	-	119 997	-	0	1 152	12
Allocataires	98 975	157 300	1 100	56	0	0
Transferts sortants		29,1M€			-	0
Rentes nettes servies 2021 (M€)	87	385			-	0
Cotisations brutes 2021 (M€)	-	119,4	-	-	7,14	1,63
PTS ou PM au 31/12/2021 (M€)	1 140,1	7 483,5	38,8	5,5	7,6	1,6

FIGURE 1.3 – Décomposition du portefeuille de l'UMR au 31/12/2021

Le périmètre de l'étude se limite au régime de branche 26 (COREM) qui est un régime en points.

## 1.2 Le produit COREM

### Fonctionnement

Lorsqu'une personne souscrit au régime Corem, un compte individuel est ouvert et dans ce compte sont crédités les cotisations et le nombre d'unité de rente correspondant.

Le nombre d'unités de rente correspond au quotient de la cotisation par la valeur d'acquisition de cette unité de rente qui varie chaque année :

$$n_{ij} = \frac{C_{ij}}{VA_j}$$

- $C_{ij}$  : La cotisation de l'assuré  $i$  pour l'année  $j$
- $VA_j$  : La valeur d'acquisition d'une unité de rente pour l'année  $j$
- $n_{ij}$  : Le nombre de points acquis par l'individu  $i$  l'année  $j$

On peut donc calculer le nombre total de points acquis à l'âge de la retraite pour l'individu  $i$  :

$$N_i = \sum_j n_{ij}$$

Les cotisations sont versées périodiquement suivant les préférences de l'adhérent (annuel ou mensuel). Les adhérents ont la possibilité de faire des versements libres.

Le contrat est accessible et ouvert de 18 à 74 ans sauf pour les personnes de 62 ans et plus ayant déjà liquidé leurs droits de retraite obligatoire. Une fois le contrat signé, l'adhérent peut y mettre fin soit par transfert soit sous certaines conditions en effectuant un rachat.

Il existe certains cas de déblocages anticipés du capital sous forme de rachat :

- Acquisition de la résidence principale
- Décès du conjoint
- Invalidité de l'adhérent ou de ses enfants ou du conjoint ou pacsé
- Situation de sur-endettement ou cessation du mandat social
- Expiration des droits à l'assurance chômage
- Cessation d'activité non salariée suite à une liquidation judiciaire

L'adhérent s'engage à verser une cotisation périodique librement fixée, dans ce cas un montant minimum est exigé : 20€ pour un versement mensuel et 180€ pour un versement annuel. Toutefois, s'il le souhaite, le montant de la cotisation pourra être modifiée. Il peut décider de suspendre ses versements.

### Les prestations

Pour un adhérent  $i$  le montant de prestation est égal au produit du nombre total de point acquis sur son compte ( $N_i$ ) et de la valeur de service du point déterminée par le règlement de l'année  $j$  :

$$R_{i,j} = N_i \times VS_j$$

Correspond au montant annuel de la rente à l'année  $j$ .

Les rentes versées sont des prestations de droit direct, l'individu perçoit une rente qu'il a lui-même constituée en versant des cotisations. Sous certaines conditions, les prestations peuvent être des rentes de réversion, versées à un tiers. A la liquidation, l'adhérent peut choisir de percevoir un capital.

La législation autorise le règlement COREM à conditionner des ajustements du nombre d'unités de rente sur le compte d'un adhérent et donc de modifier la prestation servie si :

- L'adhérent demande une anticipation de la date de liquidation
  - L'adhérent a opté pour une réversion prévue à titre facultative par le règlement.
- Dans le cas contraire, si ce dernier décide de décaler la date de liquidation, une majoration du nombre d'unités de rente et donc une augmentation de la rente est prévue.

L'âge de référence de liquidation des droits est fixé à 62 ans. La liquidation ne se fait que par une demande écrite du membre participant, qui peut retarder jusqu'à ses 75 ans. Si le décès du membre participant intervient avant la liquidation alors les droits sont intégralement versés sous forme de capital au profit du conjoint, et sinon aux enfants à charge.

Lors de la liquidation il existe plusieurs options :

- **La non-réversion** : Le bénéficiaire perçoit une rente viagère et tout est arrêté le mois suivant le décès.
- **La réversion** : Lors du décès du bénéficiaire une rente sera versée au réversataire selon un pourcentage définis (60%, 80% ou 100%).
- **L'option certitude** : Une rente viagère garantie jusqu'à l'âge de 80 ans. C'est à dire que si l'adhérent décède avant ses 80 ans, une rente sera versée aux bénéficiaires désignés jusqu'au mois de ses 80 ans. Et dans le cas contraire, l'adhérent percevra une rente jusqu'à son décès.

### Valeur d'acquisition du point

La valeur d'acquisition de l'unité de rente peut être indépendante de l'âge du cotisant ou être différenciée par âge. Pour le COREM, la valeur d'achat d'un point est calculée en fonction de l'âge de l'adhérent l'année du versement. Cette évolution du prix permet de lutter contre le risque d'anti-sélection à l'adhésion. Si la valeur d'acquisition du point était la même pour tous les cotisants ou définie par classe d'âges, alors il y aurait une augmentation des cotisations pour les plus âgés et inversement pour les cotisants les plus jeunes. Et ceci dû au fait que le prix du point serait dé-corrélé du prix réel.

Les cotisations d'un adhérent d'âge  $x$  depuis la date de versement sont capitalisées jusqu'à la liquidation. Le prix du point est calculé de façon à égaliser les versements capitalisés à la date de liquidation et la valeur actuelle probable d'une unité de rente actualisée à la même date.

Le prix ou la valeur d'acquisition du point dépend donc de plusieurs paramètres :

- Le taux d'escompte
- La valeur de service du point (VSP)
- La table de mortalité réglementaire utilisée
- L'année de naissance de l'adhérent

Petit rappel :

**Définition 1** (*Annuités viagères*) Le montant correspondant à une rente viagère immédiate de 1€ pour un individu d'âge  $x$  avec paiement à termes échu.

$$a_x = \sum_{j=1}^{w-x} v^j \cdot {}_j p_x$$

avec :

- $w$  : âge limite de la table de mortalité
- $v = \frac{1}{1+i}$  : le coefficient d'actualisation avec  $i$  le taux d'escompte.
- ${}_j p_x$  : la probabilité qu'un individu d'âge  $x$  atteigne l'âge  $x + j$

**Définition 2** (*Annuités viagères périodique*)

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} m : \text{La période}$$

On peut maintenant exprimer la formule de calcul de la valeur d'acquisition du point :

$$VA_{j,x} = \frac{a_{60}^{(12)} \cdot VS_j}{(1+i)^{60-x}} \times \frac{1+t_s}{1-t_f}$$

avec :

- $VS_j$  : la valeur de service du point l'année  $j$
- $i$  : le taux technique en vigueur
- $t_s$  : le taux de cotisation complémentaire de solidarité
- $t_f$  : le taux de frais de gestion

Le règlement COREM stipule que si un cotisant décède avant d'avoir liquidé ses droits alors l'intégralité des points est reversée au bénéficiaire désigné, on ne prend donc pas en compte la probabilité de décès entre l'âge  $x$  et 62 ans.

### Valeur de service du point

Elle correspond au montant de prestations équivalent à un point de retraite et elle est fixée chaque année et commune à tous les adhérents contrairement à la valeur d'acquisition.

## PTS

La PTS (Provision Technique Spéciale) est la provision regroupant l'ensemble des actifs du régime COREM à une date donnée. Elle se calcule en faisant la somme des différents actifs qui composent le régime :

$$PTS_j = PTS_{j-1} + CT_j + PF_j - PT_j - CG_j - TA_j$$

avec :

- $CT_j$  : le montant des cotisations perçues sur la période  $[j-; j]$
- $PF_j$  : Produits financiers réalisés sur la même période
- $PT_j$  : Prestations payées sur la période
- $CG_j$  : Les charges de gestion de la période
- $TA_j$  : Montant des taxes de la période

De plus conformément au code de la mutualité , des frais sur encours sont prélevés sur la PTS à hauteur de 0.3%.

## PMT

La PMT (Provision Mathématique Théorique) représente le montant nécessaire à l'UMR pour couvrir ses engagements futurs. Le calcul de la PMT est la somme de deux valeurs :

- La valeur actuelle probable des rentes déjà en service pour les adhérents qui sont déjà en période de prestation.
- La valeur actuelle probable des rentes différées des adhérents qui n'ont pas encore liquidé leurs droits.

## Taux de couverture

Le COREM est un produit cantonné, c'est à dire que l'actif et le passif sont séparés des autres régimes. De plus tous les produits financiers reviennent aux adhérents. Le régime bénéficie donc d'un taux de couverture spécifique au canton.

D'après le code de la mutualité et le règlement de branche 26 le taux de couverture se définit comme suit :

$$\text{Taux de couverture} = \frac{PTS + PMVL}{PMT}$$

Avec PMVL (Plus ou Moins-Value Latente) qui correspond à la différence entre la VM (Valeur de marché) et la VNC (Valeur Nette Comptable).

Ce taux représente la santé du régime, il faut que la  $PTS + PMVL$  soit supérieur à la PMT et donc que le ratio soit supérieur à 100%. Dans le cas contraire des ajustements sont à prévoir.

Le règlement COREM prévoit par exemple que si le régime n'est pas couvert pendant 3 années consécutives alors un rééquilibrage se fait sur la valeur de service du point à la baisse ce qui affecte négativement les montants de rentes et donc diminue la PMT. Par conséquent le taux de couverture augmente.



## 1.3 Description de l'Actif

Dans cette partie nous allons présenter les différentes classes d'actifs composant le portefeuille en représentation du régime COREM.

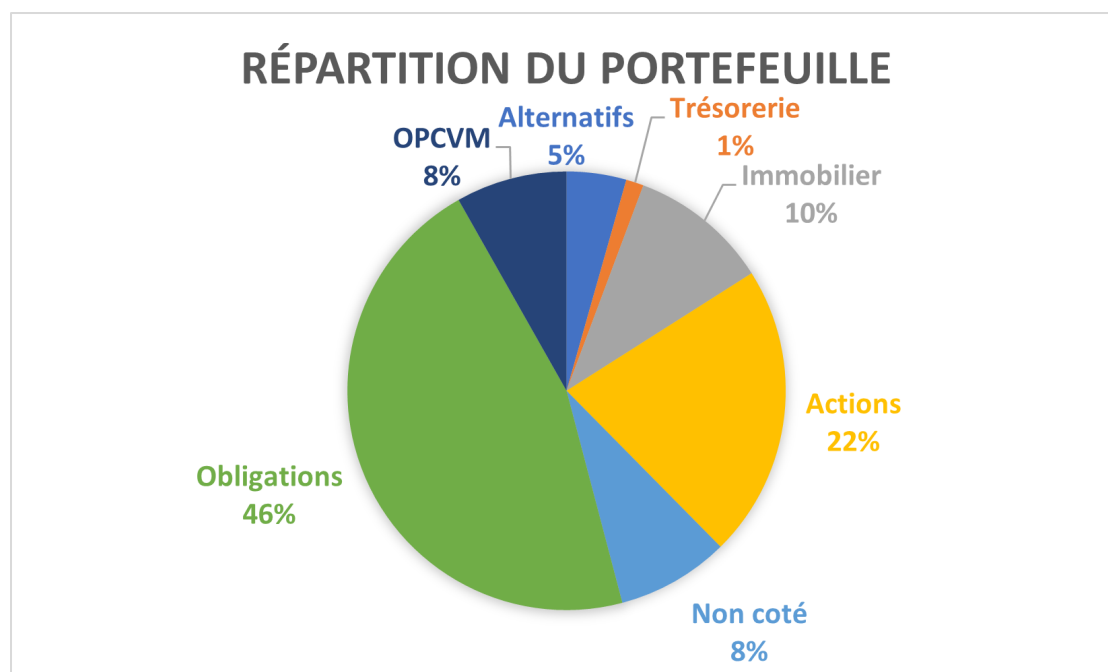


FIGURE 1.4 – Composition du portefeuille

### 1.3.1 Obligations

Une obligation est un titre de créance, c'est à dire une part d'un emprunt à moyen ou à long terme. Celui qui émet l'obligation doit donc reverser des intérêts, appelés coupons au détenteur de l'obligation. Il existe différents types d'émetteur :

- Les États : les Bonds du trésors
- Des entreprises privées : les obligations *corporate*

Il existe deux marchés d'échange : le marché primaire celui où les obligations sont émises et le secondaire là où elles sont échangées

Les obligations sont caractérisées par différents paramètres précisés à l'émission :

- **La maturité** : La date d'échéance de l'obligation
- **Le nominal** : Le montant qui devra être remboursé à la maturité dans le cas d'une obligation à remboursement in fine.
- **Taux facial** : Le taux de coupon qui peut être fixe (indexé sur le nominal), variable (indexé sur un taux de marché),...

Il existe d'autres types de remboursements moins courants sur le marché obligataire comme le remboursement à annuités constantes ou avec série égale annuelle (avec un pourcentage du capital restant dû remboursé par période).

La valeur d'une obligation se calcule de deux façon différentes :

- Avec le *Clean Price* : Le prix de l'obligation sans prendre en compte les intérêts courus.
- Avec le *Dirty Price* : Le prix de l'obligation avec les intérêts courus.

Le portefeuille obligataire du COREM est composé de deux types d'obligation :

- Obligations à taux fixes : EEA et *Corporate*
- Obligations CMS (*Constant Maturity Swap*) : Indexés sur le taux CMS.

### 1.3.2 Actions

Les actions correspondent à une part du capital d'une société. Un actionnaire, détenteur d'au moins une action, acquiert des droits sur la société proportionnellement au nombre de parts. Aussi bien des droits de gestion avec un vote à l'assemblée générale qui lui permet d'avoir un impact sur les décisions de l'entreprise que des droits aux bénéfices, les dividendes.

Les actions peuvent donc permettre des rentes régulières avec les dividendes mais peuvent surtout créer de la plus-value lors de la revente car contrairement aux obligations il n'y pas d'échéance.

Les actions sont dites cotées lorsqu'elles peuvent être échangées en Bourse sur les marchés financiers, qui jouent le rôle d'intermédiaire. Leurs cotations sont connues de tous. Les actions non-cotées sont quant à elles échangées de gré à gré il y a un contact direct entre l'investisseur et l'entreprise. Les actions non-cotées ont les avantages d'offrir de meilleurs rendements et d'être dé-corrélées du marché. De plus l'investissement sur du non-coté permet de développer les PME françaises.

### 1.3.3 Fonds d'investissement

Les Organismes de Placement Collectif en Valeurs Mobilières (OPCVM) sont des fonds d'investissement, c'est à dire que le souscripteur achète une part du fond et le gestionnaire se charge des investissements d'actifs financiers.

L'investisseur choisit donc un OPCVM avec un profil de risque qui lui convient et le pilotage est entièrement à la charge du gestionnaire. Il existe différents types d'OPCVM :

- OPCVM obligataires
- OPCVM actions
- OPCVM monétaires
- OPCVM alternatifs
- OPCVM diversifiés
- OPCVM à formule

L'UMR investit seulement sur des OPCVM obligataires.

### 1.3.4 Immobiliers

Malgré le fait que l'immobilier soit un actif peu liquide il permet à l'investisseur de percevoir des revenus réguliers grâce aux tombées de loyers. De plus les loyers ont la particularité d'être indexés sur l'inflation ce qui est une couverture non négligeable pour un assureur retraite de long terme.

Il existe trois types d'investissements :

- **La détention en direct** : L'investisseur est lui même propriétaire.
- **L'investissement en fonds** : Investir dans un fond composé essentiellement d'actifs immobiliers.
- **Sociétés foncières cotées** : Investir dans une société qui détient principalement de l'immobilier.

Le portefeuille immobilier associé au régime COREM est composé d'actifs directs et de fonds immobiliers avec une diversification :

- Géographique : France, République tchèque, Pays-Bas, Autriche, Allemagne, États-Unis, Belgique et Italie.
- Sectoriel : Bureau, Habitation, EHPAD, Hôtels, Logistique, Commerce et Camping.

### 1.3.5 Gestion alternative

Le gestion alternative consiste à investir dans un fond proposant des produits structurés tels que des montages financiers ou des investissements spécifiques.

A l'UMR l'investissement sur des fonds de gestion alternative est divisé en trois poches :

- La poche thématique : L'investissement se fait dans des secteurs spécifiques tels que l'environnement, les technologies, les énergies renouvelables la santé,...
- La poche dé-corrélation : Composé de montage financiers structurés avec des produits dérivés notamment qui ont pour objectif d'être dé-corrélé du marché.
- La poche rendement : L'investissement se fait sur des actifs à haut rendement avec du non-coté des dettes émergentes et des obligations *High yield*



## Chapitre 2

# Étude préliminaire sur le gap de duration

L'objectif de cette partie préliminaire est de pouvoir définir une maturité de réinvestissement optimale prenant en compte le gap de duration.

### 2.1 Calcul de la duration et Gap de duration

Dans la gestion de portefeuille, l'allocation permet de minimiser les risques en cas de fortes variations de marché, en particulier dans le cas de choc de taux.

Macauley en 1938 crée un indicateur obligataire permettant de mesurer cet impact.

Définissons d'abord la valeur actuelle d'une série de flux :

$$VA(r) = \sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+r)^{t_i}}$$

- $F_{t_i}$  : Les flux financiers
- $t_i$  : Le pas de temps
- $r$  : Le taux actuariel

En dérivant cette quantité, nous obtenons la variation correspondant à une petite variation de taux. Pour garder une cohérence les  $F_{t_i}$  doivent être fixe par rapport à  $r$ .

La formule de la sensibilité (ou duration modifié) est alors déduite :

$$sensibilite = \frac{\partial VA(r)}{\partial r} \times \frac{1}{VA} = -\frac{1}{VA} \times \sum_{i=1}^n t_i \frac{F_{t_i}}{(1+r)^{t_i+1}}$$

En gardant les mêmes notations, la **duration** définie par Macauley s'exprime comme suit :

$$Duration = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \times \frac{F_{t_i}}{(1+r_a)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+r_a)^{t_i}}}$$

$r_a$  : Le taux actuariel

La somme des flux actualisés pondérés par les  $t_i$  sur la VA. Elle peut être interprétée comme la durée de vie moyenne d'une séquence de flux (souvent d'une obligation).

En 1946, Hicks donne sa propre définition de la duration en la reliant à la sensibilité :

$$Duration = -\frac{\frac{dVA(r)}{VA(r) \times dr}}{1+r} = -(1+r) \times sensibilité$$

Si nous restons sur des variations parallèles de la courbe des taux alors la duration peut se réécrire avec une structure des taux par termes :

$$\frac{\sum_{i=1}^n t_i \times \frac{F_{t_i}}{(1+r_{t_i})^{t_i}}}{\sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+r_{t_i})^{t_i}}}$$

avec  $r_{t_i}$  : taux dépendant de la maturité  $t_i$

### Portefeuille :

Si l'on veut étendre la notion de duration à un portefeuille il existe plusieurs façons de raisonner, avec certaines méthodes plus rigoureuses que d'autres :

- Le calcul de la duration totale peut se faire en prenant la moyenne pondérée par la valeur de marché des durations de chaque obligation constituant le portefeuille. L'inconvénient est que la formule n'est juste que si tous les taux actuariels sont identiques, ce qui n'est évidemment pas le cas.
- Une deuxième méthode consiste à sommer tous les flux du portefeuille et d'en déduire un taux actuariel global par rapport à la valeur de marché totale.
- La dernière méthode, considérée comme la plus rigoureuse, propose de calculer une duration pour chaque titre avec une courbe de taux similaire (EIOPA) puis de faire une moyenne pondérée avec la Valeur Actuelle plutôt que la valeur de marché. Donc chaque flux est actualisé avec un taux correspondant à sa maturité.

La duration peut s'étendre à des actifs autres que les obligations notamment les actions en utilisant les méthodes et le cadre proposé par Gordon Shapiro pour évaluer le prix d'une action.

### Gap de duration :

Le gap de duration permet de mesurer l'impact d'une variation de taux sur la valeur économique d'un portefeuille. C'est un outil important dans la gestion de portefeuille. Il se construit comme ceci :

$$Gap\ de\ duration = Duration_{Actif} - Duration_{Passif} \times \frac{1}{\phi}$$

$$\phi = \frac{VM_{Actif}}{VA_{Passif}} : \text{le ratio de financement}$$

Si le *gap de duration* est positif alors la duration de l'actif est plus longue que celle du passif. Les paiements aux passifs arriveront avant l'échéance des obligations. L'investisseur devra potentiellement revendre certaines obligations ce qui le rend vulnérable à une hausse des taux.

Dans le cas contraire, le *gap de duration* est négatif. La duration du passif est supérieure à celle de l'actif. Les obligations arriveront à échéance avant les paiements du passif ce qui va pousser l'investisseur à racheter des obligations. Dans ce cas, l'investisseur est vulnérable à une baisse des taux car les prix vont de fait remonter.

## 2.2 Application à notre portefeuille

### 2.2.1 Étude sur la maturité optimale de réinvestissement

Afin de limiter le *gap de duration* plusieurs maturités de réinvestissement ont été testées dans le but de dégager la maturité optimale.

Le modèle fonctionne de telle sorte que pour une maturité de réinvestissement donnée  $m$ , le réinvestissement en obligation se fera comme suit :

$$\begin{aligned} 33\% &\Rightarrow \text{Obligations à maturité } m - 5 \\ 33\% &\Rightarrow \text{Obligations à maturité } m \\ 33\% &\Rightarrow \text{Obligations à maturité } m + 5 \end{aligned}$$

4 niveaux de maturités ont été testés :

- $m = 10$
- $m = 15$
- $m = 5$  mais avec réinvestissement 100%
- $m = 20$  mais avec réinvestissement 100%

Nous devons définir un cadre de sélection pour la valeur optimale, c'est-à-dire définir des indicateurs pour mesurer l'impact de la maturité de réinvestissement sur la performance du régime.

Indicateurs choisis :

- Taux de rendement comptable (Revenus COREM / Valeur Nette Comptable COREM)
- Taux de couverture du COREM

Pour faire cette étude, le lancement se fait en stochastique Monde réel avec 1000 scénarios projetés sur 10 ans en gardant les hypothèses initiales notamment l'allocation d'actifs, seules les maturités d'investissement changent. (Certaines modifications ont également été apportées au modèle ALM pour avoir les données nécessaires en sortie (duration actif et duration passif) ainsi que pour la particularité des réinvestissements à 100% pour les maturités 5 et 20.)

Afin de ne retenir qu'une seule valeur de performance par scénario et par indicateur, le rendement comptable cumulé et le taux de couverture de la dernière année sont pris comme indicateurs de performance. Et pour le gap de duration la moyenne par scénario a été conservée.

Petit rappel :

**Définition 3** (*Value at Risk*)

La VaR est un outil de mesure de risque qui était d'abord utilisé pour évaluer la perte d'un portefeuille avec une certaine probabilité. Formule :

$$\alpha = P(\text{VaR}_\alpha < X) = 1 - F_X(\text{VaR}_\alpha)$$

avec  $F$  la fonction de répartition de la loi suivie par le portefeuille et  $\alpha$  le niveau de confiance. Cette définition ne fonctionne que dans le cas où  $F_X$  est inversible dans le cas contraire l'inverse de la fonction de répartition à gauche est choisie afin de ne pas perdre en rigueur.

**Taux de rendement comptable cumulé**

Le graphique illustre la corrélation entre le taux de rendement comptable cumulé et le gap de duration :

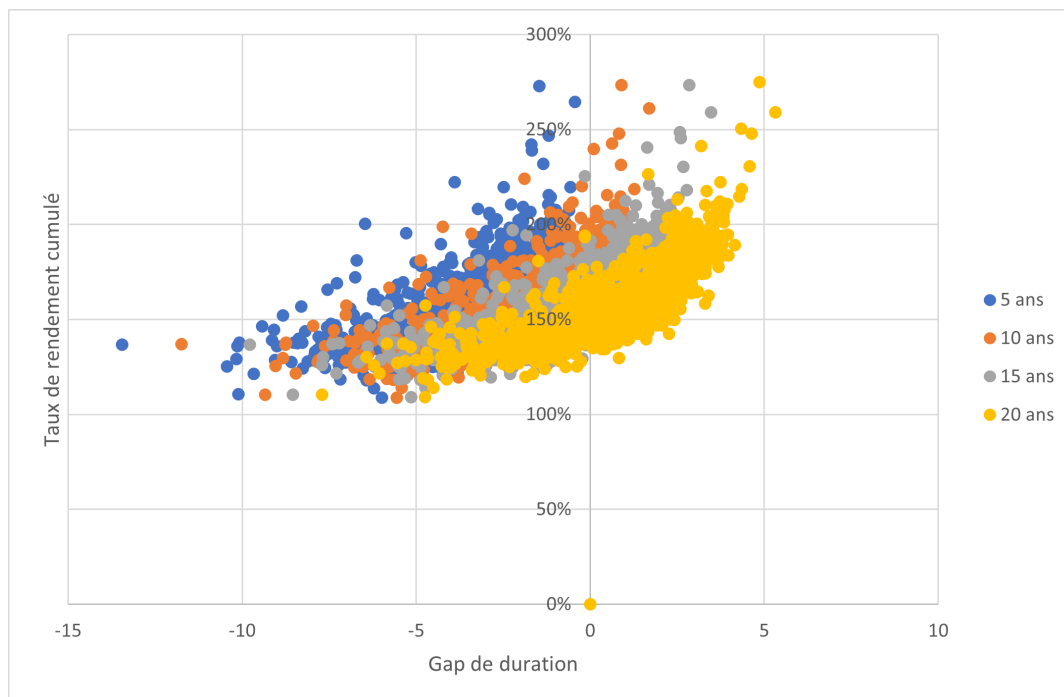


FIGURE 2.1 – Évolution du taux de rendement par maturité



Le gap de duration est impacté par la maturité de réinvestissement avec une réduction (en valeur absolue) de ce dernier à chaque augmentation de la maturité de réinvestissement. De plus du fait des hypothèses de forte montée des taux les rendements sont relativement élevés (voir les hypothèses dans la partie GSE 4.2).

En prenant une VaR à 90% du taux de rendement cumulé sur les différents scénarios, une seule valeur représentative est gardée pour l'ensemble du jeu de scénarios.

	5 ans	10 ans	15 ans	20 ans
$VaR_{90\%}$	34.37%	34.58%	34.87%	34.93%

TABLE 2.1 –  $VaR_{90\%}$  Taux de rendement cumulé

En augmentant la maturité du portefeuille obligataire, donc en augmentant la duration de l'actif et de fait diminuer le gap de duration, le taux de rendement comptable s'améliore légèrement, avec une très faible augmentation entre les maturités de réinvestissement à 15 et 20 ans.

Il semblerait que le réinvestissement sur des obligations 20 ans soit le plus bénéfique dans un objectif de réduction du gap de duration même si l'écart est très faible avec la maturité 15 ans.

### Taux de couverture

Le second indicateur, taux de couverture, complète l'étude en proposant un regard direct sur le régime.

Malgré les différences de Gap de duration, le taux de couverture ne semble pas réellement impacté.

Comme précédemment une VaR à 90% est calculée afin de déduire une tendance :

	5 ans	10 ans	15 ans	20 ans
$VaR_{90\%}$	97.47%	99.05%	100.17%	101.43%

TABLE 2.2 –  $VaR_{90\%}$  Taux de couverture en 2031

Le taux de couverture évolue dans le même sens que la maturité de réinvestissement avec cette fois une augmentation plus linéaire. Le réinvestissement à 20 ans permet également un gain sur le niveau de couverture.

### Valeurs extrêmes

Pour faire une analyse complémentaire sur les 1000 scénarios sont gardés uniquement ceux qui engendrent un taux de couverture inférieur à 100% pendant la période de 10 ans.

Voici un tableau des effectifs :

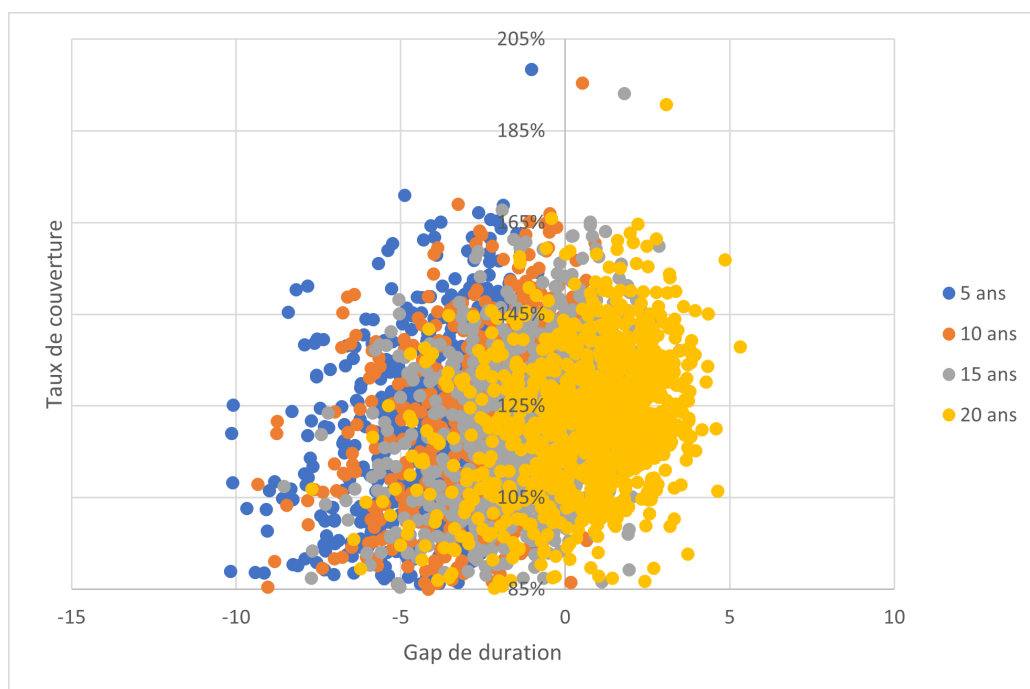


FIGURE 2.2 – Évolution du taux de couverture par maturité

	5 ans	10 ans	15 ans	20 ans
Nombre de scénarios	390	361	334	302

TABLE 2.3 – Effectifs valeurs extrêmes

Plus les maturités de réinvestissement augmentent et donc la durée de l'actif augmente plus le nombre de scénarios extrêmes décroît. La réduction du gap de durée limite donc le risque d'atteindre des taux de couverture très faibles.

### Investissement sur du 20 ans

Les paragraphes précédents nous poussent à vouloir choisir 20 ans comme maturité de réinvestissement mais nous devons prendre en compte la pertinence de ces investissements.

Dans le modèle, le réinvestissement se fait en obligations d'Etat et en *Corporate* (vu dans le chapitre précédent). Or, dans le marché réel il existe des actifs moins liquides que d'autres.

#### Définition 4 (La liquidité d'un actif)

*Un actif est dit liquide s'il peut être acheté ou vendu facilement sur le marché sans avoir d'impact significatif sur son prix. La liquidité mesure donc la capacité d'un actif à être échangé.*

Les obligations *Corporate* à long terme sont très peu liquides et donc l'achat de ces obligations à 20 ans paraît compromis.

De plus l'analyse sur le taux de rendement comptable cumulé montre que l'impact entre les maturités de réinvestissements à 15 ans et 20 ans sont très faibles. Et la  $VaR_{90\%}$  sur la maturité à 15 ans reste au dessus de 100%.

### **Conclusion**

Dans un premier temps la maturité optimale semblait être  $m = 20ans$  mais du fait du manque de liquidité des obligations *corporate* à long terme, la maturité optimale qui a été choisie pour la suite du mémoire est  $m = 15ans$ .



## Chapitre 3

# État de l'Art et théorie des méthodes d'allocations d'actifs

Le but de cette partie est d'expliquer ce qu'est l'allocation d'actifs et son rôle dans la gestion actif-passif. Ainsi que présenter de façon non exhaustive les différentes techniques existantes.

### 3.1 Méthodes classiques déterministes

Nous allons voir les méthodes d'immunisation du portefeuille, puis après avoir revu la méthode de Markowitz nous évoquerons les techniques basées sur la notion de surplus.

#### 3.1.1 Immunisation du portefeuille

En 1952 Redington propose une définition de l'immunisation du portefeuille comme : « l'investissement d'une telle manière que le portefeuille soit protégé contre un changement des taux d'intérêt » .

C'est une stratégie d'investissement qui vise à produire des flux financiers censés être exactement adossés aux flux de passifs (engagements), avec même valeurs et maturités.

Deux méthodes vont être évoquées :

- Adossement des cash flows (*Cash-flow matching*)
- Adossement par la duration

#### Adossement des cash flows

Il s'agit de la procédure d'immunisation la plus simple et la plus ancienne. Cette stratégie consiste à investir dans des obligations zéro coupons avec des échéances correspondant exactement aux flux de passif, de tel sorte que pour chaque période la différence entre les flux d'entrées et de sorties soient positives.

$$Flux_{entrant} - Flux_{sortant} \geq 0$$

Dans ce cas on dit que l'actif est adossé au passif et parfaitement adossé si la différence est nulle. L'excédent est appelé le surplus et peut permettre d'estimer la santé de l'entreprise.

Cependant cette méthode ne trouve pas de réelle application à long terme. En effet différents facteurs peuvent faire varier les flux d'actifs et de passifs ce qui pousse à renouveler souvent l'immunisation.

### Adossement par la duration

Cette technique consiste aussi en l'adossement de l'actif sur le passif mais en se basant sur la duration de Macauley (2.1). L'objectif étant d'acquérir des titres permettant de constituer un portefeuille de duration moyenne égale à celle du passif. En pratique le passif est couvert par des obligations de durée plus longue car la durée est supérieure à la duration. Pour que l'immunisation soit parfaite elle doit être réalisée avec des instruments zéro-coupons.

Certaines remarques doivent être faites sur cette méthode :

- L'immunisation est faite sur une séquence de flux fixes et indépendants des taux du marché. Or, dans la réalité ces hypothèses sont évidemment fausses.
- Comme pour la méthode précédente, cette technique exige de recalculer la duration à chaque période ce qui représente un coût opérationnel.

### 3.1.2 Modèle de Markowitz

#### Principe

Cette théorie, développée en 1952 par Harry Markowitz, amène l'idée de risque dans la gestion de portefeuille. Avant cela les investisseurs cherchaient simplement à maximiser le rendement de leur portefeuille.

Le principe est de chercher le portefeuille efficient qui maximise le rendement et minimise le risque en fonction de certaines contraintes (l'appétence aux risques de l'investisseur). La performance est modélisée par l'espérance du rendement et le risque par sa variance.

Le portefeuille en question peut être composé de différents titres avec différents rendements, alors l'enjeu est de définir les poids optimaux, c'est à dire les proportions à investir dans chaque classes d'actifs. Ces différents portefeuilles alors créés peuvent être représentés en fonction du couple rendement/risque dans un plan. Cela permet de tracer une **Frontière efficiente** représentant les portefeuilles efficients qui pour un rendement donné proposent le moins de risque.

#### Formulation mathématique

Soit un investisseur qui dispose de  $N$  actifs risqués sur lesquels il peut investir. On note  $w$  le vecteur des poids d'investissement :

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_N)^t$$

Avec  $w_i$  représentant le poids de l'actif  $i$  au sein du portefeuille et avec les contraintes :

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1, w_i \geq 0$$

De la même manière le vecteur  $\mu$  des rendements espérés par actifs est défini par :

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)^t$$

Quant à la covariance entre deux actifs  $i$  et  $j$  que l'on note  $\sigma_{ij}$  et pour un actif  $i$   $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$  elle est représentée par une matrice dite de variance-covariance que l'on note :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_{NN} \end{pmatrix}$$

Notons  $R_i$  le rendement de l'actif  $i$ , ainsi nous pouvons définir le rendement espéré du portefeuille  $\mu_{ptf}$  :

$$\begin{aligned} \mu_{ptf} &= (w_1, w_2, \dots, w_N) \begin{pmatrix} E[R_1] \\ E[R_2] \\ \vdots \\ E[R_N] \end{pmatrix} \\ &= (w_1, w_2, \dots, w_N) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix} \\ &= w^t \mu \end{aligned}$$

De la même manière la variance du rendement du portefeuille s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= (w_1, w_2, \dots, w_N) \begin{pmatrix} Var(R_1) & \dots & Cov(R_1, R_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(R_N, R_1) & \dots & Var(R_N) \end{pmatrix} (w_1, w_2, \dots, w_N)^t \\ &= (w_1, w_2, \dots, w_N) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} (w_1, w_2, \dots, w_N)^t \\ &= w^t \Sigma w \end{aligned}$$

Maintenant le problème d'optimisation peut être formalisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{w \in \mathbb{R}^N} \sigma_p^2(w) = w^t \Sigma w \\ w^t \mu \geq \mu_0 \\ \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{array} \right.$$

Avec  $\mu_0$  le rendement minimum demandé par l'investisseur.

### Limites

Malgré sa simplicité de mise en oeuvre la méthode de Markowitz est néanmoins limitée. Par exemple dans le cadre de régime retraite avec des engagements importants il est nécessaire de les prendre en compte lors de la recherche de l'allocation optimale. Or cette méthode est basée uniquement sur l'actif et les interactions avec le passif sont négligées.

#### 3.1.3 Méthodes basées sur la notion de surplus

Contrairement à la méthode de Markowitz, certaines méthodes permettent de prendre en compte les interactions actif-passif grâce à la notion de surplus. Le surplus correspond à la différence entre l'actif et le passif, évalué en valeur de marché pour le premier et en valeur actuelle pour le second.

$$S_i = A_0 - mP_0$$

avec  $m$  correspondant au poids accordé pour le passif par le gérant, supposons  $m = 1$ .

Deux méthodes utilisant cette notion seront expliquées :

- *Sharp and Tint*
- *Leibowitz*

#### Sharp and Tint

La démarche reste semblable à celle de Markowitz car le but est de minimiser le risque de perte du surplus, c'est à dire limiter la variance de la rentabilité du surplus pour un certain niveau de rentabilité en respectant un ensemble de contraintes.

La notion de rentabilité du surplus s'exprime de la manière suivante :

$$R_s = \frac{S_1 - S_0}{A_0}$$

Avec  $A_0$  la valeur initiale du portefeuille et  $S_i$  le surplus à l'instant  $i$ .

Tout comme pour Markowitz la stratégie d'investissement se traduit par le choix des poids  $w = (w_i)_{i=1, \dots, N}$  avec  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$

La rentabilité du portefeuille d'actifs est donc :

$$R_A(x) = \sum_{i=1}^N w_i R_i$$

La croissance du passif est définie par :

$$R_P = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$$

Alors :



- $A_1 = A_0[1 + R_A(x)]$
- $P_1 = P_0[1 + R_P]$

On peut donc réécrire le rendement du surplus comme suit :

$$\begin{aligned}
 R_s &= \frac{S_1 - S_0}{A_0} \\
 &= \frac{A_0[1 + R_A(x)] - P_0[1 + R_P] - A_0 + P_0}{A_0} \\
 &= \frac{A_0 R_A - P_0 R_P}{A_0} \\
 &= R_A - \frac{1}{rf_0} R_P
 \end{aligned}$$

avec  $rf_0 = \frac{A_0}{P_0}$  le ratio de financement.

Le programme d'optimisation peut maintenant être formalisé de la même manière que pour Markowitz en cherchant à minimiser la variance du rendement de  $R_s$ . Soit  $r_s$  le rendement minimal exigé par l'investisseur.

$$\begin{cases} \min_{w \in \mathbb{R}^N} Var[R_s(w)] \\ E[R_s] \geq r_s \\ \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des portefeuilles vérifiant ces contraintes forme une hyperbole, on peut donc également en dégager une frontière efficiente. De plus est rajoutée une contrainte sur le déficit : « La probabilité pour que la rentabilité du surplus soit inférieure à un certain seuil ( $u$ ) ne doit pas dépasser une certaine probabilité ( $p$ ) ». Or, il est supposé que le vecteur des rentabilités est gaussien, alors la variable aléatoire rentabilité du surplus suit une loi normale.

Cette contrainte peut se traduire par une équation de droite comme suit :

$$\begin{aligned}
 P(R_s < u) &\leq p \\
 \Rightarrow P\left(\frac{R_s - \mu_s}{\sigma_s} < \frac{u - \mu_s}{\sigma_s}\right) &\leq p
 \end{aligned}$$

Or d'après le théorème centrale limite  $\frac{R_s - \mu_s}{\sigma_s} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et donc on obtient avec  $q_p^{\mathcal{N}(0,1)}$  le quantile d'ordre  $p$  d'une loi normale centrée réduite :

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow q_p^{\mathcal{N}(0,1)} &= \frac{u - \mu_s}{\sigma_s} \\
 \Rightarrow E[R_s] = \mu_s &= q_p^{\mathcal{N}(0,1)} \sigma_s + u
 \end{aligned}$$

C'est l'intersection entre la frontière efficiente et cette droite qui donne le portefeuille efficient avec la rentabilité maximale.

La méthode de Sharp and Tint tout comme celle de Markowitz reste simple à implémenter avec en plus la prise en compte des engagements passifs. Cependant il existe certaines limites :

- L'hypothèse de normalité des rendements semble éloignée de la réalité.
- La contrainte de déficit dans le cas d'un investisseur averse aux risques peut ne pas aboutir à une solution efficiente.

### Leibowitz

Développé par Martin Leibowitz, cette méthode d'optimisation s'applique uniquement à un portefeuille composé d'une composante obligataire et d'une composante action. L'objectif est de déterminer la duration optimale ainsi que la part d'action que doit contenir le portefeuille afin de maximiser la rentabilité du surplus.

Soit  $R_O$  la rendement de la part obligataire et  $R_A$  le rendement action. Ainsi Leibowitz définit le rendement du portefeuille comme :

$$R_{ptf} = \alpha R_A + (1 - \alpha) R_O$$

On note  $\rho$  la corrélation entre l'actif obligataire et l'actif de type action.

On suppose :  $R_A \sim \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A)$  et  $R_O \sim \mathcal{N}(\mu_O, \sigma_O)$ .

La variance du portefeuille est alors :

$$\begin{aligned} \sigma_{ptf}^2 &= Cov(\alpha R_a + (1 - \alpha) R_O, \alpha R_a + (1 - \alpha) R_O) \\ &= \alpha^2 \sigma_A^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \sigma_O \sigma_A \rho + (1 - \alpha)^2 \sigma_O^2 \end{aligned}$$

Une des hypothèses fortes de la méthode de Leibowitz est de supposer que la volatilité des obligations est proportionnelle à sa duration :

$$\sigma_O = D_O \times \sigma_{taux\ 1\ an} \quad (3.1)$$

Avec  $\sigma_{taux\ 1\ an}$  l'écart type du taux d'intérêt des emprunts 1 an.

Contrairement à Sharp and Tint la rentabilité du surplus se traduit comme suit :

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{S_1 - S_0}{P_0} \\ &= \frac{A_0[1 + R_{ptf}] - P_0[1 + R_P] - A_0 + P_0}{P_0} \\ &= \frac{A_0}{P_0} R_{ptf} - \frac{P_1 - P_0}{P_0} \\ &= r f_0 R_{ptf} - R_P \end{aligned}$$

$r f_0$  : le ratio de financement.

Dans cette méthode deux contraintes sont posées par Leibowitz :

- Une contrainte sur la partie actif : « La probabilité pour que la rentabilité du portefeuille d'actifs soit inférieure à un certain seuil ne doit pas dépasser une probabilité donnée ». Soit :

$$P(R_{ptf} < u') < p'$$

En supposant que le vecteur  $(R_A, R_O)$  on peut définir une droite caractérisant la contrainte sur le plan définit par :

$$R_{ptf} = u' + \sigma_{ptf} \times q_p^{\mathcal{N}(0,1)}$$

- La contrainte sur le rendement du surplus comme pour Sharp and Tint : « La probabilité pour que la rentabilité du surplus soit inférieure à un certain seuil u ne doit pas dépasser une probabilité donnée p ». Soit :

$$P(R_s < u) < p$$

Les seuils sont fixés par l'investisseur suivant son aversion au risque. On peut donc définir une inéquation caractérisant la contrainte sur le plan définit par :

$$R_s > u + \sigma_s \times q_p^{\mathcal{N}(0,1)}$$

Le problème d'optimisation se traduit par :

$$\begin{cases} \text{Max}(R_s) \\ P(R_{ptf} < u') < p' \\ P(R_s < u) < p \end{cases}$$

La part d'action optimale à détenir vérifiant les deux contraintes se définit comme suit :

$$\alpha^* = \frac{\hat{\mu}_{ptf}^* - \mu_O}{\mu_A - \mu_O}$$

De plus la volatilité des obligations sera :

$$\sigma_O^* = \frac{\sqrt{(\sigma_{ptf}^*)^2 + (\alpha^*)^2 \sigma_A^2 (\rho^2 - 1) - \alpha^* \sigma_A \rho}}{1 - \alpha^*}$$

Grâce à la relation (3.1) la duration optimale a avoir dans son portefeuille se retrouve facilement.

Ce modèle prend en compte les interactions avec le passif et apporte une précision supplémentaire à la méthode de Sharp and Tint avec le calcul de la duration optimale. Néanmoins certaines limites rendent difficile son application :

- Hypothèses fortes : La proportionnalité entre la duration et la volatilité des obligations n'est pas vérifiée. Les obligations ont toutes le même rendement peu importe leur maturité.
- Le portefeuille étudié se limite à simplement deux classes d'actifs qui sont les obligations et les actions.

## 3.2 Stratégies d'allocations d'actifs

Les différents modèles déterministes vus précédemment ont la particularité d'être mono-périodiques. Dans cette partie seront évoquées des stratégies multi-périodiques.

Ces stratégies d'allocations d'actifs se décomposent en deux groupes :

- Les stratégies à poids constants, à la fin de chaque période le portefeuille est re-calibré sur l'allocation cible.
- Les stratégies dites dynamiques, l'allocation évolue en fonction de la performance du marché et peut donc s'éloigner fortement de l'allocation cible.

### 3.2.1 Stratégie Buy and Hold

Cette première stratégie est la plus simple car l'investisseur reste passif pendant la détention de son portefeuille. Le principe consiste à acheter différents actifs et les conserver dans son portefeuille sans re-balancement ni ajustement. Ainsi les poids de chaque actifs dans le portefeuille vont considérablement changer. Si un actif sur-performe par rapport aux autres alors son poids augmentera et inversement en cas de dépréciation.

Cependant cette stratégie permet de limiter considérablement les dépenses opérationnelles (frais de courtage, taxe sur les transactions, impôts sur les plus-values). De plus dans le cas où le portefeuille contient des actions, cette stratégie permet de toucher les dividendes.

En revanche la stratégie *Buy and hold* met en avant certaines limites :

- Elle ne permet pas de contrôler l'appétence aux risques de l'investisseur.
- Dans certains cas de forte dépréciation de l'actif, la compagnie peut ne pas être en mesure de respecter les engagements.

### 3.2.2 Stratégie Fixed Mixed

La stratégie *Fixed-mixed* consiste à fixer en début de période une allocation cible avec les poids optimaux pour chaque classe d'actifs. Ensuite à la fin de chaque période (mensuelle, trimestrielle, annuelle,...) un re-balancement du portefeuille est effectué. C'est à dire que au vu de la nouvelle valorisation des différentes classes d'actifs, des opérations d'achat ou de vente sont effectuées afin de revenir à l'allocation initiale.

La particularité de cette stratégie est le fait que le risque supporté par l'assureur ne soit pas modifié. Dans le cas où les rendements des différentes classes d'actifs évoluent alors les proportions de chaque actif dans le portefeuille vont être modifiées et le risque encouru aussi, c'est pourquoi le retour à l'allocation cible est bénéfique. En effet, un portefeuille composé de 15% d'actions et de 85% d'obligations peut après une croissance des actions être composé de 20% d'actions et de 80% d'obligations et à terme devenir trop risqué selon l'appétence aux risques supporté par l'investisseur. Grâce au re-balancement effectué à chaque fin de période le risque inhérent au portefeuille reste inchangé.

Le re-balancement se fait en revendant une part des actifs dont le poids dans le portefeuille a augmenté, ceux qui ont sur-performé. Les fonds récupérés suite à l'opération sont investis dans les autres actifs afin de remonter leur poids au sein du portefeuille et converger vers l'allocation cible prédéfinie.

Cette stratégie est celle utilisée dans le modèle ALM présenté dans la partie suivante.

### 3.2.3 Stratégie CPPI

La stratégie CPPI (*Constant Proportion Portfolio Insurance*) dite stratégie du coussin permet de garantir à l'investisseur un capital minimum à l'échéance. L'investissement se divise en deux catégories, les actifs risqués de type actions et les actifs non-risqués de type obligations. Cette méthode repose sur deux paramètres qui sont le coussin et le plancher. Le coussin représente la partie d'actifs qui peut être investie sur des actifs risqués sans risque sur le capital garanti. Néanmoins on sait qu'il est très peu probable que l'actif risqué subisse une perte de 100% pendant la période, c'est pourquoi un coefficient multiplicatif est appliqué au coussin. Ceci permet donc à l'investisseur d'investir plus que le coussin en actifs risqués. Supposons le cas où une perte de 25% en une journée se produit une fois tous les 40 ans. Alors la perte maximale en une journée sur l'actif risqué est de 25% et non pas 100%. On calcule alors un multiplicateur  $m$  qui correspond à l'inverse de la perte maximale.

Illustrons le propos par un exemple concret :

Soit un portefeuille de valeur initiale 100 avec une garantie souhaitée de 100% à l'échéance. L'échéance est de 6 ans et le taux sans risque de 3%. Notons S et M respectivement les sommes investies en actifs risqués et non risqués.

Le plancher initial :

$$\frac{100}{(1 + 3\%)^6} \simeq 83,75$$

Le coussin initial :

$$100 - \text{plancher} \simeq 100 - 83.75 \simeq 16,25$$

Pour le multiplicateur le cas précédent est conservé alors  $m = \frac{1}{25\%} = 4$ . Le montant initial investi dans les actifs risqués est alors :

$$\text{coussin} \times m \simeq 16.25 \times 4 \simeq 65$$

Le montant restant est investi en actifs non risqués, soit  $100 - 65 = 35$ .

Maintenant supposons que les actifs risqués ont augmenté de 4% en une journée alors la valeur des actifs change :

Actifs risqués :  $65 \times (1 + 4\%) \simeq 67,6$

Actifs non risqués :  $35 \times (1 + 3\%/365) \simeq 35$

La valeur totale du portefeuille devient :

$$S(1) + M(1) \simeq 67,6 + 35 \simeq 102,6$$

A la date 1 le plancher est donc :

$$\frac{100}{(1 + 3\%)^{5 - \frac{1}{365}}} \simeq 83,76$$

Et le coussin est recalculé :

$$102,6 - 83,76 \simeq 18,85$$

On a donc  $m = \frac{67,6}{18,85} \simeq 3,59 \neq 4$  (initialement). Un re-balancement peut donc être fait en achetant  $4 \times 18,85 - 67,6 \simeq 7,8$  actifs risqués pour revenir à la cible. Pour que ce soit possible 7,8 actifs non risqués doivent être vendus.

Cette stratégie est dynamique au cours du temps et peut nécessiter de nombreux re-balancements, c'est pourquoi dans certains cas il est préférable de fixer une tolérance en n'effectuant ces ajustements que lorsqu'un certain seuil est dépassé.

Cette stratégie présente certains inconvénients notamment par la possibilité d'induire de nombreux frais de courtages. De plus comme le coussin peut devenir très élevé, l'appétence aux risques de la compagnie peut ne pas être respecté.

## Chapitre 4

# Description du modèle ALM utilisé ainsi que du Générateur de scénarios économiques

### 4.1 Description du modèle ALM

La gestion actif-passif est une difficulté à laquelle tous les assureurs sont confrontés et le modèle ALM (*Asset Liability Management*) permet d'évaluer correctement les relations existantes entre l'actif et le passif. Il simule les flux futurs tout en prenant en compte les interactions.

Le modèle a pour objectif le calcul du bilan prudentiel (Solvabilité 2) pour chaque arrêté trimestriel. Ainsi un suivi peut être fait sur les différents indicateurs d'appétences aux risques (SCR, MCR, Risk Margin et Best Estimate). Grâce au calcul de la marge de solvabilité ainsi que des provisions mathématiques le modèle permet aussi la construction d'un bilan comptable (Solvabilité 1).

Les deux bilans sont illustrés ci-dessous :

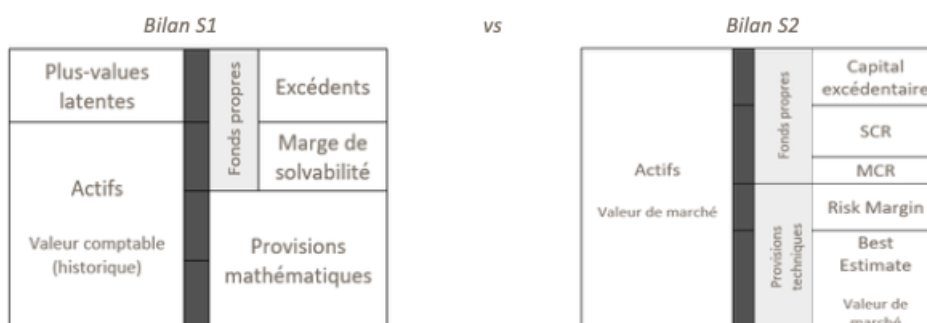


FIGURE 4.1 – Bilan S1 vs bilan S2





2. Un taux de PVL,  $t_{PVL}$ , est moissonné chaque année pour un montant  $X_t^1$  tel que :

$$X_t^1 = \max(PVL_t; 0) \times t_{PVL}$$

3. Au-delà d'un certain seuil de PVL,  $s_{PVL}$ , en pourcentage de la VNC, l'excédent est moissonné pour un montant :

$$X_t^2 = \max[VM_t - VNC_t \times (1 + s_{PVL}), 0]$$

4. La valeur nette comptable devient donc après moissonnage :

$$VNC_t = VNC_t + \max(X_t^1, X_t^2) \text{ et on en déduit donc une formule de la PVL :}$$

$$PVL = \max\left[\left(\frac{VM}{VNC} - 1 - s_{PVL}\right) \times VNC; (VM - VNC) \times t_{PVL}; 0\right]$$

### Valeur de marché

Titres obligataires (Monde réel) :

La valorisation d'un titre obligataire se fait par l'actualisation des flux à l'aide de la courbe des taux majorée par un *spread* constant au cours du temps puis cette valeur est dépréciée par un taux d'érosion en fonction de sa notation. Le calcul du *spread* se fait à la date de référence ou à la date d'achat pour les réinvestissements et il vérifie :

$$VM_N = \sum_{i=1}^m \frac{c}{(1+tx_i+spread)^i} + \frac{n}{(1+tx_m+spread)^m}$$

avec :

- $VM_N$  : valeur de marché en N
- m : nombre d'année jusqu'au remboursement
- $tx_i$  : taux de maturité  $i$  de la courbe des taux au 31/12/N
- n : le nominal
- c : coupon de l'obligation

Les obligations sont classées suivant un *rating* comme ceci :

AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	CC	C	NR
-----	----	---	-----	----	---	-----	----	---	----

TABLE 4.1 – Notation d'obligations

Le défaut des obligations se calcule comme ceci :

- **Risque neutre** : La VM d'une obligation doit être égale à la somme actualisée des coupons futurs et du nominal avec un taux de rendement égal au taux sans risque de l'EIOPA. On cherche donc le taux de défaut qui permet de répondre à cette contrainte. On vérifie donc :  $VM_{N+1} = VM_N \times (1 + r)$
- **Monde réel** : Un paramètre d'érosion est défini pour chaque notation et à la fin de l'année le nominal est déprécié de ce taux.

### Immobilier :

Les immeubles détenus en direct suivent un indice Capital + Loyer issu des tables sorties du GSE. Il est à noter qu'un taux de loyer est appliqué et traité comme un encaissement en trésorerie.

Autres actifs :

Pour le monétaire, les OPCVM, l'alternatif et les actions, la valorisation de l'année  $N$  à  $N+1$  se fait en appliquant un taux de rendement en fonction de la classe d'actif. :

$$VM_{N+1}^i = VM_N^i \times (1 + \text{Taux de rendement}_N^i)$$

**Allocations d'actifs**

L'allocation d'actifs est un paramètre fixé en input du modèle. Elle est définie avec une valeur cible des bornes min et max pour chaque classe d'actifs. Ces valeurs sont des proportions du portefeuille d'actifs en valeur de marché.

Le modèle achète ou vend les actifs du portefeuille afin de respecter l'allocation.

- Pour les obligations, les désinvestissements sont interdits. Seuls les réinvestissements sont appliqués si besoin.
- Pour les autres classes d'actifs (OPCVM, alternatif, action, non cotée, fonds immobiliers et immobiliers direct), l'ajustement pour rester dans la fourchette peut se faire aussi bien en désinvestissant qu'en réinvestissant. Ensuite sont appliquées les règles de moissonnages des plus values (réalisation des plus-values).

**Réinvestissement en obligation**

Le réinvestissement se fait seulement sur les obligations d'états et/ou corporate à taux fixe. Les obligations d'états sont notées AAA par défaut et les corporates BBB. Comme vu précédemment la maturité de réinvestissement est un paramètre en input et les achats sont faits sur *Maturité - 5 ans*, *Maturité*, *Maturité + 5 ans* à part égale. Concernant le spread de crédit, il est un paramètre à renseigner en déterministe et en stochastique il se calcule avec le GSE.

Les coupons et remboursements se font à la date anniversaire du titre et sont capitalisés jusqu'à la date de référence suivante.

**4.1.2 Passif**

Il existe un modèle de passif indépendant du Modèle ALM qui permet de créer les projections des flux de passif (prestations et cotisations) sur un horizon donné. Ensuite une méthode de flexing est utilisée dans le modèle ALM pour faire varier les flux de passif avec les revalorisations en fonction des scénarios financiers (management action).

Les prestations en rente sont calculées de la manière suivante :

$$\text{Droit servis} \times \text{Valeur de service du point}$$

De plus il y a des flux de prestations de liquidation en capital, de rachats et de transferts.

En risque neutre il n'y a pas de poursuite de cotisations ni de nouvelles cotisations. Par contre en monde réel les flux de cotisations sont bien modélisés.

Le modèle permet de calculer le Best Estimate pour les calculs prudentiels et les provisions mathématiques en comptes sociaux. Ces indicateurs tiennent compte des managements actions liées à la possibilité de faire varier la valeur de service du point.

### Management action

Comme vu dans la première partie (1.2), il est possible de faire évoluer la valeur de service du point si certaines conditions sont réunies. Dans le modèle, les critères suivants sont utilisés en conformité avec la réglementation.

	Seuil de déclenchement (Taux de couverture)	Nombre d'année en dessous du seuil	Niveau de la baisse ou de la revalorisation
Possibilité de baisse	X %	2	Pour revenir à un taux de couverture de 105%
	Y %	3	
Possibilité de revalorisation	Z %	1	Excédent par rapport à Z%

FIGURE 4.2 – Management action

### 4.1.3 Paramètres généraux

Tous les paramètres utiles sont regroupés dans un fichier excel. De plus le fichier contient le bilan initial en provenance de la comptabilité ainsi que les paramètres d'investissements comme les allocations.

## 4.2 Générateur de scénarios économiques

Les Générateurs de scénarios économique ou GSE sont des outils permettant de faire des simulations stochastiques en monde réel ou en risque neutre sur un horizon donné en fonction de différentes variables économiques ou financières. On appelle cela des "facteurs de risque" : Taux, Actions, immobiliers, inflation,... Pour un assureur en général, les portefeuilles d'actifs et de passifs sont sensibles à ces facteurs de risque.

Pour la partie actif, le GSE permet d'obtenir des trajectoires adaptées aux différentes classes d'actifs et donc d'approcher de manière cohérente leurs valeurs futures. Tandis qu'au passif, grâce à la modélisation des taux nous pouvons suivre l'évolution de nos provisions sur le long terme.

Cette partie vise à expliquer comment et avec quels modèles sont construits les scénarios.

La description se fait uniquement sur le GSE monde réel car c'est celui utilisé pour les simulations.

### 4.2.1 Méthode de simulation

Le principe de simulation de ce GSE est basé sur l'anticipation que l'on peut faire de la courbe des taux 10 ans. Nous allons choisir deux taux 10 ans à horizon 4 ans et 10 ans puis construire les deux courbes correspondantes que l'on appellera Courbes de taux clés.

Ces courbes sont choisies de manière à être cohérentes avec les anticipations du marchés en adéquation avec les objectifs de l'UMR. On construit une courbe à moyen terme (horizon 2026) et une pour le long terme (horizon 2033), toutes deux respectant les contraintes d'anticipation du taux 10 ans.

Chaque courbe est définie de manière précise :

- Définition de certains paramètres (UFR, CRA, LPP) détaillés ci-après.
- Déduction du choc sur la courbe des taux swap à appliquer afin de converger vers la valeur attendue du taux 10 ans.
- Construction avec ces paramètres de la courbe EIOPA complète en utilisant l'approche de Smith Wilson.

Ensuite par simple translation linéaire on déduit les différentes courbes correspondant à chaque année de projections.

Le GSE permet ensuite de créer des scénarios stochastiques autour de ces courbes anticipées.

### 4.2.2 Smith Wilson

#### Principe

La méthode de Smith-Wilson est celle utilisée pour la construction de la courbe fournie par l'EIOPA. En amont du GSE la méthode de Smith-Wilson permet de construire les courbes de taux correspondantes aux anticipations.

Cette méthode est aussi bien une méthode d'interpolation que d'extrapolation des taux zéros coupons et elle repose sur différents paramètres :

- LLP (*Last Liquid Point*) : C'est le dernier point liquide, le dernier moment où les produits financiers s'échangent facilement sur le marché.
- UFR (*Ultimate Forward Rate*) : C'est le taux vers lequel doivent converger les taux *forward*. Ce taux est défini par L'EIOPA.
- CRA (*Credit Risk Adjustment*) : Comme son nom l'indique il correspond à une correction faite sur les taux du marché pour les rendre nets du risque de crédit.
- $\alpha$  : représente la vitesse de convergence vers l'UFR.  $\alpha$  est calculé de sorte que le taux *forward* de maturité 60 ans soit proche de l'UFR (écart inférieur à 1 bp).

Soit  $n$  instruments financiers (par exemple des swaps) avec des maturités de paiements  $u_1, \dots, u_J$  et  $c_i, \dots, c_{i,J}$  les cash flows associés.

Chaque instrument financier a une valeur de marché noté :

$$v_i = \sum_{j=1}^J c_{i,j} P(0, u_j)$$

Avec  $P(0, u_j)$  la fonction du prix Zéro-coupon qui se calcule d'après la méthode de Smith-Wilson comme suit :

$$P(0, u_j) = e^{-UFR} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \times K_i(t)$$

avec :

- $\zeta$  : Un vecteur de paramètre à définir
- $K_i(t) = \sum_{j=1}^J c_{i,j} \times W(t, u_j)$  des fonctions dites de "noyaux"

On définit les fonctions symétriques de wilson  $W(t, u_j)$  comme suit :

$$W(t, u_j) = e^{-UFR(t+u_j)} \times \left\{ \alpha \min(t, u_j) - \frac{1}{2} \times e^{-\alpha \max(t, u_j)} \times (e^{\alpha \min(t, u_j)} - e^{-\alpha \min(t, u_j)}) \right\}$$

Avec  $\alpha$  le paramètre représentant la vitesse de convergence vers l'UFR. La valeur de marché peut donc se réécrire :

$$\begin{aligned} v_i &= \sum_{j=1}^J c_{i,j} P(0, u_j) \\ &= \sum_{j=1}^J c_{i,j} \left( e^{-UFR} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \times \sum_{j=1}^J c_{i,j} \times W(t, u_j) \right) \end{aligned}$$

Par passage en écriture matricielle on a :

$$V = Cp = C\mu + (CWC^T)\zeta$$

Avec :

- $V = (v_i)_{i \in [1, n]}$  ;  $p = (P(u_i)_{i \in [1, n]})$  ;  $\mu = (e^{-UFR \times u_i})_{i \in [1, n]}$  ;  $\zeta = (\zeta_i)_{i \in [1, n]}$  ;



La phase d'initialisation est terminée avec l'obtention des différentes courbes nous pouvons maintenant passer à la diffusion des différentes variables.

### 4.2.3 Taux

Le modèle utilisé est un modèle de taux que nous nommerons à translation stochastique. En se basant sur un scénario déterministe et en introduisant un mouvement brownien et un paramètre de volatilité, le modèle crée stochastiquement des courbes de taux de proche en proche autour de ce scénario. Les scénarios déterministes sont les courbes d'anticipations générées précédemment par la méthode de Smith-Wilson.

#### Diffusion

La formule de diffusion est la suivante :

$$R(t, m) = R(t - 1, m) + d(t, m) + s(m).e(t)$$

avec :

- $R(t, m)$  : Le taux zéro coupon en  $t$  de maturité  $m$ .
- $d(t, m) = \sum_{k=1}^t d(k, m)$  : Le drift déterministe entre les courbes en 0 et  $t$  associé à la maturité  $m$ .
- $s(m)$  : La volatilité annuelle du taux de maturité  $m$ .
- $e(t) \sim \mathcal{N}(0, 1)$  : Un mouvement brownien.

#### Calibrage

Le modèle part d'un scénario déterministe et donc le seul paramètre à calibrer est la volatilité. Le calibrage se fait sur un historique des taux zéro coupon nominaux, en faisant attention à la profondeur de la base de donnée de sorte à englober plusieurs cycles économiques.

Le paramètre de volatilité  $s(m)$  est un écart-type annualisé des variations historiques observées entre deux dates :

$$s(m) = \sqrt{p} \cdot \sigma_p(m)$$

avec :

- $p$  : la fréquence des volatilités données pour obtenir une année.
- $\sigma_p(m)$  : la volatilité périodique pour une maturité donnée

Le  $\sqrt{p}$  est un ajustement pour convertir la volatilité périodique en volatilité annuelle.

On obtient donc cette courbe de volatilité en fonction des maturités :

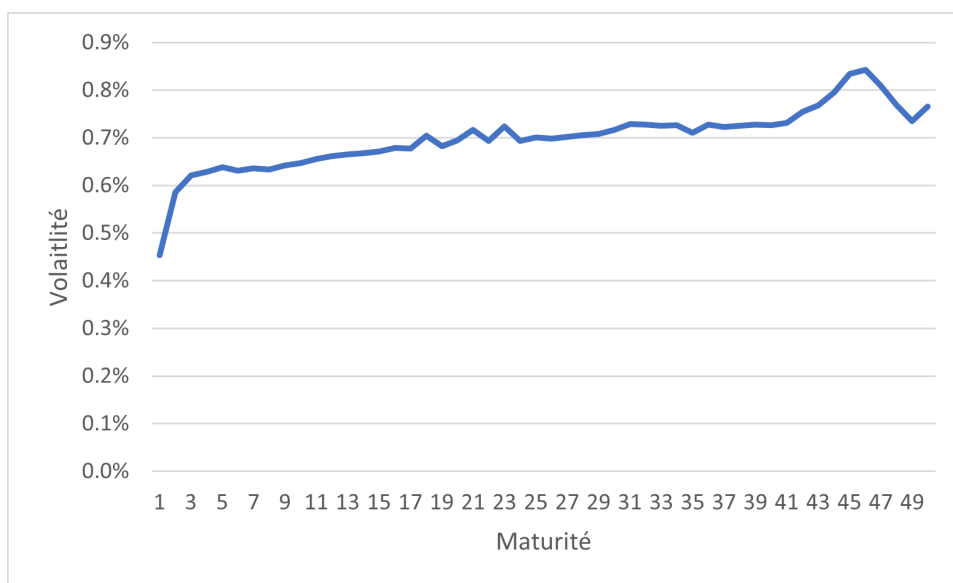


FIGURE 4.4 – Volatilité des taux

#### 4.2.4 Actions

Le modèle retenu est le modèle de *Black & Scholes*. Le prix des actions est simulé selon un processus *Black & Scholes* à un facteur.

##### Diffusion

La dynamique est donc de la forme :

$$dS(t) = (\mu - q)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

- $\mu$  : taux de rendement espéré de l'action
- $q$  : taux de dividende espéré de l'action ( $q = 0$  dans ce cas)
- $\sigma$  : volatilité constante de Black-Scholes
- $W(t)$  : un mouvement brownien

En appliquant le lemme d'Itô à la fonction  $f(S_t) = \ln(S_t)$  on a :

$$df(S_t) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (dS_t)^2$$

Or :

$$d \langle S \rangle_t^2 = \langle \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \rangle = S_t^2 \sigma^2 dt$$

Donc :

$$\begin{aligned} d \ln(S_t) &= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$



En intégrant de 0 à  $t$  on obtient :

$$\ln(S_t) - \ln(S_0) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t$$

On en déduit la formule de diffusion pas passage à l'exponentielle :

$$S_t = S_0 \exp(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t$$

### Calibrage

Calibrer le modèle de Black & Scholes consiste à trouver les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  intervenant dans l'équation de diffusion.

En monde réel le calibrage se fait sur des données historiques en se basant sur le log-rendement de l'indice action.

Grâce à la formule précédente les équations suivantes sont trouvées :

$$\begin{aligned}\mu &= \mathbb{E}(\ln(\frac{S_{t+1}}{S_t})) + \frac{1}{2}Var(\ln(\frac{S_{t+1}}{S_t})) \\ \sigma &= \sqrt{Var(\ln(\frac{S_{t+1}}{S_t}))}\end{aligned}$$

car :  $\ln(\frac{S_{t+1}}{S_t}) = \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma\mathcal{N}(0,1)$

Le modèle action est utilisé pour modéliser 4 classes d'actifs du portefeuille :

- Actions
- OPCVM Obligataire
- Le Non coté
- L'Alternatif

Le résultat du calibrage sur les actifs hors immobiliers :

Classes d'actifs	$\mu$	$\sigma$
Actions cotées	7%	17%
Alternatif	3%	4%
Non Cotées	6%	12%
OPCVM Onligataire	4%	7%

TABLE 4.3 – Couple rendement de risque

### 4.2.5 Immobiliers

#### Diffusion

Pour modéliser l'immobilier le modèle de Black & Scholes est encore choisi. L'équation de diffusion est donc :

$$dI(t) = (r + l)I(t)dt + \sigma I(t)dW(t)$$

avec

- $I(t)$  : La valeur de l'indice immobilier
- $r$  : Le taux de rendement espéré par le capital immobilier
- $l$  : Le taux de loyer espéré
- $\sigma$  : volatilité
- $W(t)$  : Un mouvement brownien

### Calibrage

Le calibrage s'effectue de la même manière que pour l'action en se basant sur des données historiques de l'indice immobilier.

	$\mu$	$\sigma$
Capital	3.37%	8%
Loyer	1.13%	

TABLE 4.4 – Couple rendement de risque Immobilier

## 4.2.6 Inflation

### Diffusion

Le modèle GADMER est utilisé dans le GSE pour modéliser l'inflation. Il se sert de sa très forte corrélation avec le taux d'intérêt. L'inflation est simulée à partir du taux d'intérêt à court terme.

L'équation de diffusion est la suivante :

$$i_t = \alpha + \beta \times r_t + \epsilon_t$$

avec :

- $\alpha, \beta, \sigma$  : sont les paramètres du modèle
- $\epsilon_t$  : un bruit blanc de variance  $\sigma^2$

### Calibrage

Les paramètres sont estimés par la méthode des moindres carrés sur les données historiques. En effet l'équation de diffusion peut se réécrire de façon matricielle :

$$i = X\lambda + \epsilon$$

avec  $\lambda = [\alpha, \beta]^t$ , la matrice de covariance  $\sigma^2 I_n$  et X la matrice des observations avec la première colonne composée de 1.

On cherche le  $\lambda$  qui minimise la variance du résidu :

$$\min_{\lambda} \text{Var}(\epsilon) = \frac{1}{n} (i - X\lambda)' (i - X\lambda)$$

En dérivant on obtient :

$$\frac{\partial Var(\epsilon)}{\partial \lambda} = \frac{1}{n} \times [-2X'Xi + 2X'X\lambda]$$

On retrouve bien l'estimateur des moindres carrés :

$$\hat{\lambda} = (X'X)^{-1}X'i$$

Ainsi que l'estimateur des résidus et de la variance :

$$\hat{\epsilon} = i - X\hat{\lambda}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{n-2} \times Var(\hat{\epsilon})$$

Les résultats obtenus après calibrage sont :

$\alpha$	$\beta$	$\sigma$
1.04%	60.80%	0.49%

TABLE 4.5 – Calibrage paramètres de Gadmer

### 4.2.7 Corrélation

Une des parties les plus importantes dans un GSE est la prise en compte des corrélations car elles définissent les interactions entre les différents facteurs de risques ou variables économiques.

Comme le GSE est en monde réel la matrice de corrélation est calculée sur l'historique des différents indices.

La matrice obtenue est donc :

	Taux 10 ans	Immobilier	Inflation	Action	OPCVM	Non Coté	Alternatif
Taux 10 ans	100%	"	"	"	"	"	"
Immobilier	46%	100%	"	"	"	"	"
Inflation	15%	41%	100%	"	"	"	"
Actions	28.4%	17.9%	-1.6%	100%	"	"	"
OPCVM Oblig.	-53.8%	-35.2%	-11.4%	89.7%	100%	"	"
Non coté	28%	24%	-3%	80%	0.0%	100%	"
Alternatif	28%	24%	-3%	60%	77.2%	0.0%	100%

TABLE 4.6 – Matrice de corrélation

Cependant comme les historiques des différents indices ne sont pas autant fournis notamment sur les fréquences alors la matrice de corrélation reste approximative. Ce qui n'assure pas le critère de matrice semi-définie positive nécessaire pour la diffusion dans un GSE. Afin de résoudre ce problème Nicholas J.Higham propose une transformation permettant de trouver la matrice de corrélation la plus proche et donc de la rendre semi-définie positive. Voir son article ("*Computing the nearest correlation matrix-a problem from finance*") pour plus de précision sur la méthode utilisée.

Voici la matrice de corrélation obtenue après transformation de Higham :

	Taux 10 ans	Immobilier	Inflation	Action	OPCVM	Non Coté	Alternatif
Taux 10 ans	100%	"	"	"	"	"	"
Immobilier	48%	100%	"	"	"	"	"
Inflation	15%	41%	100%	"	"	"	"
Actions	18%	14%	-1%	100%	"	"	"
OPCVM Oblig.	-41.9%	-30.4%	-12.1%	66.3%	100%	"	"
Non coté	32.9%	25.9%	-3.2%	69.3%	0.0%	100%	"
Alternatif	24.6%	22.5%	-2.7%	65.7%	70.3%	0.0%	100%

TABLE 4.7 – Matrice de corrélation

### 4.2.8 Validation

Des tests de validation sont effectués sur les différents actifs afin de s'assurer que la diffusion du GSE est conforme aux attentes.

#### Taux

Pour la diffusion des taux une vérification est faite en comparant les courbes observées et théoriques en portant une attention particulière sur l'atteinte des taux 10 ans définis précédemment.

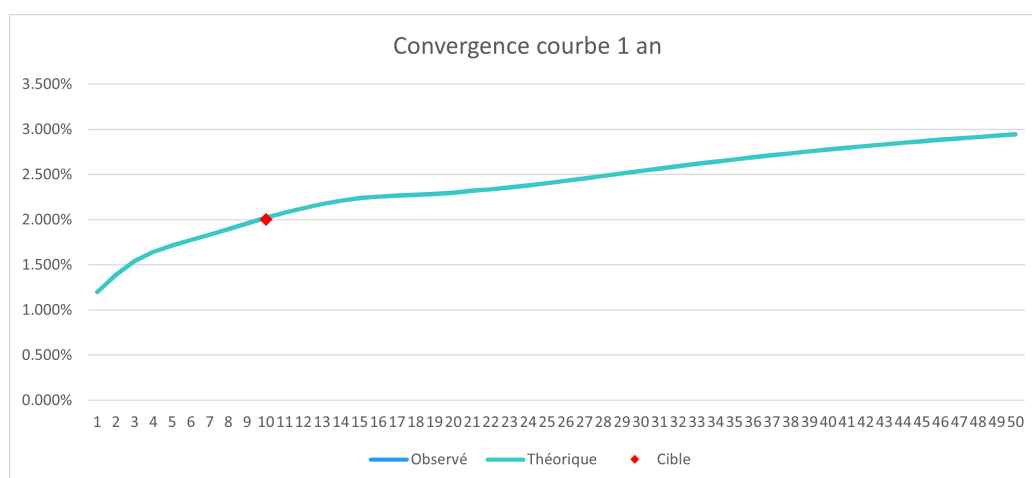


FIGURE 4.5 – Courbe 1ère année

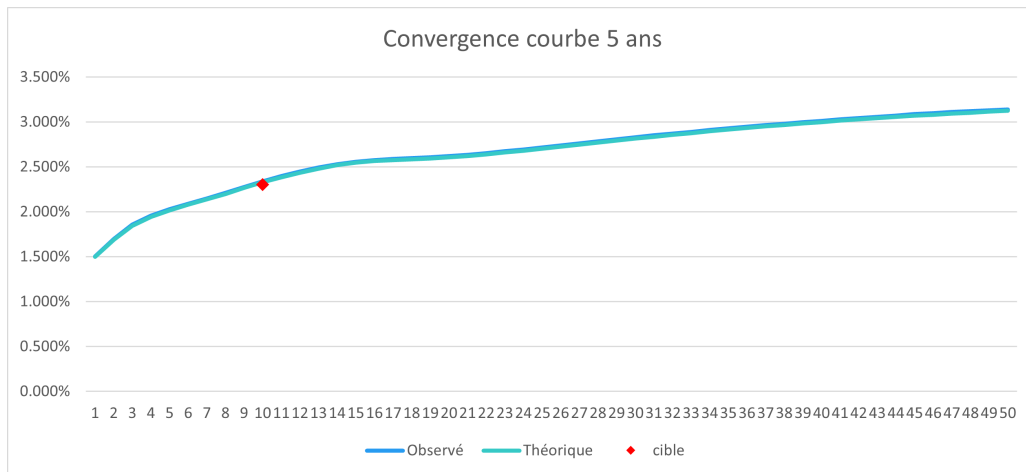


FIGURE 4.6 – Courbe 5 ème année

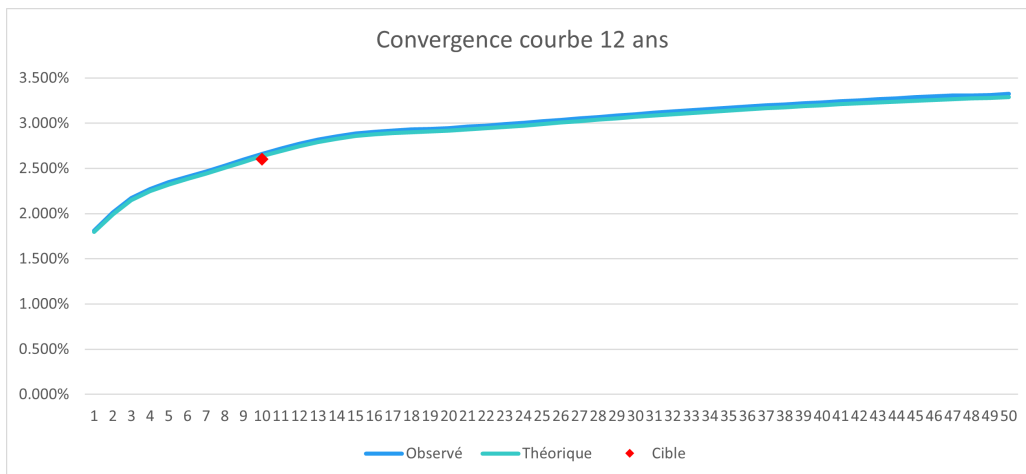


FIGURE 4.7 – Courbe 12ème année

Sur les 3 graphiques la courbe observée se confond avec la courbe théorique ce qui permet de valider la convergence des taux par le GSE. De plus les taux 10 ans cibles vus dans la partie Smith-Wilson sont bien atteints.

Une deuxième comparaison a été faite sur les volatilités et de la même manière les courbes se superposent comme le montre le graphique suivant :

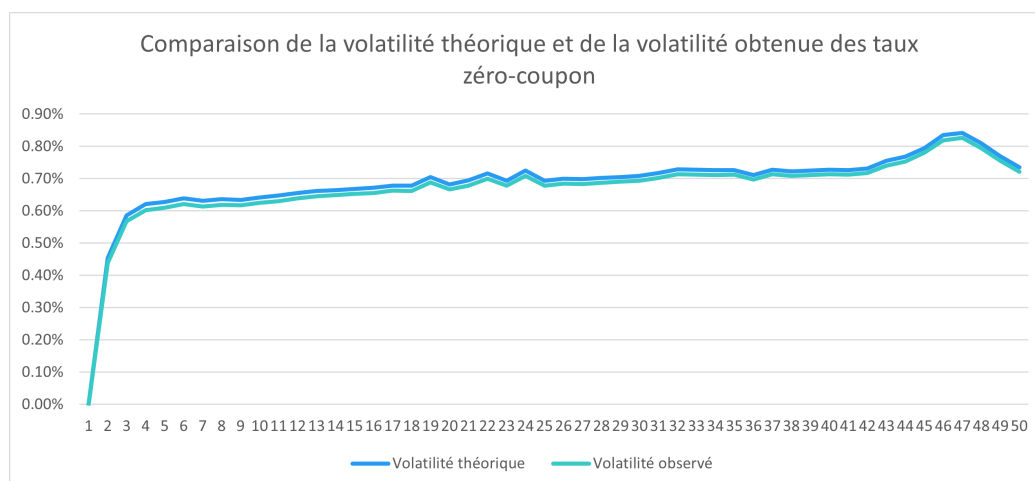


FIGURE 4.8 – Comparaison volatilité

### Actions

La validation pour les indices actions se vérifie en comparant les rendements théoriques avec les rendements observés. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant :

Period	Action		OPCVM		Non Coté		Alternatif	
	Moyenne obtenue	Moyenne Théorique	Moyenne obtenue	Moyenne Théorique	Moyenne obtenue	Moyenne Théorique	Moyenne obtenue	Moyenne Théorique
1	7.25%	7.00%	4.08%	4.00%	6.18%	6.00%	3.05%	3.00%
2	7.25%	7.00%	4.08%	4.00%	6.18%	6.00%	3.05%	3.00%
3	7.25%	7.00%	4.08%	4.00%	6.18%	6.00%	3.05%	3.00%
4	7.25%	7.00%	4.08%	4.00%	6.18%	6.00%	3.05%	3.00%
5	7.25%	7.00%	4.08%	4.00%	6.18%	6.00%	3.05%	3.00%
6	7.25%	7.00%	4.08%	4.00%	6.18%	6.00%	3.05%	3.00%
7	7.25%	7.00%	4.08%	4.00%	6.18%	6.00%	3.05%	3.00%
8	7.25%	7.00%	4.08%	4.00%	6.18%	6.00%	3.05%	3.00%
9	7.25%	7.00%	4.08%	4.00%	6.18%	6.00%	3.05%	3.00%
10	7.25%	7.00%	4.08%	4.00%	6.18%	6.00%	3.05%	3.00%
11	7.25%	7.00%	4.08%	4.00%	6.18%	6.00%	3.05%	3.00%
12	7.25%	7.00%	4.08%	4.00%	6.18%	6.00%	3.05%	3.00%
13	7.25%	7.00%	4.08%	4.00%	6.18%	6.00%	3.05%	3.00%

FIGURE 4.9 – validation action

La modélisation semble fidèle car les écarts sont faibles, tout comme pour les volatilités dans le tableau ci-après :

### Immobilier

Pour finir cette partie validation le même travail a été réalisé pour l'immobilier avec une appréciation identique aux modélisations précédentes :

	Action	OPCVM	Non coté	Alternatif
Volatilité obtenue	18.43%	7.23%	12.65%	4.07%
Volatilité théorique	17.00%	7.00%	12.00%	4.00%

FIGURE 4.10 – Validation volatilité action

	Moyenne obtenue	Moyenne théorique
1	4.61%	4.50%
2	4.58%	4.50%
3	4.59%	4.50%
4	4.59%	4.50%
5	4.60%	4.50%
6	4.62%	4.50%
7	4.57%	4.50%
8	4.60%	4.50%
9	4.63%	4.50%
10	4.55%	4.50%
11	4.59%	4.50%
12	4.64%	4.50%
13	4.61%	4.50%

Volatilité obtenue	Volatilité théorique
8.34%	8.00%

FIGURE 4.11 – Validation immobilier

La moyenne est de 4.50% car elle représente la somme des rendements du capital et du loyer.





## Chapitre 5

# Choix de l'allocation optimale et étude prospective

### 5.1 Allocation optimale

L'objectif de cette partie est de constituer un panier d'allocations candidates et de trouver celle qui offre la meilleure performance avec le moins de risque possible. Puis dans un second temps évaluer sa robustesse face à des scénarios choqués.

#### 5.1.1 Gap de Trésorerie

La première étape dans la recherche d'une allocation d'actifs optimale est la détermination de la poche monétaire. Une étude a été réalisée sur le *gap de trésorerie* afin de s'assurer que le portefeuille initial détient une quantité suffisante de cash pour subvenir aux besoins de trésorerie futurs.

Un assureur doit pouvoir respecter ses engagements à tout moment, payer les rentes et capitaux des adhérents dans le cas d'un produit retraite, et donc le portefeuille doit disposer de suffisamment de trésorerie à chaque échéance de paiement.

Le *gap de trésorerie* se calcule comme ceci :

$$\text{Gap de trésorerie} = \text{Cashflows}_{\text{Actif}} - \text{Cashflows}_{\text{Passif}}$$

Avec :

$$- \text{Cashflows}_{\text{Actifs}} = \text{Coupon} + \text{Remboursement} + \text{Loyers} + \text{realisations de Plus values}$$

$$- \text{Cashflows}_{\text{Passifs}} = \text{Prestations} - \text{Cotisations}$$

La méthode consiste à lancer 1000 scénarios en Monde Réel afin d'observer le *gap de trésorerie* minimum par scénario sur les 10 ans. L'indicateur de choix du montant minimum à avoir en trésorerie est la VaR comme indicateur de risque.

Le premier graphique montre l'évolution du gap de trésorerie sur les 10 années de projection :

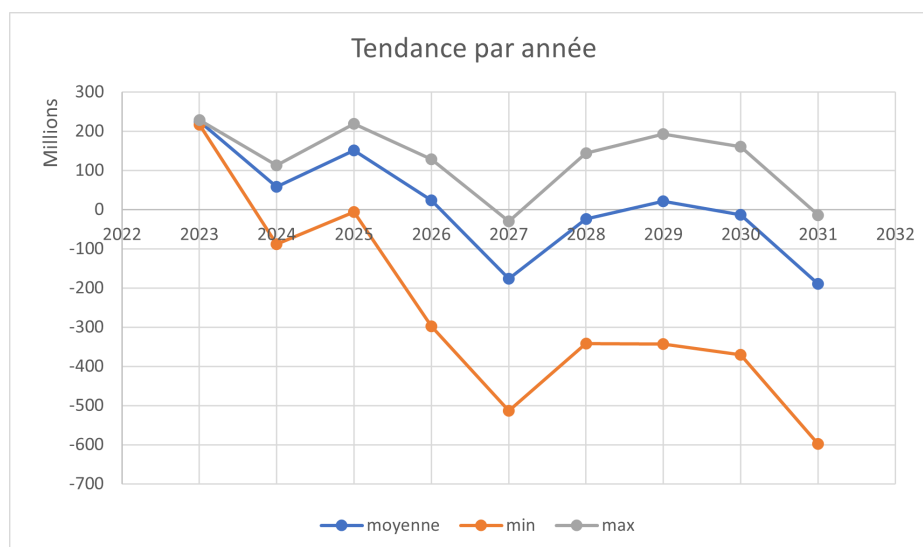


FIGURE 5.1 – Tendance gap de trésorerie

Une tendance se dessine avec en 2027 et 2031 un besoin en trésorerie plus important. Pour le scénario le plus extrême, le minimum est de respectivement  $-513M$  € et  $-598M$  € pour 2027 et 2031. Cela s'explique par une très forte hausse de la revalorisation les années précédentes ce qui provoque une hausse des prestations.

Le graphe suivant présente la répartition du gap de trésorerie obtenu sur les 1000 scénarios et rangé dans l'ordre croissant avec les VaR à 80%, 85%, 90% et 95% :

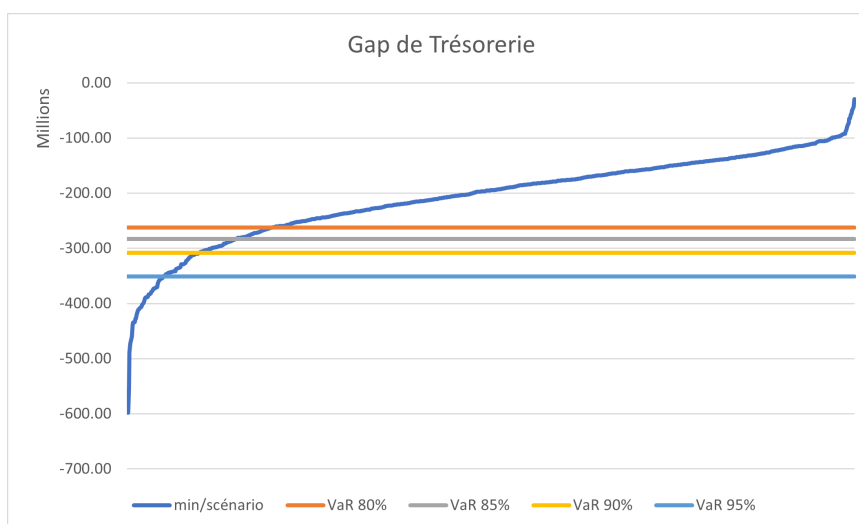


FIGURE 5.2 – Gap de trésorerie





Avec :

- Proportion supérieure à celle initiale
- Proportion inférieure à celle initiale

### Allocations non-risquées

De la même façon un panier d'allocations se basant sur l'allocation initiale a été créé en gardant 2% en monétaire et en modifiant la poche obligataire en partant de 70% par pas de 4%.

Voici le panier ainsi obtenue :

	A 1.1	A 1.2	A 1.3	A 1.4	A 1.5	A 1.6
<b>OPCVM</b>	4%	4%	5%	4%	9%	10%
<b>Alternatif</b>	0%	4%	3%	3%	4%	4%
<b>Actions</b>	13%	13%	16%	18%	18%	18%
<b>Non cotées</b>	4%	4%	4%	4%	4%	5%
<b>Immobilier</b>	7%	7%	8%	11%	9%	11%
<b>Obligation</b>	70%	66%	62%	58%	54%	50%
<b>Monétaire</b>	2%	2%	2%	2%	2%	2%
<b>Non risqués</b>	72%	68%	64%	60%	56%	52%
<b>Risqués</b>	28%	32%	36%	40%	44%	48%
<b>Total</b>	100%	100%	100%	100%	100%	100%

TABLE 5.3 – Allocations non-risquées

### 5.1.3 Choix des métriques

Afin de définir une allocation optimale il faut choisir certains critères de sélections, appelés métriques d'optimisation. Certaines métriques évaluent la performance et d'autres le niveau de risque.

#### Métrique de performance

Pour suivre un produit de retraite par points l'indicateur de performance le plus simple est le taux de couverture. Mais comme évoqué dans la partie management action (4.1.2), sur la durée de projection le taux de couverture évolue en fonction des revalorisations de la valeur de service du point ce qui fausse l'indicateur de performance. A contrario, les revalorisations de la valeur de service du point (vsp) donnent une réelle indication sur la santé du régime car ces variations ont un impact direct sur les prestations des adhérents et donc sur la performance du produit selon la vision assuré.

La solution choisie a donc été de définir un indicateur de performance basé sur la revalorisation cumulée que l'on notera par simplification *REVCum*.

$$REVCum = \prod_{t=1}^T (1 + REV_t)$$

avec  $REV_t$  : la revalorisation de l'année  $t$

### Métrique de risque

Cette métrique doit permettre d'évaluer le risque inhérent au choix d'allocations mais la notion de risque étant vaste le choix doit être centré sur les exigences de l'UMR.

La première métrique de risque choisie est la  $VaR_{90\%}$  du taux de couverture de la dernière année, c'est à dire le niveau minimum atteint par le taux de couverture dans 90% des cas. Cette métrique permet de fixer le niveau de risque maximum accepté.

Cependant cette métrique seule ne suffit pas à donner une idée précise du risque inhérent à l'allocation testée.

Comme expliqué précédemment, cette métrique est dépendante des niveaux de revalorisations annuelles. Le risque réel pour un régime par points est la baisse de vsp. A taux de couverture équivalent l'objectif est de limiter la variation ou la volatilité de la vsp et notamment les baisses.

La seconde métrique de risque choisie est donc définie par le ratio entre :

- 1- la revalorisation cumulée restreint aux baisses de VSP
- la revalorisation cumulée globale ( $REVCum$ )

$$ratio_{REV} = \frac{1 - REVCum_{baisse}}{REVCum}$$

avec :  $REVCum_{baisse} = \prod_{t=1}^T (1 + REV_t \times 1_{(REV_t < 0)})$

Cet indicateur mesure le niveau des baisses de vsp par rapport à la mesure de performance. Plus le ratio est élevé plus le risque est élevé également.

#### 5.1.4 Première segmentation

L'appétence aux risques a été définie en prenant une  $VaR_{90\%}$  du taux de couverture et le seuil a été fixé à 99.5%. De même le niveau minimum de performance a été fixé en conservant une  $REVCum$  de 170%.

Le graphe suivant présente les résultats obtenus sur les différentes allocations ainsi que la frontière représentant l'appétence aux risques :

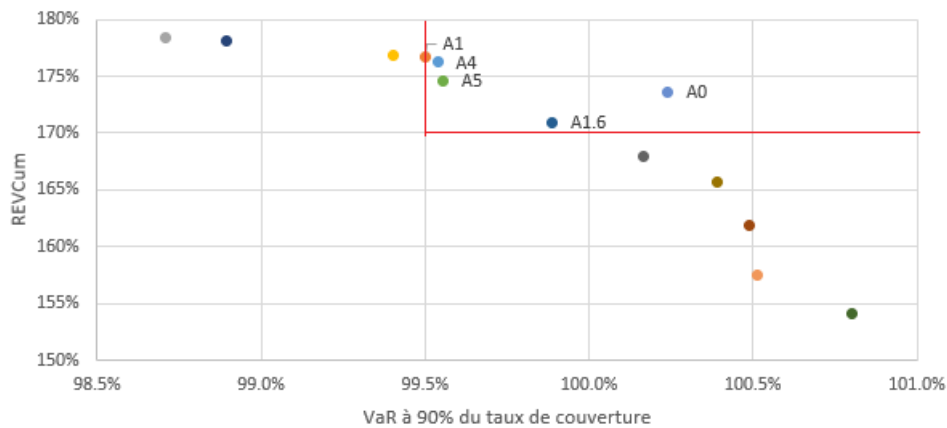


FIGURE 5.4 – Frontière d'appétence aux risques

Seulement 5 allocations respectent les seuils de performance et de risque : l'allocation initiale A0, une allocation favorisant la poche obligataire A1.6 ainsi que 3 allocations risqués A1, A4 et A5.

### 5.1.5 Deuxième segmentation

Comme évoqué précédemment l'optimisation doit être complétée en suivant une métrique de risque reflétant le niveau de baisse de vsp à travers le  $ratio_{REV}$ .

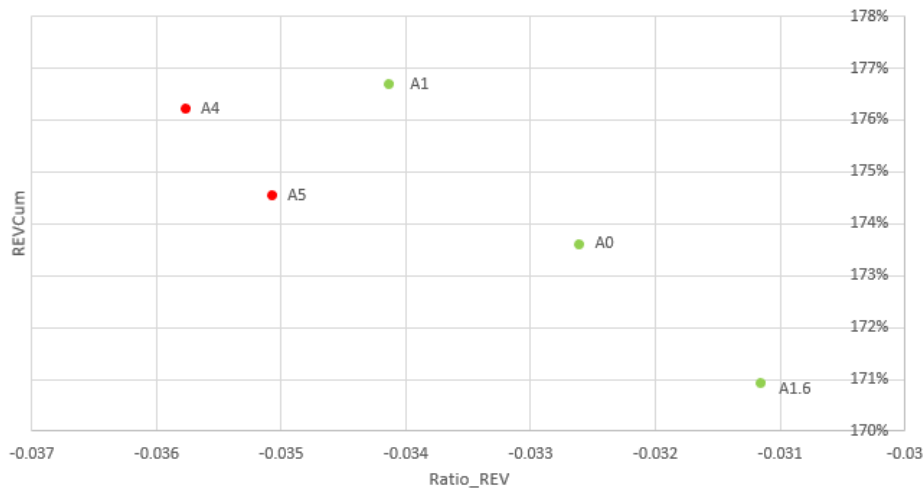


FIGURE 5.5 – Points efficaces

Le graphe est présenté avec en abscisse la métrique de risque  $-ratio_{REV}$  et en ordonnée la métrique de performance  $REVCum$ . La zone optimale, avec la meilleure performance pour un risque minimum, se situe donc sur la partie supérieure droite.

Les allocations A4 et A5 offrent une performance moins élevée que A1 mais avec un risque bien plus élevé, elles ne sont donc pas efficaces. Ensuite l'allocation A1.6 garantit des performances moindres car la poche obligataire est plus élevée et donc un niveau de risque bien inférieur aux autres allocations.

2 allocations efficaces ainsi que l'allocation initiale sont retenues :

	<b>A0</b>	<b>A1</b>	<b>A1.6</b>
<b>OPCVM</b>	10%	14%	10%
<b>Alternatif</b>	4%	4%	4%
<b>Actions</b>	18%	20%	18%
<b>Non cotées</b>	8%	8%	5%
<b>Immobilier</b>	11%	11%	11%
<b>Obligation</b>	47%	41%	50%
<b>Monétaire</b>	2%	2%	2%

TABLE 5.4 – Allocations efficaces













	31/12/2021
Actifs	9 751.16
Passifs	9 432.51
Excédents d'actifs	318.66
Emprunt	155
Fonds propres	473.66
Exigence de marge (EMS)	369.2
Taux de couverture FRPS	128.3%

TABLE 5.6 – Bilan FRPS (en M€)

### 5.2.4 Résultats

Cette partie cherche à évaluer l'impact des scénarios choqués en fonction des différentes allocations d'actifs et de le mesurer suivant les deux normes prudentielles (Solvabilité 2 et FRPS).

#### Solvabilité 2

Dans un premier temps il a été choisi d'étudier l'allocation initiale afin de comprendre les mécanismes de variation des différentes mesures telles que le SCR ou les fonds propres.

La première figure présente l'évolution du taux de couverture du SCR sous Solvabilité 2 :

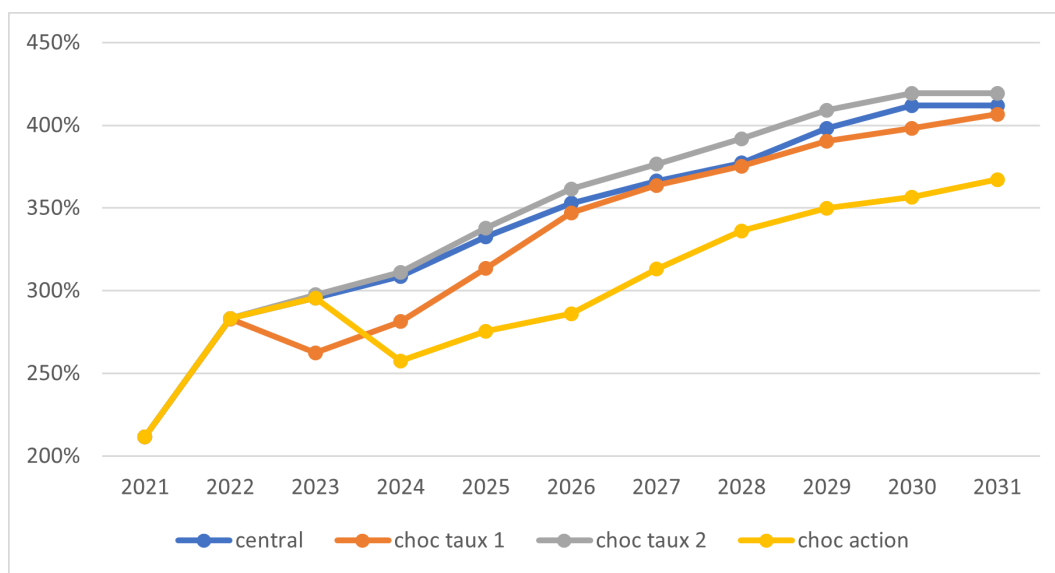


FIGURE 5.9 – Taux de couverture du SCR en fonction des scénarios choqués



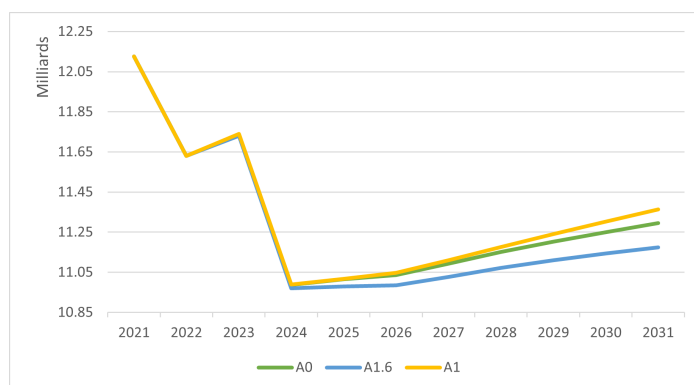


FIGURE 5.10 – Évolution du total actifs des différentes allocations sur le scénario choc action

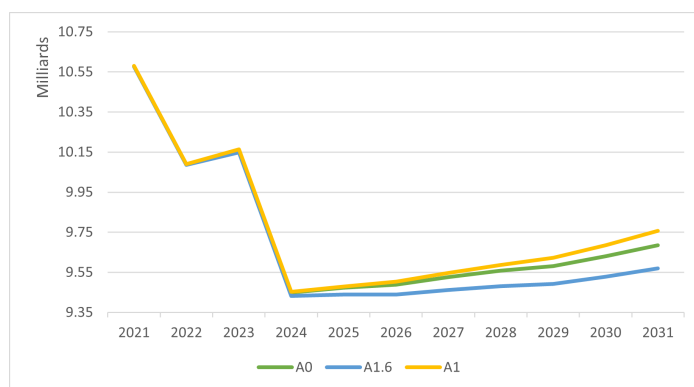


FIGURE 5.11 – Évolution des provisions techniques des différentes allocations sur le scénario choc action

L'actif et le passif ont le même sens de variation avec le premier choc en 2022 correspondant aux hypothèses de hausse des taux et la chute en 2023 est due au choc sur le rendement action.

L'allocation A1.6 est moins performante que l'initiale mais par ailleurs constitue aussi moins de provisions techniques ce qui correspond bien à une allocation peu risquée. À l'inverse l'allocation A1, avec une proportion plus importante d'OPCVM et d'actions, améliore son actif tout en augmentant aussi ses provisions techniques. Cependant les différences restent très faibles et peu significatives.

Afin de mesurer le potentiel impact des allocations sur les chocs, d'autres indicateurs doivent être observés.



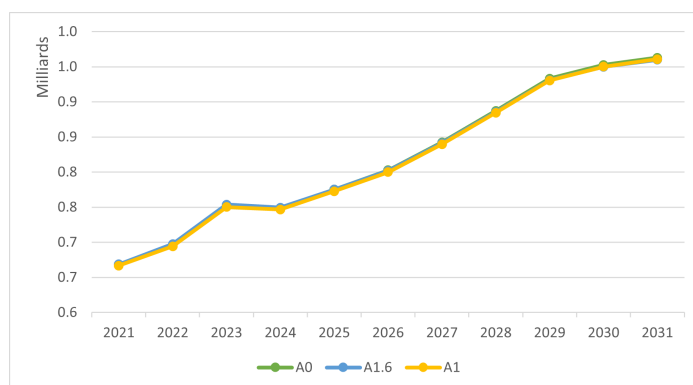


FIGURE 5.12 – Évolution des fonds propres des différentes allocations sur le scénario choc action

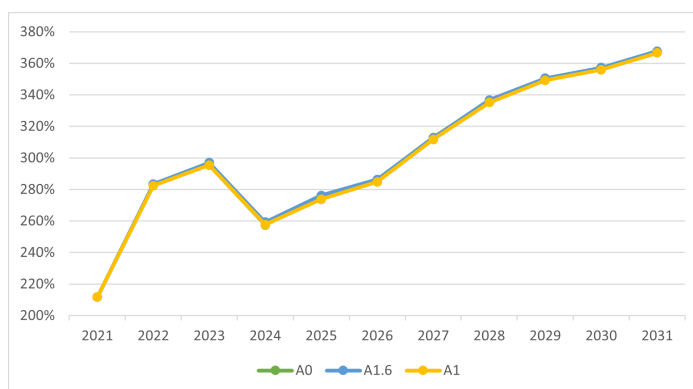


FIGURE 5.13 – Évolution du taux de couverture SCR des différentes allocations sur le scénario choc action

Pour les deux figures nous avons les courbes qui se confondent ce qui signifie que les deux allocations n'ont pas d'impact significatif par rapport à l'allocation initiale. Une des raisons qui expliquent cela est le fait que les modifications d'allocations cible ne se font que sur le produit COREM. Or, grâce au management action (4.1.2) et la possibilité de revalorisation de la valeur de service du point, la différence entre la  $VM_{COREM}$  et le  $BE_{COREM}$  est presque toujours nulle. Ainsi les modifications d'allocations aboutissent toujours à un  $SCR_{COREM}$  nul ce qui ne modifie pas le SCR global.

## Conclusion

L'étude a été faite sur les deux autres scénarios de chocs de taux (Graphes en Annexe) et les conclusions sont les mêmes : Au vu des indicateurs de couverture de risque de Solvabilité 2 les différentes allocations réagissent de la même manière que l'allocation initiale face aux scénarios choqués.

## FRPS

Une seconde étude est menée en vision FRPS avec pour commencer, une analyse sur l'allocation centrale.

Les deux premières figures présentent l'évolution de l'actif et du passif afin de comprendre les mécanismes.

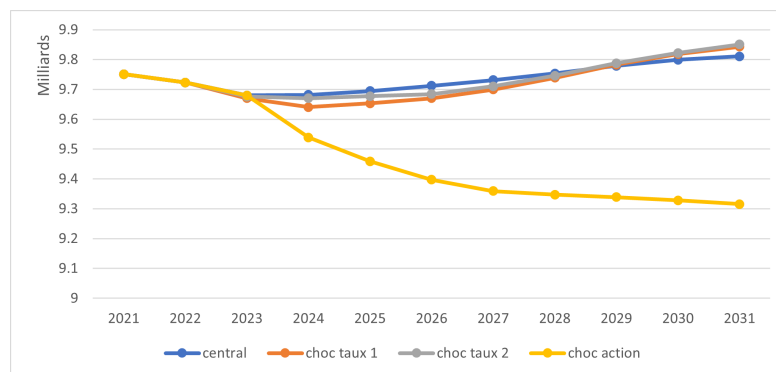


FIGURE 5.14 – Évolution des actifs FRPS en fonction des scénarios choqués

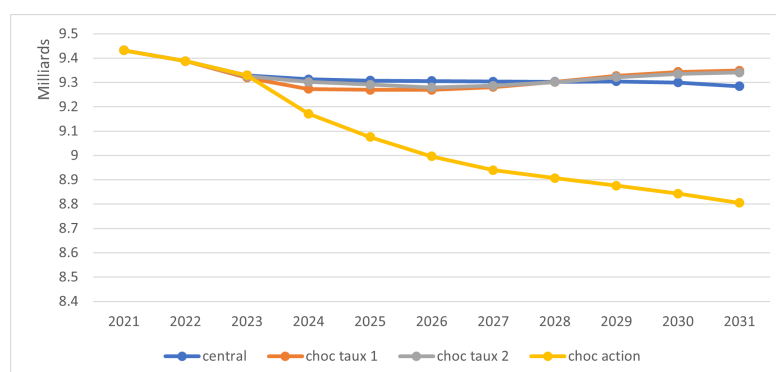


FIGURE 5.15 – Évolution du passif FRPS en fonction des scénarios choqués

Comme expliqué précédemment le bilan FRPS se calcule en valeur comptable et donc l'actif représente l'évolution de la VNC (Valeur Nette Comptable).

Les deux scénarios de taux évoluent dans le même sens. Une baisse des taux implique une revalorisation de portefeuille obligataire. Cependant en valeur comptable une baisse est observée et ceci est dû aux mécanismes de réallocations qui poussent à investir dans d'autres classes d'actifs. De plus ce réinvestissement octroie des encaissements de PVL à moyen/long-terme ce qui fait remonter la VNC. Ce mécanisme se visualise bien sur le graphique avec les courbes de choc de taux qui sont en dessous du scénario central en début de période et repasse au dessus en fin de période.

Pour le scénario avec le choc action, naturellement l'actif et le passif sont impactés négativement car la chute du rendement action déprécie fortement le portefeuille et des réinvestissements sont faits pour respecter l'allocation d'actifs.

Maintenant nous allons nous intéresser à l'évolution de l'EMS (Exigence de Marge de Solvabilité) et des fonds propres FRPS.

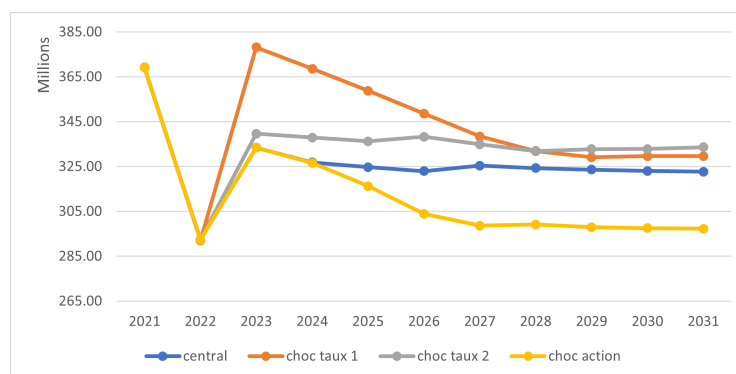


FIGURE 5.16 – Évolution de l'EMS en fonction des scénarios choqués

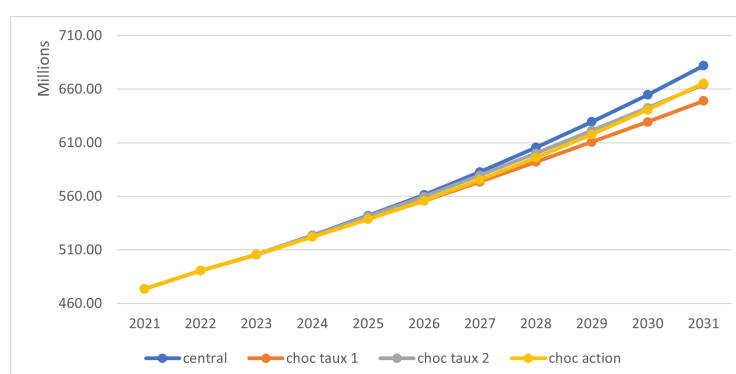


FIGURE 5.17 – Évolution des fonds propres FRPS en fonction des scénarios choqués

Les fonds propres évoluent peu suivant les différents scénarios du fait de la corrélation entre l'actif et le passif. Une baisse des fonds propres est cependant observée par rapport au scénario central.

Quant à l'évolution de l'EMS suivant les scénarios choqués, certaines variations sont à étudier. A noter aussi que la chute de l'EMS en 2022 provient de l'hypothèse forte de hausse des taux du scénario central.

Le scénario avec une baisse des taux soudaine, déclenche une forte hausse de l'EMS sur la première année de choc (2023) avec par la suite une baisse progressive. En effet, la baisse des taux brutale augmente fortement les provisions mathématiques théoriques

sur le produit COREM. D'après la formule de l'EMS (5.2) une hausse des provisions implique une hausse de l'EMS.

De la même manière, avec le choc des taux progressifs, les provisions mathématiques théoriques (PMT) COREM augmentent ainsi que l'EMS. Cependant la hausse est plus légère du fait de la décroissance progressive des taux.

A contrario, le scénario choc action impacte à la baisse l'EMS. En effet la baisse du rendement action en 2024 dégrade la valeur du portefeuille d'actifs ce qui conduit à un taux de couverture COREM de 120.98% plutôt que 131.42% dans le scénario central. Les managements actions ne sont pas appliquées et donc les provisions mathématiques théoriques ne sont pas revalorisées. L'écart de PMT explique le gain sur l'EMS.

Nous pouvons maintenant étudier l'évolution du taux de couverture FRPS constitué des fonds propres et de l'EMS :

$$\text{Taux de couverture FRPS} = \frac{\text{Fonds propres}}{\text{EMS}}$$

La figure suivante présente cette évolution :

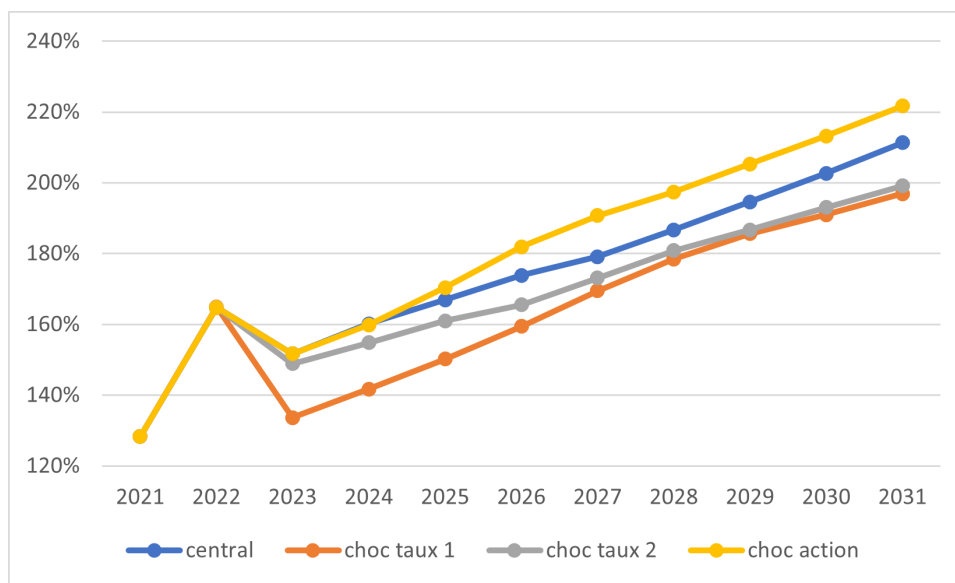


FIGURE 5.18 – Taux de couverture FRPS en fonction des scénarios choqués

Une remarque à mettre en avant est la différence d'évolution du taux de couverture FRPS par rapport à celui observé sous Solvabilité 2 en fonction des scénarios choqués.

Du fait de la construction du ratio et des faibles variations sur les fonds propres, le taux de couverture est surtout dépendant de l'EMS et évolue avec des variations opposées.

C'est le scénario action qui obtient le meilleur taux de couverture et le choc de taux, avec cristallisation de la courbe des taux, le plus faible.

### **Test sur les allocations candidates**

De la même façon que dans la partie Solvabilité 2, les allocations retenues sont challengées par rapport à l'allocation initiale sur les différents scénarios choqués.

Une première analyse est faite en observant l'évolution de l'EMS et des fonds propres FRPS.

Malgré les différents scénarios de chocs, il n'y a pas d'écart entre les fonds propres FRPS des différentes allocations testées. Les courbes se superposent comme le montre la figure suivante :

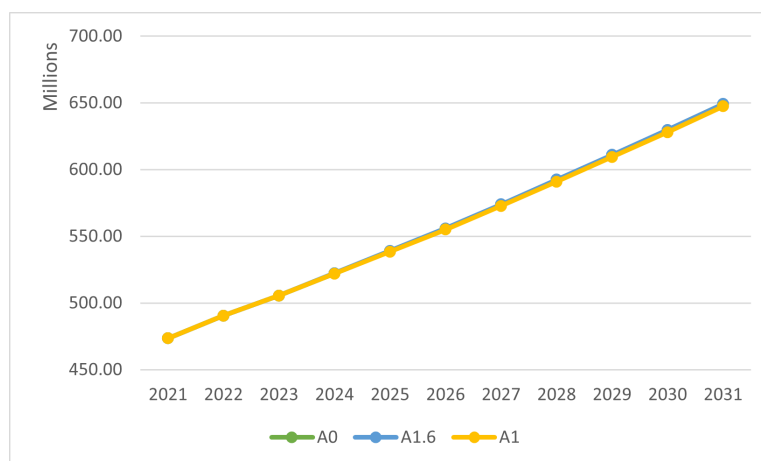


FIGURE 5.19 – Évolution des fonds propres FRPS des différentes allocations pour le scénario choc des taux 1

Pour ne pas surcharger l'argumentation les graphes pour les autres scénarios sont en annexe.

Contrairement aux fonds propres, l'EMS varie en fonction des allocations même si les écarts sont faibles et ne se produisent qu'à moyen terme comme le montre le graphique suivant sur le scénario choc des taux 1 :

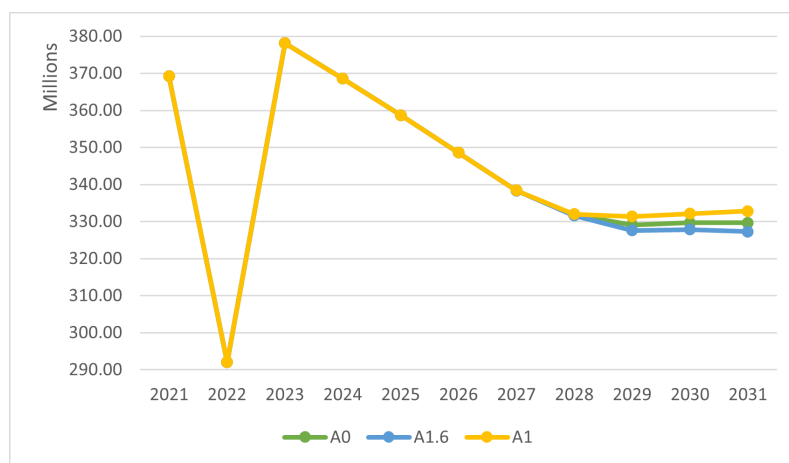


FIGURE 5.20 – Évolution de l'EMS des différentes allocations pour le scénario choc des taux 1

Les modifications d'allocations sont uniquement sur le produit COREM et donc les variations de l'EMS proviennent par définition de la PMT COREM. Les variations s'expliquent par des revalorisations différentes dues aux managements actions.

Le déclenchement des managements actions se fait par rapport au taux de couverture COREM.

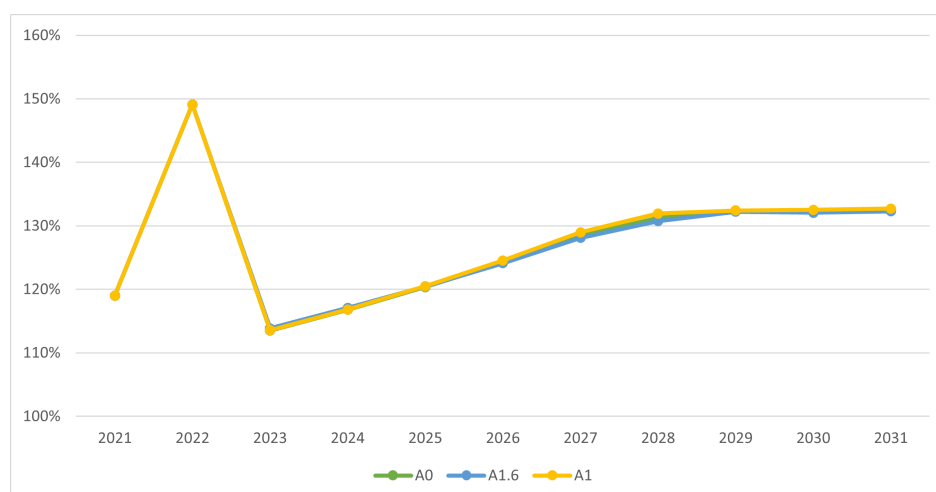


FIGURE 5.21 – Évolution du taux de couverture COREM des différentes allocations pour le scénario choc des taux 1

Le choc de taux a provoqué une forte baisse du taux de couverture et donc le seuil de revalorisation n'est atteint qu'en 2026 et ceci pour toutes les allocations.

L'histogramme suivant présente le niveau de revalorisation :

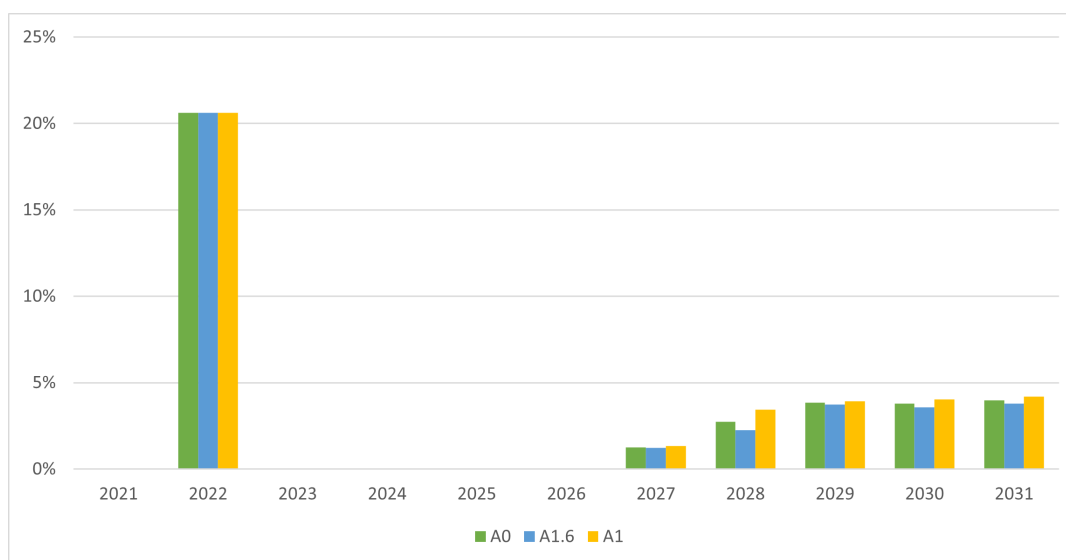


FIGURE 5.22 – Évolution des revalorisations COREM des différentes allocations pour le scénario choc taux 1

L'allocation A1.6 avec une poche obligataire plus importante implique une baisse de performance sur le portefeuille d'actifs, comme vu dans la partie allocation optimale, ce qui engendre des revalorisations moins importantes.

Ainsi sont expliqués les écarts de l'EMS entre les allocations d'actifs pour le scénario choc des taux 1. Ces impacts influent sur le taux de couverture FRPS :

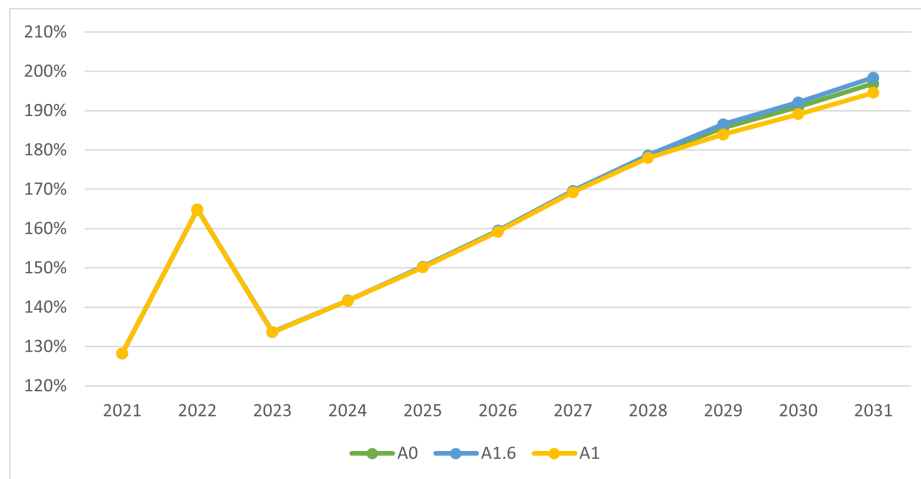


FIGURE 5.23 – Évolution du taux de couverture FRPS des différentes allocations pour le scénario choc des taux 1

Maintenant en se concentrant sur le scénario de choc de taux 2, avec la baisse progressive, on constate que le taux de couverture COREM ne passe pas en dessous du seuil de 125% comme le montre le graphique suivant :

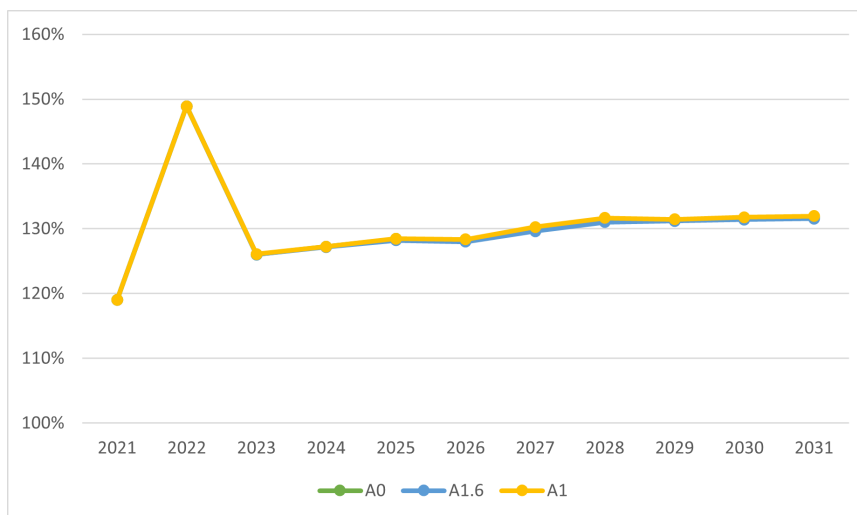


FIGURE 5.24 – Évolution du taux de couverture COREM des différentes allocations pour le scénario choc des taux 2

Les revalorisations se font donc pendant toute la période :





















5.22	Évolution des revalorisations COREM des différentes allocations pour le scénario choc taux 1 . . . . .	73
5.23	Évolution du taux de couverture FRPS des différentes allocations pour le scénario choc des taux 1 . . . . .	74
5.24	Évolution du taux de couverture COREM des différentes allocations pour le scénario choc des taux 2 . . . . .	74
5.25	Évolution des revalorisations COREM des différentes allocations pour le scénario choc des taux 2 . . . . .	75
5.26	Évolution du taux de couverture FRPS des différentes allocations pour le scénario choc des taux 2 . . . . .	75
5.27	Évolution des revalorisations COREM des différentes allocations pour le scénario choc action . . . . .	76
5.28	Évolution du taux de couverture FRPS des différentes allocations pour le scénario choc action . . . . .	76
A.1	Évolution du total actifs des différentes allocations en fonction du scénario choc 1 . . . . .	87
A.2	Évolution des provisions techniques des différentes allocations en fonction du scénario choc 1 . . . . .	87
A.3	Évolution des fonds propres des différentes allocations en fonction du scénario choc 1 . . . . .	87
A.4	Évolution du taux de couverture SCR des différentes allocations en fonction du scénario choc 1 . . . . .	87
A.5	Évolution du total actifs des différentes allocations en fonction du scénario choc 2 . . . . .	88
A.6	Évolution des provisions techniques des différentes allocations en fonction du scénario choc 2 . . . . .	88
A.7	Évolution des fonds propres des différentes allocations en fonction du scénario choc 2 . . . . .	88
A.8	Évolution du taux de couverture SCR des différentes allocations en fonction du scénario choc 2 . . . . .	88
B.1	Évolution des fonds propres FRPS des différentes allocations en fonction du scénario choc 2 . . . . .	89
B.2	Évolution des fonds propres FRPS des différentes allocations en fonction du scénario choc 2 . . . . .	89
B.3	Évolution de l'EMS des différentes allocations en fonction du scénario choc 2 . . . . .	89
B.4	Évolution de l'EMS des différentes allocations en fonction du scénario choc action . . . . .	89
B.5	Évolution du taux de couverture COREM des différentes allocations pour le scénario de choc action . . . . .	90



# Liste des tableaux

1	<i>VaR</i> <sub>90%</sub> Taux de rendement cumulé . . . . .	vii
2	<i>VaR</i> <sub>90%</sub> Taux de couverture en 2031 . . . . .	vii
3	Allocations risquées . . . . .	viii
4	Allocations non-risquées . . . . .	ix
5	Allocations efficientes . . . . .	x
6	<i>VaR</i> <sub>90%</sub> Rate of cumulative return . . . . .	xvii
7	<i>VaR</i> <sub>90%</sub> coverage rate in 2031 . . . . .	xvii
8	Risky allocations . . . . .	xviii
9	Non-risky allocations . . . . .	xviii
10	Efficient allocations . . . . .	xx
2.1	<i>VaR</i> <sub>90%</sub> Taux de rendement cumulé . . . . .	19
2.2	<i>VaR</i> <sub>90%</sub> Taux de couverture en 2031 . . . . .	19
2.3	Effectifs valeurs extrêmes . . . . .	20
4.1	Notation d'obligations . . . . .	35
4.2	Anticipations taux 10 ans . . . . .	40
4.3	Couple rendement de risque . . . . .	43
4.4	Couple rendement de risque Immobilier . . . . .	44
4.5	Calibrage paramètres de Gadmer . . . . .	45
4.6	Matrice de corrélation . . . . .	45
4.7	Matrice de corrélation . . . . .	46
5.1	Allocations initiale . . . . .	54
5.2	Allocations risquées . . . . .	54
5.3	Allocations non-risquées . . . . .	55
5.4	Allocations efficientes . . . . .	58
5.5	Bilan S2 (en M€) . . . . .	62
5.6	Bilan FRPS (en M€) . . . . .	64



# Annexe A

## Compléments résultats Solvabilité 2

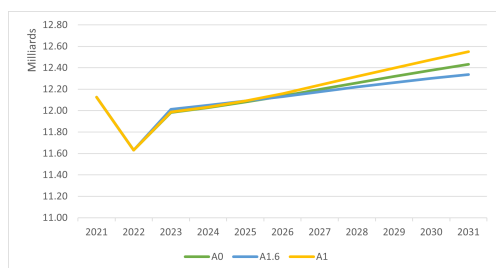


FIGURE A.1 – Évolution du total actifs des différentes allocations en fonction du scénario choc 1



FIGURE A.2 – Évolution des provisions techniques des différentes allocations en fonction du scénario choc 1

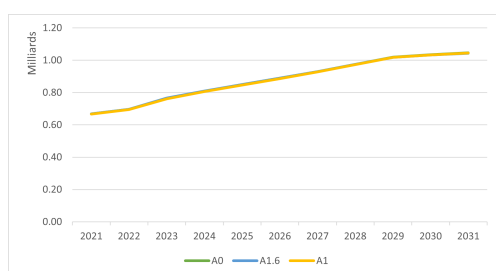


FIGURE A.3 – Évolution des fonds propres des différentes allocations en fonction du scénario choc 1

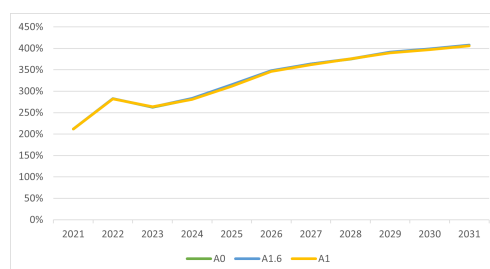


FIGURE A.4 – Évolution du taux de couverture SCR des différentes allocations en fonction du scénario choc 1

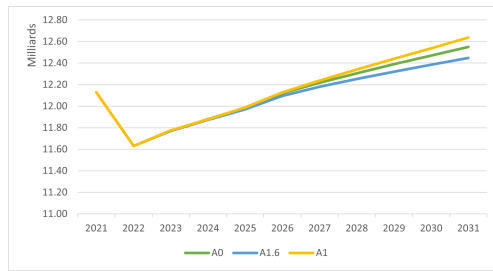


FIGURE A.5 – Évolution du total actifs des différentes allocations en fonction du scénario choc 2

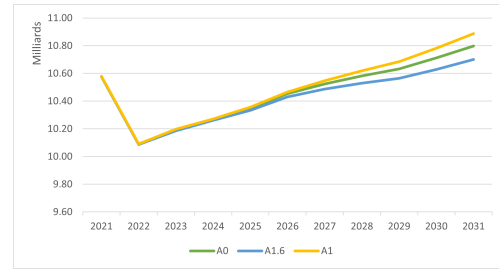


FIGURE A.6 – Évolution des provisions techniques des différentes allocations en fonction du scénario choc 2



FIGURE A.7 – Évolution des fonds propres des différentes allocations en fonction du scénario choc 2

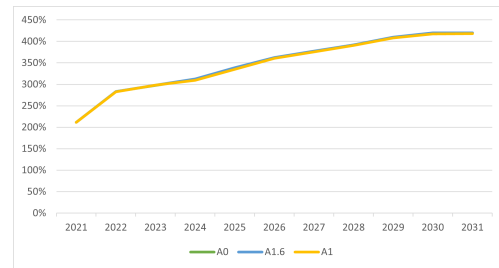


FIGURE A.8 – Évolution du taux de couverture SCR des différentes allocations en fonction du scénario choc 2

# Annexe B

## Compléments résultats FRPS

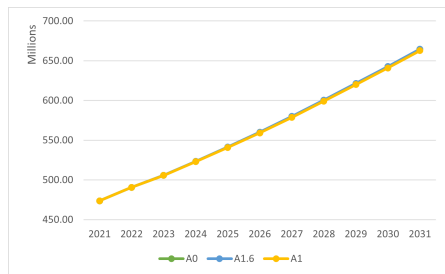


FIGURE B.1 – Évolution des fonds propres FRPS des différentes allocations en fonction du scénario choc 2

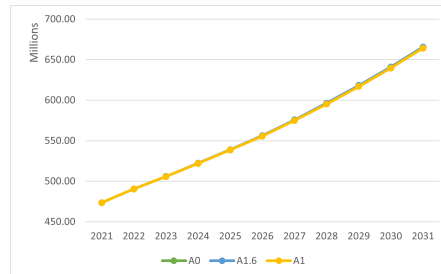


FIGURE B.2 – Évolution des fonds propres FRPS des différentes allocations en fonction du scénario choc 2

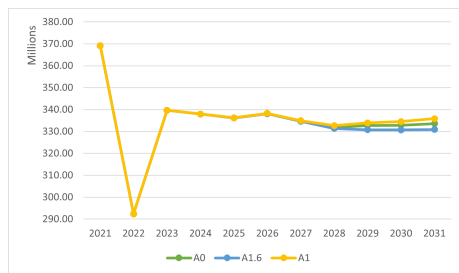


FIGURE B.3 – Évolution de l'EMS des différentes allocations en fonction du scénario choc 2

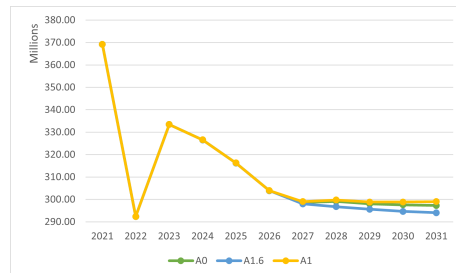


FIGURE B.4 – Évolution de l'EMS des différentes allocations en fonction du scénario choc action

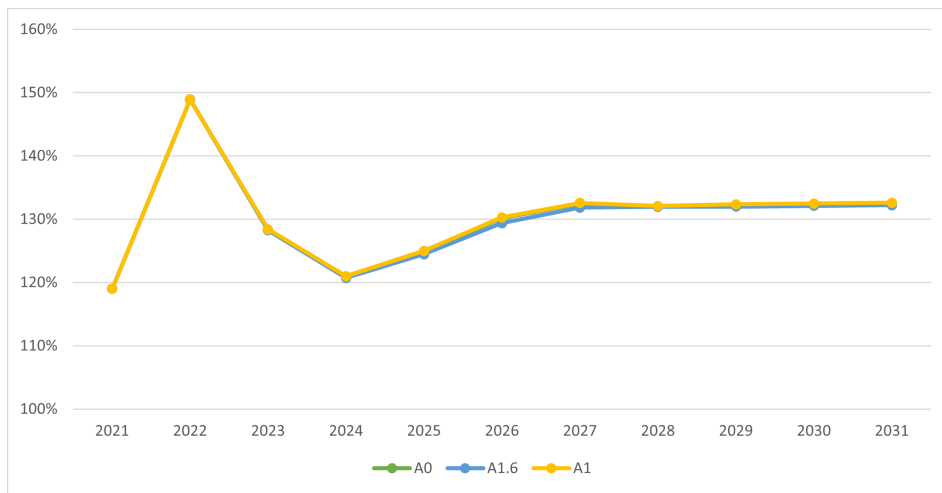


FIGURE B.5 – Évolution du taux de couverture COREM des différentes allocations pour le scénario de choc action



# Bibliographie

- [BAHUON, 2010] BAHUON, V. (2010). *Allocation optimale des actifs à l'aide des algorithmes génétiques*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, EURIA.
- [BEDOUI, 2009] BEDOUI, R. (2009). *Recherche d'une allocation stratégique optimale dans le cadre de la gestion actif-passif : Application sur un fonds de retraite*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1, ISFA.
- [BERRADA SOUNI, 2015] BERRADA SOUNI, S. (2015). *Allocation stratégique d'actifs dans le cadre de l'épargne-retraite*. Thèse de doctorat, ENSAE, ParisTech.
- [CART, 2018] CART, P. (2018). *Calcul de l'UFR à partir de données de marché et impact Solvabilité 2*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1, ISFA.
- [CHATAIGNIER, 2016] CHATAIGNIER, B. (2016). *Ajustements financiers dans un cadre ORSA*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1, ISFA.
- [FALEH, 2012] FALEH, A. (2012). *Scénarios économiques et techniques d'allocations d'actifs*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1, ISFA.
- [GILLOT, 2019] GILLOT, G. (2019). *Générateur de scénarios économiques en monde réel : approche par Markov Switching*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1, ISFA.
- [HAMI, 2003] HAMI, S. (2003). *Les modèles DFA : présentation, utilité et application*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1, ISFA.
- [TAGNE WAMBO, 2009] TAGNE WAMBO, R. (2009). *Allocation optimale d'actifs d'un régime de retraite en intégrant la participation aux bénéfices*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1, ISFA.