

**Mémoire présenté pour la validation de la Formation
« Certificat d'Expertise Actuarielle »
de l'Institut du Risk Management
et l'admission à l'Institut des actuaires
le**

Par : Timothée FLUTEAU

Titre : Réplication du Best Estimate Vie à l'aide de méthodes d'apprentissage automatique supervisé

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des actuaires :

Entreprise : Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR)

Nom : Olivier MEILLAND

Signature et Cachet :



Membres présents du jury de l'Institut du Risk Management :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Raphaël GORRAND

Signature :



Invité :

Nom : _____

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise



Signature(s) du candidat(s)



Secrétariat :

Bibliothèque :

Ce mémoire a été réalisé au sein de l'Autorité de contrôle prudentiel et de résolution (ACPR) indépendamment de toute mission de contrôle de l'Autorité. Il n'engage que son auteur, en aucun cas l'Autorité et ne constitue pas une communication de l'ACPR. Les méthodes retenues ont été choisies par l'auteur et ne sont pas à considérer comme une recommandation technique de l'ACPR.

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS	5
RÉSUMÉ	6
ABSTRACT	7
NOTE DE SYNTHÈSE	8
EXECUTIVE SUMMARY	15
INTRODUCTION	21
1 CONTEXTE DE L'ÉTUDE	23
1.1 VALORISATION ÉCONOMIQUE DES CONTRATS D'ASSURANCE VIE EN FRANCE	23
1.1.1 ASSURANCE VIE EN FRANCE : LES CONTRATS D'ÉPARGNE EN EUROS	23
1.1.2 SOLVABILITÉ 2	25
1.1.3 AUTRES RÉFÉRENTIELS COMPTABLES : MCEV & IFRS 17	26
1.2 CALCUL DU <i>BEST ESTIMATE</i> À L'AIDE D'UN MODÈLE ALM	29
1.2.1 PRINCIPALES HYPOTHÈSES ET PORTEFEUILLES MODÉLISÉS	30
1.2.2 PRODUCTION DES SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES	35
1.3 RÉPLICATION DU MODÈLE ALM	39
1.3.1 POURQUOI RÉPLIQUER LE MODÈLE ALM ?	39
1.3.2 MÉTHODES DE RÉPLICATION	42
1.3.3 PROBLÉMATIQUE	45
2 APPROXIMATION DU MODÈLE ALM À PARTIR DE MÉTHODES D'APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE SUPERVISÉ	46
2.1 DIFFÉRENTS MODÈLES D'APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE	46
2.1.1 UN EXEMPLE DE RÉSEAU DE NEURONES ARTIFICIELS – LE PERCEPTRON MULTICOUCHE	47
2.1.2 FORÊTS ALÉATOIRES	49
2.1.3 <i>GRADIENT BOOSTING</i> ET <i>TREE BOOSTING</i>	54
2.2 RÉPLICATION DU MODÈLE ALM	58
2.2.1 DÉFINITION DU PROBLÈME DE RÉGRESSION	58
2.2.2 BASE DE DONNÉES D'APPRENTISSAGE	61

2.2.3	CALIBRAGE DES MODÈLES PROXYS – CHOIX DES HYPER-PARAMÈTRES	62
2.3	RÉSULTATS	66
2.3.1	PERCEPTRON MULTICOUCHES – RÉSEAU DE NEURONES	66
2.3.2	FORÊT ALÉATOIRE	69
2.3.3	XGBOOST – FORÊT ALÉATOIRE <i>BOOSTÉE</i>	71
2.3.4	MODÈLE LINÉAIRE	74
2.3.5	COMPARAISON DES MODÈLES ÉTUDIÉS	75
3	APPLICATIONS	77
3.1	ÉTUDE DE LA VALEUR ACTUALISÉE DES OPTIONS ET GARANTIES (TVOG)	77
3.1.1	DÉCOMPOSITION DE LA TVOG PAR FACTEUR DE RISQUE	77
3.1.2	UTILISATION DES MODÈLES PROXYS POUR ESTIMER LA TVOG	81
3.2	SENSIBILITÉS DES MODÈLES PROXYS AUX SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES	88
3.2.1	SENSIBILITÉ DES MODÈLES PROXYS AU MODÈLE DE TAUX D'INTÉRÊT DU GÉNÉRATEUR DE SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES	88
3.2.2	SENSIBILITÉ DU MODÈLE PROXY À DES SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES PRODUITS PAR D'AUTRES GÉNÉRATEURS DE SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES	94
3.2.3	ENTRAÎNEMENT DES MODÈLES PROXYS À PARTIR DE SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES PROVENANT D'UN GÉNÉRATEUR DIFFÉRENT	97
	CONCLUSION	103
	BIBLIOGRAPHIE	104

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon encadrant à l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution, Raphaël Gorrard, adjoint au chef de service de la Cellule Modèles Internes et également auteur du modèle de projection Actif-Passif utilisé dans ce mémoire. Je le remercie chaleureusement pour son expertise, sa disponibilité, ses pistes de réflexions ainsi que pour son accompagnement tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement Maxime Godin et Manon Chonavel pour leur regard respectivement expert et profane sur ce travail. Leurs retours pertinents, leurs remarques judicieuses et leur soutien ont été très utiles et ont largement enrichi ce mémoire.

Enfin, je tiens à remercier William Arrata, Sophia Gazzola et Paul Reymondet-Commoy pour les bons moments et les discussions – parfois passionnées ! – en marge des enseignements suivis pendant ce master d'actuariat qui ont, à leur façon, nourri ce mémoire.

RÉSUMÉ

Mots clés : épargne en euros, directive « Solvabilité 2 », meilleure estimation des engagements, « Best Estimate of Liabilities » (BEL), apprentissage supervisé, « Machine Learning », réseaux de neurones, perceptron multicouche, forêts aléatoires, gradient boosté, « XGBoost ».

Ce mémoire s'intéresse à l'approximation du calcul de la meilleure estimation des engagements d'un assurance vie fictif commercialisant des contrats d'épargne en euros avec participation aux bénéfices par des méthodes d'apprentissage automatique supervisé. Cette meilleure estimation au sens de la réglementation Solvabilité 2 est généralement calculée à l'aide d'un modèle stochastique de projection actif-passif, aussi appelé modèle ALM pour *Asset Liability Management*. Trois types de modèles proxys sont étudiés ici : le perceptron multicouche qui est un exemple de réseau neuronal, la forêt aléatoire et un modèle à gradient boosté correspondant à la méthode XGBoost.

Outre le calcul de cette meilleure estimation, aussi appelée *Best Estimate of Liabilities* (BEL), ce mémoire s'intéresse à deux applications concrètes : la réplication de la valeur temps des options et garanties (*Time Value of Options & Guarantees*, TVOG) contenues dans les fonds euros étudiés ainsi que l'estimation des impacts d'un changement de générateur de scénarios économiques sur le BEL.

Dans un premier temps, ce mémoire présente les principes et les exigences réglementaires en matière de calcul des provisions techniques vie sous Solvabilité 2. Cette première partie présente également le modèle stochastique servant au calcul des provisions techniques qu'il s'agit de répliquer.

Dans un second temps, ce mémoire décrit ensuite à l'aide de références à la littérature disponible quelques notions concernant les méthodes d'apprentissage automatique supervisé qui seront utilisées dans ce mémoire. Elle détaille également le calibrage et la mise en place de trois modèles proxys différents construits à partir d'algorithmes d'apprentissage supervisé.

Enfin, dans un troisième temps, ce mémoire présente deux applications concrètes des modèles proxys : la réplication de la TVOG ainsi que l'estimation des impacts d'un changement de générateur de scénarios économiques sur le BEL.

Ce mémoire a permis de montrer que l'utilisation de modèles proxys consistant à répliquer, non pas le *Best Estimate* directement, mais la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs dans chacune des simulations risque-neutres utilisées par le modèle ALM stochastique, permet d'atteindre pour le calcul du BEL une précision similaire à celle du calcul complet à l'aide du modèle ALM pour un gain de temps de calcul significatif. Toutefois, le gain de temps de calcul par cette approche est moindre qu'une réplication directe : en effet, avec l'approche suivie dans ce mémoire, il est nécessaire de produire les jeux de scénarios économiques risque-neutre à l'aide du GSE, ce qui reste couteux en termes de calcul. Par ailleurs, ces modèles proxys se sont révélés performants et robustes au choix des scénarios économiques et des modèles.

ABSTRACT

Keywords: non-unit-linked savings, ‘Solvency 2’ Directive, Best Estimate of Liabilities, machine learning, supervised learning, neural network, multilayer perceptron, random forest, gradient boosting, ‘XGBoost’.

This work studies how to approximate the stochastic Asset-Liability Management (ALM) model of a mock life insurer in order to compute its Best Estimate of Liabilities (BEL) in a Solvency 2 context. This mock insurer is selling non-unit-linked savings contracts with profit sharing. This work studies three different proxy methods: (i) an example of neural networks, the multilayer perceptron, (ii) random forests and (iii) ‘XGBoost’, which is an example of a gradient boosting method.

This work proposes two application of these proxy models alongside the BEL approximation itself: (i) approximation of the Time Value of Options and Guarantees (TVOG) of the studied mock insurance policies and (ii) evaluation of the Economic Scenario Generator (ESG) impact on the BEL.

As a first step, this work briefly presents the valuation principles and regulatory requirements corresponding to the Solvency 2 EU regulation. The first chapter also sets up the ALM model and the different ESGs used for the valuation of the Technical Provisions.

As a second step, this work reviews the literature on supervised learning algorithms and sets up the different proxy models that are used to approximate the BEL. This second chapter also details the calibration of the three different proxy models discussed in this work.

As a third and final step, the proxy models are used to approximate the TVOG of the studied mock insurance policies and to assess the impact of different ESGs on the BEL.

Through this work, the approximation of the BEL via the replication of the present value of the future cash flows in each Monte Carlo simulation using proxy models reached satisfying results. Indeed, the uncertainty around the proxy models results were similar to the one of the full stochastic ALM model with significant computing time gains. However, the time gains of this approach remains lower than the gains expected through ‘direct’ replication, where the proxy models aim to directly approximate the BEL and not the present value of the future cash flows of each risk-neutral economic scenario. Indeed, generation of the economic scenarios is still costly in terms of computing time. Besides, the proxy models discussed in this work show satisfying robustness to the choice of Economic Scenario Generator.

NOTE DE SYNTHÈSE

Ce mémoire s'intéresse à l'approximation du calcul de la meilleure estimation des engagements d'un assurance vie fictif commercialisant des contrats d'épargne en euros avec participation aux bénéfices par des méthodes d'apprentissage automatique supervisé.

Calcul du *Best Estimate of Liabilities*

La meilleure estimation correspond à la grande partie des provisions techniques d'assurance telles que définies par la réglementation Solvabilité 2. La meilleure estimation, aussi appelée *Best Estimate of Liabilities* (BEL), ou simplement *Best Estimate* (BE), est définie comme la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs \widetilde{CF}^i de la compagnie d'assurance compte tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée sur la base de la courbe des taux sans risque définie par la réglementation dans l'ensemble des N scénarios risque-neutres :

$$BE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \widetilde{CF}^i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T CF_t^i \cdot D_t^i \right)$$

Avec D_t^i le déflateur du scénario risque neutre $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ et au pas de temps de projection $t \in \llbracket 1; T \rrbracket$ produit par le générateur de scénarios économiques.

S'agissant des contrats d'assurance vie, la réglementation définie par Solvabilité 2 indique que les méthodes par simulation sont susceptibles de produire un calcul plus approprié de la meilleure estimation qu'une méthode déterministe. C'est le cas par exemple des contrats d'assurance vie qui donnent lieu à des prestations discrétionnaires dépendant de rendements d'investissements ou qui comportent des garanties financières et des options contractuelles. Cette catégorie de contrats recouvre notamment les contrats d'épargne en euros commercialisés en France qui sont généralement (i) rachetables à tout moment par l'assuré (ii) et qui contiennent une clause de participation aux bénéfices ainsi (iii) qu'une garantie en capital.

Par conséquent, les organismes d'assurance vie ont développé des modèles de projection pour calculer la meilleure estimation de leurs engagements à l'aide d'une méthode Monte Carlo nécessitant des simulations. Pour chacune des simulations, le modèle projette le bilan de la société d'assurance, son compte de résultat, la participation aux bénéfices et les flux de trésorerie futurs et ce, jusqu'à l'extinction des engagements d'assurance.

Chaque simulation est notamment caractérisée par un scénario économique produit par un générateur de scénarios économiques (GSE) : c'est un ensemble de modèles qui permet de simuler aléatoirement des scénarios d'évolution possibles des marchés financiers et des variables économiques qui ont une incidence sur les flux de trésorerie futurs de l'organisme d'assurance. Ces scénarios économiques font partie des entrées essentielles du modèle de projection utilisé pour le calcul des provisions techniques.

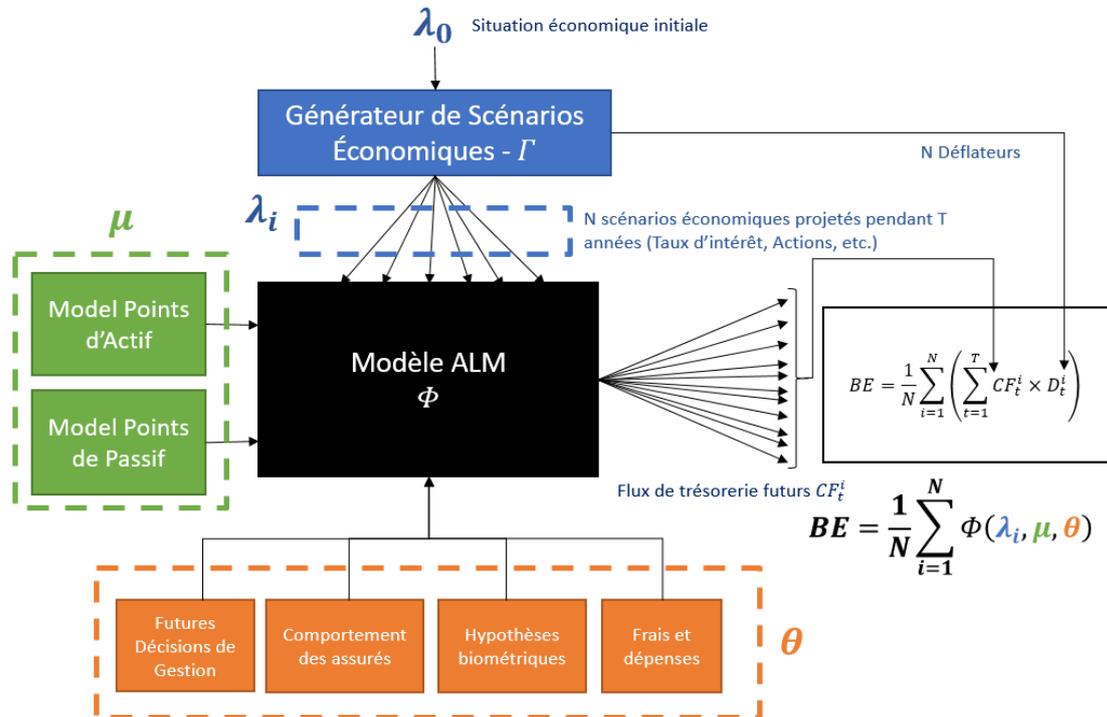
Les flux de trésorerie futurs de l'organisme d'assurance CF_t^i sont calculés par le modèle ALM Φ à partir des éléments suivants :

- De la situation économique actuelle λ_0 correspondant à la valeur des facteurs de risques financiers au moment du calcul.
- Des N scénarios économiques risque-neutres $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ utilisés pour la valorisation des flux futurs.
- Des caractéristiques du bilan d'assurance de l'organisme μ avec en particulier les placements financiers initiaux de la compagnie d'assurance (Model Points d'Actif) et les caractéristiques des contrats et des assurés de la compagnie (Model Points de Passif).

- Des autres hypothèses techniques θ nécessaires au calcul qui regroupent notamment les futures décisions de gestion, les hypothèses de frais et de dépenses de l'organisme, les hypothèses biométriques et les hypothèses de comportement des assurés.

Ces éléments sont illustrés dans la figure ci-après.

Figure I – Schéma de principe du calcul du BEL d'assurance vie à l'aide d'un modèle ALM



Approximation du modèle ALM - définition du problème de régression

Un des objectifs de ce mémoire est d'approximer le modèle ALM stochastique utilisé pour le calcul du BEL par des méthodes d'apprentissage automatique supervisé.

Pour atteindre cet objectif, on fait le choix dans ce mémoire de restreindre les variables explicatives de notre problème de régression aux scénarios λ_i produits par le générateur de scénarios économiques : $x := \lambda_i$. L'ensemble des autres paramètres et hypothèses sont considérés constants et ne vont pas varier dans les données d'apprentissage.

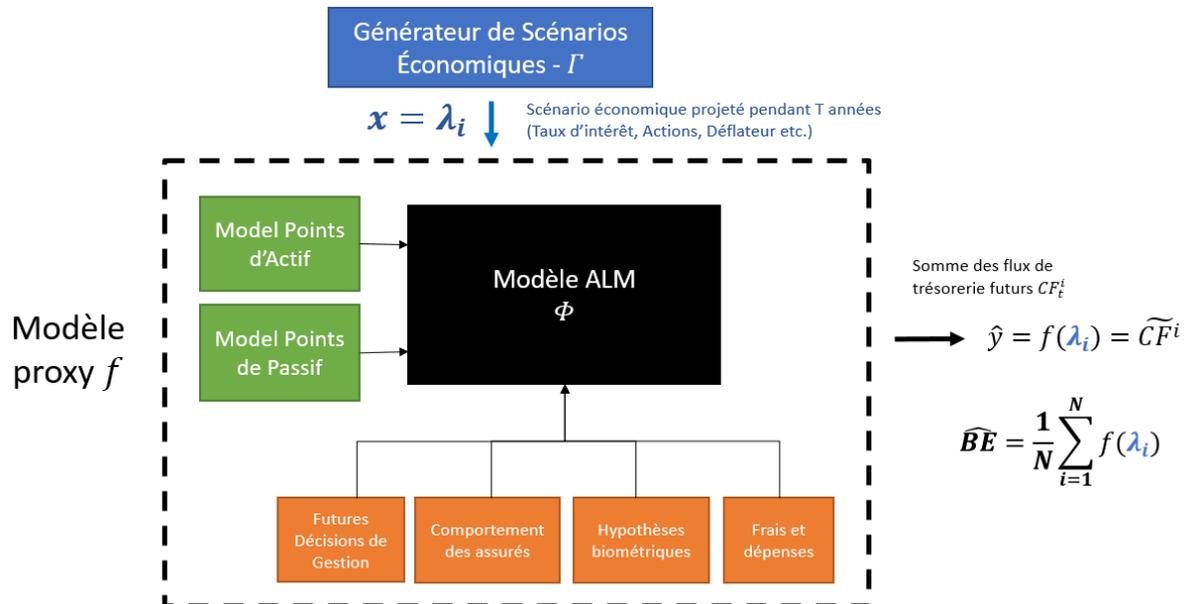
En outre, on fait le choix de considérer la somme des flux de trésorerie futurs actualisés $\widetilde{CF}^i = \sum_{t=1}^T CF_t^i \cdot D_t^i$ comme variable cible de notre problème de régression : $y := \widetilde{CF}^i$. Ce choix est motivé par trois raisons principales :

- Un des objectifs de ce mémoire est d'étudier la sensibilité du modèle ALM au choix et au paramétrage du générateur de scénarios économiques. Par conséquent, il est intéressant d'observer comment va réagir le modèle ALM au niveau de chacun des scénarios risque-neutres λ_i utilisés pour la valorisation des engagements d'assurance vie ;
- Par ailleurs, en faisant le choix de répliquer les flux de trésorerie futurs actualisés \widetilde{CF}^i , l'ampleur de l'erreur de réplcation au niveau du *Best Estimate* s'en trouvera a priori réduite étant donné que le *Best Estimate* correspond à la valeur moyenne des flux de trésorerie futurs actualisés. En effet, la prédiction du *Best Estimate* repose alors sur N prédictions de \widetilde{CF}^i , par le modèle proxy ;

- Enfin, les méthodes d'apprentissage automatique nécessitent une base de données importante pour être efficaces.

Ce choix est illustré schématiquement par la figure ci-après.

Figure II – Définition du périmètre du problème de régression



Ce mémoire s'intéresse à l'utilisation de trois méthodes d'apprentissage automatique supervisé pour répondre au problème de régression présenté supra.

Dans le cas de l'apprentissage supervisé, le modèle f qui relie x et y est entraîné à partir d'un échantillon d'apprentissage $D_n = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ dans lequel la valeur de la variable cible y_i est connue pour chaque observation des variables explicatives x_i . On utilise parfois le terme étiquette ou *label* pour désigner la valeur cible y_i correspondant à chaque observation des variables explicatives x_i .

Les trois méthodes étudiées dans ce mémoire sont :

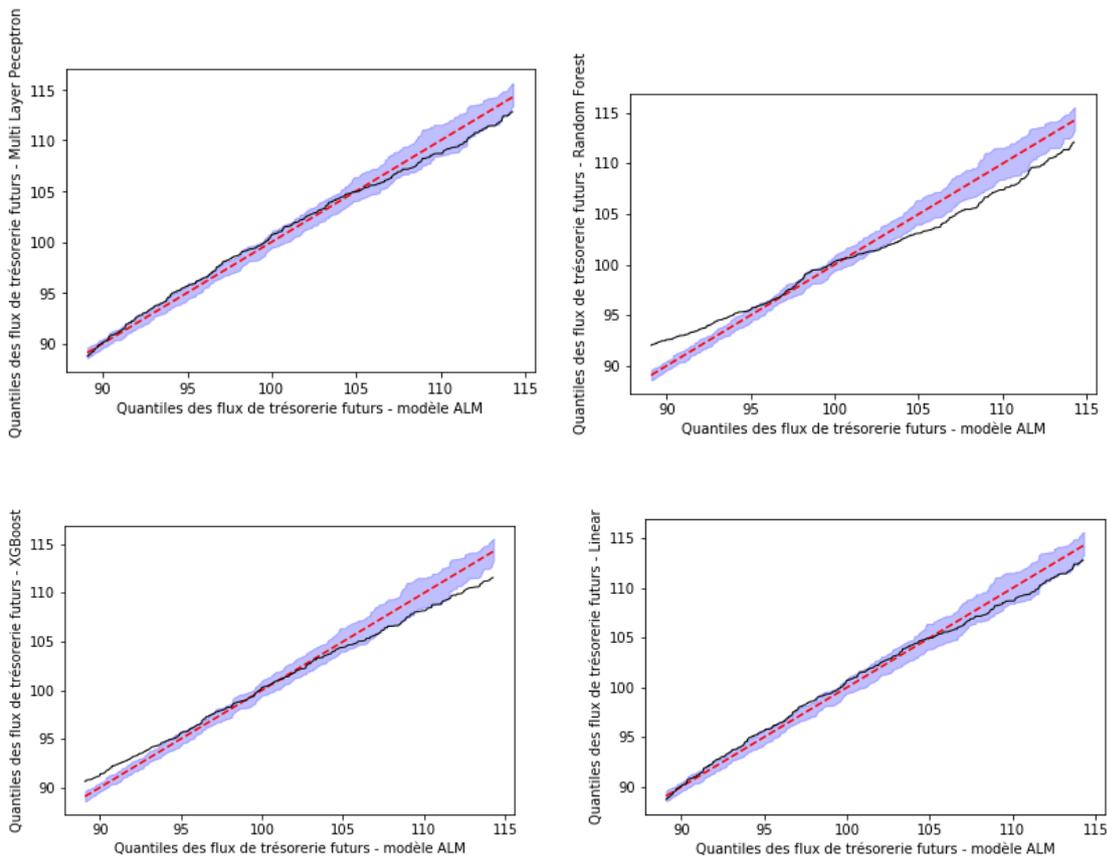
1. Le perceptron multicouche qui est un exemple de réseau de neurones ;
2. Les arbres de décision et les forêts aléatoires ;
3. Le *gradient boosting* tel qu'implémenté dans l'algorithme XGBoost.

Par ailleurs, un modèle linéaire est également calibré sur l'échantillon de d'entraînement afin d'avoir un point de référence et enrichir la comparaison des modèles d'apprentissage automatique.

Performances des modèles proxys

Les performances de répliation des différents modèles proxys sur l'échantillon de test sont présentées dans la figure et le tableau ci-après.

Figure III – Diagrammes quantile-quantile (10% à 90%) de la distribution des flux de trésorerie futurs actualisés calculée à l'aide des modèles proxys par rapport à la distribution de référence calculée à l'aide du modèle ALM – en haut à gauche, le perceptron multicouche ; en haut à droite, la forêt aléatoire ; en bas à gauche, modèle XGBoost ; en bas à droite, modèle linéaire



La droite rouge en pointillé représente la première bissectrice et correspond aux quantiles de référence obtenus par le modèle ALM. La zone bleue correspond à l'intervalle de confiance *bootstrap* à 95%, calculé à l'aide d'une approche qui consiste à ré-échantillonner la distribution empirique des pertes et à calculer pour chacun des échantillons *bootstrap* une nouvelle valeur des flux de trésorerie futurs actualisés.

Tableau I – Comparaison des performances des modèles étudiés sur l'échantillon de test

Résultats sur l'échantillon de test	Perceptron multicouche	Forêt aléatoire	XGBoost	Modèle linéaire
<i>Best Estimate</i> – modèle ALM	100,00	100,00	100,00	100,00
MAE par scénario	1,54	3,94	2,97	1,86
RMSE par scénario	2,19	5,26	4,20	3,28
<i>Best Estimate</i> – modèle proxy	99,97	100,05	99,98	99,75
Erreur sur le <i>Best Estimate</i> (%)	-0,03%	+0,05%	-0,02%	-0,25%

Si l'ensemble des modèles présentent des résultats satisfaisants, les modèles d'apprentissage automatique présentent une erreur sur le BEL moins importante que le modèle linéaire.

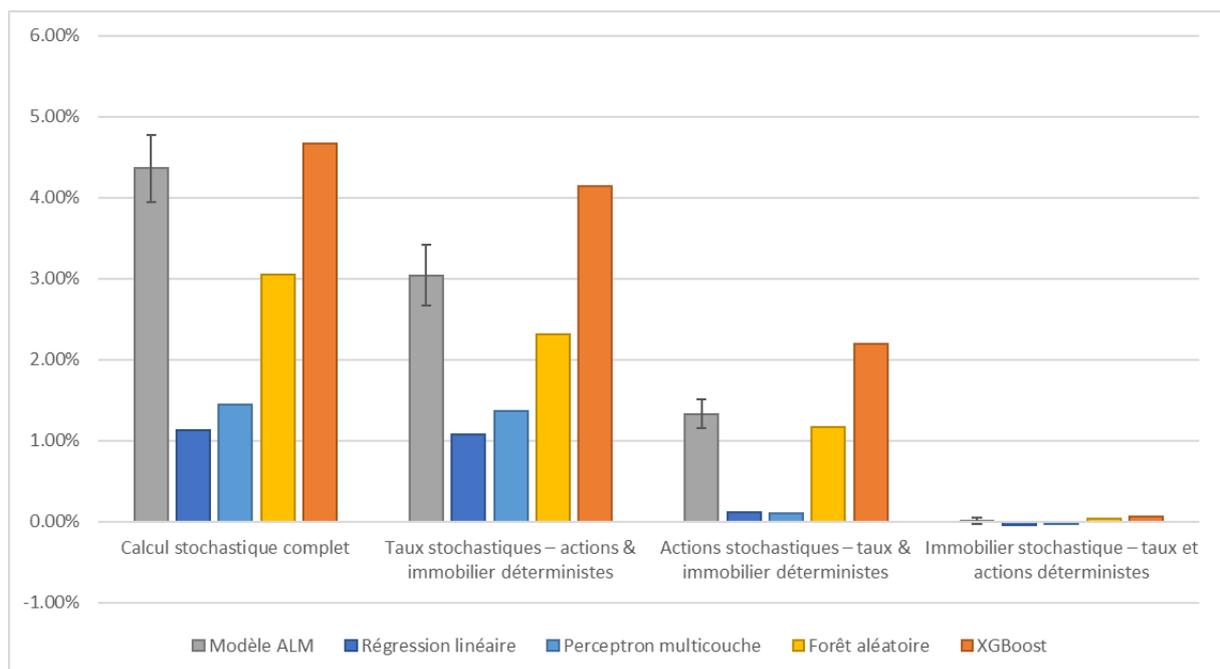
Utilisation des modèles proxys pour estimer la TVOG des contrats

Une des raisons pour lesquelles le BEL est calculé à l'aide d'un modèle ALM stochastique est pour estimer la valeur actuelle des options et garanties comprises dans le BEL, aussi appelée TVOG pour *Time Value of Options and Guarantees*. La TVOG du BEL est définie comme la différence entre le BEL stochastique calculé à l'aide du modèle ALM lors d'un calcul complet et le BEL déterministe calculé à l'aide du modèle ALM le long d'un unique scénario économique moyen.

Afin d'évaluer la robustesse et la performance des modèles proxys, ce mémoire interroge leur capacité à répliquer la TVOG associée à différents jeux de scénarios économiques telle qu'elle est calculée par le modèle ALM :

- Un scénario déterministe ;
- Un jeu de 1000 scénarios classique dans lequel les taux d'intérêt, les actions et les actifs immobiliers sont stochastiques. Ce jeu de scénarios servira de référence par la suite ;
- Un jeu de 1000 scénarios dans lequel seuls les taux d'intérêt sont stochastiques. Les actifs, indiciels sont projetés de manière déterministes ;
- Un jeu de 1000 scénarios dans lequel seuls les actions sont stochastiques ;
- Et enfin, un dernier jeu de scénarios dans lequel seuls les actifs immobiliers sont stochastiques.

Figure IV – Comparaison des TVOG obtenus par les modèles entraînés sur 1001 scénarios sur les différents jeux de scénarios économiques – % du BEL déterministe



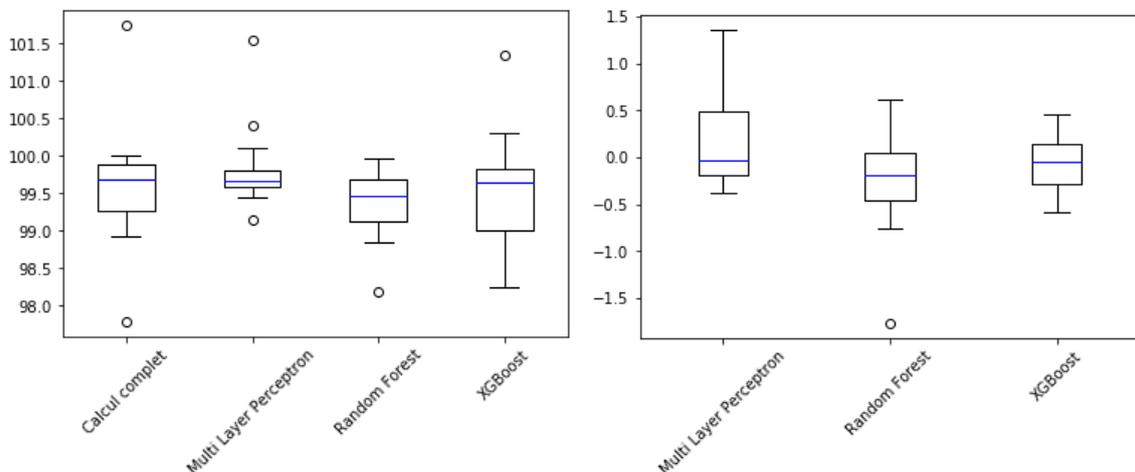
Le perceptron multicouche a tendance à sous-estimer la TVOG et ne présente pas de résultats très précis alors que le modèle XGBoost et la forêt aléatoire présente de meilleurs résultats. Toutefois, le modèle XGBoost a tendance à surestimer la TVOG.

Robustesse des modèles proxys à un changement de scénarios économiques

Afin d'évaluer la performance et la robustesse des modèles proxys lorsqu'ils sont confrontés à des scénarios économiques différents, plusieurs analyses de sensibilité sont menées dans ce mémoire :

- Une première concernant le modèle de taux qui est la source principale de la valeur actuelle des options et garanties (TVOG) contenues dans le *Best Estimate* étudié ;
- Et deux analyses supplémentaires concernant l'ensemble du générateur de scénarios économiques (cf. figure suivante).

Figure V – Distributions des *Best Estimates* (à gauche) et des écarts aux *Best Estimates* calculés à l'aide du modèle ALM (à droite). Distributions correspondant à l'échantillon de 15 jeux de scénarios économiques par modèle. Modèles proxys entraînés à partir du jeu de scénarios alternatif (ALT). Base 100 : calcul complet avec le jeu de scénarios de référence (G2++)



Comme on le voit sur la figure précédente, c'est maintenant le modèle XGBoost qui se démarque des autres modèles proxys. En effet, c'est le modèle proxy qui produit le plus faible écart η . On note notamment que la distribution des erreurs associées au modèle XGBoost est la moins étendue et une médiane plus proche de 0 que les autres modèles proxys.

Conclusions et perspectives

Ce mémoire a permis de montrer que l'utilisation de modèles proxys consistant à répliquer, non pas le *Best Estimate* directement, mais la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs dans chacune des simulations risque-neutres utilisées par le modèle ALM stochastique, permet d'atteindre pour le calcul du BEL une précision similaire à celle du calcul complet à l'aide du modèle ALM pour un gain de temps de calcul significatif. Toutefois, le gain de temps de calcul par cette approche est moindre qu'une réplification directe : en effet, avec l'approche suivie dans ce mémoire, il est nécessaire de produire les jeux de scénarios économiques risque-neutre à l'aide du GSE, ce qui reste coûteux en termes de calcul. Par ailleurs, ces modèles proxys se sont révélés performants et robustes au choix des scénarios économiques et des modèles.

Enfin, les travaux présentés dans ce mémoire pourraient être approfondis et poursuivis selon les axes de développement suivants :

- Développer des stratégies pour mieux répliquer le calcul des provisions techniques dans des cas simples, comme celui d'un scénario central déterministe.
- Étendre le problème de régression et la base de données d'apprentissage à d'autres facteurs de risques que les facteurs de risques financiers, simulés par le générateur de scénarios

économiques. Il serait par exemple intéressant d'appliquer la même démarche aux facteurs de risques de souscription comme les risques biométriques ou le comportement des assurés.

- Étendre les données d'apprentissage à des situations stressées afin, par exemple, d'utiliser ces modèles pour le calcul du SCR sous Solvabilité 2. Ces modèles proxys auraient un intérêt aussi bien pour le calcul du SCR selon la formule standard qu'à l'aide d'un modèle interne.
- Adapter ces modèles proxys aux autres référentiels pertinents pour l'assurance vie comme celui défini par les normes IFRS ainsi que celui défini par la MCEV.

EXECUTIVE SUMMARY

This work studies how to approximate the stochastic Asset-Liability Management (ALM) model of a mock life insurer in order to compute its Best Estimate of Liabilities (BEL) in a Solvency 2 context. This mock insurer is selling non-unit-linked savings contracts with profit sharing.

Computation of the Best Estimate of Liabilities

The Best Estimate of Liabilities is the major portion of the insurance technical provisions as defined by Solvency 2. The BEL is the present value of expected future cash flows \widetilde{CF}^i discounted using a regulatory risk-free yield curve, usually computed for N risk-neutral scenarios:

$$BE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \widetilde{CF}^i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T CF_t^i \cdot D_t^i \right)$$

Where D_t^i is the deflator of the $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ risk-neutral economic scenario at time $t \in \llbracket 1; T \rrbracket$. This deflator is simulated thanks to the Economic Scenario Generator (ESG).

Solvency 2 indicates that for certain life insurance contracts, in particular where they give rise to discretionary benefits depending on investment returns, simulation methods may lead to a more appropriate calculation of the best estimate than deterministic techniques. Savings contracts distributed by French life insurers fall into this category due to their usual characteristics. Indeed, they usually include (i) discretionary benefits depending on investment returns (“participation aux bénéfices”), (ii) a surrender option that could be exercised at any time by policyholders and (iii) a guaranteed capital clause.

Hence, the French life insurers developed stochastic Asset-Liability Management models (ALM models) to compute their BEL using simulation methods, including Monte Carlo approaches. In each simulation, the ALM model computes the balance sheet of the insurance company, its profit and loss account, the discretionary benefits to policyholders and expected future cash flows, until extinction of the insurance policies.

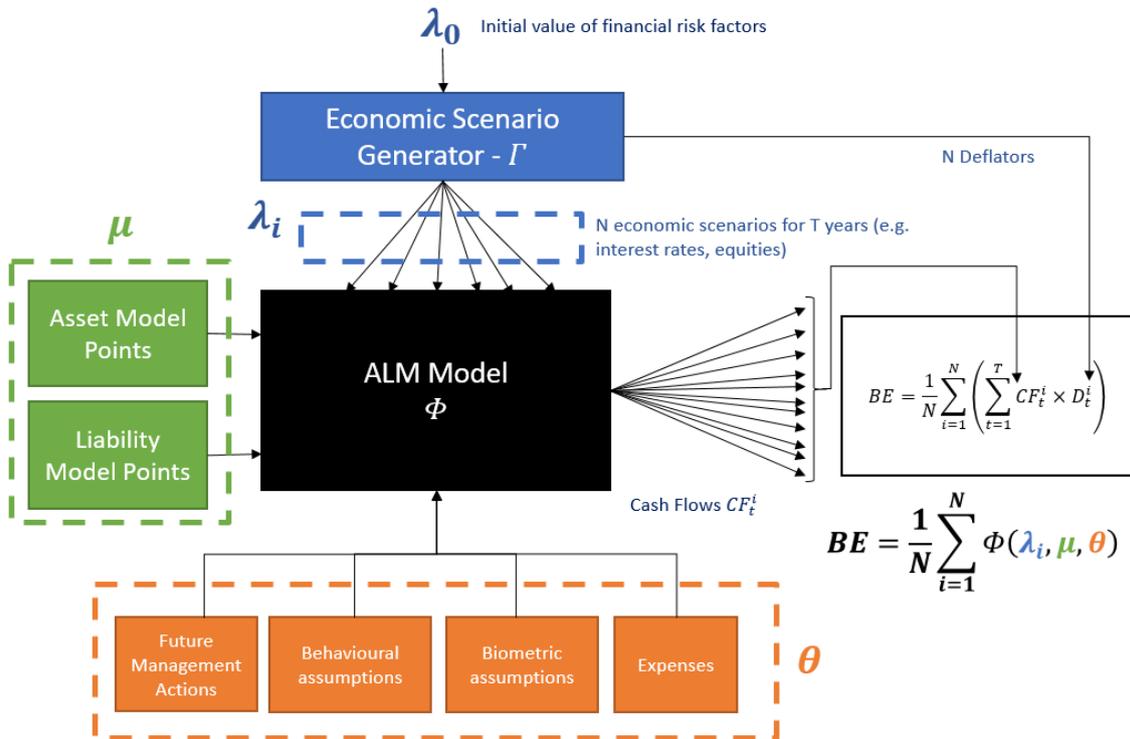
Besides, the Economic Scenario Generator produces a different economic environment for every simulation of the ALM model. The ESG is a bundle of financial models simulating the evolution of financial risk factors – such as equity returns and interest rates – that may affect the future cash flows of the life insurance company. Those economic scenarios are key inputs of the ALM model used to compute the technical provisions.

The ALM model Φ estimates the future cash flows CF_t^i of the insurance company thanks to the following inputs:

- The initial economic situation λ_0 corresponding to the initial value of the financial risk factors;
- N economic scenarios $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ under the risk-neutral probability used for valuation purposes;
- Main characteristics of the company balance sheet including the initial investments of the company – also known as Asset Model Points – and characteristics of the insurance portfolio and policyholders – also known as Liability Model Points;
- Other technical assumptions θ such as future management rules, expenses assumptions, biometric assumptions and behavioural assumptions of policyholders.

Figure I below illustrates those points.

Figure I – Diagram of a stochastic ALM model used to compute the Best Estimate



Proxy of the Asset-Liability Management stochastic model: a regression analysis

One of the aims of this work is to approximate the stochastic ALM model used to compute the Best Estimate using supervised learning algorithms.

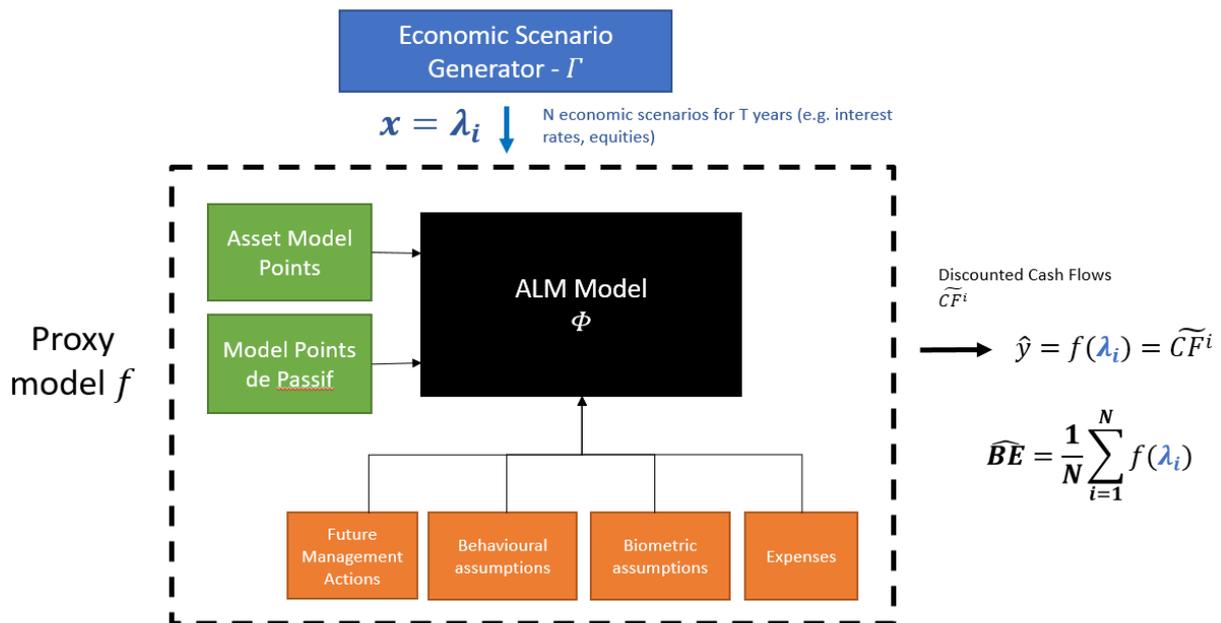
In this work, choice has been made to focus the regression analysis on the economic scenarios $x := \lambda_i$ as explanatory variables. Other parameters and assumptions being equal in the learning sample.

Besides, the target of the regression analysis are defined as the discounted cash flows $\widetilde{CF}^i = \sum_{t=1}^T CF_t^i \cdot D_t^i$ per scenario, assuming therefore $y := \widetilde{CF}^i$. This choice is supported by the following rationales:

- First, one of the aims of this work is to study the sensitivity and the robustness of the ALM model to the economic scenarios and ESG modelling choices. Therefore, it is interesting to focus on those model inputs;
- Then, the choice of the target aims to reduce the overall replication error on the Best Estimate itself. Indeed, given the large number of valuation scenarios, the replication error on the BEL should decrease, given the fact that the BEL corresponds to the mean of the future discounted cash flows distribution.
- Finally, supervised learning algorithms need large datasets for training.

Figure II below illustrates those choices.

Figure II – Diagram of the regression analysis



This work studies and aims to compare the performances of three different supervised learning techniques to tackle the regression analysis presented above.

Supervised learning approaches consist in predicting target variables y thanks to explanatory variables x and a model $f \in F$ such as: $f(x) = y$. The use of a given supervised learning algorithm against others, corresponds to restricting the set of possible models.

In the particular case of supervised learning techniques, the model that is used to predict the target variable is calibrated using a learning sample $D_n = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ in which the value of each target variable is known for the corresponding explanatory variables. The targets of the learning sample are said "labelled".

The three techniques discussed in this work are:

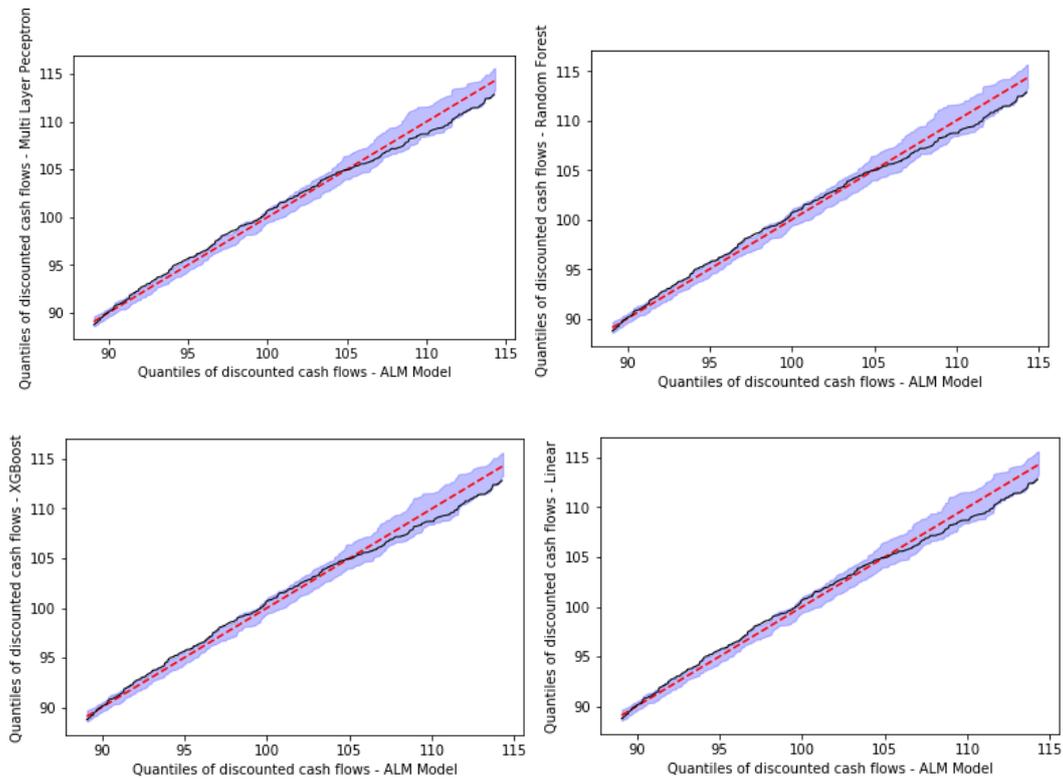
- The Multi-Layer Perceptron which is an example of neural networks;
- Random Forests based on Decision Trees;
- And Gradient Boosting, as implemented in the XGBoost algorithm.

Note that a linear model is also calibrated on the learning dataset for comparison purposes.

Performances of proxy models

Performances and replication errors of proxy models are presented in the Figure and Table below.

Figure III – Q-Q plot (q10%-q90%) of the discounted cash flows distributions produced by the proxy models vs the distribution produced by the ALM model. Top left panel: Multi-Layer Perceptron; Top right panel: Random Forest; Bottom left panel: XGBoost and Bottom right panel: Linear Model



The red dashed line represents the first bisector and corresponds to the quantiles of the distribution produced by the ALM model. The blue area represents the 95% bootstrap confidence interval.

Tableau I – Performances of proxy models on test sample

Results on test sample	Multilayer Perceptron	Random Forest	XGBoost	Linear Model
Best Estimate – ALM Model	100,00	100,00	100,00	100,00
MAE per scenario	1,54	3,94	2,97	1,86
RMSE per scenario	2,19	5,26	4,20	3,28
Best Estimate – proxy model	99,97	100,05	99,98	99,75
Error on Best Estimate (%)	-0,03%	+0,05%	-0,02%	-0,25%

If all proxy models presents satisfying results, proxy models based on supervised learning techniques presents better results than the linear model.

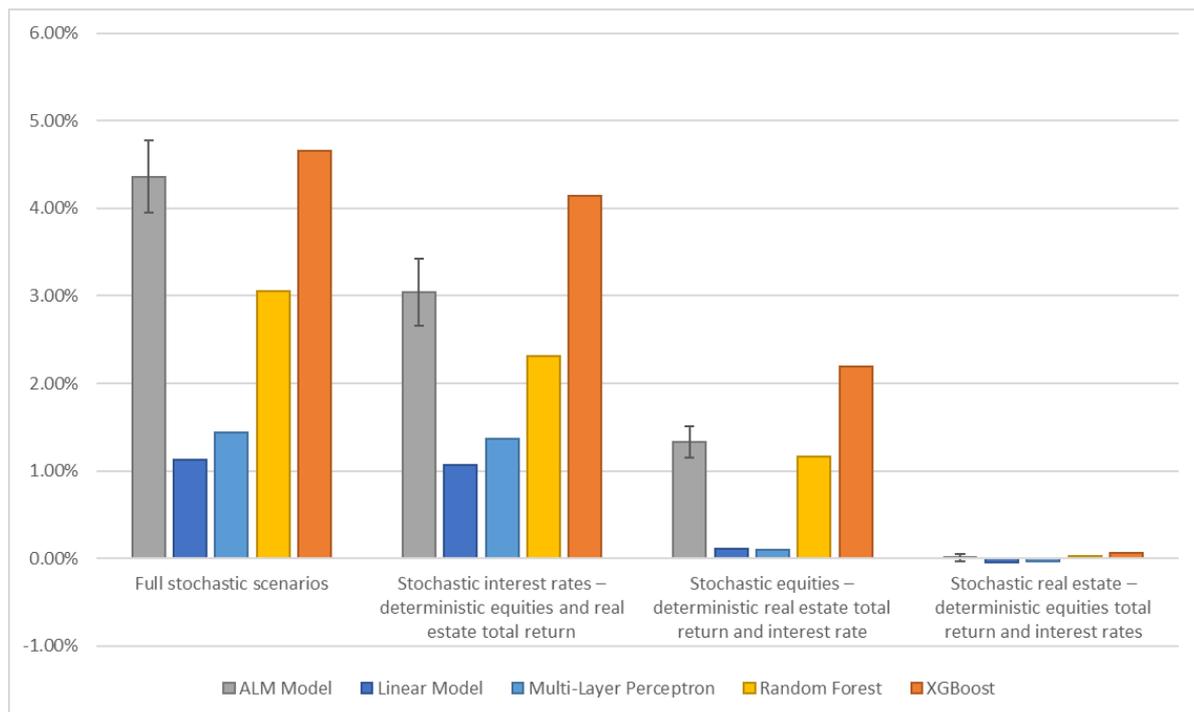
Use of the proxy models to assess the Time Value of Options and Guarantees

BEL is usually computed thanks to stochastic models because simulation methods may lead to a more appropriate calculation than deterministic techniques, in particular to assess the Time Value of Options and Guarantees of the life insurance policies. TVOG in the BEL can be defined as the difference between the stochastic BEL and the deterministic one, computed only in one “average” economic scenario.

In order to assess the robustness and the performance of the proxy models, this work studies the ability of the proxy models to perform precise estimations of the TVOG included in the BEL when computed using specific sets of economic scenarios. In particular:

- One average scenario used for the deterministic computation;
- A reference set of 1000 scenarios in which all the financial risk factors are stochastic;
- A set of 1000 scenarios where only the interest rates are stochastic. All other financial risk factors are deterministic;
- A set of 1000 scenarios where only the equities total return is stochastic;
- Finally, a set of 1000 scenarios in which only the real estate total return is stochastic.

Figure IV – Comparison of TVOG estimations produced by proxy models vs TVOG produced by the ALM model. Proxy models trained on 1001 scenarios, including the deterministic one. TVOG in % of the deterministic BEL.



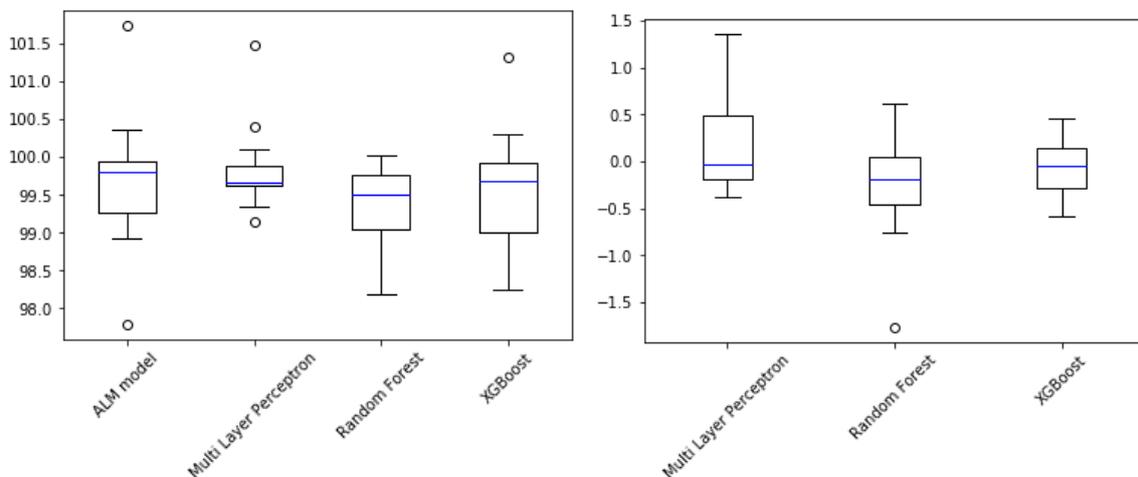
Multi-Layer Perceptron tends to underestimate TVOG on the different sets and provides results not precise enough. On the contrary, XGBoost and the Random Forest tend to provide estimations slightly more precise. XGBoost tends also to over-estimate the TVOG.

Proxy models robustness: sensitivity to Economic Scenarios Generator

In order to assess the performance and the robustness of the proxy models when confronted to different sets of economic scenarios, several analyses have been performed:

- First, a sensitivity analysis on the interest rate model of the ESG which has been proven to be main source of TVOG of the modelled insurance policies;
- Then, two different analyses using 15 different sets of economic scenarios (cf. Figure V below).

Figure V – Boxplots of Best Estimates distributions (left) and errors distributions (right). The distributions corresponds to outputs of ALM model and proxy models for 15 different sets of economic scenarios. Proxy models trained on the alternative set of economic scenarios (ALT). 100 = Best Estimate computed with ALM model and reference economic scenarios (G2++).



As shown on the figure above, the XGBoost proxy model appears to be more robust and provides BEL estimations more accurate. Indeed, its error distribution on the right panel appears to be the least extensive one.

Conclusion and outlook

Through this work, the approximation of the BEL via the replication of the present value of the future cash flows in each Monte Carlo simulation using proxy models reached satisfying results. Indeed, the uncertainty around the proxy models results were similar to the one of the full stochastic ALM model with significant computing time gains. However, the time gains of this approach remains lower than the gains expected through 'direct' replication, where the proxy models aim to directly approximate the BEL and not the present value of the future cash flows of each risk-neutral economic scenario. Indeed, generation of the economic scenarios is still costly in terms of computing time. Besides, the proxy models discussed in this work show satisfying robustness to the choice of ESG.

Finally, several aspects of this work could be further developed in order to:

- Develop strategies to enhance those proxy models to better approximate the technical provisions in simple cases, such as single deterministic scenarios.
- Extend the regression analysis to other explanatory variables such as risk factors related to underwriting risks, including for instance biometric and behavioural assumptions.
- Extend the learning datasets to stress scenarios for risk management purposes and Solvency Capital Requirement (SCR) estimates. Those proxy models could be useful to both estimates the SCR via an Internal Model and under the Standard Formula.
- Adapt the proxy models to other accounting standards such as IFRS and MCEV.

INTRODUCTION

La valeur des provisions techniques d'assurance est définie par la réglementation Solvabilité 2¹ comme la somme de la meilleure estimation des engagements et de la marge de risque (article 77 de la directive 2009/138/CE [S2]). La meilleure estimation, aussi appelée *Best Estimate of Liabilities* (BEL), ou simplement *Best Estimate*, est définie comme la valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs de la compagnie d'assurance compte tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée à partir de la courbe des taux sans risque pertinente.

S'agissant des contrats d'assurance vie, la réglementation définie par Solvabilité 2 indique que les méthodes par simulation sont susceptibles de produire un calcul plus approprié de la meilleure estimation qu'une méthode déterministe. C'est le cas par exemple pour les contrats d'assurance vie qui donnent lieu à des prestations discrétionnaires dépendant de rendements d'investissements ou qui comportent des garanties financières et des options contractuelles. Cette catégorie de contrats recouvre notamment les contrats d'épargne en euros commercialisés en France qui sont rachetables à tout moment par l'assuré et qui contiennent généralement une clause de participation aux bénéfices ainsi qu'une garantie en capital.

Par conséquent, les organismes d'assurance vie ont développé des modèles de projection pour calculer la meilleure estimation de leurs engagements. Pour chacun des scénarios économiques utilisés, le modèle projette, année après année jusqu'à l'extinction des engagements, le bilan, le compte de résultat, la participation aux bénéfices, et enfin les flux de trésorerie, dont la dépendance vis-à-vis de l'évolution de l'environnement économique et des performances de l'actif est ainsi reflétée.

Les scénarios économiques sont produits par un générateur de scénarios économiques (GSE) qui est un ensemble de modèles permettant de simuler aléatoirement des scénarios d'évolution possibles des marchés financiers, qui ont une incidence sur les flux de trésorerie futurs de l'organisme d'assurance. Ces scénarios économiques font partie des entrées essentielles du modèle de projection utilisé pour le calcul des provisions techniques.

Les modèles de projection développés par les organismes d'assurance pour le calcul des provisions techniques vie prudentielles sont souvent lourds et coûteux en termes de temps de calcul. Pour cette raison, il peut être intéressant d'approximer le modèle de projection pour obtenir des valeurs approchées de la meilleure estimation de manière plus rapide et plus souple. De telles approximations sont d'ailleurs nécessaires pour certaines applications pour lesquelles une série de calculs complets à l'aide du modèle ALM nécessite trop de temps de calcul. C'est par exemple le cas d'un modèle interne utilisé par certains organismes d'assurance soumis à Solvabilité 2 afin de déterminer le capital de solvabilité requis (SCR pour *Solvency Capital Requirement*) ou pour l'exercice d'évaluation interne des risques et de la solvabilité (ORSA pour *Own Risk and Solvency Assessment*).

L'objectif principal de ce mémoire est d'interroger la capacité des méthodes d'apprentissage automatique supervisé à approximer le modèle ALM utilisé pour le calcul du *Best Estimate* d'assurance vie dans le cadre d'un portefeuille de contrats en euros avec participation aux bénéfices.

Ce mémoire a également pour objectif d'évaluer la performance et la robustesse des modèles proxys reposant sur l'utilisation des méthodes d'apprentissage automatique supervisé pour deux applications concrètes : la réplique de la valeur temps des options et garanties (*Time Value of Options &*

¹ Solvabilité 2 est un ensemble de règles fixant le régime de solvabilité applicables aux entreprises d'assurance dans l'Union européenne. Les principaux textes précisant ces règles sont la directive 2009/138/CE (directive Solvabilité 2) modifiée par la directive 2014/51/UE (directive Omnibus 2) [S2] ainsi que le Règlement délégué (UE) 2015/35 de la Commission du 10 octobre 2014 [RD].

Guarantees, TVOG) contenues dans les fonds euros étudiés ainsi que l'estimation des impacts d'un changement de générateur de scénarios économiques sur le *Best Estimate*.

Le travail réalisé pour ce mémoire est présenté en trois parties qui s'articulent de la manière suivante. La première partie présente tout d'abord les principes et les exigences réglementaires en matière de calcul des provisions techniques vie sous Solvabilité 2. Cette première partie présente également le modèle stochastique servant au calcul des provisions techniques qu'il s'agit de répliquer. La deuxième partie décrit ensuite, à l'aide de références à la littérature disponible, quelques notions concernant les méthodes d'apprentissage automatique supervisé qui seront utilisées par la suite. Elle détaille également le calibrage et les performances de trois modèles proxys différents construits à partir d'algorithmes d'apprentissage supervisé. Enfin, la troisième partie présente les applications des modèles proxys à deux problématiques concrètes mentionnées précédemment : la réplification de la TVOG ainsi que l'estimation des impacts d'un changement de générateur de scénarios économiques sur le *Best Estimate*.

1 CONTEXTE DE L'ÉTUDE

La première partie de ce mémoire présente les principes et les exigences réglementaires en matière de calcul des provisions techniques vie sous Solvabilité 2. Cette première partie présente également le modèle stochastique servant au calcul des provisions techniques qu'il s'agit de répliquer

La section 1.1 présente le contexte et l'objet d'étude de ce mémoire, à savoir la valorisation économique des contrats d'épargne en euros commercialisés en France et les normes comptables qui reposent sur la construction d'un bilan en valeur économique cohérent avec des actifs en valeur de marché : Solvabilité 2, IFRS 17 et MCEV. La section 1.2 présente le modèle ALM, pour *Asset Liability Management*, ainsi que les générateurs de scénarios économiques qui sont utilisés dans le cadre de ce mémoire. Enfin la section 1.3 présente l'intérêt de la réplification des modèles ALM ainsi que les principales approches décrites dans la littérature pour la réplification de modèles similaires.

1.1 VALORISATION ÉCONOMIQUE DES CONTRATS D'ASSURANCE VIE EN FRANCE

Avant de décrire les référentiels comptables et prudentiels Solvabilité 2, IFRS 17 et MCEV qui nécessitent d'exprimer le bilan d'assureur vie en valeur économique cohérent avec des actifs en valeur de marché, il est nécessaire de décrire le fonctionnement des contrats d'épargne en euros. En effet, la valorisation économique des provisions techniques d'assurance vie s'appuie sur une modélisation fine des contrats et du fonctionnement de l'organisme d'assurance.

1.1.1 ASSURANCE VIE EN FRANCE : LES CONTRATS D'ÉPARGNE EN EUROS

Cette sous-section présente brièvement et de manière simplifiée le fonctionnement des contrats d'épargne en euros que l'on trouve sur le marché de l'assurance vie individuelle en France.

Tout d'abord, une prime d'assurance est versée par l'assuré. Cette prime peut être unique et payée à la souscription des contrats. Elle peut également être fractionnée et payée en plusieurs versements programmés. Par ailleurs, les contrats peuvent également prévoir la possibilité de versements libres.

En échange de cette prime ou de ces primes, le contrat d'épargne en euros prévoit le versement par l'assureur d'un capital aux bénéficiaires à l'échéance du contrat qui correspond soit au décès de l'assuré, soit au rachat du contrat par l'assuré. Une sortie du contrat en rente avec garantie de table ou de taux est également possible contractuellement, bien que moins fréquente. En effet, en 2019, les versements périodiques de rentes représentaient moins de 5% des prestations d'assurance vie en France² [FFA, 2020].

Le caractère assurantiel de ce produit d'épargne provient des garanties financières fournies par l'assureur :

- Tout d'abord, l'assureur garantit une revalorisation des primes investies par l'assuré à un taux contractuel, appelé taux technique. Ce taux peut être égal à 0% ;
- Ensuite, un mécanisme de participation aux bénéfices obligatoire introduit par l'article L. 331-3 du code des assurances s'ajoute au taux technique contractuel. Cette participation correspond à la somme de 85% du résultat financier et de 90% du résultat technique (100% s'il est négatif). Elle est nette de chargement ;
- Enfin, une participation aux bénéfices contractuelle en sus de la participation obligatoire peut s'ajouter aux garanties précédentes.

² Voir données clés de l'assurance française de la FFA : <https://www.ffa-assurance.fr/etudes-et-chiffres-cles/assurance-francaise-donnees-cles-par-annee> (cf. p.24)

La participation aux bénéfices obligatoire trouve son origine dans le fait que les bénéfices financiers proviennent principalement des actifs en représentation des engagements d'assurance portés par l'assureur. Par ailleurs, les contraintes réglementaires de gestion prudente qui s'imposent aux organismes d'assurance font que les hypothèses de tarification et de provisionnement utilisées par l'assureur sont généralement défavorables aux assurés. Une partie des bénéfices réalisés par l'assureur doit ainsi leur revenir pour assurer l'équité du produit.

Des chargements, définis au contrat, sont prélevés pour financer les frais de gestion de l'assureur dont la marge est constituée de la fraction du résultat technique et financier qu'il conserve après affectation des mécanismes de participation aux bénéfices. En général, on distingue les chargements d'acquisition, définis comme une fraction des versements effectués, qui servent à financer les frais d'acquisition et rémunérer les apporteurs d'affaires, des chargements sur encours, définis comme une fraction de la provision mathématique du contrat, qui servent à couvrir les frais généraux de l'assureur comme les frais d'administration ou les frais de gestion des sinistres.

Des mécanismes comptables comme la provision pour participation aux bénéfices et la réserve de capitalisation existent pour permettre à l'organisme d'assurance de lisser les taux servis aux assurés dans le temps et de contrebalancer l'asymétrie introduite par la participation aux bénéfices dans le partage des richesses : la très large part des bénéfices revient aux assurés alors que l'organisme d'assurance doit supporter les pertes.

Par exemple, la provision pour participation aux bénéfices n'est pas spécifique à un contrat, ni même un groupe de contrats : elle concerne l'ensemble des assurés d'un même canton. L'assureur dispose par ailleurs d'un délai de 8 ans pour distribuer aux assurés le montant doté à cette provision lors d'un exercice comptable, en revalorisant alors la provision mathématique. Cette provision technique est généralement utilisée pour lisser dans le temps les taux de revalorisation servis aux assurés ou pour servir la politique commerciale de l'assureur en favorisant certaines catégories d'assurés.

En général, les produits d'épargne distribués en France par les assureurs vie correspondent à des contrats multi-supports qui incluent des supports en unités de compte en plus du contrat en euros. Les sommes versées sur les supports en unités de compte sont investies dans des fonds à capital variable dont la constitution et le niveau de risque varient. Si le nombre de parts investies en unités de compte est garanti, les montants versés sur ces supports ne le sont pas. La valeur des parts fluctue au gré de l'évolution des marchés financiers et l'intégralité des gains ou des pertes est affecté à l'assuré après déduction des frais de gestion prélevés par les gestionnaires d'actifs et par l'assureur.

L'assuré peut, à tout instant, exercer son option de rachat pour que lui soient versées l'intégralité ou une partie des sommes investies auxquelles s'ajoutent les intérêts constatés depuis l'ouverture du contrat. L'assuré peut aussi souhaiter vouloir disposer d'un capital sans pour autant mettre fin à son contrat d'assurance vie. Ce mécanisme dit d'avance permet à l'assuré d'obtenir un emprunt garanti par son épargne, à taux avantageux, et dont le montant est limité à une fraction de la provision mathématique.

Les revalorisations des primes investies par l'assuré sont soumises à des prélèvements sociaux (comme la CSG et la CRDS). Les rachats partiels ou totaux sont quant à eux soumis au prélèvement libératoire dont le taux varie suivant l'ancienneté du contrat. Par ailleurs, la fiscalité de l'assurance vie est avantageuse par rapport à la majorité des contrats d'épargne bancaires, ce qui en fait un des placements favoris des Français. En 2019, les provisions techniques d'assurance vie et des fonds de pension représentaient 2084 milliards d'euros, soit près de 40% de l'encours des placements financiers des ménages [FFA, 2020].

La durée de vie typique d'un contrat d'épargne en euros est supérieure à 8 ans. En effet, à partir de cette ancienneté, l'assuré dispose de certains avantages fiscaux. Dans le cas du décès de l'assuré, la

totalité de l'épargne constituée est versée aux bénéficiaires et le contrat prend fin. Ce versement fait l'objet d'avantages significatifs en termes de droits de succession.

1.1.2 SOLVABILITÉ 2

Solvabilité 2, du nom de la directive européenne qui la définit, correspond à l'ensemble des règles prudentielles en vigueur dans l'Union Européenne depuis le 1^{er} janvier 2016 pour le secteur de l'assurance, de la réassurance et une partie des pensions professionnelles. Ce régime prudentiel porte notamment l'ambition de faciliter les transferts de portefeuilles d'un assureur à un autre à l'intérieur du marché européen. Le corpus juridique correspondant à Solvabilité 2 en France sont regroupés dans le code des assurances suite à la transposition de la directive européenne [S2] et dans le règlement délégué 2015/35 [RD], texte européen qui est lui d'application directe.

Le considérant (55) de la directive Solvabilité 2 [S2] dispose ainsi que « la valeur des provisions techniques devrait correspondre au montant qu'une autre entreprise d'assurance ou de réassurance (entreprise de référence) serait probablement amenée à demander pour reprendre et honorer les engagements. »

En d'autres termes, il est attendu des organismes d'assurance qu'ils calculent une valeur de transfert de leurs portefeuilles, à l'actif comme au passif. Pour ce faire, Solvabilité 2 requiert des assureurs qu'ils établissent la juste valeur (*fair value*) de leurs actifs et de leurs engagements.

Sous Solvabilité 2, les actifs et les passifs obéissent à la hiérarchie des méthodes de valorisation définie à l'article 10 du règlement délégué. Les textes prévoient ainsi que par défaut, il soit fait recours à un « prix coté sur un marché actif pour les mêmes actifs ou les mêmes passifs ». Si ce mode de valorisation est applicable pour un grand nombre d'actifs, il ne l'est pas pour les passifs d'assurance. En effet, les transferts de portefeuilles d'assurance sont loin de constituer un marché liquide qui permettrait d'en déduire une juste valeur.

En effet, la juste valeur des actifs pour lesquels il existe un marché suffisamment liquide, profond et transparent peut être obtenue via les marchés financiers. On parle alors de valorisation *mark-to-market*.

À défaut de pouvoir recourir à une valorisation *mark-to-market* pour les provisions techniques d'assurance, les organismes d'assurance ont donc recours à une valorisation dite *mark-to-model* en utilisant des méthodes et des modèles financiers. Ces méthodes s'inspirent de celles qui sont par ailleurs utilisées pour valoriser des produits structurés complexes non cotés.

Plus précisément, la valeur de transfert des engagements correspond alors à la valeur pour laquelle ceux-ci pourraient être transférés à un autre organisme d'assurance afin que celui-ci puisse honorer les engagements du premier assureur. À cette fin, l'article R.351-2 du code des assurances prévoit les provisions techniques relatives aux engagements en portefeuille sont calculées comme la somme de :

- la meilleure estimation des engagements, *Best Estimate of Liabilities*, qui correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs compte tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente, soit la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs ;
- la marge de risque, *Risk Margin*, qui correspond au coût du capital réglementaire qu'il serait nécessaire d'immobiliser pour satisfaire à l'exigence en capital définie par Solvabilité 2 jusqu'à l'extinction des engagements.

S'agissant du calcul de la meilleure estimation, l'article R.351-10 du code des assurances prévoit que les entreprises d'assurance tiennent compte de la valeur des garanties financières et de toute option

incluses dans leurs contrats lorsqu'elles calculent leurs provisions techniques prudentielles au sens de l'article L. 351-2 du même code.

Pour ce faire, le considérant (15) du règlement délégué précise que pour certains contrats d'assurance vie, notamment ceux qui donnent lieu à des prestations discrétionnaires dépendant de rendement d'investissements ou qui comportent des garanties financières et des options contractuelles, les méthodes par simulation sont susceptibles de produire un calcul plus approprié de la meilleure estimation.

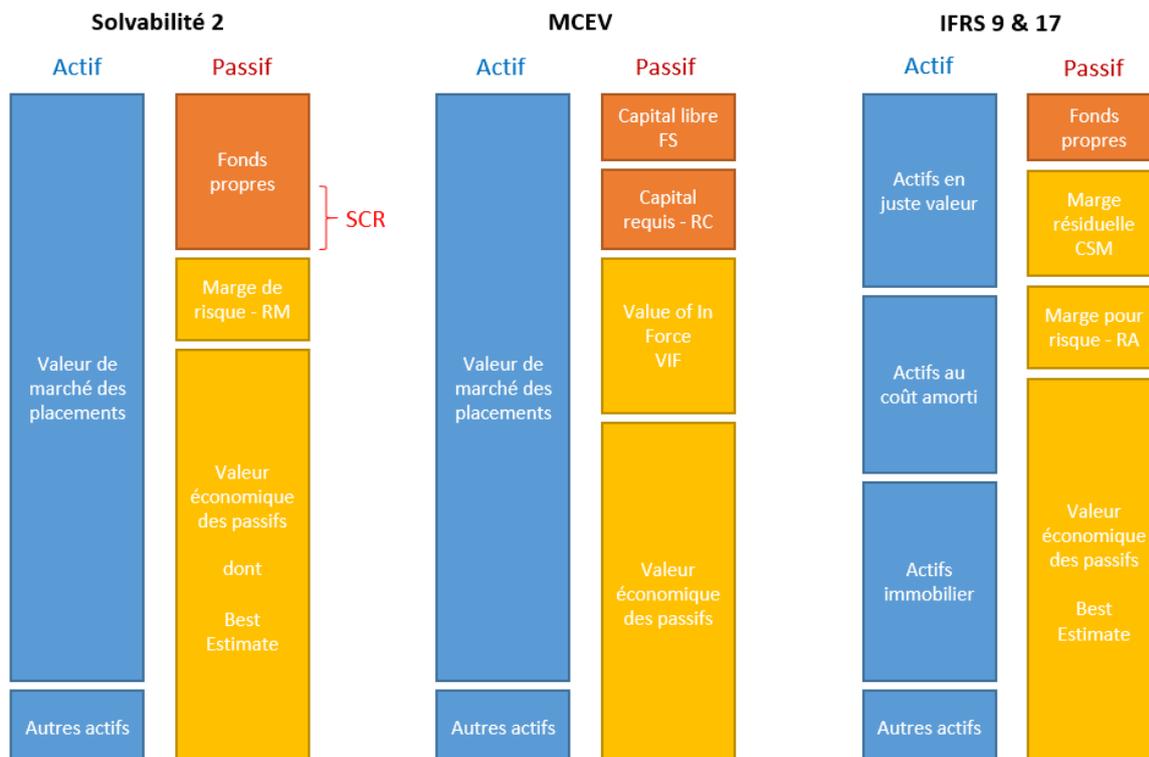
Les contrats d'épargne en euros décrits précédemment (cf. 1.1.1) sont caractérisés par des prestations discrétionnaires dépendant de rendements d'investissements notamment via les mécanismes de participation aux bénéfices et comportent également une option de rachat au bénéfice de l'assuré. Par conséquent, les organismes d'assurance vie en France ont recours à des modèles ALM reposant sur des méthodes par simulation. Un exemple est décrit la section suivante (cf. 1.2).

Enfin, si Solvabilité 2 porte l'ambition d'une valorisation plus économique des engagements d'assurance, il est important de noter qu'une telle valorisation n'est pas unique et repose sur des hypothèses spécifiques décrites dans les textes réglementaires associés. Par conséquent, la valorisation des engagements d'assurance au bilan prudentiel défini par Solvabilité 2 ne coïncide pas forcément avec la valeur des engagements dans le cadre d'autres normes comptables, comme IFRS 17, ou de communication financière, comme la MCEV, s'appuyant sur une valorisation économique.

1.1.3 AUTRES RÉFÉRENTIELS COMPTABLES : MCEV & IFRS 17

Cette section présente succinctement deux référentiels de valorisation économique des activités d'assurance : la *Market Consistent Embedded Value* introduite par le CFO Forum et les normes comptables internationales IFRS 17 et IFRS 9.

Figure 1.1 – Vision schématique d'un bilan d'assurance selon les référentiels Solvabilité 2, MCEV et IFRS 9 & 17



1.1.3.1 MARKET CONSISTENT EMBEDDED VALUE

Depuis 2002, le groupe de travail informel *European Insurance CFO Forum* qui regroupe les directeurs financiers des principales compagnies d'assurance européennes cotées en bourse travaille notamment sur le reporting financier relatif à l'assurance. À ce titre, le *CFO Forum* a proposé une définition de la valeur d'une compagnie d'assurance du point de vue de l'actionnaire : l'*Embedded Value*. La forme actuelle d'évaluation de cette valeur, *Market Consistent Embedded Value* (MCEV), est régie par 17 principes édictés par le *CFO Forum* [CFO Forum, 2016]. Ce référentiel informel est publié par certains groupes d'assurance en complément des rapports financiers.

La MCEV est similaire aux fonds propres économiques définis par Solvabilité 2. Plus précisément, la MCEV correspond à la somme de la *Value of In Force business* (VIF) et de la *Net Asset Value* (NAV).

La VIF est définie comme la valeur actuelle des profits futurs issus du portefeuille acquis (PVFP) minorée par trois éléments : (i) la valeur temporelle des options et garanties financières contenues dans les contrats d'assurance du portefeuille acquis (TVOG), (ii) le coût d'immobilisation du capital requis (FCRC) ainsi que le coût des risques résiduels non pris en compte par ailleurs (CCNHR).

Par rapport au référentiel comptable français et à la réglementation prudentielle Solvabilité 2, la VIF est comparable à la différence entre les provisions mathématiques comptables (PM) et les provisions techniques prudentielles (somme du *Best Estimate of Liabilities* et de la *Risk Margin*) : $VIF = PM - (BEL + RM)$.

La valeur de l'actif net (NAV) est définie dans le référentiel MCEV comme la somme (i) du capital requis (*Required Capital*, RC) qui correspond aux actifs en représentation des activités prises en compte dans le calcul de la MCEV et (ii) du capital supplémentaire, ou capital libre (*Free Surplus*, FS) qui correspond à la valeur de marché des actifs en représentation du capital complémentaire au RC. Le capital requis est similaire au SCR de Solvabilité 2 et les principes de valorisation de la MCEV permettent d'aligner ces deux montants, RC et SCR.

1.1.3.2 NORMES COMPTABLES INTERNATIONALES IFRS – INTERNATIONAL FINANCIAL REPORTING STANDARDS

Les normes comptables internationales IFRS, *International Financial Reporting Standards*, définissent le référentiel comptable pertinent pour les comptes consolidés des entreprises cotées sur un marché européen. Ces normes viennent compléter les normes IAS, *International Accounting Standards*, et sont produites par le Bureau International des Normes Comptables (IASB, *International Accounting Standards Board*).

S'agissant des organismes d'assurance, les principales normes comptables internationales pertinentes sont :

- IAS 39 et IFRS 9 pour les placements et les actifs financiers ;
- IAS 40 pour la comptabilisation des immeubles de placement ;
- IFRS 4 et IFRS 17 pour les contrats d'assurance.

La norme IFRS 9 a vocation à remplacer la norme IAS 39. Pour les organismes d'assurance, la norme IFRS 9 devrait entrer en vigueur au 1^{er} janvier 2023 en même temps que la norme IFRS 17.

La norme IFRS 9 prévoit 4 méthodes de comptabilisation :

- La méthode du coût amorti ;
- La méthode de la juste valeur par résultat ;
- La méthode de la juste valeur par capitaux propres recyclables ;
- La méthode de la juste valeur par capitaux propres non-recyclables.

La norme IFRS 17 publiée en 2017 devrait entrer en vigueur au 1^{er} janvier 2023 et viendra remplacer la norme temporaire IFRS 4.

Les provisions techniques vie sous la norme IFRS 17 correspondent à la somme :

- Du *Best Estimate* des engagements d'assurance vie ;
- D'un *Risk Adjustment* ;
- Et de la *Contractual Service Margin* (CSM).

Les définitions du *Best Estimate* et du *Risk Adjustment* d'IFRS 17 sont proches des définitions du *Best Estimate* et de la *Risk Margin* de Solvabilité 2.

Toutefois, les normes IFRS 17 introduisent la notion de CSM qui vient représenter le profit comptable attendu à la souscription d'un contrat. Ainsi, un **contrat profitable** du point de vue de l'assureur aura une CSM positive. Cette CSM vient s'ajouter aux provisions techniques à la souscription du contrat et sera progressivement reprise par l'assureur pendant la vie du contrat. IFRS 17 prévoit deux autres catégories de contrats : les **contrats onéreux** correspondant aux contrats dont la CSM est négative à la date d'évaluation et les **contrats potentiellement onéreux** qui correspondent aux contrats dont la CSM est positive à la date d'évaluation mais dont la probabilité d'être négative est non nulle.

Par la suite, on se concentrera sur la valorisation des engagements d'assurance vie dans le cadre de Solvabilité 2. Toutefois, comme il a été discuté dans cette section, les référentiels MCEV et IFRS reposent également sur la construction d'un bilan en valeur économique nécessitant une valorisation stochastique des provisions techniques d'assurance vie. Par conséquent, les travaux présentés dans le cadre de ce mémoire pourraient être généralisés à ces autres normes.

1.2 CALCUL DU *BEST ESTIMATE* À L'AIDE D'UN MODÈLE ALM

Le modèle de projection actif-passif, aussi appelé modèle ALM pour *Asset Liability Management*, est le modèle qui permet le calcul du *Best Estimate* des engagements d'assurance. Le *Best Estimate* et la marge de risque correspondent aux provisions techniques d'une compagnie d'assurance à son bilan prudentiel sous Solvabilité 2. Ce modèle ALM correspond à celui développé et décrit par [Gorrand, 2019].

Le *Best Estimate* de la société d'assurance correspond à la valeur moyenne de la somme des flux de trésorerie futurs actualisés \widetilde{CF}^i ainsi simulés dans l'ensemble des N scénarios risque-neutres :

$$BE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \widetilde{CF}^i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T CF_t^i \cdot D_t^i \right)$$

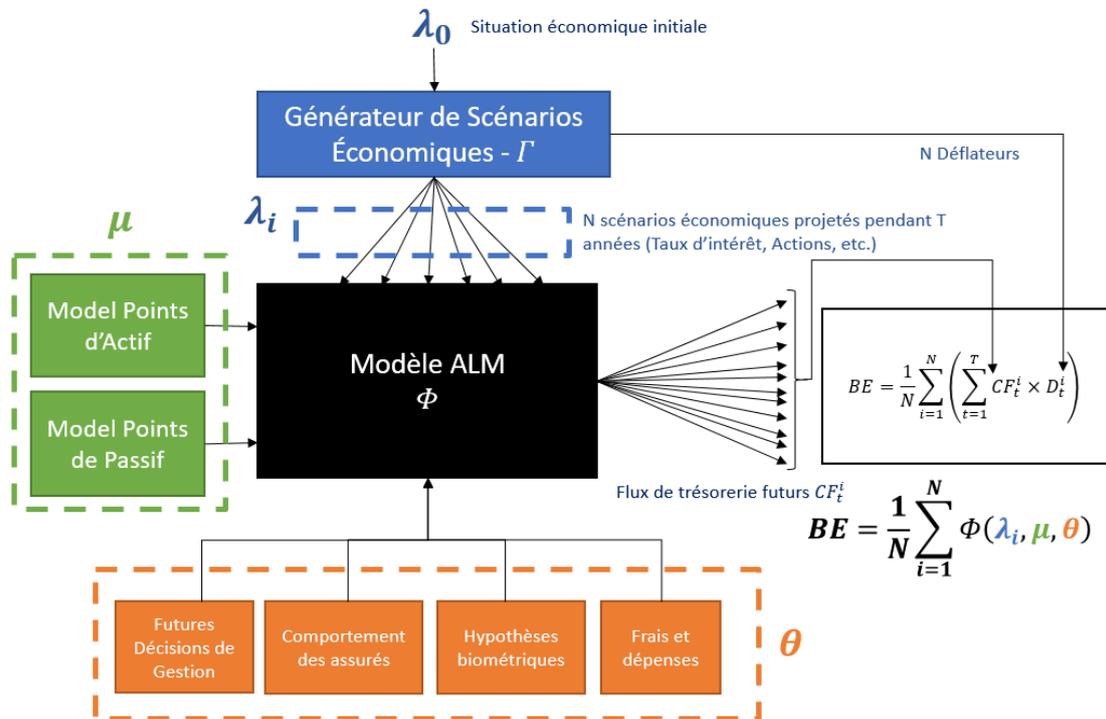
Avec D_t^i le déflateur du scénario risque neutre $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ et au pas de temps de projection $t \in \llbracket 1; T \rrbracket$ produit par le générateur de scénario économique.

Les flux de trésorerie futurs de l'organisme d'assurance CF_t^i sont calculés par le **modèle ALM** Φ à partir des éléments suivants :

- De la **situation économique actuelle** λ_0 correspondant à la valeur des facteurs de financiers au moment du calcul.
- Des N **scénarios économiques risque-neutres** $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ utilisés pour la valorisation des flux futurs.
- Des caractéristiques du bilan d'assurance de l'organisme μ avec en particulier :
 - Les placements financiers initiaux de la compagnie d'assurance aussi appelés « **Model Points d'Actif** ».
 - Et les caractéristiques des contrats (par ex. taux technique, taux de participation aux bénéfices) et des assurés (par ex. âge, ancienneté) de la compagnie aussi appelés « **Model Points de Passif** ».
- Des autres hypothèses techniques θ nécessaires au calcul qui regroupent notamment :
 - Les hypothèses de fonctionnement de la compagnie d'assurance qui regroupent notamment (i) les **futures décisions de gestion** encadrées par l'article 23 du règlement délégué de Solvabilité 2 (par ex. taux servi aux assurés dans le cadre de la participation aux bénéfices, réallocation d'actifs au cours de la projection) ; et les (ii) les **hypothèses de frais et de dépenses** de l'organisme.
 - Les **hypothèses biométriques** des assurés (par ex. mortalité, longévité et morbidité des assurés) via l'utilisation de tables.
 - Les **hypothèses de comportement des assurés** au cours de la projection (par ex. modélisation des cessations et rachats de contrat en fonction de l'ancienneté des contrats et du contexte économique).

Ces éléments sont illustrés dans la figure ci-après et sont présentés dans les sections suivantes.

Figure 1.2 – Schéma de principe du calcul du BEL d'assurance vie à l'aide d'un modèle ALM



1.2.1 PRINCIPALES HYPOTHÈSES ET PORTEFEUILLES MODÉLISÉS

Dans le cadre de ce mémoire, on considèrera des contrats d'épargne mono-supports sur un fonds en euros. Comme indiqué précédemment, outre la participation aux bénéficiaires, les principales garanties de ces contrats sont :

- le rachat partiel ou total du contrat ;
- les prestations versées en cas de décès ;
- ainsi que la revalorisation de l'épargne au taux technique.

Par ailleurs, on fait l'hypothèse que les contrats considérés ne présentent pas de garantie discernable au sens de l'article 18 du règlement délégué de Solvabilité 2. Par conséquent, aucun versement, libre ou périodique, n'est projeté dans le modèle ALM.

Afin de calculer la meilleure estimation de ces contrats d'épargne, il est nécessaire de modéliser les actifs du fonds général adossés aux engagements d'assurance dans un certain nombre de scénarios économiques.

Le tableau ci-après présente le bilan en valeur nette comptable exprimée en base 100 de l'assureur fictif considéré.

Tableau 1.1 – Bilan de l'assureur fictif

Actif		Passif	
Obligations à taux fixes	75,53	Fonds propres	4,93
Immobilier	4,75	Provision pour participation aux bénéfices (PPB)	3,87
Actions	16,25	Réserve de capitalisation	1,26
Trésorerie	3,47	Provisions mathématiques (PM)	89,96
Total Actif	100,00	Total Passif	100,00

1.2.1.1 MODÉLISATION DE L'ACTIF

L'actif du fonds général est constitué de quatre types de titres financiers :

- les actions ;
- les titres immobiliers ;
- les obligations à taux fixe ;
- et la trésorerie.

On suppose que tous les titres financiers sont liquides, cessibles et infiniment divisibles.

Ce modèle ALM ne permet pas de modéliser l'ensemble des actifs que l'on retrouve dans les placements réalisés par les assureurs français. Par exemple, ce modèle ne permet pas de modéliser ni les obligations indexées à l'inflation comme les OATI³, ni les obligations à taux variable.

Les actions et les actifs immobiliers sont modélisés comme des actifs indiciels.

S'agissant des obligations à taux fixe, le coupon est déterminé par un taux de coupon exprimé en pourcentage du nominal. Une des limites importantes de ce modèle ALM vient du fait que le risque de crédit est supposé constant au cours de la projection. En effet, le *spread* correspondant à l'écart entre le taux actuariel d'une obligation risquée et le taux d'intérêt nominal supposé sans risque, censé refléter le risque de crédit de l'obligation risquée, reste constant au cours de la projection et n'est pas modélisé de manière stochastique.

La valeur de marché des actifs doit être *market consistent*, c'est pourquoi un générateur de scénarios est utilisé, afin de modéliser les fluctuations des valeurs de marché. Les données provenant de ce générateur doivent être semestrielles car les flux sont évalués en milieu et en fin d'année.

Il est supposé dans ce modèle que le générateur donne les valeurs de fin de période. La table d'hypothèses d'actifs issue du générateur indique par numéro de scénario le prix des zéro-coupons pour une maturité précise et sur un nombre donné de semestres de projection.

Elle indique également le rendement des actions, celui des titres immobiliers, les dividendes et les loyers (en % des cours des actions et des titres immobiliers) pour un indice donné et par semestre de projection. Enfin, cette table d'hypothèses indique pour un scénario et par semestre de projection le déflateur ainsi que le taux d'inflation. À la fin d'un scénario, tous les titres financiers sont vendus.

³ Obligations Assimilées au Trésor indexées à l'Inflation correspondant aux obligations souveraines de la République Française indexée à l'indice inflation.

La duration du portefeuille obligataire de l'assureur est ici légèrement inférieure à 8 ans.

1.2.1.2 MODÉLISATION DU PASSIF

Un contrat d'épargne est, dans le cadre de ce mémoire, un contrat par lequel l'assuré investit sur le fonds en euros de l'assureur qui s'engage à lui verser certaines prestations. L'assuré peut contractuellement verser des primes à l'assureur afin d'augmenter son épargne. Ces primes futures ne sont prises en compte dans le calcul que si elles correspondent au périmètre défini par les limites des contrats au sens de l'article 18 des actes délégués de Solvabilité 2.

Ces contrats sont synthétisés dans un fichier de *model points* qui est lu en entrée de calcul par l'outil. À chaque ligne correspond un contrat défini par un ensemble de caractéristiques. Afin de synthétiser ou réduire le nombre de lignes de ce fichier, une ligne peut correspondre à plusieurs contrats ayant les mêmes caractéristiques individuelles et contractuelles. On parle alors de groupement de données. Les contrats sont modélisés en tenant compte d'un grand nombre de caractéristiques.

Les contrats d'épargne modélisés offrent des garanties à l'assuré en cas de vie et en cas de décès, en contrepartie du versement d'une ou de plusieurs primes. Les garanties des contrats mono-supports modélisés sont les suivantes :

- Garantie du capital investi, correspondant à un taux minimum garanti de revalorisation de l'épargne de 0% ;
- Pour certains contrats, le taux technique est positif. Sur l'ensemble du portefeuille, le taux technique moyen est de 0,90% ;
- Revalorisation de l'épargne par le mécanisme de participation aux bénéfices – taux de 85% ;
- Possibilité pour l'assuré de racheter totalement ou partiellement son contrat ;
- Prestations versées aux bénéficiaires en cas de décès de l'assuré.

1.2.1.3 COMPORTEMENT DES ASSURÉS, SINISTRALITÉ ET FRAIS DE L'ASSUREUR

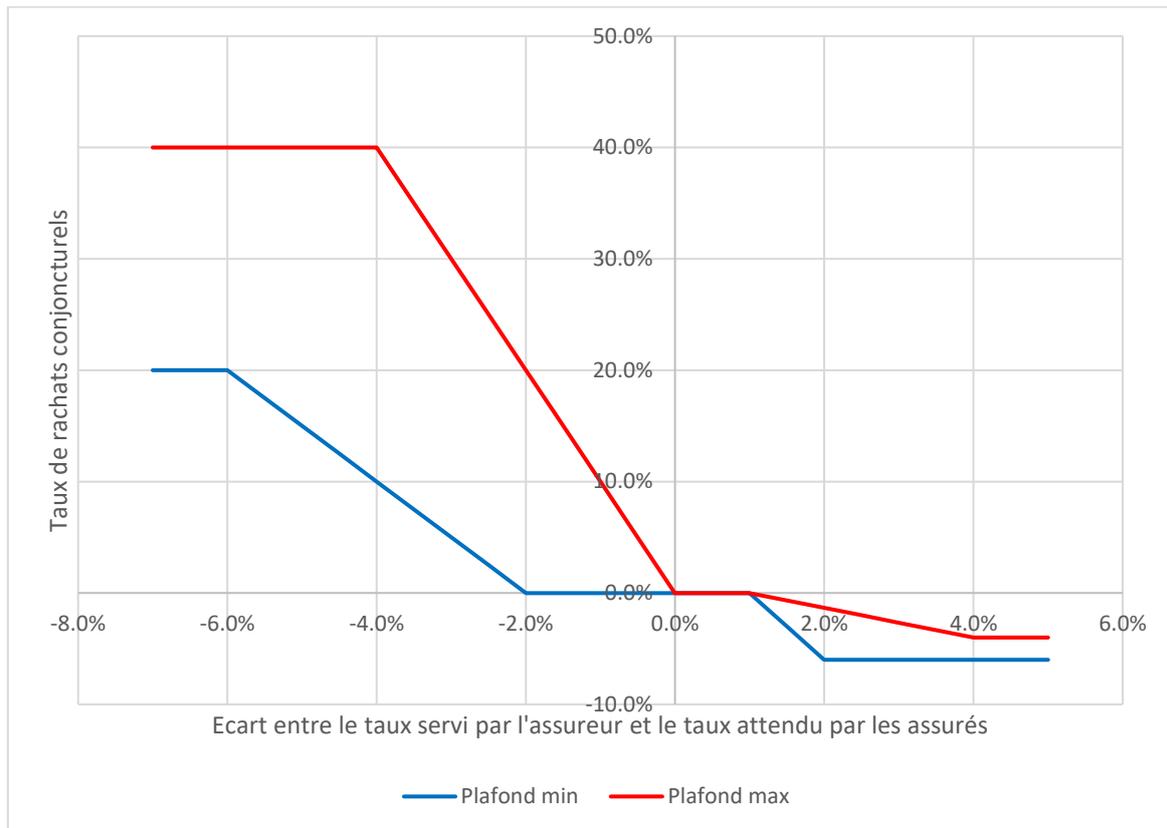
Comportement des assurés

Les rachats sont modélisés en deux parties : un socle de rachats structurels et des ajustements conjoncturels.

Les hypothèses de rachats structurels sont indiquées en fonction du numéro de produit et de l'ancienneté du contrat.

Des prestations de rachats conjoncturels sont évaluées à chaque pas de projection. Le taux de rachats conjoncturels est déterminé en fonction des intérêts servis l'année précédente et des paramètres α , β , γ , δ , RCmin et RCmax détaillés dans les orientations nationales complémentaires (ONC) de l'ACPR publiées en préparation de la mise en œuvre de Solvabilité 2 [ACP 2013]. Ce taux de rachats conjoncturels viendra augmenter le nombre des rachats totaux au-delà des rachats structurels déjà modélisés s'il est positif. Symétriquement, si le taux de rachats conjoncturels est négatif, le nombre de rachats totaux sera inférieur au nombre de rachats structurels initialement modélisé.

Figure 1.3 – Lois de rachats conjoncturels minimale et maximale des ONC



Ces lois minimale et maximale sont définies par morceaux à partir des paramètres suivants :

Tableau 1.2 – Paramètres des lois des ONC

Paramètre	Plafond minimal	Plafond maximal
RC_{max}	20%	40%
α	-6%	-4%
β	-2%	0%
γ	1%	1%
δ	2%	4%
RC_{min}	-6%	-4%

Le paramètre α correspond au seuil en-deçà duquel les rachats conjoncturels sont constants et fixés au plafond RC_{max} : ce n'est plus l'écart entre le taux servi par l'assureur et le taux attendu par les assurés qui explique le comportement des assurés.

Les paramètres β et γ correspondent respectivement aux seuils d'indifférence à la baisse et à la hausse du taux servi. Entre ces deux seuils, il n'y a pas de rachats conjoncturels : le comportement de l'assuré n'est pas modifié.

Enfin, le paramètre δ correspond au seuil au-delà duquel la diminution des rachats structurels est constante et fixée à RC_{min} : ce n'est plus l'écart entre le taux servi par l'assureur et le taux attendu par les assurés qui explique le comportement des assurés.

Enfin, lorsque le contrat arrive à son terme contractuel ou bien lorsqu'il s'agit de la dernière année de projection dans le scénario, le contrat est racheté totalement à la fin de l'année de projection. En pratique, les contrats considérés dans le cadre de ce mémoire n'ont pas de terme contractuel.

Hypothèses de mortalité

Les flux de trésorerie sont projetés sous l'hypothèse que la mortalité de la population assurée suit une table TH-00-02.

Frais

Afin de régler les frais administratifs et de gestion de sinistres ainsi que les frais d'acquisition dus à son réseau de distribution, l'assureur prélève des chargements sur l'encours des contrats et des chargements sur les éventuelles primes versées. Les hypothèses de frais et de commissions sont données en fonction du numéro de produit et les frais sont revalorisés chaque année avec l'inflation.

1.2.1.4 MODÉLISATION ACTIF-PASSIF : FUTURES DÉCISIONS DE GESTION DE L'ASSUREUR

Outre la production de portefeuilles de passif et d'hypothèses de projection, il est également, nécessaire pour procéder au calcul de la meilleure estimation de définir des hypothèses de projection approximant les futures décisions de gestion mises en œuvre.

Allocation d'actifs et réinvestissements au cours de la projection

Au cours de l'année projetée, la société modifie son portefeuille de titres financiers afin de respecter sa stratégie d'allocation d'actifs, qui correspond au pourcentage de détention d'obligations, d'actions, de titres immobiliers et de trésorerie.

Pour cette étude, la stratégie de réallocation d'actifs est supposée constante tout au long de la projection : elle consiste à maintenir l'allocation d'actifs initiale induite par les *model points* d'actif en début de projection. Pour chaque type d'actif, un pourcentage y est indiqué. Ce pourcentage s'applique sur la valeur de marché de chaque poche d'actifs.

En fonction des proportions ciblées par la stratégie, des opérations de vente ou d'achat de titres financiers sont réalisées sur chaque type de titres financiers en fonction de l'évolution de l'environnement économique au cours de la projection.

Revalorisation de l'épargne des assurés et stratégie de participation aux bénéfices

Il est impossible de reproduire fidèlement les décisions de gestion réelles d'un assureur dans l'ensemble des scénarios économiques utilisés lors du calcul du *Best Estimate*.

À chaque fin d'année de projection, l'assureur se fixe un taux cible et, lorsque les produits financiers de ses placements sont insuffisants pour rémunérer les assurés au taux cible, il cherche à réaliser des plus ou moins-values sur les actions. Le taux cible est notamment déterminé à partir des taux zéro-coupons de maturité lus au début du calcul. Cette maturité est constante sur l'ensemble des années projetées et des scénarios. Dans le cas où les plus ou moins-values ne sont pas suffisantes pour atteindre le taux cible, l'assureur peut doter ou faire une reprise dans la mesure du possible sur la provision de la participation aux bénéfices.

La formule utilisée pour la modélisation du taux cible est la suivante :

$$\text{Taux cible}(t) = 80\% \cdot m(t) + 20\% \cdot \text{Taux servi}(t - 1)$$

Où $m(t)$ correspond à la moyenne mobile du taux 10 ans sur les 3 dernières années.

1.2.2 PRODUCTION DES SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES

Comme indiqué précédemment, un générateur de scénarios économiques est nécessaire à la valorisation *market consistent* du *Best Estimate*. Les générateurs de scénarios économiques utilisés dans le cadre de ce mémoire reposent principalement sur des modèles simples. Toutefois, nous considérons que ces choix de modélisation n'ont qu'un impact limité sur les principales conclusions de ce mémoire. En outre, l'utilisation de deux modèles de taux d'intérêt nominaux différents permettra d'évaluer la robustesse des méthodes de réplication utilisées.

Les grandeurs modélisées de manière stochastiques correspondent :

- aux taux d'intérêt nominaux, utiles à la valorisation des actifs financiers au cours de la projection ainsi qu'à l'actualisation des flux financiers futurs pour le calcul du *Best Estimate* ;
- aux actifs indiciaires présents dans le modèle, à savoir les actions et l'immobilier.

Il est à noter que le crédit des actifs obligataires n'est pas modélisé de manière stochastique.

1.2.2.1 PREMIER MODÈLE DE TAUX – HULL & WHITE

Le modèle de Hull and White [Hull & White, 1990] présente l'avantage d'être relativement simple tout en autorisant une réplication parfaite de la courbe de taux en début de projection, celle-ci étant directement un paramètre d'entrée du modèle. Il présente en outre l'intérêt d'autoriser la diffusion de taux négatifs. Il est à noter que cette caractéristique fût, lors de la publication du modèle, décrite comme l'une de ses faiblesses. Dans le contexte actuel de taux d'intérêts nominaux bas voire négatifs dans la zone euro et dans d'autres économies développées, cette caractéristique est désormais considérée comme une force du modèle.

La dynamique du modèle de Hull and White s'écrit :

$$dr_t = (\theta_t - ar_t) dt + \sigma dW_t$$

Avec :

- $(r_t)_{t>0}$ le processus de taux court instantané, c'est-à-dire le taux de rendement/d'emprunt à un instant t donné sur une période infinitésimale dt ;
- $(\theta_t)_{t>0}$ une fonction déterministe dépendant du temps. Elle sera déterminée de manière à reproduire la courbe de taux initiale. On notera également qu'avec cette dynamique, le taux court tend à converger vers θ_t/a à la vitesse a ;
- a la vitesse de retour à la moyenne, *mean reverting speed* en anglais, qui est ici supposée constante. Dans le modèle générique, cette vitesse de retour à la moyenne est définie de manière plus générale comme une fonction déterministe du temps ;
- σ la volatilité du taux court à un instant donné qui est supposée ici constante. Tout comme la vitesse de retour à la moyenne, cette volatilité est définie de manière plus générale comme une fonction déterministe du temps dans le modèle générique ;
- $(W_t)_{t>0}$ un brownien suivant un mouvement standard.

Le modèle de Hull and White ainsi défini, est appelé Hull and White à 1 Facteur, *i.e.* HW1 dans la mesure où il présente un seul facteur de risque lié à une seule source d'aléa.

Nous disposons donc de trois paramètres pour calibrer ce modèle. Le premier θ_t sera utilisé afin de reproduire la courbe de taux initiale imposée par la réglementation tandis que a et σ seront choisis afin que la dynamique du taux court sous probabilité risque neutre soit cohérente avec les prix des instruments de volatilité observés sur les marchés financiers. Ils seront choisis pour répliquer le prix des produits dérivés de taux disponibles sur les marchés financiers.

Il est à noter que le modèle HW1 ne diffuse pas directement les prix des obligations zéro-coupons mais uniquement un taux court. La courbe de taux à chaque instant est ainsi calculée *via* une formule explicite à partir des paramètres du modèle et du taux court.

La formule de calcul de l'obligation zéro-coupon de maturité T à l'instant t dans le modèle HW est la suivante :

$$ZC_{t,T} = e^{A(t,t+T) - B(t,t+T) \times r_t}$$

La fonction B peut être calculée à partir de cette formule :

$$B(t_1, t_2) = \frac{1}{a} \times (1 - e^{a(t_1 - t_2)})$$

La fonction A est quant à elle donnée par la formule ci-dessous :

$$A(t_1, t_2) = \ln \frac{ZC_{0,t_2}}{ZC_{0,t_1}} + B(t_1, t_2) \times f_{0,t_1} - \frac{1}{4a} B(t_0, t_1)^2 \sigma^2 \times (1 - e^{-2at_1}).$$

Où $ZC_{0,T}$ correspond au prix de l'obligation zéro-coupon de maturité T à $t = 0$ et $f_{0,t}$ le taux *forward* instantané à t vu en $t = 0$ et défini comme $f_{0,t} = -\frac{d \ln ZC_{0,t}}{dt}$.

Une formule fermée permet de retrouver la courbe des taux initiale à l'aide des autres paramètres du modèle a et σ , du taux *forward* instantané à t vu en $t = 0$ et de sa dérivée première :

$$\theta_t = \frac{df_{0,t}}{dt} + af_{0,t} + \frac{\sigma^2}{2a} \times (1 - e^{-2at}).$$

À noter que la courbe des taux *forward* instantanée $f_{0,t}$ est en principe connue puisqu'elle dérive de la courbe des taux réglementaire définie par EIOPA. Toutefois, dans la mesure où elle se calcule à partir de la dérivée des zéro-coupons, cela suppose en principe de disposer de la courbe de zéro-coupons avec une résolution temporelle suffisamment fine pour pouvoir calculer une dérivée. En outre, il est ici nécessaire de calculer une dérivée seconde, la formule faisant apparaître, outre le taux *forward* instantané lui-même, la dérivée du taux *forward* instantané.

En pratique, la courbe de taux étant annuelle, cette condition est loin d'être remplie et il est nécessaire de procéder à une interpolation de la courbe de taux pour pouvoir calculer les dérivées ce qui introduit une erreur de réplification que l'on cherche à réduire autant que possible. Ce problème n'est pas un problème spécifique au modèle HW1. En effet, d'autres modèles nécessitent également de calculer des dérivées de la courbe de taux pour être en mesure de la reproduire.

Enfin, si ce modèle de taux présente l'avantage d'être relativement simple tout en autorisant une réplification parfaite de la courbe de taux en début de projection, il ne permet pas de reproduire fidèlement l'ensemble des déformations possibles de la courbe de taux. En effet, l'équation de diffusion du modèle HW1 ne contient qu'un seul aléa et deux paramètres à calibrer ce qui correspond à deux degrés de liberté. Dit autrement, le modèle HW1 n'est en mesure que de simuler des mouvements de la courbe des taux initiale à un degré de liberté.

Cependant, les taux d'intérêt ont une structure par terme montrant un certain nombre de ruptures de pentes ou d'inversion de courbure qui sont malheureusement impossibles à diffuser à partir de seulement 2 paramètres. Le modèle HW1 est donc limité pour refléter la richesse de cette structure par terme qu'on observe à l'aide des données de marché.

1.2.2.2 SECOND MODÈLE DE TAUX – G2++

Un autre modèle de taux, plus sophistiqué, sera également utilisé dans le cadre de cette étude : le modèle Gaussien à deux facteurs, appelé G2++. Ce modèle est présenté en détails dans le livre [Brigo & Mercurio, 2016] ainsi que dans le document d'orientation sur les générateurs de scénarios économiques de l'institut des actuaires [IA, 2018].

La dynamique du taux court r_t dans le modèle G2++ s'écrit :

$$r_t = x_t + y_t + \phi(t)$$

Avec :

- $(x_t)_{t>0}$ et $(y_t)_{t>0}$ deux processus stochastiques qui ont pour dynamique :
 - o $dx_t = -a \cdot x_t \cdot dt + \sigma dW_t^1$ et $x_0 = 0$
 - o $dy_t = -b \cdot y_t \cdot dt + \eta dW_t^2$ et $y_0 = 0$
- $(W_t^1)_{t>0}$ et $(W_t^2)_{t>0}$ sont deux mouvements browniens corrélés entre eux. Ils suivent tous les deux une loi normale centrée $N(0, t)$. On note $-1 < \rho < 1$ le coefficient de corrélation ;
- r_0, a, b, σ, η sont des constantes positives. Elles correspondent respectivement à la valeur initiale du taux court (r_0), aux vitesses de retour à la moyenne (a, b) ainsi qu'aux volatilités (σ, η) des deux processus $(x_t)_{t>0}$ et $(y_t)_{t>0}$;
- ϕ est une fonction déterministe permettant de reproduire exactement la courbe des taux initiale. En particulier, on a : $\phi(0) = r_0$.

En notant à nouveau $ZC_{0,T}$ l'obligation zéro coupon de maturité T à $t = 0$ et $f_{0,t}$ le taux *forward* instantané à t vu en 0 et défini comme $f_{0,t} = -\frac{d \ln ZC_{0,t}}{dt}$, la fonction ϕ ci-après permet de retrouver la structure par terme initiale des taux d'intérêt :

$$\phi(t) = f_{0,t} + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2}(1 - e^{-bt})^2 + \rho \frac{\sigma\eta}{ab}(1 - e^{-at})(1 - e^{-bt})$$

De manière similaire au modèle HW1, la courbe de taux à chaque instant est ainsi calculée via une formule fermée à partir des paramètres du modèle et du taux court. On peut ainsi calculer le zéro-coupon de maturité T à l'instant t à l'aide de la formule :

$$ZC_{t,T} = A(t, T)e^{[-B(a,t,T)x_t - B(b,t,T)y_t]}$$

Où les fonctions A et B peuvent être calculées de la manière suivante :

- $A(t, T) = \frac{ZC_{0,T}}{ZC_{0,t}} \exp\left(\frac{1}{2}[V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)]\right)$
- $B(z, t, T) = \frac{1 - e^{-z(T-t)}}{z}$
- Avec : $V(t, T) = \frac{\sigma^2}{a} \left[T - t + \frac{2e^{-a(T-t)}}{a} + \frac{e^{-2a(T-t)}}{2a} - \frac{3}{2a} \right] + \frac{\eta^2}{b} \left[T - t + \frac{2e^{-b(T-t)}}{b} + \frac{e^{-2b(T-t)}}{2b} - \frac{3}{2b} \right] + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left[T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right]$

On remarque ainsi que la fonction $ZC_{t,T}$ ne fait intervenir que les taux *forward* et pas leurs dérivés, contrairement au modèle HW1.

1.2.2.3 CALCUL DU DÉFLATEUR

Quel que soit le modèle de taux utilisé, le déflateur nécessaire à l'actualisation des flux dans le calcul du *Best Estimate* est calculé comme l'inverse du numéraire, c'est-à-dire :

$$D_t = e^{-\int_0^t r_u du}$$

Où $(r_t)_{t>0}$ le processus de taux court .

1.2.2.4 MODÉLISATION DES ACTIFS INDICIELS

Les actions ainsi que les actifs immobiliers sont traités comme des actifs indiciels et modélisés au travers d'un modèle de *Black & Scholes* avec détachement de dividendes. La dynamique du sous-jacent S_t suit le processus stochastique suivant :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t dW_t,$$

Où :

- $(r_t)_{t>0}$ le processus de taux court nominal issu (i) soit du modèle Hull and White à un facteur, (ii) soit du modèle G2++ ;
- σ_t est un vecteur de volatilité implicites. Il est constant pour l'indice immobilier et dépend du temps pour l'indice action ;
- W_t un mouvement brownien qui suit une loi normale centrée $N(0, t)$.

Par simplification et contrairement au modèle Hull and White, les volatilités retenues ne sont pas à proprement parler calibrées de sorte à retrouver les prix des options d'achat, les *calls*. La volatilité utilisée est directement celle observée sur les marchés financiers.

Dans les deux cas, on considère que l'indice distribue un dividende ou un loyer aléatoire à chaque pas de temps de projection correspondant à la réalisation d'une loi normale centrée au niveau de dividendes ou de loyers historiques. Le dividende ou le loyer est soustrait au *total return* S_t qu'on observe en sortie du générateur de scénarios économiques.

1.2.2.5 STRUCTURE DE CORRÉLATION DU GÉNÉRATEUR DE SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES

S'agissant des corrélations entre les browniens des différentes dynamiques, nous avons retenu une structure de dépendance gaussienne avec des niveaux définis à dire d'expert :

Tableau 1.3 – Structure de corrélation des GSE

Corrélations	Taux	Action	Immobilier
Taux	100%	0%	0%
Action		100%	50%
Immobilier			100%

1.3 RÉPLICATION DU MODÈLE ALM

1.3.1 POURQUOI RÉPLIQUER LE MODÈLE ALM ?

À l'échelle d'un organisme d'assurance, le modèle ALM utilisé pour le calcul de la meilleure estimation des engagements d'assurance vie est susceptible d'être assez lourd à manipuler et coûteux en termes de temps de calcul. En effet, le bilan d'un organisme qui distribue des contrats auprès de plusieurs dizaines de milliers, voire plusieurs centaines de milliers d'assurés, est complexe. En outre, la réglementation Solvabilité 2 impose aux organismes de modéliser et de projeter leurs portefeuilles à une granularité très fine, qui s'approche parfois de la maille d'un assuré. Par conséquent, le calcul de la meilleure estimation des engagements d'assurance vie d'un organisme via son modèle ALM peut prendre de quelques minutes à plusieurs heures de temps de calcul.

Par ailleurs, le calcul de l'exigence en capital réglementaire (SCR) selon la Formule Standard nécessite de projeter plusieurs fois le bilan à l'aide du modèle ALM en choquant certaines hypothèses. Ainsi, réaliser le calcul de l'exigence en capital réglementaire pour Solvabilité 2 nécessite entre autres de réévaluer le bilan de l'assureur dans une dizaine de situations choquées et par conséquent, au moins autant d'utilisations du modèle ALM pour déterminer la somme des flux financiers actualisés.

Pour l'ensemble de ces raisons, il est parfois utile de disposer d'une approximation de ce modèle ALM pour réaliser certains travaux qui nécessitent de nombreux *runs* du modèle ALM. Quelques exemples d'applications sont présentés ci-après.

1.3.1.1 OUTIL D'ANALYSE POUR L'ASSUREUR – GESTION DES RISQUES ET PILOTAGE DE L'ENTREPRISE

Tout d'abord, comme évoqué précédemment, le modèle de projection utilisé pour déterminer les flux futurs actualisés est complexe et assez lourd à manipuler. Le calibrage et l'optimisation de ce modèle est par conséquent un processus lourd qui nécessite de nombreuses itérations.

Ensuite, l'assureur peut être amené à utiliser son modèle de projection pour prendre certaines décisions stratégiques et dans le cadre de sa gestion des risques. En effet, en dehors de la production des chiffres prudentiels à chaque arrêté, d'autres travaux nécessitent une utilisation importante du modèle ALM.

On peut citer à titre d'exemples :

- **La définition d'une nouvelle stratégie d'allocation d'actifs.** Dans ce cas, l'organisme d'assurance est naturellement amené à évaluer quel serait l'impact de stratégies d'allocation différentes sur sa solvabilité et sur les indicateurs Solvabilité 2 ;
- De manière générale, **la mise en œuvre et le suivi des futures décisions de gestion dans le modèle ALM** nécessitent de nombreux *runs* du modèle ALM afin d'évaluer leurs impacts sur le bilan prudentiel et le capital de solvabilité requis défini par Solvabilité 2 (SCR) ;
- **La définition de l'appétence au risque** qui correspond au « niveau de risque maximal que l'organisme accepte de prendre pour atteindre ces objectifs stratégiques⁴. » Cette appétence au risque peut se traduire par la définition d'une cible et/ou d'un intervalle acceptable pour le ratio de solvabilité de la société ;
- **Des études de sensibilités de la solvabilité de l'assureur face à un environnement changeant :** par exemple suite à des mouvements significatifs sur les marchés financiers (par ex. taux durablement bas, baisse significative des marchés actions) ou des évolutions réglementaires importantes.

⁴ Cette définition de l'appétence au risque correspond à celle proposée par le groupe de travail ORSA de l'Institut des Actuaire [Lasfargyès et al., 2014].

Ces différents travaux sont susceptibles de nécessiter un grand nombre de *runs* du modèle ALM, que ce soit pour évaluer le bilan prudentiel ou le SCR sous différentes hypothèses.

Dans chacun de ces cas, l'utilisation d'un modèle approché, ou *proxy*, suffisamment précis et performant du modèle ALM peut être utile pour effectuer les études de sensibilité et les chiffrages des impacts prudentiels nécessaires à ces travaux.

1.3.1.2 ORSA

Dans le cadre des travaux réglementaires imposés par Solvabilité, l'évaluation interne des risques et de la solvabilité (*Own Risk and Solvency Assessment* ou ORSA) est définie par l'article 45 de la directive Solvabilité 2 [S2] transposé à l'article R. 354 du code des assurances :

« Dans le cadre de son système de gestion des risques, chaque entreprise d'assurance et de réassurance procède à une évaluation interne des risques et de la solvabilité. Cette évaluation porte au moins sur les éléments suivants :

- a) le besoin global de solvabilité, compte tenu du profil de risque spécifique, des limites approuvées de tolérance au risque et de la stratégie commerciale de l'entreprise ;
- b) le respect permanent des exigences de capital prévues au chapitre VI, sections 4 et 5, et des exigences concernant les provisions techniques prévues au chapitre VI, section 2 ;
- c) la mesure dans laquelle le profil de risque de l'entreprise s'écarter des hypothèses qui soutiennent le capital de solvabilité requis prévu à l'article 101, paragraphe 3, calculé à l'aide de la formule standard conformément au chapitre VI, section 4, sous-section 2, ou avec un modèle interne partiel ou intégral conformément au chapitre VI, section 4, sous-section 3. »

L'ORSA est un processus interne d'évaluation des risques et de la solvabilité de l'assureur. Il permet d'identifier, de mesurer et de gérer les éléments de nature à modifier la solvabilité ou la situation financière de l'entreprise. Dans le cadre de cet exercice, l'organisme est amené à identifier tous les risques auxquels il est exposé, tout en tenant compte de leurs modifications au cours du temps dans le cadre du plan stratégique de l'entreprise.

Ainsi, l'assureur est amené à définir certains scénarios qui s'étendent sur plusieurs années et dans lesquels ils est amené à réévaluer son bilan et donc la meilleure estimation de ses engagements.

Pour ce processus, l'organisme est donc amené à évaluer à plusieurs dates et dans différents scénarios son bilan prudentiel, son SCR et son ratio de solvabilité. L'utilisation d'un proxy du modèle ALM est une problématique qui a déjà été envisagée dans différents mémoires d'actuariat. On citera par exemple [Haguet, 2013], [Traoré et Keilani, 2014], [Mechergui, 2018], [Buzzi, 2017] ou encore [Godin, 2019].

1.3.1.3 MODÈLES INTERNES

La norme prudentielle Solvabilité 2 prévoit que l'exigence en capital réglementaire, le SCR, puisse être calculée soit en suivant la formule standard (FS), soit à l'aide d'un modèle interne (MI) préalablement approuvé par l'autorité de supervision compétente.

Plus précisément, le SCR correspond au montant de fonds propres économiques que l'organisme doit détenir pour faire face à un risque de ruine à 1 an. Il est défini mathématiquement comme la *Value at Risk* à 1 an au quantile 99,5% de la distribution de pertes en fonds propres de l'organisme.

Par conséquent, un organisme d'assurance soumis à Solvabilité 2 qui utilise un modèle interne pour le calcul de son SCR entreprise doit estimer la densité de probabilité prévisionnelle⁵ (PDF) de ses fonds

⁵ Défini à l'article R.352-1 du code des assurances comme « une fonction mathématique qui affecte à un ensemble exhaustif d'événements futurs mutuellement exclusifs une probabilité de réalisation. »

propres (*Basic Own Funds* - BOF) à l'horizon d'un an. La densité de probabilité prévisionnelle des fonds propres à l'horizon d'un an est inconnue et ne peut être modélisée directement mais peut se déduire d'un échantillon de réalisations simulées. Afin de déterminer son SCR, l'assureur est amené en pratique à simuler des réalisations de ses fonds propres à un an.

Le niveau actuel des fonds propres économiques correspond schématiquement à la différence entre la valeur économique de son actif et celle de ses engagements d'assurance. En notant BOF_t la valeur des fonds propres de la société à l'instant t , on peut donc écrire :

$$BOF_t = f_A^t(r^t) - f_P^t(r^t)$$

Avec :

- r^t le vecteur de facteurs de risques auxquels est sensible le bilan de l'assureur ;
- $r \mapsto f_A^t(r)$ l'application qui donne la valeur de marché du portefeuille d'actifs de la société à l'instant t en fonction de la valeur de r ;
- $r \mapsto f_P^t(r)$ l'application qui donne la valeur économique des engagements de la société à l'instant t en fonction de la valeur de r . Cette application correspond en pratique au modèle ALM.

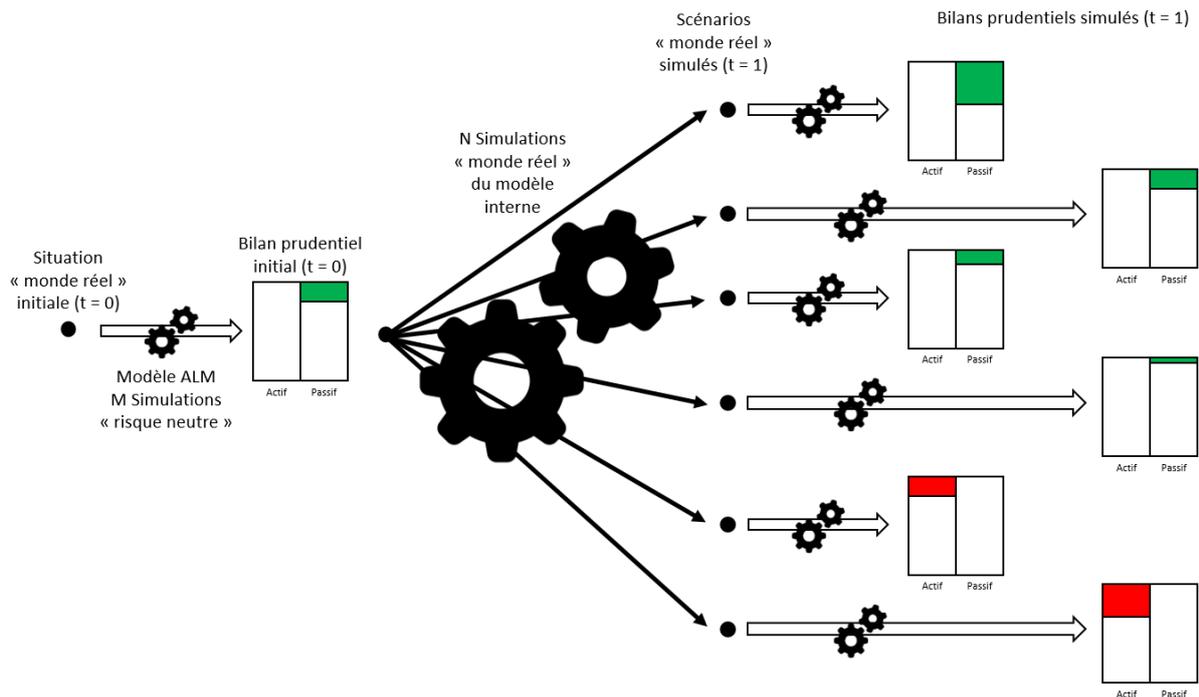
Le calcul du SCR repose sur deux grandes étapes :

- La modélisation de l'évolution des facteurs de risques entre la situation initiale ($t=0$) et la situation projetée (à $t=1$ an) dans les **simulations primaires** dans l'univers « monde réel » ;
- La modélisation des fonds propres de l'organisme dans chaque scénario j de la simulation primaire. Ce calcul repose théoriquement sur une valorisation à l'aide de la méthode Monte Carlo au sein du modèle ALM sur un certain nombre de simulations dans l'univers risque-neutre, appelées **simulations secondaires**.

$$BOF_{scénario_RW_j}^1 = f_A^1(r_{scénario_RW_j}^{t=1}) - f_P^1(r_{scénario_RW_j}^{t=1})$$

Enfin, le SCR s'obtient en calculant la différence entre les fonds propres correspondant au quantile 99,5% de la distribution à $t=1$ et les fonds propres initiaux : $SCR = BOF^0 - BOF_{Quantile\ 99.5\%}^1$.

Figure 1.4 – Schéma de principe du calcul du SCR à l'aide d'un modèle interne



En assurance vie, il existe des interactions entre l'actif et le passif, si bien que la fonction f_P dépend du rendement de l'actif en raison de mécanismes comme la participation aux bénéfices.

Toutefois, dans un modèle interne, le modèle ALM est en général trop complexe et trop coûteux en termes de temps de calcul pour pouvoir être utilisé dans chacun des scénarios primaires du modèle interne. En effet, il faudrait simuler M trajectoires risque-neutres pour chacune des N réalisations des facteurs de risque, soit un total de $N \cdot M$ trajectoires. En pratique, les entreprises génèrent plusieurs dizaines de milliers de scénarios de facteurs de risque à un an pour évaluer leur SCR. Avec $N \approx 100,000$ et $M \approx 1,000$ par exemple, cela supposerait de générer, pour chaque évaluation du SCR, environ 100 millions de trajectoires risque neutre et d'évaluer les flux financiers associés aux engagements le long de chacune de ces trajectoires, ce qui représenterait un temps et un coût de calcul très élevé.

Aussi, en pratique, les assureurs ne calculent pas la valeur des engagements pour chaque valeur du facteur de risque à l'aide de leur modèle ALM. Ils approximent leur modèle ALM f_P via un modèle approché ou proxy, noté $r \mapsto \tilde{f}_P(r)$, qui permet généralement d'évaluer directement la valeur des passifs pour toute valeur r du facteur de risque. L'enjeu pour les assureurs est ici de trouver la meilleure approximation \tilde{f}_P de f_P pour tout r à partir d'un budget d'information minimal sur f_P , c'est-à-dire à partir d'un minimum de *runs* complets du modèle ALM en situation stressée $f_P(r_i)$.

1.3.2 MÉTHODES DE RÉPLICATION

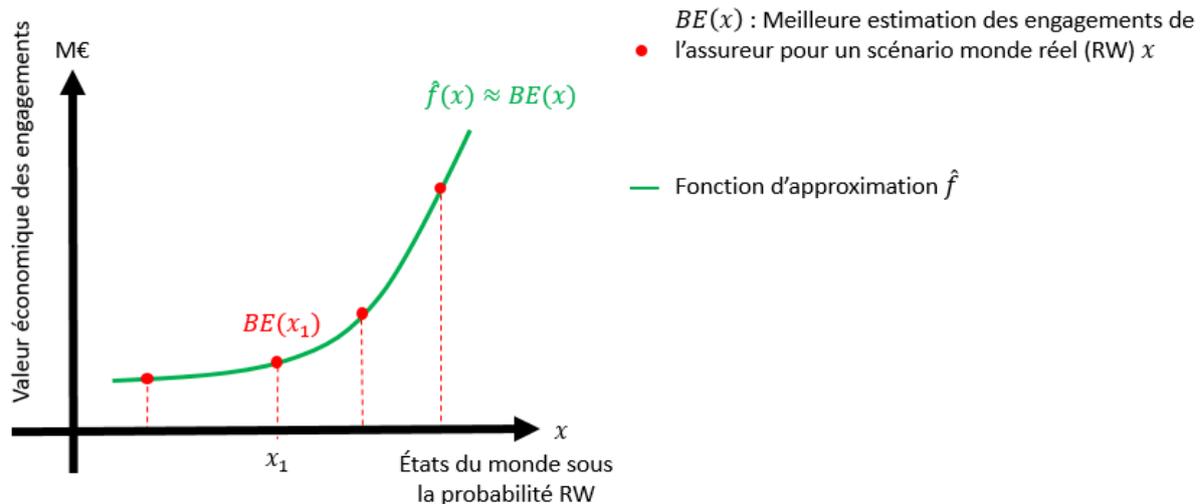
Il existe donc différentes applications dans lesquelles la définition et l'utilisation d'un proxy du modèle ALM servant au calcul du BEL et du SCR des organismes d'assurance vie soumis à Solvabilité 2 est nécessaire.

Cette section présente succinctement différentes approches utilisées pour approximer le modèle ALM servant au calcul du BEL. Ces méthodes sont notamment pour le calcul du capital de solvabilité requis (SCR) que ce soit dans le cadre d'un modèle interne ou dans le cadre de l'ORSA.

1.3.2.1 L'APPROCHE CURVE FITTING

Cette méthode consiste à estimer précisément la valeur du BEL dans un certain nombre de configurations stressées à l'aide du modèle de projection complet. Ensuite une fonction d'approximation généralement définie par morceaux est calibrée afin d'interpoler et d'extrapoler les différentes valeurs de BE obtenues à l'aide du modèle ALM. Cette approche repose sur un petit nombre de configurations stressées aussi appelées scénarios primaires, choisies à jugement d'expert et un grand nombre de scénarios secondaires correspondant aux trajectoires économiques nécessaires à la valorisation du BEL dans le modèle ALM.

Figure 1.5 – Illustration de l'approche *Curve Fitting* pour approximer le *Best Estimate*

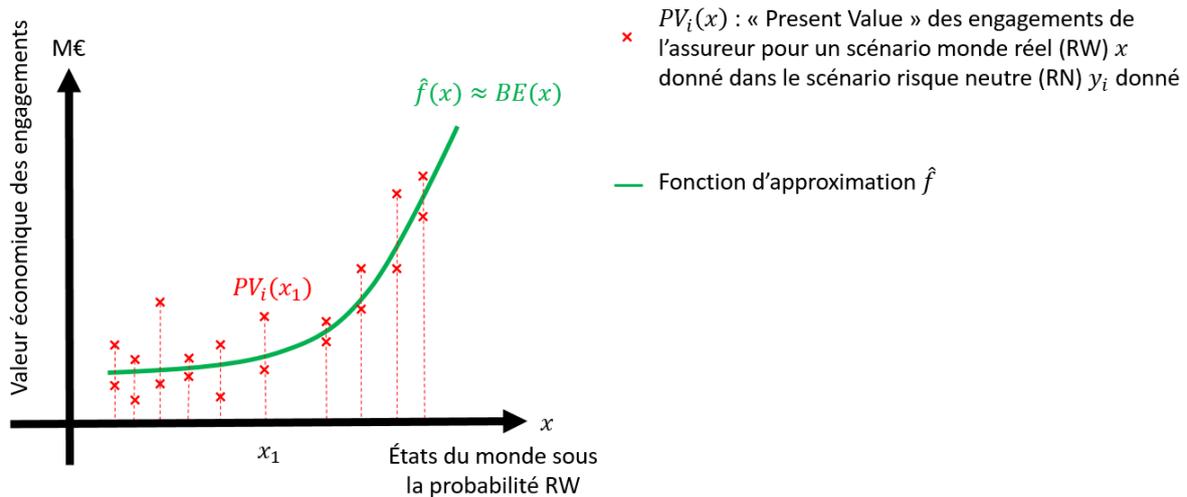


1.3.2.2 L'APPROCHE LEAST SQUARES MONTE CARLO

Cette méthode repose sur la mutualisation des (i) scénarios primaires d'une part, correspondant aux différentes configurations stressées et (ii) des scénarios secondaires d'autre part, correspondant aux trajectoires économiques nécessaires à la valorisation économique des passifs d'assurance vie dans le modèle ALM.

Au lieu de calculer précisément le BE dans une configuration donnée à l'aide d'un nombre conséquent de scénarios secondaires comme c'est le cas pour le calcul central du bilan prudentiel, il s'agit de calculer le BE de manière approchée, en utilisant seulement un nombre restreint de simulations secondaires risque-neutres. Ainsi, en utilisant un faible nombre de scénarios secondaires pour chacune des configurations stressées que sont les scénarios primaires sous la probabilité « monde réel », on obtient des estimations peu précises et bruitées du BE pour chacune de ces configurations stressées. Toutefois, il est possible de réduire le bruit associé à ces mauvaises estimations du BE en effectuant une régression aux moindres carrés sur l'ensemble des estimations obtenues.

Contrairement à la méthode du *Curve Fitting* présentée précédemment, la méthode *Least Square Monte Carlo* repose sur (i) un grand nombre de configurations stressées aussi appelées scénarios primaires et (ii) un petit nombre de scénarios secondaires correspondant aux trajectoires économiques nécessaires à la valorisation du BE dans le modèle ALM.

Figure 1.6 – Illustration de l'approche *Least Squares Monte Carlo* pour approximer le *Best Estimate*

1.3.2.3 LA MÉTHODE DU PORTEFEUILLE RÉPLIQUANT

Cette méthode consiste à construire un portefeuille d'actifs financiers qui va se comporter comme les flux financiers futurs de passif d'assurance. Cette méthode repose sur l'idée suivante : en l'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur d'un instrument financier est entièrement déterminée par la structure de ses flux financiers futurs, aussi appelés *cash flows*.

En supposant qu'il est possible de répliquer l'ensemble des flux financiers futurs associés aux contrats d'assurance vie à l'aide d'instruments financiers comme des obligations ou des instruments financiers à terme par exemple, il est alors possible de déterminer la valeur économique de ces passifs d'assurance.

On notera par la suite N_{RP} le nombre d'instruments financiers $Inst_k$ constituant le portefeuille répliquant et ω_k le poids de l'instrument $Inst_k$ dans ce portefeuille. La fonction d'approximation correspond à :

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=1}^{N_{RP}} \omega_k \cdot Inst_k(x) \approx f(x)$$

L'enjeu est donc de choisir les instruments financiers $Inst_k$ pertinents pour approximer les *cash flows* de passif et d'optimiser les poids ω_k afin de répliquer au mieux la valeur des passifs. Le choix des instruments financiers composant le portefeuille répliquant est généralement déterminé à dire d'expert en fonction des options et garanties comprises dans les contrats d'assurance. Le calibrage des poids repose quant à lui généralement sur une régression aux moindres carrés.

1.3.2.4 LES MÉTHODES D'APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE SUPERVISÉ

L'apprentissage automatique correspond à l'étude des algorithmes et des techniques d'intelligence artificielle dont les performances sont améliorées par l'expérience et l'ajout de données supplémentaires.

L'apprentissage automatique supervisé consiste à prédire une variable cible $y \in Y$ à partir de variables explicatives $x \in X$ et d'un modèle $f \in F$ qui va relier les variables explicatives à la variable cible : $f(x) = y$. En particulier, dans le cas de l'apprentissage supervisé, le modèle proxy f qui relie x et y est estimé à partir d'un échantillon d'apprentissage $D_n = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ dans lequel la valeur de la variable cible y_i est connue pour chaque observation des variables explicatives x_i .

L'approximation d'un modèle ALM est un exemple de problème de régression dans lequel la variable cible y correspond à l'une ou plusieurs sorties du modèle ALM et les variables explicatives x correspondent aux entrées du modèle.

Certaines de ces méthodes comme les forêts aléatoires et les perceptrons multicouches sont détaillées dans le chapitre suivant.

1.3.2.5 EXEMPLES D'UTILISATION DE CES MÉTHODES DANS LA LITTÉRATURE ACTUARIELLE

Plusieurs mémoires d'actuariat s'intéressent à la mise en œuvre d'un proxy à l'aide de ces méthodes que ce soit dans le cadre du calcul du BE ou du SCR sous Solvabilité 2. Parmi les travaux récents, on citera par exemple :

- [Mechergui, 2018] pour la méthode *Curve Fitting* ;
- [Traoré et Keilani, 2014] et [Godin, 2019] pour la méthode *Least Squares Monte Carlo* ;
- [Trabelsi, 2010] pour la méthode du portefeuille répliquant ;
- [Buzzi, 2017] et [Frerix, 2018] pour les méthodes d'apprentissage supervisé comme les réseaux de neurones et les forêts aléatoires.

Moody's Analytics a par ailleurs publié une étude de cas comparant la méthode du portefeuille répliquant avec la méthode *Least Squares Monte Carlo* dans le cadre de contrats d'assurance vie allemands au sein d'un modèle interne Solvabilité 2 [Turnbull, 2014].

1.3.3 PROBLÉMATIQUE

Comme présenté précédemment, les modèles ALM développés par les organismes d'assurance pour le calcul des provisions techniques vie prudentielles sont souvent lourds et coûteux en termes de temps de calcul. Pour cette raison, il peut être intéressant d'approximer le modèle ALM pour obtenir des valeurs approchées de BEL de manière plus rapide et plus souple. Ce type d'approximations est courant dans le cadre d'analyses, d'études de sensibilité ou dans d'autres applications réglementaires comme l'ORSA ou les modèles internes.

Un des objectifs de ce mémoire est d'interroger la capacité des méthodes d'apprentissage automatique supervisé à approximer le modèle ALM nécessaire au calcul du *Best Estimate* d'assurance vie dans le cadre d'un portefeuille de contrats en euros avec participation aux bénéficiaires. Ce mémoire a également pour objectif d'explorer l'utilisation des méthodes d'apprentissage automatique supervisé pour approximer de manière efficace le modèle ALM ainsi que d'étudier la robustesse des modèles approchés ainsi calibrés à des scénarios économiques provenant de GSE de classes différentes ou de calibrage alternatif.

2 APPROXIMATION DU MODÈLE ALM À PARTIR DE MÉTHODES D'APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE SUPERVISÉ

La section 2.1 présente différents modèles d'apprentissage automatique supervisés, à savoir les perceptrons multicouches qui sont un exemple de réseaux de neurones, les forêts aléatoires et un exemple de gradient *boosté*. La section 2.2 présente l'application de ces méthodes à la réplication du modèle ALM.

2.1 DIFFÉRENTS MODÈLES D'APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE

L'apprentissage automatique correspond à l'étude des algorithmes et des techniques d'intelligence artificielle dont les performances sont améliorées par l'expérience et l'ajout de données supplémentaires.

L'apprentissage automatique supervisé consiste à prédire une variable cible $y \in Y$ à partir de variables explicatives $x \in X$ et d'un modèle $f \in F$ qui va relier les variables explicatives à la variable cible : $f(x) = y$. Utiliser une méthode d'apprentissage automatique plutôt qu'une autre revient à se restreindre ou à modifier l'ensemble F des modèles possibles.

Dans le cas de l'apprentissage supervisé, le modèle f qui relie x et y est estimé à partir d'un échantillon d'apprentissage $D_n = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ dans lequel la valeur de la variable cible y_i est connue pour chaque observation des variables explicatives x_i . On utilise parfois le terme étiquette ou *label* pour désigner la valeur cible y_i correspondant à chaque observation des variables explicatives x_i .

Dans le cadre de l'apprentissage non supervisé, la valeur cible y_i correspondant à l'observation x_i n'est pas toujours connue.

Par ailleurs, on distingue généralement les problèmes de classification et de régression. La classification correspond au cas où la variable cible est qualitative ou plus généralement discrète : l'enjeu du modèle f est de prédire la classe $y \in Y$ la plus probable pour chaque $x \in X$.

La régression quant à elle correspond au cas où la variable cible est continue. Par la suite, seule la régression sera considérée car l'objectif est de prédire la valeur d'un *Best Estimate*.

Dans cette partie, plusieurs méthodes seront étudiées afin de comparer leurs performances :

1. Le perceptron multicouche qui est un exemple de réseau de neurones ;
2. Les arbres de décision et les forêts aléatoires ;
3. Le *gradient boosting* tel qu'implémenté dans l'algorithme XGBoost.

2.1.1 UN EXEMPLE DE RÉSEAU DE NEURONES ARTIFICIELS – LE PERCEPTRON MULTICOUCHE

2.1.1.1 PRINCIPE

Les réseaux de neurones artificiels sont des systèmes informatiques qui s'inspirent du fonctionnement des neurones biologiques. Les réseaux de neurones artificiels sont généralement constitués de plusieurs couches de neurones formels qui vont interagir entre eux.

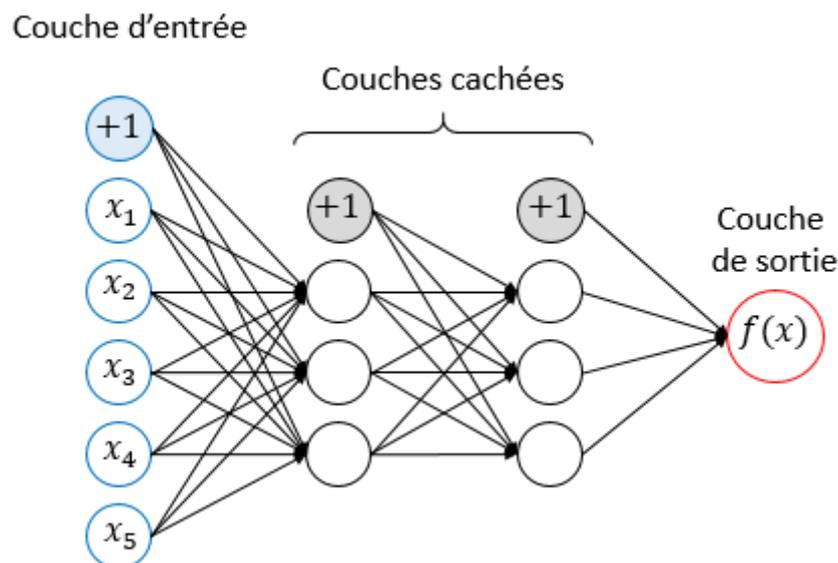
Le perceptron multicouche est un algorithme d'apprentissage automatique qui permet d'apprendre une fonction à partir de données d'apprentissage. C'est un exemple de réseaux de neurones organisé en plusieurs couches au sein desquelles une information circule de la couche d'entrée (*input layer*) vers la couche de sortie (*output layer*).

Le concept de perceptron a été inventé en 1957 par Frank Rosenblatt, psychologue américain connu pour ses travaux sur l'intelligence artificielle. Dans cette première version le perceptron proposé par Rosenblatt ne contient qu'une seule couche et n'avait qu'une seule sortie à laquelle toutes les entrées étaient connectées. On considère que c'est le premier système artificiel capable d'apprendre par expérience.

Un des principaux intérêts du perceptron multicouche est qu'il permet d'approximer une fonction non linéaire à des fins de classification ou de régression. Il se distingue de la régression logistique, couramment utilisée pour les problèmes de classification, par le fait qu'il permet d'empiler plusieurs couches non linéaires, appelées couches cachées entre la couche d'entrée et la couche de sortie.

La figure ci-dessous représente schématiquement un perceptron multicouche composé de 2 couches cachées, $H = 2$, comportant chacune 3 neurones et dans le cas de 5 variables explicatives, $x \in \mathbb{R}^5$. Les cercles « +1 » symbolisent les différents biais qui peuvent être ajoutés dans le réseau de neurones.

Figure 2.1 – Illustration d'un perceptron multicouche à 2 couches cachées



On se place par la suite dans un problème de régression qui consiste à prédire une variable cible $y \in \mathbb{R}$ à partir de r variables explicatives réelles $x \in \mathbb{R}^r$. Un perceptron multicouche adapté à ce problème est une fonction $f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ constituée des couches suivantes :

1. **La couche d'entrée (*input layer*)**. C'est la première couche du perceptron qui correspond aux variables explicatives $x \in \mathbb{R}^r$ correspondant aux entrées du problème de régression ;

2. **Les couches cachées (*hidden layers*)**. Un perceptron est constitué de H couches cachées. Chaque couche cachée est caractérisée par une matrice de poids $W^{(h)} \in \mathbb{R}^{n_{h-1} \times n_h}$ et d'un biais $b \in \mathbb{R}^{n_h}$ où n_h correspond à la taille de la couche $h \in \llbracket 1, H \rrbracket$. Chaque couche cachée prend comme entrée l'ensemble des sorties de la couche précédente. La sortie du neurone j de la couche cachée h sont calculés de la manière suivante :

$$x_j^{(h)} = \sigma \left(\sum_{i=1}^{n_{h-1}} w_{ji}^{(h)} \cdot x_i^{(h-1)} + b_j^{(h)} \right)$$

Où la fonction σ est appelée **fonction d'activation**. Cette fonction a pour but d'introduire une non-linéarité dans le fonctionnement du neurone. Les fonctions d'activation présentent généralement 3 régimes : en dessous du seuil, le neurone est désactivé ; autour du seuil, le neurone est dans une phase de transition ; et au-dessus du seuil, le neurone est activé. Les fonctions sigmoïdes comme la fonction tangente hyperbolique ou la fonction logistique ainsi que la fonction ReLu $\varphi(x) = \max(0; x)$ sont des exemples classiques de fonctions d'activation.

3. **La couche de sortie (*output layer*)**. C'est la dernière couche du réseau. Elle prend comme entrée l'ensemble des sorties de la dernière couche cachée et elle est caractérisée par un vecteur de poids $W^{(s)} \in \mathbb{R}^{n_H}$ et d'un biais $b \in \mathbb{R}$ où n_H correspond à la taille de la dernière couche cachée H . La sortie est donnée par la formule suivante :

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{n_H} w_i^{(s)} \cdot x_i^{(H)} + b$$

L'apprentissage d'un perceptron multicouche correspond au processus permettant de fixer les poids associés à chacun des neurones. Ce calibrage se fait généralement par rétro-propagation du gradient de l'erreur entre la prédiction $\hat{y}_i = f(x_i)$ faite par le perceptron et la valeur cible y_i . L'idée de la rétro-propagation du gradient de l'erreur est de corriger les erreurs en fonction de l'importance des neurones qui ont participé à la formation du résultat erroné : les poids associés aux neurones qui contribuent le plus à générer une erreur importante se verront modifiés de manière significative.

En pratique, les principales étapes de l'algorithme de rétro-propagation de l'erreur sont les suivantes :

- 1) Présentation d'un exemple d'entraînement au réseau : $(x_i, y_i) \in D_n$
- 2) Comparaison de la sortie du réseau $\hat{y}_i = f(x_i)$ avec la sortie ciblée y_i
- 3) Calcul de l'erreur en sortie de chacun des neurones du réseau
 - a) Calcul, pour chacun des neurones, de la valeur de sortie $x_j^{(h)}$ qui aurait été correcte
 - b) Définition de l'augmentation ou de la diminution nécessaire pour obtenir cette valeur (erreur locale).
 - c) Ajustement du poids $w_{ji}^{(h)}$ de chaque connexion vers l'erreur locale la plus faible
 - d) Attribution d'une pénalisation à tous les neurones précédents
 - e) Recommencer à partir de l'étape 3.a) sur les neurones précédents en utilisant la pénalisation de l'étape 3.d) comme erreur

2.1.1.2 EXEMPLE D'IMPLÉMENTATION – MLPREGRESSOR DE SCIKIT LEARN

La classe *MLPRegressor* de la librairie *scikit learn* permet d'implémenter un perceptron multicouche grâce à l'algorithme de rétro-propagation de l'erreur adapté aux problèmes de régression. Il est notamment caractérisé par le fait qu'il ne fait pas appel à une fonction d'activation au niveau de la couche de sortie. Par défaut, il utilise l'erreur quadratique comme fonction de perte pour l'optimisation du modèle.

Les principaux hyper-paramètres à calibrer lors de l'utilisation d'un tel modèle sont présentés dans le tableau ci-après. On appelle dans ce mémoire hyper-paramètres les paramètres structurels des modèles étudiés ainsi que les paramètres de l'algorithme d'apprentissage qui sont à calibrer à jugement d'expert en amont de l'apprentissage.

Tableau 2.1 – Description des principaux hyper-paramètres à calibrer d'un perceptron multicouche de la classe *MLPRegressor*

Nom du paramètre	Description du paramètre
<code>hidden_layer_sizes</code>	Définition de la structure du perceptron : nombre de couches cachées et nombre de neurones artificiels de chaque couche
<code>activation</code>	Fonction d'activation des couches cachées
<code>solver</code>	Solveur utilisé lors du calibrage
<code>alpha</code>	Terme de régularisation (norme L2) pour l'optimisation
<code>max_iter</code>	Nombre maximal d'itérations pour faire converger le calibrage

Il existe par ailleurs un nombre important de paramètres qui dépendent du choix du solveur et de la fonction d'activation qui est retenu.

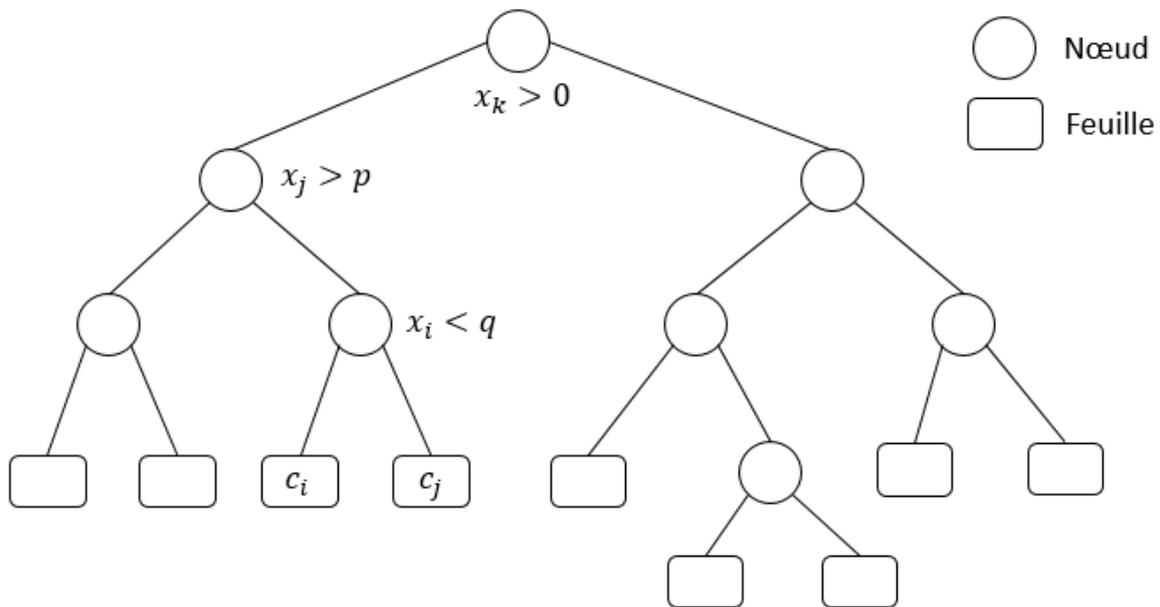
2.1.2 FORÊTS ALÉATOIRES

2.1.2.1 APPRENTISSAGE PAR ARBRE DE DÉCISION

L'apprentissage par arbre de décision est une méthode d'apprentissage qui repose sur l'utilisation d'un arbre de décision comme modèle prédictif.

Un arbre de décision est un outil d'aide à la décision qui représente un ensemble de choix sous la forme d'un arbre. Il peut être décrit comme un diagramme de flux de données où chaque **nœud** décrit un test sur une variable d'apprentissage (c'est-à-dire une composante de x), chaque **branche** représente un résultat du test, et chaque **feuille** contient la valeur de la variable cible y (c'est à dire une valeur numérique pour les arbres de régression).

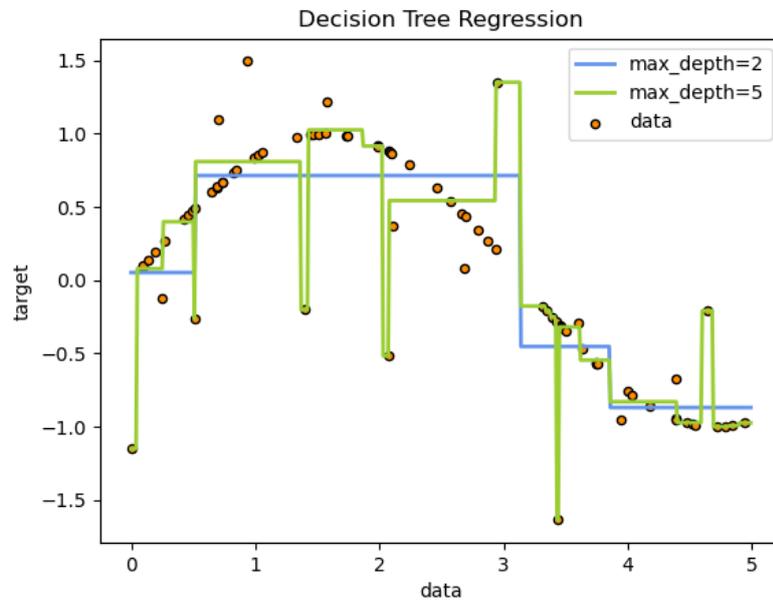
Figure 2.2 – Illustration d'un arbre de décision



Un arbre aléatoire segmente l'espace des variables explicatives X en un ensemble de sous-parties. Dans le cadre d'une régression, une valeur y est associée à chaque sous-parties de X définies par l'arbre. À titre d'exemple, dans le cas d'une régression d'une fonction d'une variable réelle, la méthode d'apprentissage par arbre de décision va définir un modèle f correspondant à une fonction en escalier.

De manière général, on peut écrire : $f(x_i) = c_{q(x)}$ où c_t correspond à la valeur associée à la t -ième feuille de l'arbre. Dans le cas où les variables explicatives x correspondent à p variables réelles continues, la fonction $x \mapsto q(x)$ est définie de $\mathbb{R}^p \rightarrow \llbracket 1, T \rrbracket$ où T est le nombre de feuilles de l'arbre.

À titre d'illustration, l'utilisation de l'algorithme d'apprentissage par arbre de décision du package *scikit learn* sur un exemple à une dimension donne le résultat suivant.

Figure 2.3 – Exemple de l'utilisation de l'algorithme *Decision Tree Regression* de *scikit learn*

Lecture : L'algorithme *Decision Tree Regressor* est ici utilisé pour approximer une fonction sinus à laquelle il est ajouté un bruit blanc gaussien. Deux estimateurs sont présentés sur ce graphe : un premier obtenu avec une profondeur maximale de l'arbre de 2 et un second avec une profondeur maximale de 5 en vert. Plus la profondeur maximale est élevée, plus l'estimateur obtenu sera complexe. On voit ici, que l'estimateur vert a tendance au sur-apprentissage : il a tendance à répliquer le bruit qui s'ajoute à la fonction sinusoidale ce qui le rendra a priori moins robuste que l'estimateur bleu sur d'autres jeux de données similaires qui n'auront pas servi à l'apprentissage [Scikit-learn, 2011].

Les méthodes d'apprentissage par arbre de décision sont donc les algorithmes permettant de définir un arbre de décision pertinent pour prédire une variable cible $y \in Y$ à partir de variables explicatives $x \in X$. Ces algorithmes sont construits en divisant l'espace des variables explicatives X en choisissant à chaque étape une variable explicative qui réalise le meilleur partage. Pour choisir la variable de séparation sur un nœud, les algorithmes testent les différentes variables d'entrée possibles et sélectionnent celle qui maximise un critère donné.

Une des méthodes les plus classiques, appelée CART, pour *Classification and Regression Tree* [Breiman, 1984], repose sur l'utilisation de partitions binaires récursives. L'espace est d'abord séparé en deux régions, en choisissant une variable d'entrée et en définissant un seuil sur cette variable. Ensuite, les régions définies sont séparées en deux nouvelles sous-régions, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt mette fin au développement d'une branche de l'arbre.

La meilleure solution pour décider de la variable de séparation et du seuil à appliquer est de procéder de manière exhaustive. En testant pour chacune des variables explicatives et en parcourant dans l'ordre de cette variable les observations x_i , la meilleure séparation est celle qui minimise un critère d'erreur. Dans le cas de l'algorithme *Decision Tree Regressor* de la librairie *scikit learn* utilisée, l'erreur minimisée est l'erreur quadratique moyenne.

Les arbres de décision sont très utiles pour analyser rapidement un jeu de données ou pour obtenir un prototype modèle de classification ou de régression. En effet, un arbre de décision est généralement facile à visualiser, à comprendre et à interpréter. On parle de modèle *white box* contrairement à d'autres modèles plus difficiles à interpréter comme par exemple les réseaux de neurones, qui sont eux catégorisés comme des modèles *black box*.

Par ailleurs, ils nécessitent peu de préparation de données et sont capables de prendre en compte des données continues et discrètes (ou catégorielles).

Toutefois, face à un problème complexe ou à un jeu de données trop grand, les arbres de décisions peuvent avoir tendance au sur-apprentissage (*overfitting*). Le sur-apprentissage, ou sur-ajustement, correspond à une analyse statistique ou un modèle qui correspond trop précisément à un échantillon de données. Ainsi, cette analyse ou ce modèle peuvent ne pas correspondre à des données supplémentaires ou ne pas prévoir de manière fiable les observations futures.

En outre, les arbres de décision sont généralement peu robustes. En effet, des changements légers dans la base de données d'apprentissage est susceptible de largement modifier l'arbre de décision. Par exemple, des changements légers concernant les données évaluées lors des premiers nœuds de l'arbre peuvent modifier ces nœuds et par conséquent modifier radicalement l'ensemble des branches.

2.1.2.2 AGRÉGATION D'ARBRES DE DÉCISION – L'EXEMPLE DE LA FORÊT ALÉATOIRE

Afin d'améliorer la robustesse des arbres de décisions CART et pour réduire la variance de ces estimateurs, des approches ont été développées pour combiner plusieurs arbres de décisions. On distingue généralement les *averaging methods* des *boosting methods*. Les méthodes de *gradient boosting* seront présentées dans la section suivante.

Le principe des méthodes d'établissement de la moyenne, *averaging method*, est de construire un estimateur à partir de plusieurs estimateurs indépendants et de faire la moyenne des prédictions faites par les estimateurs sous-jacents.

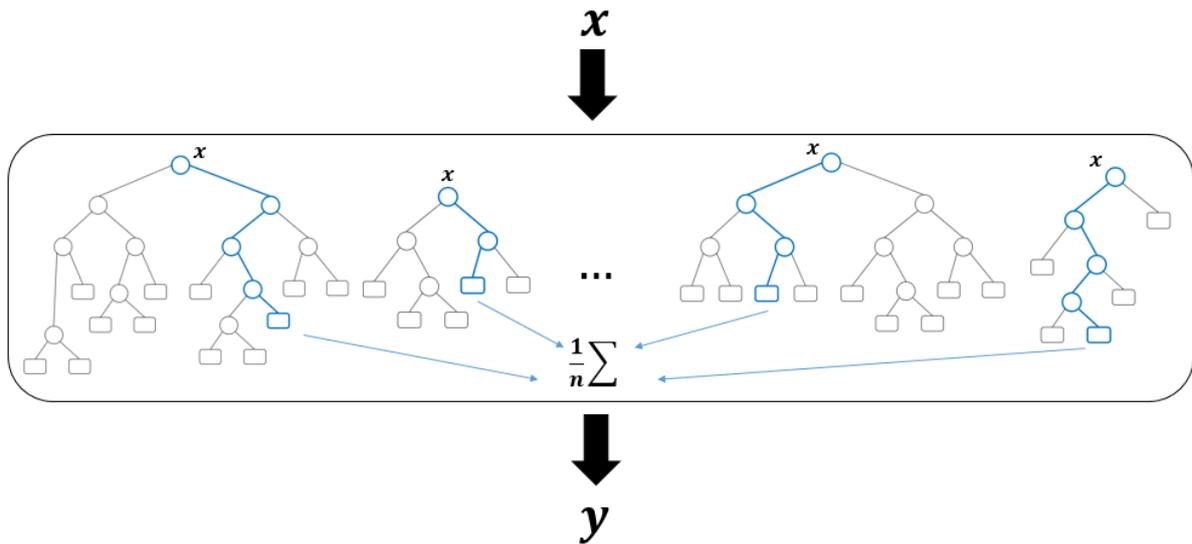
Dans le cas des arbres de décisions CART, on appelle forêt aléatoire un estimateur construit à partir de plusieurs arbres de décisions. En effet, la moyenne des prédictions de plusieurs arbres de décisions est généralement plus juste et surtout plus robuste que les prédictions faites par un seul arbre de décision CART connu pour être peu robuste et sensible au sur-apprentissage.

En reprenant les notations utilisées précédemment, l'utilisation d'une forêt aléatoire f pour un problème de régression s'écrit :

$$\hat{y}_i = f(x_i) = \sum_{k=1}^K f_k(x_i)$$

Où \hat{y}_i correspond à la prédiction de la variable cible à partir des variables explicatives x_i correspondantes, K correspond au nombre d'échantillons *bootstrap* des données d'apprentissage et les $f_k \in F$ correspondent estimateurs de base qui sont, dans le cas d'une forêt aléatoire, des arbres de décision CART.

Figure 2.4 – Illustration d'une forêt aléatoire



Comme indiqué précédemment, le principe d'une forêt aléatoire est de constituer un ensemble d'arbres de décision indépendants et de considérer la moyenne de leurs prédictions. Le premier algorithme reposant sur ce principe a été proposé par Tin Kam Ho en 1995 [Ho, 1995]. Cet algorithme a notamment été étendu par Leo Breiman [Breiman, 2001].

L'algorithme proposé par Breiman repose sur les étapes suivantes :

1. Création de K échantillons *bootstrap* de données d'apprentissage pour les estimateurs de base ;
2. Entraînement d'un estimateur de base f_k , ici un arbre de décision CART, sur chacun des K échantillons d'apprentissage. Il existe deux sources de hasard lors de cette étape afin de réduire la variance de l'estimateur final :
 - a. Les estimateurs de base sont construits de manière indépendante ;
 - b. En outre, à chaque nœud de l'arbre, seules certaines variables explicatives tirées au sort sont utilisées pour définir le nœud.
3. Stockage des K estimateurs f_k pour chaque observation d'origine.

La prédiction de la forêt aléatoire correspond à un vote majoritaire des K estimateurs de base dans le cas d'un problème de classification, ou à la moyenne des résultats donnés par les estimateurs de base dans le cas d'un problème de régression.

Il est à noter que, généralement, augmenter le nombre d'arbres utilisés a tendance à améliorer le modèle. Par conséquent, il est possible de fixer cette valeur arbitrairement et de l'augmenter progressivement en fonction des ressources de calcul disponibles pour gagner en performance.

2.1.2.3 EXEMPLE D'IMPLÉMENTATION – RANDOMFORESTREGRESSOR DE SCIKIT LEARN

L'estimateur *RandomForestRegressor* de la librairie *scikit learn* repose sur l'algorithme de Breiman présenté précédemment pour réaliser des régressions. Les principaux hyper-paramètres à calibrer lors de l'utilisation d'un tel modèle sont présentés dans le tableau ci-après.

Tableau 2.2 – Description des principaux hyper-paramètres à calibrer d’une forêt aléatoire
RandomForestRegressor

Nom du paramètre	Description du paramètre
<code>n_estimators</code>	Nombre d’arbres retenus dans la forêt aléatoire.
<code>criterion</code>	Définition de la mesure de coût prise en compte pour l’apprentissage. Par défaut, l’algorithme effectue une régression aux moindres carrés (norme L2).
<code>max_depth</code>	Profondeur maximale d’un arbre. Augmenter cette valeur augmente la complexité du modèle.
<code>min_sample_split</code>	Nombre minimal d’échantillons pour créer un nœud.
<code>min_samples_leaf</code>	Nombre minimal de données nécessaire à la création d’un nœud.
<code>max_features</code>	Nombre des colonnes (<i>features</i>) du jeu de données de calibrage à prendre en compte pour créer un nœud (<i>best split</i>).
<code>max_leaf_nodes</code>	Plafond du nombre de feuilles des arbres composant la forêt aléatoire.
<code>min_impurity_decrease</code>	Seuil « d’impureté » en deçà duquel l’algorithme ne créera aucun nœud supplémentaire si le meilleur nœud possible vient augmenter l’impureté des deux sous-ensembles créés par ce nœud.

2.1.3 GRADIENT BOOSTING ET TREE BOOSTING

2.1.3.1 PRINCIPE

Le principe des méthodes de *gradient boosting* est également de construire un estimateur à partir de plusieurs estimateurs de base. Toutefois, la différence par rapport aux *averaging methods* réside dans l’entraînement des estimateurs de base. En effet, les estimateurs de base utilisés dans les méthodes de *gradient boosting* ne sont pas indépendants : ils sont construits de manière séquentielle afin de réduire progressivement le biais de l’estimateur combiné. L’expression *tree boosting* correspond aux méthodes de *gradient boosting* utilisant des arbres de décisions CART comme estimateurs de base.

En reprenant les notations utilisées précédemment, la construction d’un estimateur f_{boost} à l’aide d’une méthode de *tree boosting* est très proche d’une forêt aléatoire :

$$\hat{y}_i = f_{boost}(x_i) = \sum_{k=1}^K f_k(x_i)$$

Où \hat{y}_i correspond à la prédiction de la variable cible à partir des variables explicatives x_i correspondantes, K correspond au nombre d’échantillons *bootstrap* des données d’apprentissage et les $f_k \in F$ correspondent aux estimateurs de base qui sont ici à nouveau des arbres de décision CART.

Rappelons la définition d’un arbre de décision $f_k : f_k(x_i) = c_{q(x)}$ où c_t correspond à la valeur associée à la t -ième feuille de l’arbre. Dans le cas où les variables explicatives x correspondent à p variables réelles continues, la fonction $x \mapsto q(x)$ est définie de $\mathbb{R}^p \rightarrow \llbracket 1, T \rrbracket$ où T est le nombre de feuille de l’arbre.

La différence entre une forêt aléatoire et une forêt aléatoire boostée réside dans la fonction-objectif φ utilisée lors de l’apprentissage. On notera par la suite :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n l(y_i, \hat{y}_i) + \sum_{k=1}^K \omega(f_k)$$

Avec un premier terme correspondant à la fonction de coût pour l'apprentissage, où $l(\cdot, \cdot)$ représente une mesure du coût unitaire pour chaque valeur et un second terme de régularisation où $\omega(f_k)$ représente le terme de régularisation pour chaque arbre k . Ce second terme a pour objectif de pénaliser les arbres trop complexes.

Comme indiqué précédemment, les différents arbres f_k sont construits de manière séquentielle afin de réduire progressivement le biais de l'estimateur combiné. En notant $\hat{y}_i^{[j]}$ la prédiction de la valeur cible à l'étape de calcul j on a :

$$\begin{aligned}\hat{y}_i^{[0]} &= 0 \\ \hat{y}_i^{[1]} &= f_1(x_i) \\ \hat{y}_i^{[j]} &= \sum_{k=1}^j f_k(x_i)\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction de coût à minimiser à chaque étape de calcul j s'écrit :

$$\varphi^{[j]} = \sum_{i=1}^n l(y_i, \hat{y}_i^{[j]}) + \sum_{k=1}^j \omega(f_k) = \sum_{i=1}^n l(y_i, \hat{y}_i^{[j-1]} - f_j(x_i)) + \sum_{k=1}^j \omega(f_k)$$

Dans le cas particulier des moindres carrés ordinaires correspondant à l'utilisation de la norme \mathcal{L}^2 pour la mesure du coût unitaire $l(\cdot, \cdot)$ on obtient :

$$\varphi^{[j]} = \sum_{i=1}^n \left(y_i - (\hat{y}_i^{[j-1]} - f_j(x_i)) \right)^2 + \omega(f_j) + \sum_{k=1}^{j-1} \omega(f_k)$$

Pour les autres mesures de coût unitaire, la fonction-objectif n'est pas forcément convexe ce qui peut compliquer l'optimisation. Par conséquent, une méthode pour contourner ce problème est de réaliser un développement de Taylor à l'ordre 2 de la mesure de coût unitaire $l(\cdot, \cdot)$. La fonction de coût approchée ainsi calculée est convexe.

Ainsi, en notant g_i et h_i les dérivées première et seconde de la fonction de coût unitaire $l(\cdot, \cdot)$ par rapport au deuxième facteur, la fonction objectif approchée s'écrit :

$$\varphi^{[j]} \approx \sum_{i=1}^n \left(l(y_i, \hat{y}_i^{[j-1]}) + g_i \cdot f_j(x_i) + \frac{1}{2} h_i \cdot f_j^2(x_i) \right) + \omega(f_j) + \sum_{k=1}^{j-1} \omega(f_k)$$

Par ailleurs, étant donné que l'étape de calcul j vise à optimiser les paramètres de f_j il est possible de simplifier l'expression précédente car les termes $l(y_i, \hat{y}_i^{[j-1]})$ et $\sum_{k=1}^{j-1} \omega(f_k)$ sont constants. La fonction objectif approchée pour l'étape j se réécrit donc :

$$\varphi^{[j]} \approx \sum_{i=1}^n \left(g_i \cdot f_j(x_i) + \frac{1}{2} h_i \cdot f_j^2(x_i) \right) + \omega(f_j)$$

Ainsi, il suffit de minimiser cette fonction à chaque étape pour trouver les paramètres de chacun des estimateurs de base du modèle. Un des avantages majeurs du *gradient boosting* est donc qu'il est possible d'utiliser cet algorithme avec toute fonction de coût unitaire $l(\cdot, \cdot)$ deux fois dérivable.

2.1.3.2 UN EXEMPLE D'IMPLÉMENTATION : L'ALGORITHME XGBOOST

XGBoost, contraction de l'expression *Extreme Gradient Boosting*, est une implémentation open-source du *gradient boosting* d'arbres de décision. Cet algorithme est particulièrement efficace dans les problèmes de classification et de régression sur des données tabulaires, comme en témoigne son taux de succès sur la plate-forme de compétition Kaggle.

À titre d'exemple, la mesure de coût unitaire $l(\cdot, \cdot)$ par défaut de l'algorithme XGBoost correspond aux moindres carrés ordinaires.

Par ailleurs, la fonction de régularisation par défaut est la suivante :

$$\omega(f_k) = \gamma \cdot T + \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \sum_{t=1}^T c_t^2$$

Où T correspond au nombre de feuille de l'arbre f_k et où γ et λ sont des paramètres permettant d'ajuster la fonction de régularisation en fonction des besoins.

Dans la formule précédente, la fonction de régularisation pénalise linéairement le nombre de feuilles et pénalise de manière quadratique la valeur des feuilles.

L'algorithme XGBoost repose notamment sur les étapes suivantes :

1. Initialisation : $\hat{y}_i^{[0]} = 0$
2. Ajout d'un nouvel arbre f_j à chaque itération j :
 - a. Calcul de la dérivée première g_i et de la dérivée seconde h_i de la fonction de coût unitaire $l(\cdot, \cdot)$ par rapport au deuxième facteur ;
 - b. Construction d'un arbre f_j :
 - i. Initialisation : arbre vide
 - ii. Définition de chaque nœud à partir de la partition qui minimise la fonction-objectif $\varphi^{[j]}$
 - c. Ajout du nouvel arbre f_j au modèle : $\hat{y}_i^{[j]} = \hat{y}_i^{[j-1]} + f_j(x_i)$

Les principaux hyper-paramètres à calibrer lors de l'utilisation d'un tel modèle sont présentés dans le tableau ci-après.

Tableau 2.3 – Description des principaux hyper-paramètres à calibrer d'un modèle XGBoost

Nom du paramètre	Description du paramètre
<code>objective</code>	Définition de la mesure de coût prise en compte pour l'apprentissage. Par défaut, l'algorithme effectue une régression aux moindres carrés (norme L2).
<code>n_estimators</code>	Nombre d'arbres retenus dans la forêt aléatoire boostée
<code>gamma</code>	Réduction minimale de la fonction objectif requise afin de créer un nœud (cf. γ dans la définition de la fonction de régularisation)
<code>max_depth</code>	Profondeur maximale d'un arbre. Augmenter cette valeur augmente la complexité du modèle.
<code>subsample</code>	Proportion des lignes (<i>instances</i>) du jeu de données de calibrage à prendre en compte lors de la construction du modèle XGBoost.
<code>colsample_bytree</code>	Proportion des colonnes (<i>features</i>) du jeu de données de calibrage à prendre en compte pour entraîner un arbre.
<code>colsample_bylevel</code>	Proportion des colonnes (<i>features</i>) du jeu de données créé à partir des données de calibrage après création de l'échantillon défini par <code>colsample_bytree</code> à prendre en compte pour définir le premier nœud d'un arbre (<i>root node</i>).
<code>colsample_bynode</code>	Proportion des colonnes (<i>features</i>) du jeu de données créé à partir des données de calibrage après création de l'échantillon défini par <code>colsample_bytree</code> puis <code>colsample_bylevel</code> à prendre en compte pour définir les autres nœuds de chaque arbre du modèle XGBoost.
<code>reg_alpha</code>	Terme de régularisation des valeurs des feuilles des arbres pour la norme L1
<code>reg_lambda</code>	Terme de régularisation des valeurs des feuilles des arbres pour la norme L2 (cf. λ dans la définition de la fonction de régularisation)
<code>tree_method</code>	Algorithme pour construire les arbres (4 méthodes possibles : <code>exact</code> , <code>approx</code> , <code>hist</code> et <code>gpu_hist</code>)

2.2 RÉPLICATION DU MODÈLE ALM

Cette section présente l'application des trois méthodes présentées précédemment à la réplication du modèle ALM afin d'approcher le calcul du *Best Estimate*.

2.2.1 DÉFINITION DU PROBLÈME DE RÉGRESSION

Comme présenté dans le chapitre précédent, le **modèle ALM** Φ étudié a pour objectif de modéliser et projeter les flux de trésorerie futurs de l'organisme d'assurance CF_t^i en fonction :

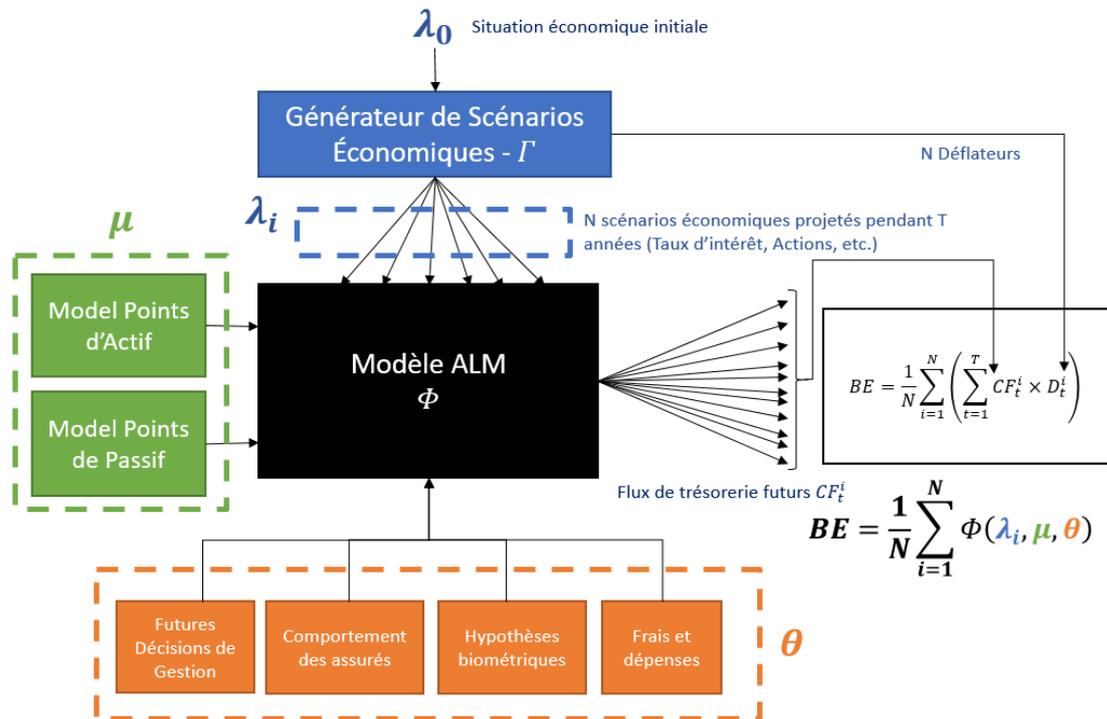
- De la **situation économique actuelle** λ_0 correspondant à la valeur des facteurs de financiers au moment du calcul.
- Des N **scénarios économiques risque-neutres** $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ utilisés pour la valorisation des flux futurs. Ces scénarios économiques sont produits par un **générateur de scénarios économiques** Γ qui est notamment calibré à partir des données de marchés pertinentes à la date du calcul (par ex. niveau et volatilité implicite des facteurs de risques financiers modélisés). En particulier, il génère le déflateur D_t^i nécessaire à l'actualisation des flux financiers futurs. Comme indiqué précédemment, il est calculé comme l'inverse du numéraire $D_t^i = e^{-\int_0^t r_u du}$, où r_t^i est le taux court sans risque du scénario i au pas de temps t calculé par le générateur de scénarios économiques.
- Des caractéristiques du bilan d'assurance de l'organisme μ avec en particulier :
 - o Les placements financiers initiaux de la compagnie d'assurance aussi appelés « **Model Points d'Actif** ».
 - o Et les caractéristiques des contrats (par ex. taux technique, taux de participation aux bénéfiques) et des assurés (par ex. âge, ancienneté) de la compagnie aussi appelés « **Model Points de Passif** ».
- Des autres hypothèses techniques θ nécessaires au calcul qui regroupent notamment :
 - o Les hypothèses de fonctionnement de la compagnie d'assurance qui regroupent notamment (i) les **futures décisions de gestion** encadrées par l'article 23 du règlement délégué de Solvabilité 2 (par ex. taux servi aux assurés dans le cadre de la participation aux bénéfiques, réallocation d'actifs au cours de la projection) ; et (ii) les **hypothèses de frais et de dépenses** de l'organisme.
 - o Les **hypothèses biométriques** des assurés (par ex. mortalité, longévité et morbidité des assurés) via l'utilisation de tables.
 - o Les **hypothèses de comportement des assurés** au cours de la projection (par ex. modélisation des cessations et rachats de contrat en fonction de l'ancienneté des contrats et du contexte économique).

Le *Best Estimate* de la société d'assurance BE correspond à la valeur moyenne des flux de trésorerie futurs actualisés $\widetilde{CF}_t^i = CF_t^i \cdot D_t^i$ ainsi simulés dans l'ensemble des N scénarios risque-neutres se déroulant sur T années de projection :

$$BE = \Phi(\lambda_i, \mu, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T CF_t^i \cdot D_t^i \right)$$

L'ensemble de ces éléments est illustré dans la figure ci-après.

Figure 2.5 – Schéma de principe du calcul du BE d'assurance vie à l'aide d'un modèle ALM



Afin de poser rigoureusement le cadre du problème de régression à étudier, il est nécessaire d'interroger et de définir clairement quelle est la valeur cible y à répliquer et quelles sont les variables explicatives x à prendre en compte afin de construire un modèle approché f pertinent au regard de l'objectif que l'on s'est donné. Ici, l'objectif premier de ce mémoire est de construire un modèle approché du modèle ALM pour l'étude de sensibilité du *Best Estimate* d'une compagnie d'assurance au générateur de scénarios économiques utilisé.

Par conséquent, l'objectif est donc de répliquer le *Best Estimate* de la société obtenu via le modèle ALM dans le cas de générateurs de scénarios économiques différents ou calibrés différemment.

Ainsi, on fait le choix de **restreindre les variables explicatives de notre problème de régression aux scénarios λ_i produits par le générateur de scénarios économiques** : $x := \lambda_i$. L'ensemble des autres paramètres et hypothèses sont considérés constants et ne vont pas varier dans les données d'apprentissage.

En outre, on fait le choix de **considérer la somme des flux de trésorerie futurs actualisés $\widetilde{CF}^i = \sum_{t=1}^T CF_t^i \cdot D_t^i$ comme variable cible de notre problème de régression** : $y := \widetilde{CF}^i$. Ce choix est motivé par trois raisons principales :

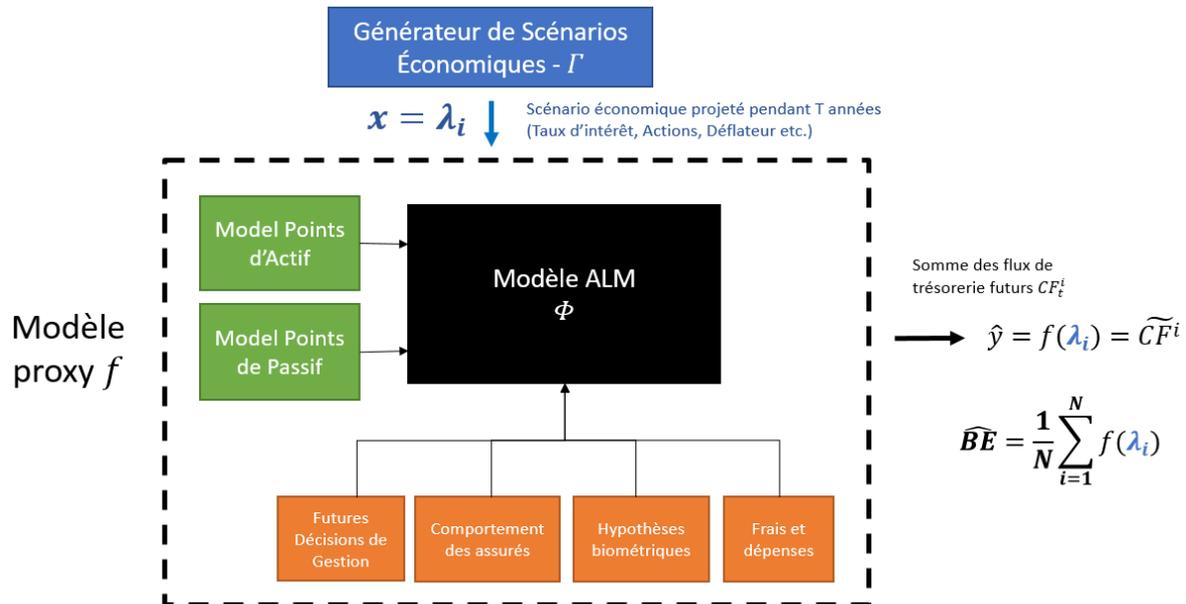
- Un des objectifs de ce mémoire est d'étudier la sensibilité du modèle ALM au choix et au paramétrage du générateur de scénarios économiques. Par conséquent, il est intéressant d'observer comment va réagir le modèle ALM au niveau de chacun des scénarios risque-neutres λ_i utilisés pour la valorisation des engagements d'assurance vie ;
- Par ailleurs, en faisant le choix de répliquer les flux de trésorerie futurs actualisés \widetilde{CF}^i , l'ampleur de l'erreur de réplification au niveau du *Best Estimate* s'en trouvera a priori réduite étant donné que le *Best Estimate* correspond à la valeur moyenne des flux de trésorerie futurs

actualisés. En effet, la prédiction du *Best Estimate* repose alors sur N prédictions de \widetilde{CF}^i , par le modèle proxy ;

- Enfin, les méthodes d'apprentissage automatique nécessitent une base de données importante pour être efficaces.

Ce choix est illustré schématiquement par la figure ci-après.

Figure 2.6 – Définition du périmètre du problème de régression



Une autre piste qui pourrait être explorée sur la base de ces arguments est le fait de circonscrire le problème de régression aux flux de trésorerie futurs CF_t^i avant leur actualisation. En effet, avant actualisation, les flux de trésoreries futurs calculés par le modèle ALM avant actualisation satisfont eux aussi les trois critères présentés ci-dessus. Toutefois, choisir de répliquer ces flux non actualisés revient à augmenter la complexité du problème car elle revient à multiplier par T le nombre de prédictions à faire pour le calcul d'une valeur de *Best Estimate* qui reposerait alors sur $T \cdot N$ prédictions de CF_t^i par le modèle proxy.

Il est également à noter que le choix des variables explicatives et des variables cibles du problème de régression est très largement dépendant de l'application recherchée, par exemple :

- Dans le cas d'une étude interne pour estimer les sensibilités du bilan prudentiel aux hypothèses propres à l'organisme, il sera nécessaire d'inclure dans la base d'apprentissage du modèle proxy des scénarios $(\theta_j; BE(\theta_j))$ pour différentes valeurs et modalités des hypothèses θ ;
- Dans le cas d'un modèle interne il sera nécessaire d'inclure dans la base d'apprentissage des scénarios $\{(\lambda_0^k; \theta_j); BE(\lambda_0^k; \theta_j)\}$ pour différentes situations économiques λ_0^k et différentes hypothèses biométriques θ_j après évolution des facteurs de risques financiers et de souscription dans l'année ;
- Dans le cas de l'ORSA qui nécessite de projeter le bilan prudentiel et le SCR sur plusieurs années, il sera en outre nécessaire d'inclure dans la base d'apprentissage du modèle proxy des scénarios $(\mu_j; BE(\mu_j))$ en faisant notamment évoluer les caractéristiques des assurés, des placements de l'organisme et le temps.

On notera que pour le cas d'un modèle interne, le calcul du SCR en Formule Standard ou pour l'ORSA, il est possible de considérer le générateur de scénarios économiques comme étant une partie du modèle de projection à répliquer. C'est d'ailleurs le choix qui est fait par [Frerix, 2017] et [Buzzi, 2017].

2.2.2 BASE DE DONNÉES D'APPRENTISSAGE

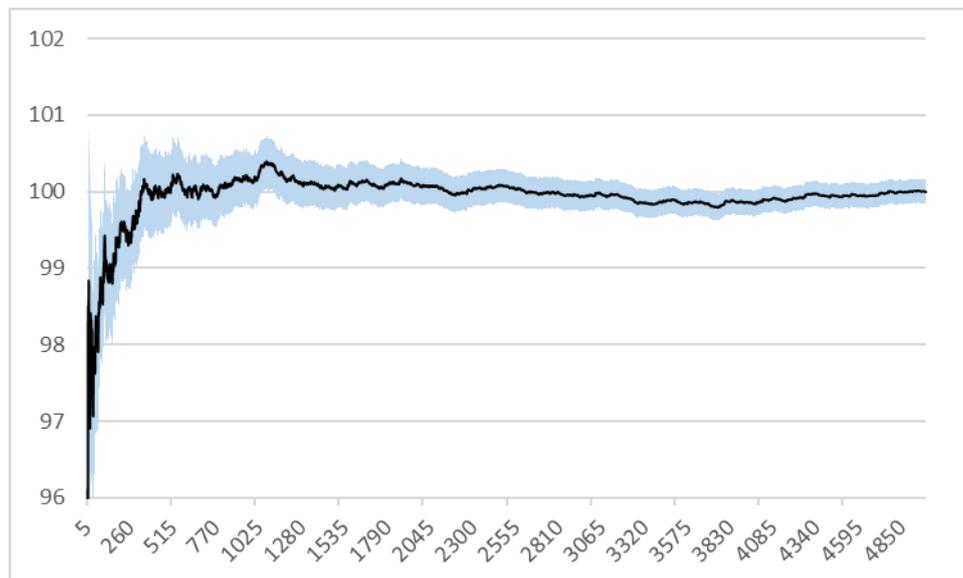
Comme indiqué précédemment, la variable cible de notre problème de régression correspond à la somme des flux de trésorerie futurs actualisés $y = \widetilde{CF}^t$ calculés à l'aide du modèle ALM et les variables explicatives correspondent aux scénarios économiques produits par le générateur de scénarios économiques $x = \lambda_i$ décrit à la section 1.2.2 utilisant le modèle de taux G2++. Les scénarios économiques retenus dans la base de données comportent pour chacune des 30 années de projections dans le modèle ALM :

- La valeur des obligations zéro-coupons sans risque de maturité 1, 5, 7, 10, 15, 20 et 30 ans ;
- La valeur du déflateur ;
- La valeur du *total return* de l'indice action pertinent ;
- La valeur du *total return* de l'indice immobilier en total return.

Un scénario économique risque-neutre est donc caractérisé dans cette base de données par un vecteur réel de taille 300.

La base de données initiale comporte 2 000 simulations ce qui correspond à un nombre de simulations correspondant au double du nombre de simulations généralement utilisés pour le calcul du *Best Estimate* avec ce modèle ALM. En effet, afin d'assurer une incertitude relative inférieure à 0,5% **le modèle ALM utilise 1 000 simulations pour calculer le *Best Estimate***. La Figure suivante représente la valeur de l'estimateur du *Best Estimate* pour $M = 5\,000$ simulations issues du modèle ALM ainsi que les estimateurs intermédiaires ($M < 5\,000$).

Figure 2.7 – Convergence de l'estimateur *Best Estimate* calculé à l'aide du modèle ALM en fonction du nombre de scénarios



Le tableau suivant représente l'incertitude relative entourant le calcul du *Best Estimate* pour différents nombres de simulations (intervalle de confiance à 95%).

Tableau 2.4 – Incertitude relative entourant le calcul du *Best Estimate* à l'aide du modèle ALM pour différents nombres de scénarios (en % du *Best Estimate*)

Nombre de simulations	Incertitude relative
1 000	0,35%
2 000	0,24%
5 000	0,16%

Il est par ailleurs nécessaire de séparer la base de données initiale en deux pour évaluer les performances des algorithmes d'apprentissage automatique : une base d'apprentissage sur laquelle sont calibrés les modèles proxys (notée avec l'exposant train par la suite), et une base de test (notée avec l'exposant test par la suite) servant à évaluer la pertinence et la robustesse des modèles proxys sur des données qui n'ont pas servies à l'entraînement.

En effet, la construction de deux jeux de données distincts, celui d'apprentissage et celui de test, est un moyen d'évaluer la pertinence du modèle entraîné et d'éviter l'écueil du sur-apprentissage. Le phénomène du sur-apprentissage survient notamment pour des modèles trop complexes dont les prédictions sont excellentes, voire parfaites, sur le jeu de donnée ayant servi à l'apprentissage mais dont les prédictions sont mauvaises sur des données et des cas de figures jamais observés lors du calibrage.

Le sur-apprentissage est généralement interprété comme une illustration du compromis biais-variance. En effet, il est d'usage de décomposer l'espérance de l'erreur quadratique entre l'estimation faite par le modèle \hat{y} et la variable cible y comme la somme de deux termes : un biais au carré et une variance.

En général, un biais trop important est associé à un modèle trop simple qui ne parvient pas à retranscrire l'ensemble des relations entre les variables explicatives x et la variable cible y . *A contrario*, une variance trop importante est généralement associée à un modèle trop complexe qui a tendance à très bien s'adapter aux données d'apprentissage mais qui perd sa capacité à être généralisé à des données différentes.

C'est pourquoi il est généralement admis qu'un bon modèle proxy est un modèle statistique qui va réaliser un bon compromis biais-variance : à la fois suffisamment simple pour être utile et être généralisable, et suffisamment complexe pour refléter les principales relations entre les variables explicative et la variable cible.

Dans la suite de ce mémoire, la base d'apprentissage représente la moitié de la base de données initiale et la base de test correspond à l'autre moitié de la base de données initiale afin que la base de test comporte 1 000 scénarios, soit autant que le nombre nécessaire au calcul complet du *Best Estimate* à l'aide du modèle ALM. Ces deux bases sont tirées aléatoirement dans la base de données initiale pour garantir que les deux bases de données soient similaires et indépendantes.

2.2.3 CALIBRAGE DES MODÈLES PROXYS – CHOIX DES HYPER-PARAMÈTRES

Si les méthodes et algorithmes d'apprentissage automatique supervisés présentés précédemment permettent de construire des modèles proxys qui sont améliorés par l'expérience et l'ajout de données supplémentaires de manière automatique, ils sont malgré tout très dépendants de certains hyper-paramètres qui doivent être choisis avec soin. Les hyper-paramètres correspondent aux paramètres des modèles proxys qui ne sont pas déterminés au moment de l'apprentissage et qui sont des paramètres d'entrée des algorithmes étudiés (par ex. le nombre d'arbres d'une forêt aléatoire).

Le calibrage d'un modèle proxy utilisant une technique d'apprentissage automatique consiste principalement à calibrer et fixer judicieusement ces hyper-paramètres. Le choix de ces hyper-paramètres repose notamment sur :

- Un schéma de validation croisée (cf. section 2.2.3.1) ;
- Une définition de l'espace des hyper-paramètres, c'est-à-dire la liste des paramètres que l'on souhaite optimiser ainsi que leur domaine de définition ;
- Une méthode d'exploration de l'espace des hyper-paramètres (cf. section 2.2.3.2) ;
- Ainsi qu'une métrique d'erreur nécessaire à l'optimisation (cf. section 2.2.3.3).

2.2.3.1 VALIDATION CROISÉE

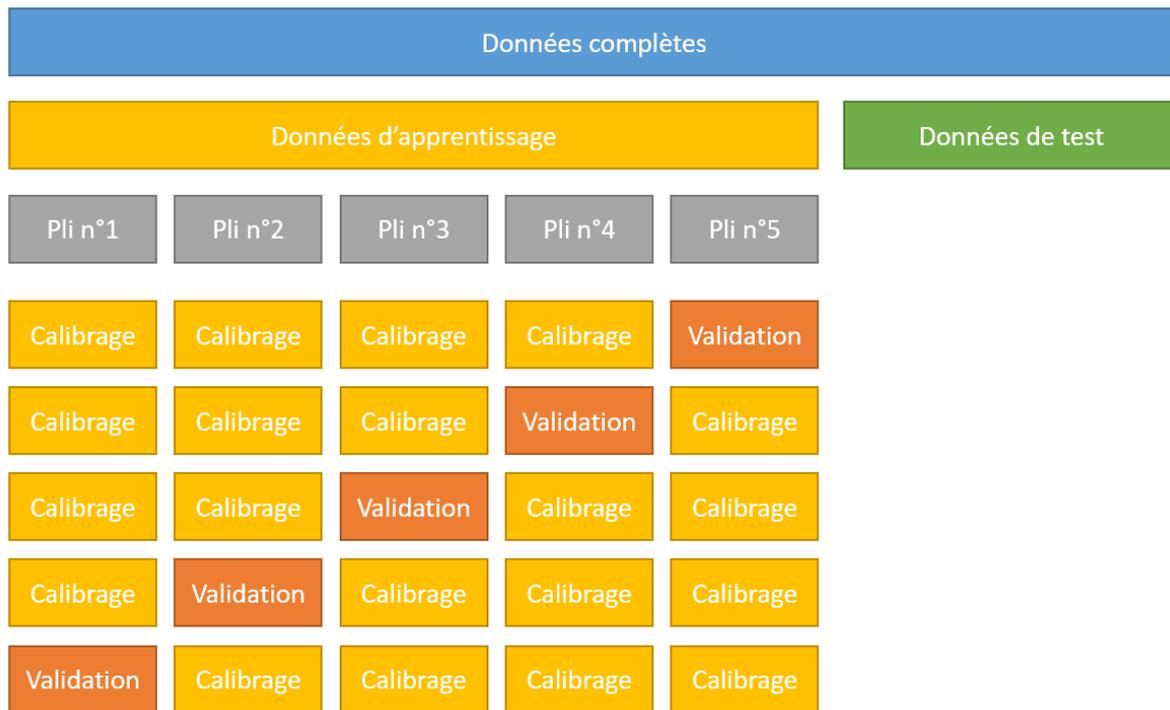
Comme indiqué précédemment, il n'est pas possible de comparer les performances de plusieurs modèles prédictifs en se servant uniquement du jeu de données qui a servi à leur calibrage. C'est pourquoi les données ont été séparés en deux jeux indépendants : un jeu d'apprentissage et un jeu de test (cf. section 2.2.2).

Toutefois, comparer les performances de plusieurs modèles prédictifs uniquement sur le jeu de données test reviendrait à biaiser le calibrage de ces modèles. En effet, cela aura tendance à sélectionner les calibrages qui minimiserait l'erreur sur la base de test.

Pour pallier ce problème et assurer un meilleur calibrage des paramètres des modèles prédictifs il est possible de construire un estimateur de l'erreur sur le jeu de test sans jamais l'utiliser selon le principe de la **validation croisée, ou Cross-Validation**. En effet, il suffit de tirer aléatoirement un échantillon de validation dans le jeu de données d'apprentissage et de le retirer des données qui sont effectivement utilisées pour calibrer le modèle. Une fois le modèle calibré, il est possible de le tester sur cet échantillon de validation. Il est ensuite possible de répéter ce processus et de tirer aléatoirement un nouvel échantillon de validation.

Une application classique de la validation croisée est appelée **validation croisée k-plis, ou k-fold Cross Validation**. Elle consiste à diviser le jeu de données de calibrage en k échantillons de même taille, appelés plis. Le modèle est ensuite calibré k fois sur chacun des échantillons d'apprentissage puis testé sur chacun des k échantillons de validation correspondant. La performance du modèle est calculée en moyennant les k erreurs obtenues. Ainsi, la validation croisée k-plis permet d'estimer l'erreur de test à travers un échantillon de k variables aléatoires.

Figure 2.8 – Illustration des données utilisées pour un schéma de validation croisée 5-plis



Il existe également d'autres manières de séparer les données de la base d'apprentissage pour mettre en œuvre un schéma de validation croisée. On peut notamment citer l'approche *leave p out* qui consiste à réaliser $\binom{n}{p}$ calibrages différents à partir du jeu de données d'apprentissage auquel on a retiré p observations à chaque pli. Il existe également des manières de prendre en compte la structure du jeu de données d'apprentissage si celui-ci est composé de plusieurs groupes de données ou plusieurs classes afin de créer des jeux de calibrage et de validation représentatif des données totales.

Toutefois, seule la validation croisée k -plis est utilisée dans la suite de ce mémoire pour calibrer les hyper-paramètres des modèles proxys. Ce schéma de validation croisée est utilisé sur le jeu de données d'apprentissage. Le jeu de test est quant à lui utilisé pour l'évaluation finale des modèles proxys.

2.2.3.2 EXPLORATION DE L'ESPACE DES HYPER-PARAMÈTRES

Une fois que l'espace des hyper-paramètres est défini, il est nécessaire de définir une stratégie pour l'explorer afin d'optimiser ces paramètres.

La stratégie la plus naturelle est l'exhaustivité : on calibre le modèle avec l'ensemble des combinaisons d'hyper-paramètres possibles puis on choisit la combinaison qui minimise un critère donné. Toutefois, l'utilisation de la force brute pour évaluer est parfois impossible. En effet, certains paramètres sont continus et par conséquent, il n'est pas possible d'explorer toutes les valeurs de ces paramètres. En outre, le nombre parfois important de paramètres à optimiser rend le problème trop complexe pour être résolu par la force brute.

Une stratégie alternative est d'explorer l'espace des paramètres de manière aléatoire afin de dégrossir le travail et de restreindre le problème d'optimisation de ces paramètres à un sous espace qui pourra être exploré de manière exhaustive ou plus systématique.

Enfin, il est également possible de choisir certains paramètres par jugements d'experts ou à l'aide des bonnes pratiques identifiés dans la littérature sur l'optimisation de ces modèles.

S'agissant du problème de régression posé dans ce mémoire, le choix des principaux hyper-paramètres à calibrer ainsi que l'espace des hyper-paramètres est détaillé dans la section 2.3 pour chacune des méthodes.

Dans la suite de ce mémoire, l'espace des hyper-paramètres est exploré une première fois de manière aléatoire à l'aide de la méthode *RandomizedSearchCV* de la librairie *scikit learn* afin de le restreindre. Ensuite une seconde recherche exhaustive est menée à l'aide de la méthode *GridSearchCV* de la même librairie *scikit learn*.

2.2.3.3 MÉTRIQUES UTILISÉES

Afin d'évaluer la performance des différents modèles proxys, il est nécessaire de définir des critères quantitatifs afin de les comparer. On retiendra les critères suivants :

- **L'erreur quadratique moyenne par scénario** (RMSE, pour *Root Mean Square Error*) :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2}$$

- **L'erreur absolue moyenne par scénario** (MAE, pour *Mean Absolute Error*) :

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\hat{y}_i - y_i|$$

- **L'erreur relative moyenne au niveau du *Best Estimate***. On rappelle que le *Best Estimate* correspond à la valeur moyenne des flux de trésorerie futurs sur les 1000 scénarios de l'échantillon de test.

$$\epsilon = \frac{\widehat{BE} - BE}{BE} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{y}_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i}$$

2.3 RÉSULTATS

Cette section présente et analyse les résultats de réplication du modèle ALM obtenus grâce aux approches présentées précédemment : le perceptron multicouche, la forêt aléatoire et la forêt aléatoire boostée avec l'algorithme XGBoost.

2.3.1 PERCEPTRON MULTICOUCHE – RÉSEAU DE NEURONES

Le tableau 2.5 présente les résultats obtenus lorsqu'un perceptron multicouche est ajusté pour prédire chacune des valeurs d'intérêt, c'est-à-dire les flux de trésorerie futurs actualisés par scénario et le *Best Estimate*. Les résultats sont présentés en base 100 : le *Best Estimate* calculé à l'aide du modèle ALM sur l'échantillon de test est de 100.

Tableau 2.5 – Résultats du calibrage d'un perceptron multicouche proxy du modèle ALM

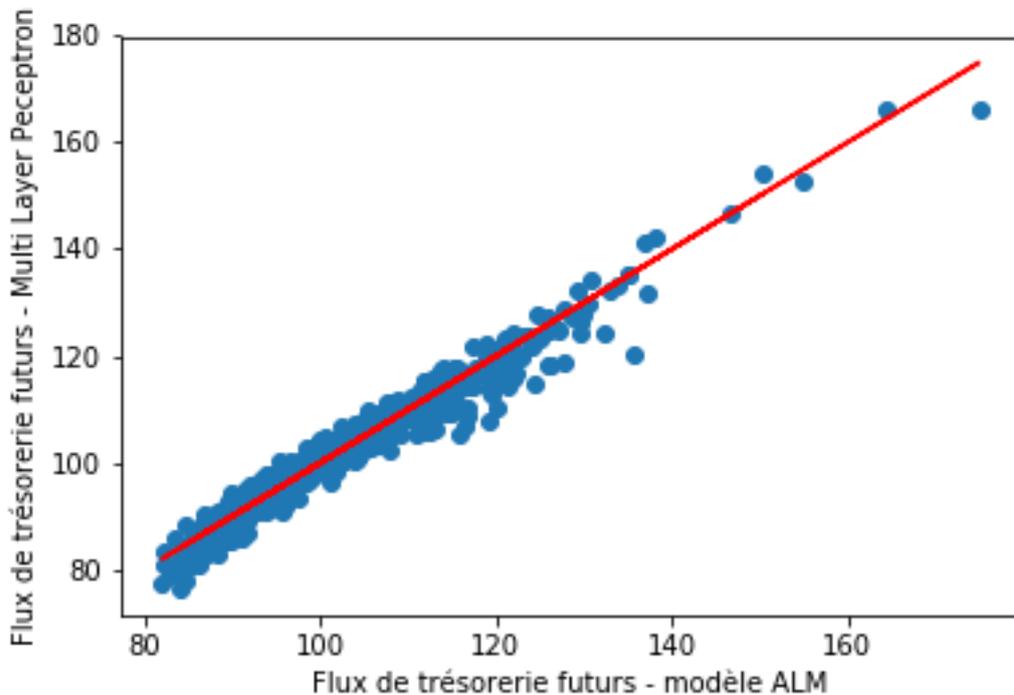
Résultats sur l'échantillon de test	Perceptron multicouche
<i>Best Estimate</i> – modèle ALM	100,00
MAE par scénario	1,54
RMSE par scénario	2,19
<i>Best Estimate</i> – modèle proxy	99,97
Erreur sur le <i>Best Estimate</i> (%)	-0,03%

Si l'erreur quadratique moyenne (RMSE) faite par le perceptron multicouche n'est pas négligeable pour un scénario économique donné (2,19%) cette erreur apparaît acceptable pour répliquer le *Best Estimate* à partir de 1000 scénarios. En effet, l'erreur relative de -0,03% sur le *Best Estimate* réalisé sur l'échantillon de test est quasiment 10 fois plus faible que l'incertitude qui entoure le calcul complet du *Best Estimate* calculé à l'aide du modèle ALM stochastique (0,35%).

Ces résultats apparaissent donc satisfaisants pour approcher le modèle ALM en vue d'estimer *un Best Estimate*.

La figure 2.9 présente le tracé des flux de trésorerie futurs actualisés prédites par le modèle proxy XGBoost pour chacun des scénarios du jeu de test en fonction des flux de trésorerie futurs calculés à l'aide du modèle ALM. La première bissectrice est tracée en rouge.

Figure 2.9 – Valeur des flux de trésorerie futurs actualisés calculés à partir du perceptron multicouche par rapport aux flux calculés à l’aide du modèle ALM sur l’échantillon de test



Ce graphique permet d’illustrer et de comprendre les résultats satisfaisants de la réplication des flux de trésorerie futurs du modèle ALM par le perceptron multicouche. Par ailleurs, le coefficient de détermination du nuage de points est très proche de 1 : $R^2 = 0.959$.

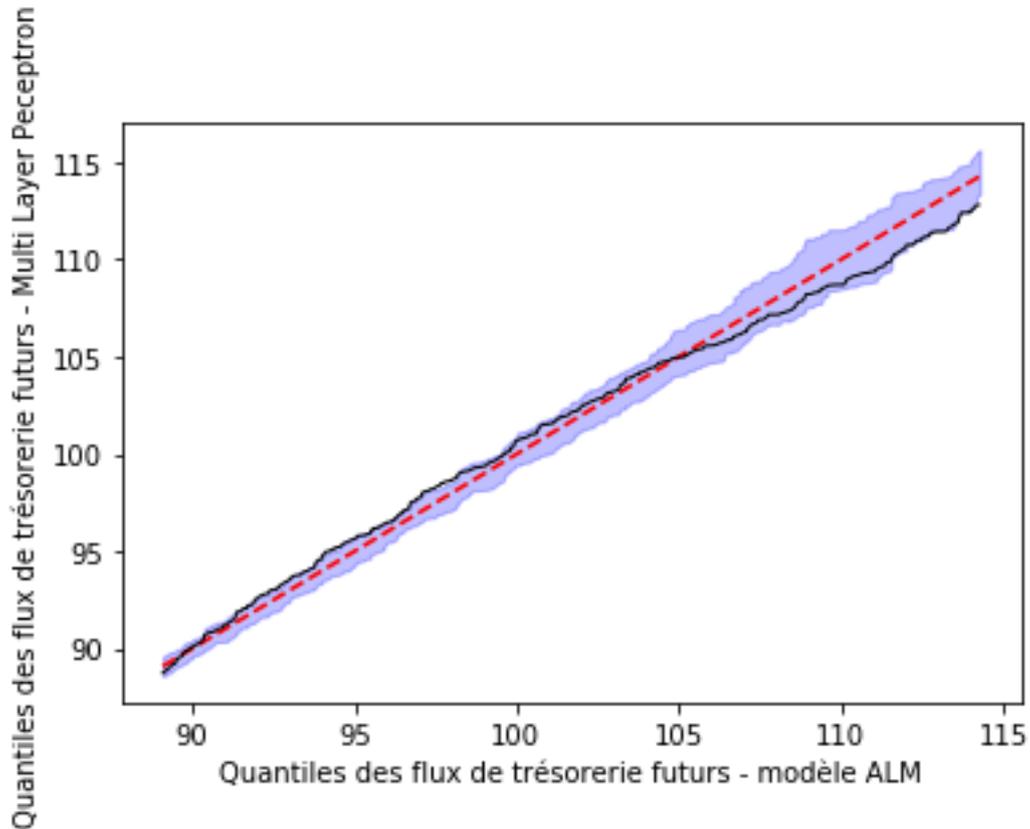
La figure 2.10 correspond au diagramme quantile-quantile de la distribution des flux de trésorerie futurs obtenue à l’aide d’un perceptron multicouche par rapport à la distribution de référence obtenue par calcul complet à l’aide du modèle ALM. Un zoom sur le cœur de la distribution (quantiles compris entre 10% et 90%) a été effectué car le *Best Estimate* (100) correspond à la valeur moyenne des flux futurs.

La droite rouge en pointillé représente la première bissectrice et correspond aux quantiles de référence obtenus par calcul complet.

La zone bleue correspond à l’intervalle de confiance *bootstrap* à 95%. Cet intervalle de confiance est calculé à l’aide d’une approche *bootstrap* qui consiste à ré-échantillonner la distribution empirique des pertes et à calculer pour chacun des échantillons *bootstrap* une nouvelle valeur des flux de trésorerie futurs actualisés.

Enfin, la courbe noire représente les quantiles de la distribution des pertes proxy par rapport aux quantiles de référence. Ainsi, pour qu’un proxy reproduise de manière satisfaisante le *Best Estimate* obtenu par calcul complet, il est nécessaire que la courbe noire soit proche de la droite rouge en pointillé, surtout au cœur de la distribution. Idéalement, celle-ci doit se trouver à l’intérieur de la bande bleue.

Figure 2.10 – Diagramme quantile-quantile (10% à 90%) de la distribution des flux de trésorerie futurs actualisés calculée à l'aide du perceptron multicouche par rapport à la distribution de référence calculée à l'aide du modèle ALM



On voit ici que dans le cas du perceptron multicouche, les résultats se trouvent incluent dans l'intervalle de confiance *bootstrap* pour l'ensemble du cœur de la distribution (quantiles compris entre les quantiles 10% et 90%) ce qui traduit une bonne réplcation des flux de trésorerie futurs même dans certaines situations stressées.

Le tableau 2.6 présente les paramètres retenus pour le calibrage du perceptron multicouche.

Tableau 2.6 – Principaux hyper-paramètres du perceptron multicouche

Nom du paramètre	Valeur	Commentaire
hidden_layer_sizes	(50, 50, 50)	3 couches cachées de 50 neurones
activation	identity	Pas de fonction d'activation – le réseau de neurones est équivalent à une régression linéaire.
solver	lbfgs	Solveur de la famille des méthodes quasi-newtoniennes connu pour avoir des bonnes performances sur des jeux de données de taille modeste
alpha	0,0001	-
max_iter	1000	Nombre maximal d'itérations fixé à 1000

2.3.2 FORÊT ALÉATOIRE

Le tableau 2.7 présente les résultats obtenus pour une forêt aléatoire entraînée pour prédire chacune des valeurs d'intérêt, c'est-à-dire les flux de trésorerie futurs actualisés par scénario et le *Best Estimate*. Comme précédemment, le *Best Estimate* calculé à l'aide du modèle ALM sur l'échantillon de test est de 100.

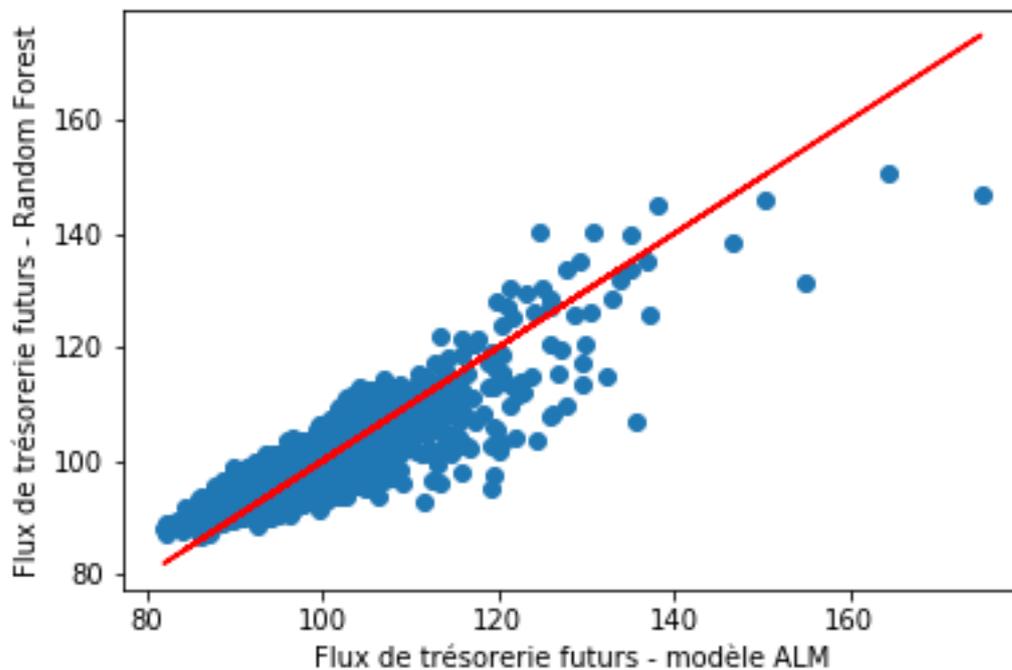
Tableau 2.7 – Résultats du calibrage d'une forêt aléatoire proxy du modèle ALM

Résultats sur l'échantillon de test	Forêt aléatoire
<i>Best Estimate</i> – modèle ALM	100,00
MAE par scénario	3,94
RMSE par scénario	5,26
<i>Best Estimate</i> – modèle proxy	100,05
Erreur relative sur le <i>Best Estimate</i> (%)	+0,05%

Les résultats obtenus sont également satisfaisants bien que moins bons que ceux obtenus à l'aide du perceptron multicouche. L'erreur relative de +0,05% sur le *Best Estimate* réalisé sur l'échantillon de test comportant 1000 scénarios reste bien inférieure à l'incertitude qui entoure le calcul complet du *Best Estimate* calculé à l'aide du modèle ALM stochastique (0,35%).

La figure 2.11 présente le tracé des flux de trésorerie futurs actualisés prédits par la forêt aléatoire pour chacun des scénarios du jeu de test en fonction des flux de trésorerie futurs calculé à l'aide du modèle ALM. La première bissectrice est tracée en rouge.

Figure 2.11 – Valeur des flux de trésorerie futurs actualisés calculés à partir de la forêt aléatoire par rapport aux flux calculés à l'aide du modèle ALM

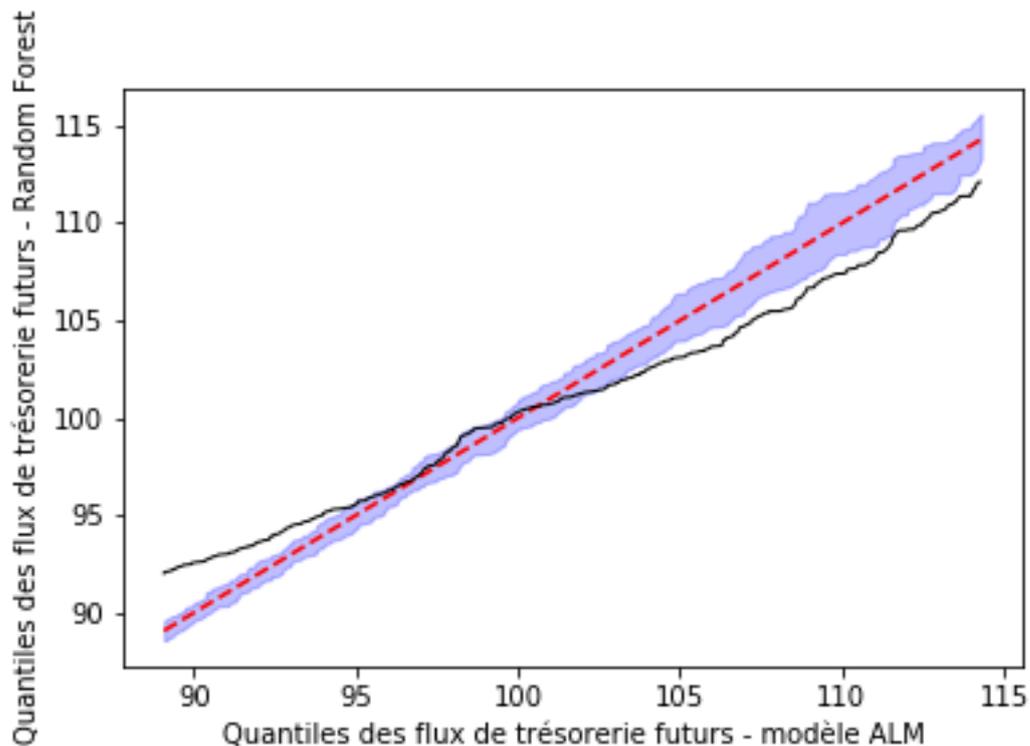


Ce graphique permet d'illustrer et de comprendre les résultats de la réplique des flux de trésorerie futurs du modèle ALM par la forêt aléatoire. On remarque que pour des valeurs élevées (flux > 150), l'erreur commise est importante (proche de -15% d'erreur relative) et la forêt aléatoire a tendance à sous-estimer ces flux. En outre, on note que la dispersion du nuage de point est plus marquée que

pour le nuage obtenu à l'aide du perceptron multicouche. Cette observation se traduit également avec un coefficient de détermination plus faible : $R^2 = 0,765$.

La figure 2.12 correspond au diagramme quantile-quantile de la distribution des flux de trésorerie futurs obtenue à l'aide de la forêt aléatoire par rapport à la distribution de référence obtenue par calcul complet à l'aide du modèle ALM. Les éléments présentés sur le graphe sont similaires à la figure 2.10.

Figure 2.12 – Diagramme quantile-quantile (10% à 90%) de la distribution des flux de trésorerie futurs actualisés calculée à l'aide de la forêt aléatoire par rapport à la distribution de référence calculée à l'aide du modèle ALM



On voit ici que dans le cas de la forêt aléatoire, les résultats se trouvent inclus dans l'intervalle de confiance *bootstrap* pour les quantiles très proches de la valeur moyenne de la distribution (100). Toutefois, on observe d'une part, que dès que l'on s'éloigne du cœur de la distribution, l'erreur commise est plus importante et d'autre part, que la courbe noire sort de l'intervalle de confiance *bootstrap* assez vite, traduisant une moins bonne qualité de réplcation dans les situations stressées.

Le tableau ci-après présente les paramètres retenus pour le calibrage de la forêt aléatoire.

Tableau 2.8 – Principaux hyper-paramètres de la forêt aléatoire

Nom du paramètre	Valeur du paramètre	Détails
n_estimators	100	Forêt aléatoire de 100 arbres
criterion	mse	Régression aux moindres carrés
max_depth	5	Profondeur maximale de 5 nœuds
min_sample_split	None	Pas de contrainte
min_samples_leaf	1	Pas de contrainte
max_features	auto	Pas de plafond. L'algorithme prend l'ensemble des colonnes (<i>features</i>) pour construire les arbres
max_leaf_nodes	None	Pas de contrainte
min_impurity_decrease	0	Pas de contrainte

2.3.3 XGBOOST – FORÊT ALÉATOIRE BOOSTÉE

Le tableau suivant présente les résultats obtenus lorsqu'un modèle XGBoost est ajusté pour prédire chacune des valeurs d'intérêt, c'est-à-dire les flux de trésorerie futurs actualisés par scénario et le *Best Estimate*. Les résultats sont présentés en base 100 : le *Best Estimate* calculé à l'aide du modèle ALM sur l'échantillon de test est de 100.

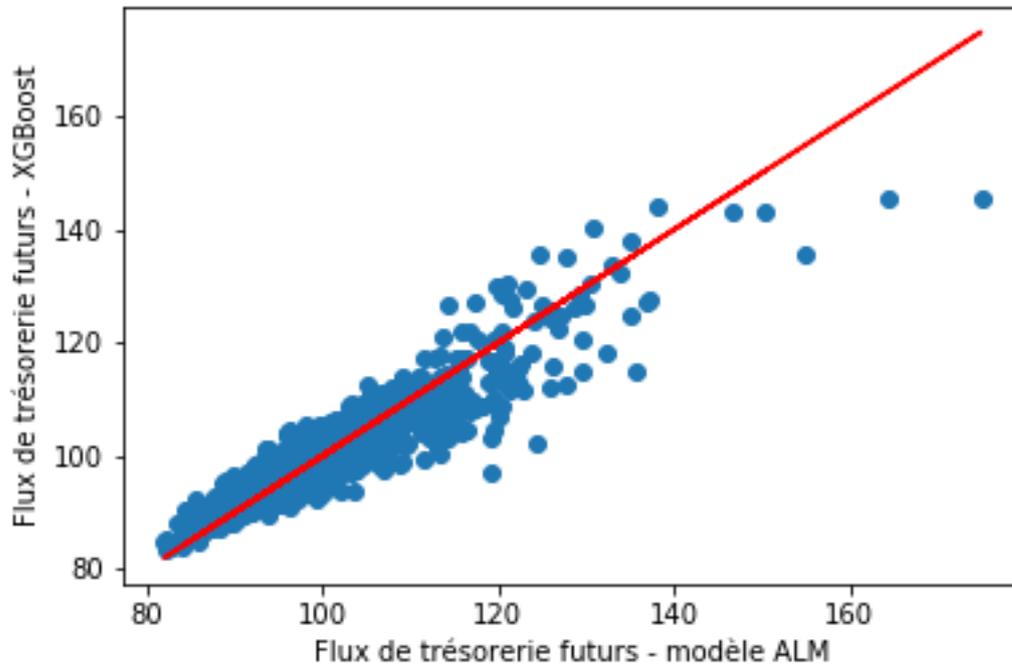
Tableau 2.9 – Résultats du calibrage d'une forêt aléatoire boostée XGBoost proxy du modèle ALM

Résultats sur l'échantillon de test	XGBoost
<i>Best Estimate</i> – modèle ALM	100,00
MAE par scénario	2.97
RMSE par scénario	4,20
<i>Best Estimate</i> – modèle proxy	99,98
Erreur sur le <i>Best Estimate</i> (%)	+0,02%

Les résultats obtenus avec la forêt aléatoire boostée XGBoost sont similaires aux résultats précédents : ils sont proches des résultats obtenus avec le perceptron multicouche et meilleurs que ceux obtenus avec la forêt aléatoire classique. L'erreur relative de +0,02% sur le *Best Estimate* calculé à partir de l'échantillon de test comportant 1000 scénarios est également bien inférieur à l'incertitude qui entoure le calcul complet du *Best Estimate* calculé à l'aide du modèle ALM stochastique (0,35%).

La figure 2.13 présente le tracé des flux de trésorerie futurs actualisés prédites par le modèle proxy XGBoost pour chacun des scénarios du jeu de test en fonction des flux de trésorerie futurs calculés à l'aide du modèle ALM. La bissectrice est tracée en rouge.

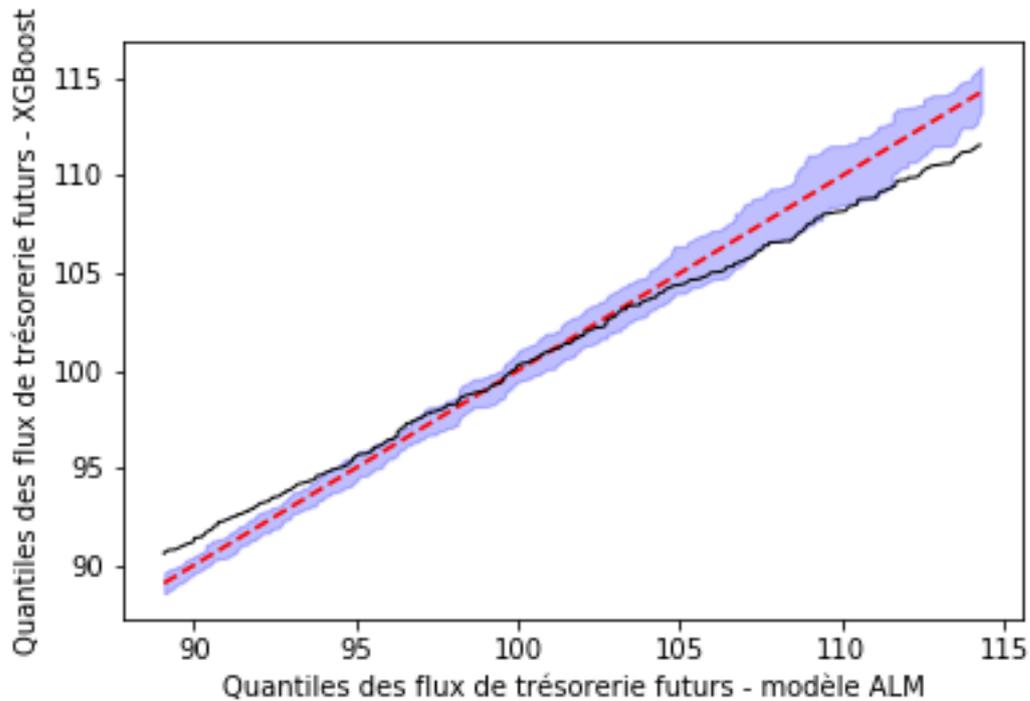
Figure 2.13 – Valeur des flux de trésorerie futurs actualisés calculés à partir du modèle XGBoost par rapport aux flux calculés à l'aide du modèle ALM



Tout comme pour la forêt aléatoire classique, on remarque que pour des valeurs élevées (flux > 150), l'erreur commise est importante (proche de -10% d'erreur relative) bien que moins élevée que celle commise par la forêt aléatoire classique. En outre, on note que la dispersion du nuage de points est moins forte que celle de la forêt aléatoire classique. Cette observation se retrouve avec un coefficient de détermination plus élevé : $R^2 = 0,850$.

La figure 2.14 correspond au diagramme quantile-quantile de la distribution des flux de trésorerie futurs obtenue à l'aide du modèle proxy XGBoost par rapport à la distribution de référence obtenue par calcul complet à l'aide du modèle ALM. Les éléments présentés sur le graphe sont similaires à la figure 2.10.

Figure 2.14 – Diagramme quantile-quantile (10% à 90%) de la distribution des flux de trésorerie futurs actualisés calculée à l’aide du modèle XGBoost par rapport à la distribution de référence calculée à l’aide du modèle ALM



Le tableau 2.10 présente les paramètres retenus pour le calibrage du modèle XGBoost.

Tableau 2.10 – Principaux hyper-paramètres du modèle XGBoost

Nom du paramètre	Valeur du paramètre	Commentaire
objective	reg:squarederror	Régression aux moindres carrés
n_estimators	50	Le modèle est composé de 50 arbres aléatoires
gamma	0	-
max_depth	5	Profondeur des arbres de 5 nœuds maximum
subsample	1	-
colsample_bytree	0,5	-
colsample_bylevel	1	Pas de contrainte supplémentaire
colsample_bynode	1	Pas de contrainte supplémentaire
reg_alpha	0	Pas de régularisation de norme L1
reg_lambda	1	-
tree_method	exact	Utilise l'ensemble des données du jeu d'apprentissage

2.3.4 MODÈLE LINÉAIRE

À titre de comparaison et pour servir de point de référence pour la suite de ce mémoire, on calibre également un modèle linéaire. L'objet de ce mémoire n'est pas de calibrer un modèle linéaire pour répliquer le modèle ALM, mais ce modèle servira de point de référence.

Le tableau 2.11 présente les résultats obtenus pour un modèle linéaire. Les résultats sont présentés en base 100 : le *Best Estimate* calculé à l'aide du modèle ALM sur l'échantillon de test est de 100.

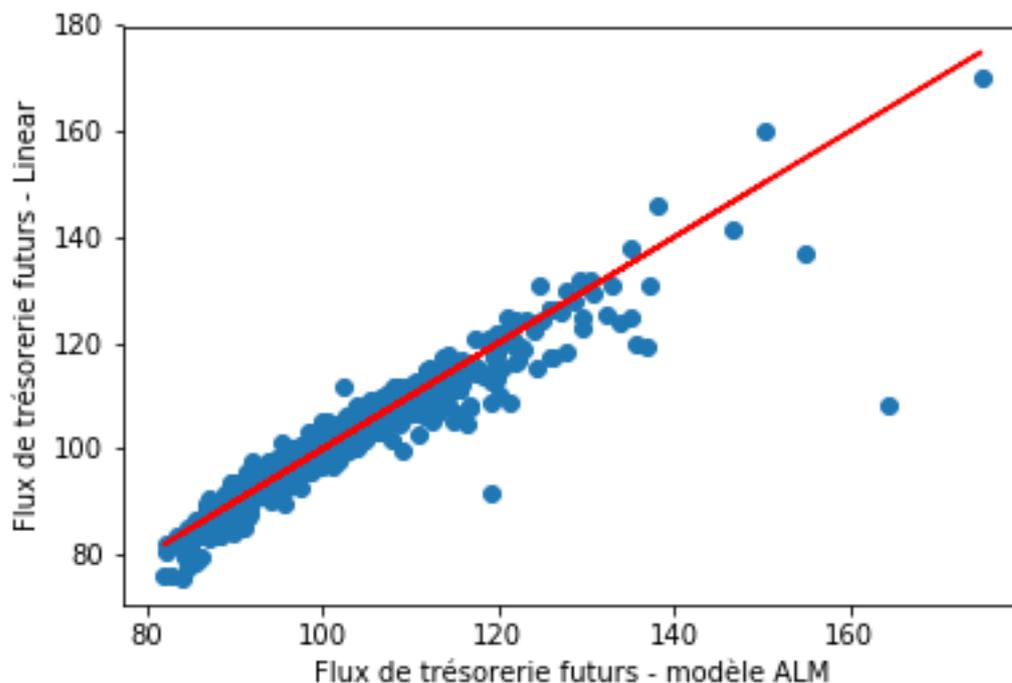
Tableau 2.11 – Résultats du calibrage d'un modèle linéaire proxy du modèle ALM

Résultats sur l'échantillon de test	Modèle Linéaire
<i>Best Estimate</i> – modèle ALM	100,00
MAE par scénario	1,86
RMSE par scénario	3,28
<i>Best Estimate</i> – modèle proxy	99,75
Erreur sur le <i>Best Estimate</i> (%)	0,25%

Étonnamment, le modèle linéaire apparaît comme le modèle proxy plus performant lorsque l'on s'intéresse à l'erreur absolue moyenne par scénario (MAE), l'erreur quadratique moyenne (RMSE) et l'erreur relative sur le *Best Estimate* (< 0,01%) sur les 1000 scénarios du jeu de test. Ces résultats apparaissent donc très satisfaisants pour répliquer le *Best Estimate*.

La figure 2.15 présente le tracé des flux de trésorerie futurs actualisés prédits par le modèle linéaire proxy XGBoost pour chacun des scénarios du jeu de test en fonction des flux de trésorerie futurs calculés à l'aide du modèle ALM. La première bissectrice est tracée en rouge.

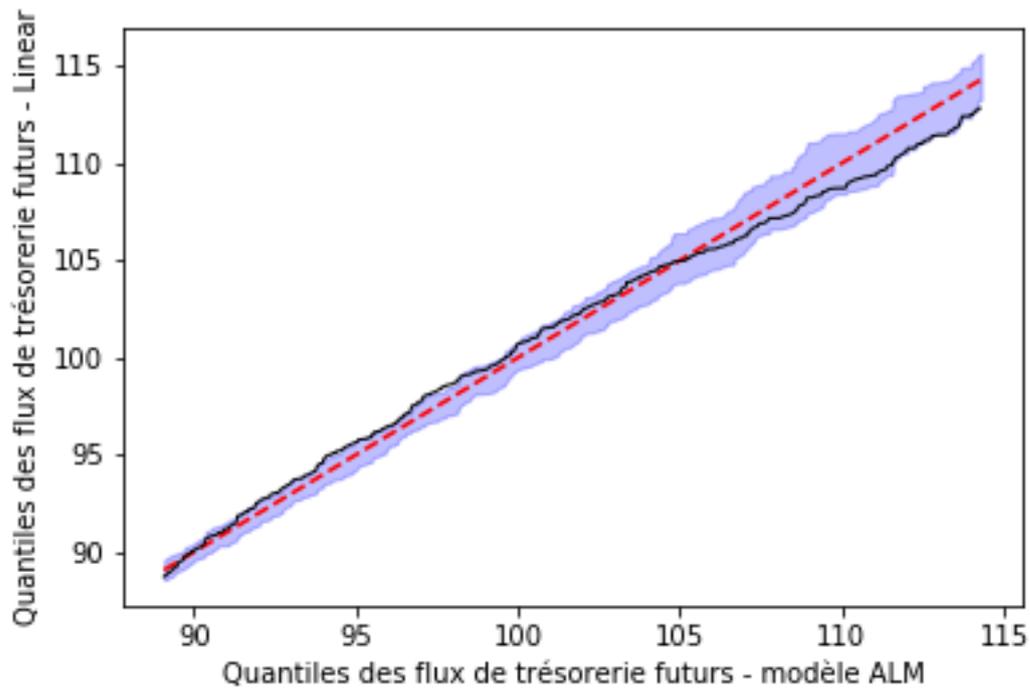
Figure 2.15 – Valeur des flux de trésorerie futurs actualisés calculés à partir du modèle linéaire par rapport aux flux calculés à l'aide du modèle ALM



Le coefficient de détermination du nuage de points est très proche de 1 : $R^2 = 0,909$.

La figure 2.16 correspond au diagramme quantile-quantile de la distribution des flux de trésorerie futurs obtenue à l'aide du modèle linéaire par rapport à la distribution de référence obtenue par calcul complet à l'aide du modèle ALM. Les éléments présentés sur le graphe sont similaires à la figure 2.10.

Figure 2.16 – Diagramme quantile-quantile (10% à 90%) de la distribution des flux de trésorerie futurs actualisés calculée à l'aide du modèle linéaire par rapport à la distribution de référence calculée à l'aide du modèle ALM



On voit ici que dans le cas du modèle linéaire, les résultats se trouvent inclus dans l'intervalle de confiance *bootstrap* pour les scénarios proches de la valeur moyenne (100). Ceci traduit une bonne réplification des flux de trésorerie futurs. On remarque également que les performances sont proches du réseau de neurones ce qui est cohérent avec le fait que le réseau de neurones étudié ici est équivalent à une régression linéaire du fait de son absence de fonction d'activation.

2.3.5 COMPARAISON DES MODÈLES ÉTUDIÉS

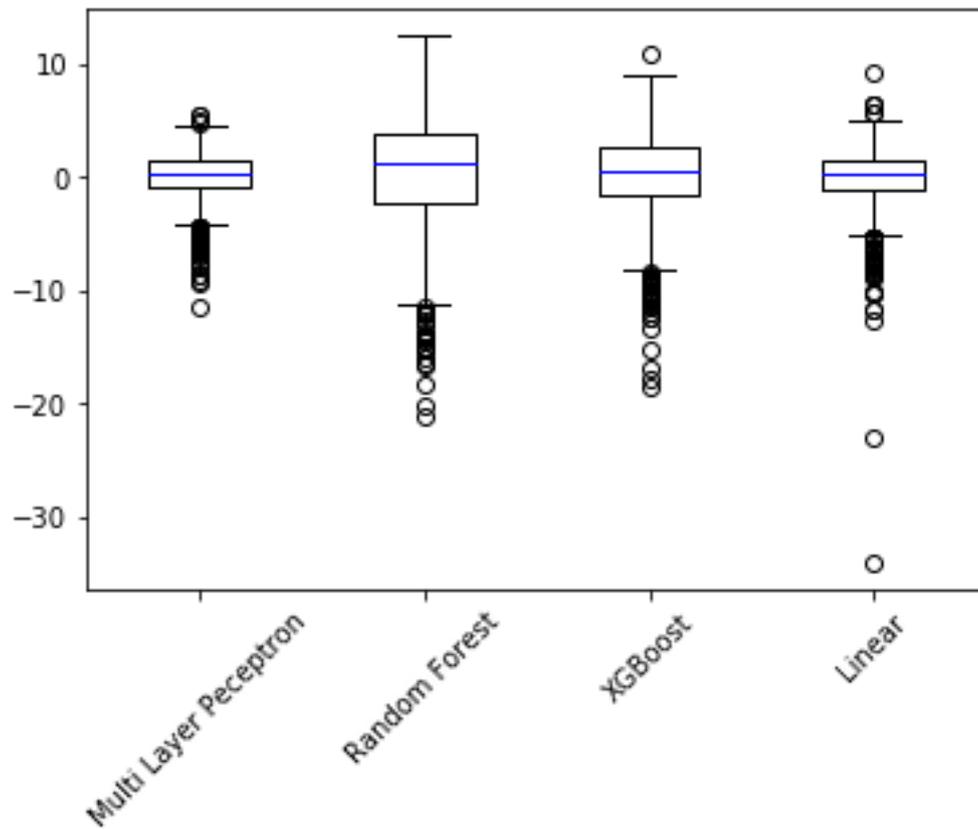
Le tableau suivant présente les performances des différents modèles proxys sur l'échantillon de test de manière synthétique.

Tableau 2.12 – Comparaison des performances des modèles étudiés sur l'échantillon de test

Résultats sur l'échantillon de test	Perceptron multicouche	Forêt aléatoire	XGBoost	Modèle linéaire
<i>Best Estimate</i> – modèle ALM	100,00	100,00	100,00	100,00
MAE par scénario	1,54	3,94	2,97	1,86
RMSE par scénario	2,19	5,26	4,20	3,28
<i>Best Estimate</i> – modèle proxy	99,97	100,05	99,98	99,75
Erreur sur le <i>Best Estimate</i> (%)	-0,03%	+0,05%	-0,02%	-0,25%

La figure suivante présente les distributions des résidus sur le jeu de données de test obtenus pour les trois modèles présentés ci-dessus. Les résidus sont présentés en base 100 : *Best Estimate* sur les 1000 scénarios de l'échantillon de test = 100. La médiane est en bleu, les boîtes noires correspondent aux quantiles 25% et 75% de la distribution des résidus et les moustaches correspondent aux quantiles 10% et 90%. Enfin, les cercles noirs correspondent aux *outliers*.

Figure 2.17 – Distributions des résidus obtenus avec les modèles proxys sur les données de test



3 APPLICATIONS

La section 3.1 présente l'application des modèles proxys entraînés au chapitre 2 pour estimer la valeur actuelle des options et garanties (TVOG) contenues dans le *Best Estimate* de la société.

La section 3.2 présente la sensibilité du modèle ALM à différents jeux de scénarios économiques provenant de générateurs différents. Elle présente également l'analyse de la robustesse des modèles proxys entraînés au chapitre 2 par rapport à ces jeux de scénarios économiques alternatifs.

3.1 ÉTUDE DE LA VALEUR ACTUALISÉE DES OPTIONS ET GARANTIES (TVOG)

Une des raisons pour lesquelles le *Best Estimate* est calculé à l'aide d'un modèle ALM stochastique est pour estimer la valeur actuelle des options et garanties comprises dans le *Best Estimate*, aussi appelée TVOG pour *Time Value of Options and Guarantees*. La TVOG du *Best Estimate* est définie comme la différence entre le *Best Estimate* calculée à l'aide du modèle ALM lors d'un calcul complet et le *Best Estimate* déterministe calculé à l'aide du modèle ALM le long d'un unique scénario économique moyen.

Selon une revue transversale réalisée au second semestre 2020 sur les générateurs de scénarios économiques utilisés pour le calcul de la meilleure estimation des engagements d'assurance vie réalisée par l'ACPR, la TVOG moyenne est estimée à environ 2% du BE déterministe⁶ [ACPR, 2020 2]. L'ACPR note également que la dispersion de la TVOG au sein de l'échantillon retenu pour l'étude est relativement significative et qu'elle résulte principalement des caractéristiques des portefeuilles d'actif et de passif des organismes d'assurance considérés, ainsi que des choix de modélisation retenus pour le GSE et pour le modèle de calcul du BE.

Si le niveau de la TVOG peut paraître faible comparée au *Best Estimate* déterministe, il est à noter qu'une faible augmentation des provisions techniques vie peut conduire à une baisse significative de l'actif net de l'organisme et par conséquent de ses fonds propres prudentiels.

En effet, l'ACPR estime qu'au niveau du marché français de l'assurance vie à fin 2019, les provisions techniques vie hors unités de compte représentent 64% du passif au bilan prudentiel des organismes d'assurance vie et mixte alors que leur actif net représente 10% du même passif [ACPR, 2020 1]. Par conséquent, à partir de ces ordres de grandeurs correspondant à la situation à fin 2019, une hausse de 1% des provisions techniques vie hors unités de compte pour les assureurs vie et mixte en France correspondrait approximativement à une baisse de leur actif net de l'ordre 6,4%.

La sous-section 3.1.1 présente une décomposition par facteur de risque financier, à savoir les taux d'intérêt sans risque, les actions et les actifs immobiliers, de la TVOG contenue dans le *Best Estimate*.

La sous-section 3.1.2 présente l'application des modèles proxys entraînés au chapitre 2 pour estimer la TVOG et ses différentes composantes.

3.1.1 DÉCOMPOSITION DE LA TVOG PAR FACTEUR DE RISQUE

Comme indiqué précédemment, cette sous-section présente une analyse de la décomposition de la TVOG contenue dans le *Best Estimate* par facteur de risque financier. Ainsi, afin d'analyser plus en détails l'importance des différents facteurs de risques financiers dans le calcul du *Best Estimate*, il est possible de calculer le *Best Estimate* sur différents jeux de scénarios économiques. Dans la suite de

⁶ Étude réalisée à partir d'un échantillon de 15 organismes d'assurance illustratifs de la diversité des pratiques observées sur le marché français à fin 2019.

cette étude, on considère les jeux de scénarios suivants issus d'un générateur de scénarios économiques interne :

- Un scénario déterministe ;
- Un jeu de 1000 scénarios classique dans lequel les taux d'intérêt, les actions et les actifs immobiliers sont stochastiques. Ce jeu de scénarios servira de référence par la suite ;
- Un jeu de 1000 scénarios dans lequel seuls les taux d'intérêt sont stochastiques. Les actifs, indiciels sont projetés de manière déterministes ;
- Un jeu de 1000 scénarios dans lequel seuls les actions sont stochastiques ;
- Et enfin, un dernier jeu de scénarios dans lequel seuls les actifs immobiliers sont stochastiques.

Les figures suivantes illustrent les distributions de certains facteurs de risques stochastiques obtenues à l'aide du générateur de scénarios économiques : les enveloppes bleues correspondent à différents quantiles de la distribution du facteur de risque diffusé de manière stochastique alors que la courbe rouge correspond au scénario déterministe de ce facteur de risque.

Figure 3.1 – Distribution du *total return* annuel de l'indice actions projeté de manière stochastique – quantiles en bleu et scénario déterministe en rouge

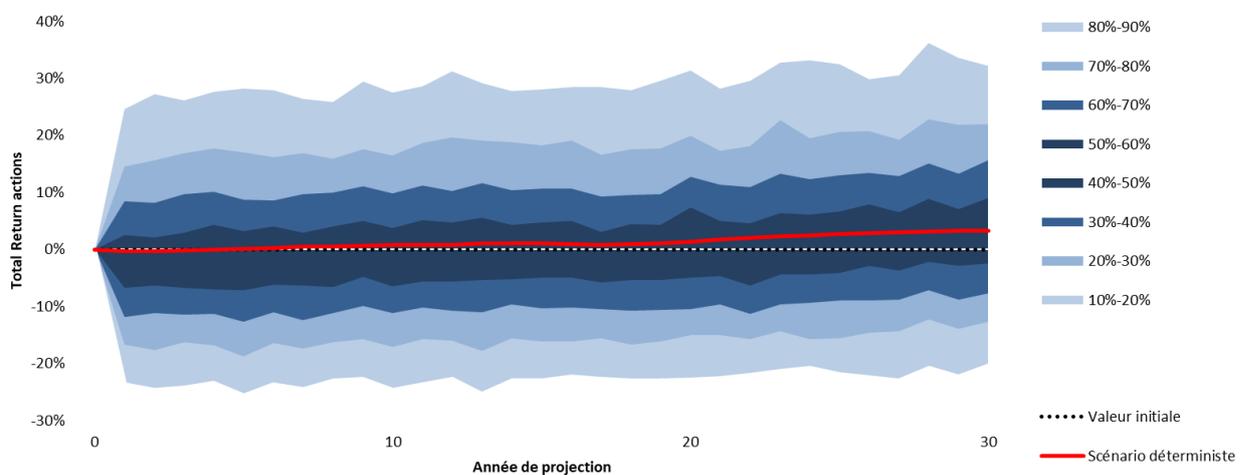


Figure 3.2 – Distribution du *total return* annuel des actifs immobiliers projeté de manière stochastique – quantiles en bleu et scénario déterministe en rouge

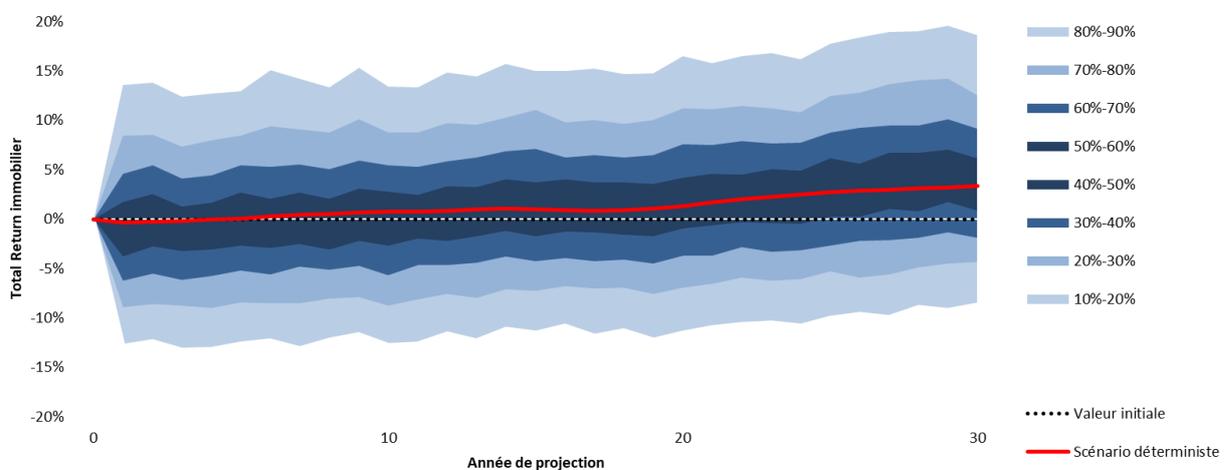


Figure 3.3 – Distribution du déflateur projeté de manière stochastique – quantiles en bleu et scénario déterministe en rouge

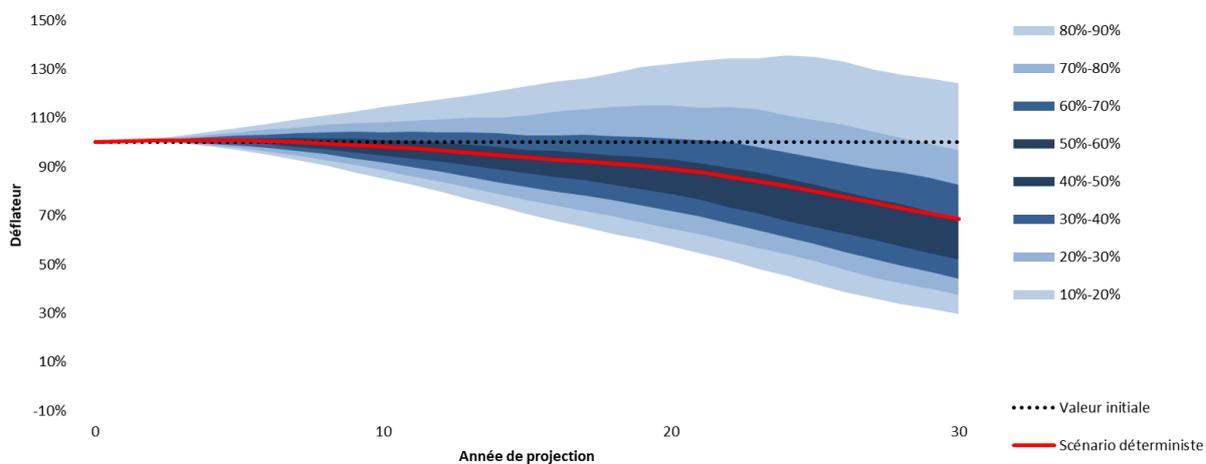
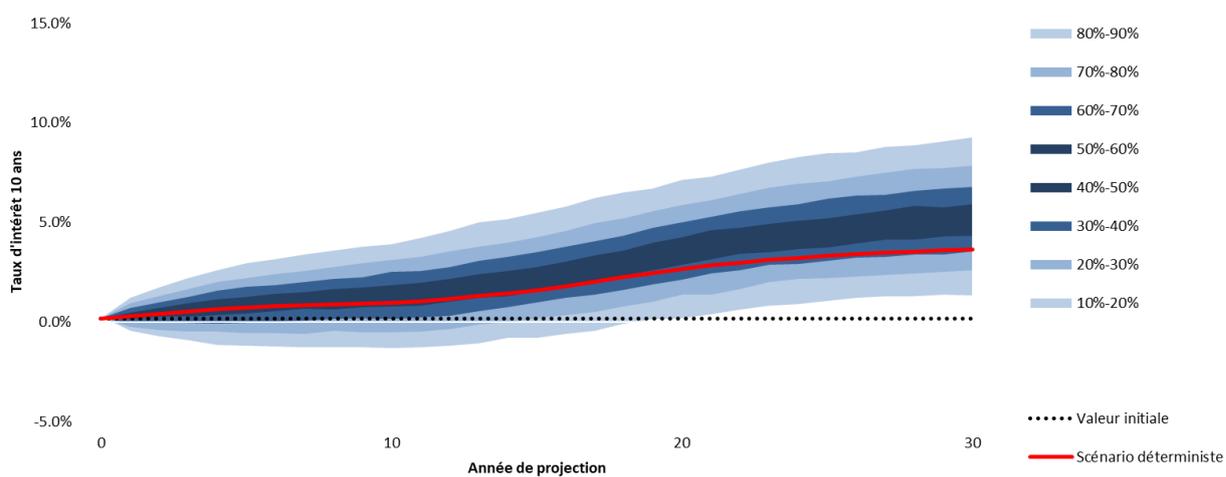


Figure 3.4 – Distribution du taux d'intérêt 10 ans projeté de manière stochastique – quantiles en bleu et scénario déterministe en rouge



Le tableau suivant présente les résultats obtenus à l'aide du modèle ALM dans chacun de ces jeux de scénarios. Il présente également l'incertitude statistique entourant le calcul du *Best Estimate*.

Tableau 3.1 – Décomposition de la valeur actuelle des options et garanties incluse dans le *Best Estimate* – calcul complet à l'aide du modèle ALM, base 100

Jeu de scénarios	<i>Best Estimate</i>	TVOG (% du BE déterministe)	Incertitude statistique (% du BE déterministe)
Scénario déterministe	95,82	-	-
Calcul stochastique complet	100,00	4,36%	+/- 0,40%
Taux stochastiques – actions & immobilier déterministes	98,73	3,04%	+/- 0,36%
Actions stochastiques – taux & immobilier déterministes	97,10	1,33%	+/- 0,17%
Immobilier stochastique – taux et actions déterministes	95,83	0,01%	+/- 0,04%

Tout d'abord on remarque qu'avec le modèle ALM et le GSE utilisés ici, la TVOG du *Best Estimate* (4,36%) est significative et supérieure à la moyenne de la TVOG (2%) observée dans l'étude l'ACPR portant sur 15 modèles ALM et GSE du marché français à fin 2019.

Ensuite, on remarque que ce sont **les taux d'intérêt qui sont responsables de la plus grande TVOG (3,04%)** lorsqu'ils sont rendus stochastiques. Ce résultat apparaît cohérent étant donné la grande importance des taux d'intérêt dans le modèle ALM. En effet, deux facteurs peuvent être mis en avant :

- D'une part, les placements à l'actif du bilan d'assurance sont **principalement obligataires**. Par conséquent, dans le modèle ALM, les revenus des placements sont principalement déterminés par l'évolution des taux d'intérêt.
- D'autre part, le niveau des taux d'intérêt est un élément clé du modèle ALM puisqu'il est une des principales entrées de la formule du **taux servi et des rachats conjoncturels**. En jouant directement sur le déclenchement des rachats conjoncturels dans le modèle ALM et surtout, en influant directement sur le niveau du taux servi et donc sur la participation aux bénéfices versée aux assurés à chaque pas de projection, les taux d'intérêts ont une importance capitale dans le calcul de la TVOG totale.

La modélisation stochastique des **actions est quant à elle responsable d'une TVOG significative (1,33%)** ce qui s'explique notamment par le fait qu'elle est la classe d'actif la plus volatile. En effet, augmenter la volatilité des actions va venir renchérir le coût des options et garanties des contrats distribués par l'organisme d'assurance.

En effet, rappelons que les principales options et garanties contenues dans les contrats d'assurance vie en euros modélisés dans cette étude sont les suivants : le mécanisme de **participation aux bénéfices**, une **option de rachat** du contrat que l'assuré peut exercer à tout moment, ainsi qu'une **garantie en capital**. Par conséquent, l'augmentation de la volatilité des actions détenues à l'actif vient augmenter le coût de l'option de rachat détenu par les assurés. En outre, dans les scénarios actions défavorables, c'est-à-dire lorsque le cours des actions détenues chute, l'assureur ne peut transférer qu'une partie de ses pertes financières à ses assurés via la participation aux bénéfices puisqu'il garantit le capital de ses assurés. Ainsi, l'augmentation de la volatilité des actions détenues au fonds général de l'assureur vient augmenter le coût de la garantie en capital contenue dans les contrats.

Enfin, le fait de **diffuser les actifs immobiliers de manière stochastique dans le calcul se révèle avoir un impact très faible, quasiment indiscernable par rapport au calcul déterministe**. Ceci s'explique notamment par (i) le fait que les actifs immobiliers correspondent à la plus petite et la moins liquide des classes d'actif représentée dans les placements initiaux, (ii) que la volatilité des actifs immobiliers est moins importante que les actions, (iii) et que l'actualisation des flux de trésorerie futurs associés à ces placements est réalisée à partir de la courbe de taux considérée déterministe.

Il est à noter que les jeux de scénarios utilisés ci-dessus ne permettent pas à proprement parler d'estimer la contribution de chacun des facteurs de risques financiers à la TVOG totale contenue dans le *Best Estimate*, toutefois, ils fournissent une estimation de l'importance relative de chacune des variables financières lorsqu'elles sont rendues stochastiques dans le modèle ALM. Par exemple, ils ne permettent pas de mettre en lumière l'importance des interactions entre variables financières dans la TVOG totale contenue dans le *Best Estimate* stochastique.

3.1.2 UTILISATION DES MODÈLES PROXYS POUR ESTIMER LA TVOG

Les modèles proxys présentés au chapitre 2 présentent de bonnes performances pour répliquer la somme des flux de trésorerie futurs actualisés dans chacun des scénarios économiques ainsi que pour le calcul du *Best Estimate*.

Afin d'évaluer la robustesse et la performance de ces modèles, **on interroge dans cette section leur capacité à répliquer la TVOG associée à différents jeux de scénarios économiques** telle qu'elle est calculée par le modèle ALM.

3.1.2.1 ENTRAÎNEMENT DES MODÈLES PROXYS À PARTIR DU JEU DE SCÉNARIO DE RÉFÉRENCE

Dans un premier temps, on entraîne les modèles proxys présentés au chapitre 2 à partir du jeu de scénarios économiques utilisé pour réaliser le calcul stochastique complet présenté à la sous-section précédente (3.1.1). On désignera par la suite ce jeu de scénarios comme le jeu de scénarios de référence. Ensuite, on utilise ces modèles proxys pour estimer le *Best Estimate* correspondant à chacun des scénarios ou jeux de scénarios présentés précédemment, à savoir :

- **Le scénario moyen** utilisé pour définir le *Best Estimate* déterministe ;
- Le jeu de 1000 scénarios dans lequel **seuls les taux d'intérêt sont stochastiques**. Les actifs, indiciaires sont projetés de manière déterministes ;
- Le jeu de 1000 scénarios dans lequel **seules les actions sont stochastiques** ;
- Et enfin, le dernier jeu de scénarios dans lequel **seuls les actifs immobiliers sont stochastiques**.

À partir de ces résultats, on en déduit les TVOG correspondantes et on les compare aux TVOG calculées à l'aide du modèle ALM pour chacun des modèles proxys.

Pour chacun des modèles proxys présentés au chapitre 2, les *Best Estimates* prédits pour chacun des jeux de scénarios économiques ainsi que pour le scénario déterministe sont présentés ci-après :

- Le tableau 3.2 présente les **BE** calculés à l'aide des modèles proxys entraînés sur le jeu de scénarios économiques de référence ;
- Le tableau 3.3 présente les **TVOG** pour l'ensemble des modèles proxys et des jeux de scénarios étudiés ;
- La figure 3.5 présente **les TVOG du tableau précédent sous forme graphique**. Les barres d'erreurs associées au calcul complet représentent l'incertitude statistique entourant le calcul complet, exprimé en pourcentage du BE déterministe.

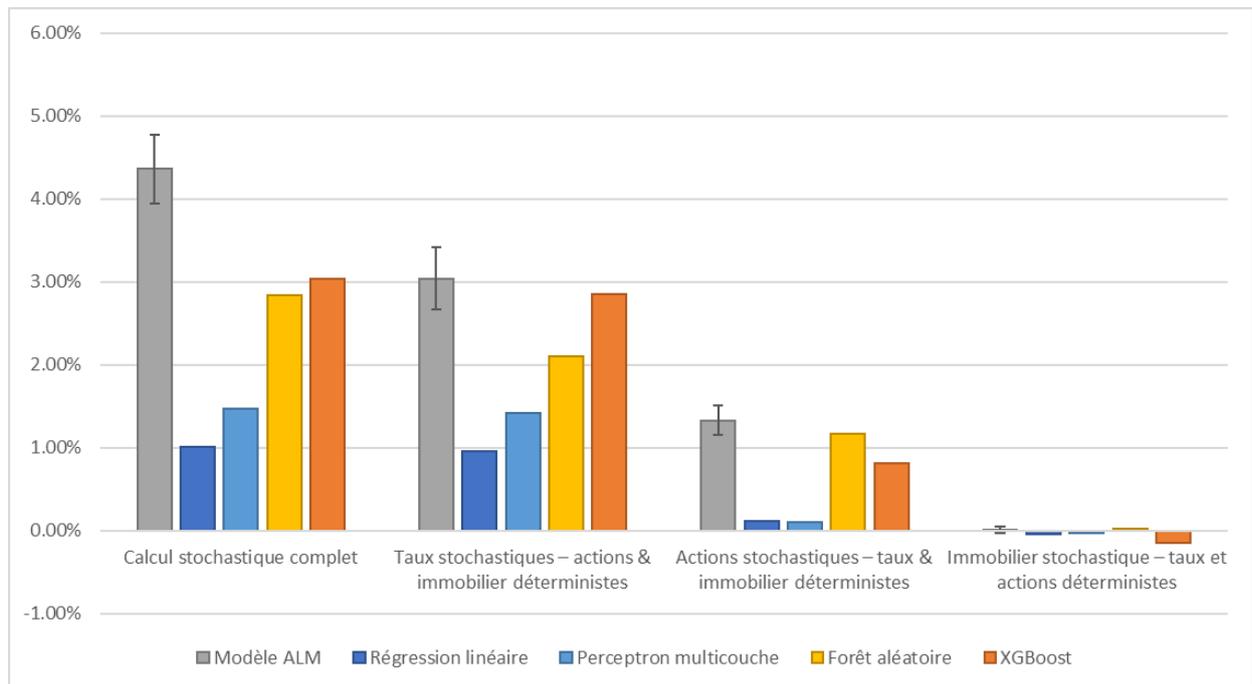
Tableau 3.2 – Comparaison des *Best Estimates* calculés à l’aide des modèles proxys entraînés sur le jeu de scénarios économiques de référence – Base 100 = calcul complet avec modèle ALM

Jeu de scénarios	Modèle ALM	Régression linéaire	Perceptron multicouche	Forêt aléatoire	XGBoost
Scénario déterministe	95,82	99,00	98,55	97,21	97,05
Calcul stochastique complet	100,00	100,00	100,00	99,98	100,00
Taux stochastiques – actions & immobilier déterministes	98,73	99,94	99,94	99,26	99,81
Actions stochastiques – taux & immobilier déterministes	97,10	99,10	98,65	98,35	97,83
Immobilier stochastique – taux et actions déterministes	95,83	98,95	98,52	97,23	96,90

Tableau 3.3 – Comparaison des TVOG calculées à l’aide des trois modèles proxys entraînés sur le jeu de scénarios économiques de référence – % du BE déterministe

Jeu de scénarios	Modèle ALM	Régression linéaire	Perceptron multicouche	Forêt aléatoire	XGBoost	Incertitude statistique
Calcul stochastique complet	4,36%	1,01%	1,47%	2,84%	3,04%	+/- 0,41%
Taux stochastiques – actions & immobilier déterministes	3,04%	0,95%	1,41%	2,10%	2,85%	+/- 0,38%
Actions stochastiques – taux & immobilier déterministes	1,33%	0,11%	0,10%	1,17%	0,81%	+/- 0,18%
Immobilier stochastique – taux et actions déterministes	0,01%	-0,04%	-0,03%	0,02%	-0,15%	+/- 0,04%

Figure 3.5 – Comparaison des TVOG sur les différents jeux de scénarios économiques – % du BE déterministe



Remarques générales

La première remarque que l'on peut tirer de ses résultats est la **difficulté que rencontre l'ensemble des modèles proxys à correctement répliquer le *Best Estimate* déterministe**. Cette difficulté s'explique notamment par deux éléments.

D'une part, c'est le seul calcul qui repose sur un seul scénario. Par conséquent, il est **attendu que l'erreur commise sur un scénario soit bien supérieure à celle réalisée sur la moyenne de 1000 scénarios**. En effet, pour le perceptron multicouche, la forêt aléatoire et le modèle XGBoost, l'erreur quadratique moyenne pour un scénario est généralement comprise entre 2% et 4% du *Best Estimate*.

D'autre part, les modèles proxys ont été entraînés sur des scénarios stochastiques. **Le scénario déterministe ne fait pas partie des données d'entraînement et aucun des scénarios économiques utilisés pour l'entraînement n'est déterministe**.

Régression linéaire

Tout d'abord, **la régression linéaire**, présentée ici comme un point de référence, est le modèle qui **produit l'erreur la plus importante sur le scénario déterministe par rapport au calcul complet**.

Cette erreur importante impacte significativement l'estimation de la TVOG. La régression linéaire est le moins bon des modèles proxys pour estimer la TVOG. En effet, le modèle linéaire présenté ici, a tendance à largement sous-estimer la TVOG sur chacun des jeux de scénarios économiques. En particulier, sur le jeu de scénarios avec seulement les actions diffusées de manière stochastique, le modèle linéaire ne produit quasiment aucune différence à partir du scénario déterministe et du jeu de scénarios économiques dans lequel seules les actions sont stochastiques.

Si le modèle linéaire s'est révélé performant pour répliquer le modèle ALM sur de faibles variations et sur des scénarios économiques générés par le même GSE ayant servi à la production des données de

calibrage, il se révèle ici incapable de généraliser correctement le comportement du *Best Estimate* sur d'autres jeux de scénarios.

Perceptron multicouche

Le perceptron multicouche apparaît assez peu précis pour répliquer le *Best Estimate* correspondant au scénario déterministe (98,55 vs 95,82 pour le modèle ALM). S'il s'agit du moins précis des trois modèles proxys étudiés ici, il est légèrement plus précis que le modèle linéaire (98,88).

En outre, le perceptron multicouche se révèle assez peu précis pour estimer les différentes TVOG et il a tendance à systématiquement sous-estimer la TVOG. En particulier, tout comme le modèle linéaire, le perceptron multicouche ne produit quasiment aucune différence entre le *Best Estimate* déterministe et le *Best Estimate* correspondant au jeu de scénarios économiques dans lequel seules les actions sont stochastiques.

Toutefois, la hiérarchie des TVOG est respectée : le perceptron multicouche estime une TVOG « totale » supérieure à la TVOG « taux stochastiques », elle-même supérieure à la TVOG « actions stochastiques ».

On note également que les résultats obtenus à l'aide du perceptron multicouche apparaissent très similaires au modèle linéaire. Ceci s'explique en partie car le perceptron multicouche considéré ici n'a pas de fonction d'activation non linéaire : la fonction d'activation est la fonction identité. Par conséquent, le perceptron multicouche étudié ici est très proche d'un modèle linéaire.

Forêt aléatoire et XGBoost

Les deux modèles reposant sur les arbres de décisions ont quant à eux des performances comparables et produisent des résultats encourageants. En effet, s'ils n'apparaissent pas suffisamment précis pour estimer les TVOG sur l'ensemble des jeux de scénarios étudiés ici, on note toutefois que le résultat de la TVOG « taux stochastiques » par le modèle XGBoost est suffisamment précis puisque l'écart entre l'estimation donnée par le modèle XGBoost et le calcul complet est inférieur à l'incertitude statistique entourant le calcul complet de la TVOG « taux stochastiques ». De la même manière, la TVOG « actions stochastiques » prédite par la forêt aléatoire est jugée suffisamment précise sur le même critère.

La hiérarchie des TVOG estimées par ces deux modèles proxys est respectée : TVOG « totale » > TVOG « taux stochastiques » > TVOG « actions stochastiques » > TVOG « immobilier stochastique ».

On note également que ces deux modèles ont tendance à sous-estimer la TVOG pour l'ensemble des jeux de scénarios étudiés.

Ainsi, la forêt aléatoire et le modèle XGBoost se révèlent être les modèles proxys les plus performants pour estimer la TVOG sur ces jeux de scénarios économiques.

3.1.2.2 AJOUT DU SCÉNARIO DÉTERMINISTE DANS LES DONNÉES D'APPRENTISSAGE

Pour estimer correctement la TVOG, un des problèmes rencontrés par les modèles proxys est la difficulté d'estimer correctement le point de référence correspondant au *Best Estimate* déterministe.

Afin d'améliorer la performance des modèles proxys et tenter de pallier ce problème, on ré-entraîne les modèles proxys sur 1001 scénarios en ajoutant explicitement le scénario déterministe dans le jeu de données de calibrage afin de voir si l'ajout de ce seul scénario dans les données d'apprentissage permet d'améliorer les résultats.

Comme précédemment, pour chacun des modèles proxys, les *Best Estimates* prédits pour chacun des jeux de scénarios économiques ainsi que pour le scénario déterministe sont présentés ci-après :

- Le tableau 3.4 présente les **BE** calculés à l'aide des modèles proxys entraînés sur le jeu de scénarios économiques de référence ;
- Le tableau 3.5 présente les **TVOG** pour l'ensemble des modèles proxys et des jeux de scénarios étudiés ;
- La figure 3.6 présente les **TVOG** du tableau précédent sous forme graphique. Les barres d'erreurs associées au calcul complet représentent l'incertitude statistique entourant le calcul complet, exprimé en pourcentage du BE déterministe.

Tableau 3.4 – Comparaison des *Best Estimates* calculés à l'aide des modèles proxys entraînés sur 1001 scénarios par rapport au calcul complet

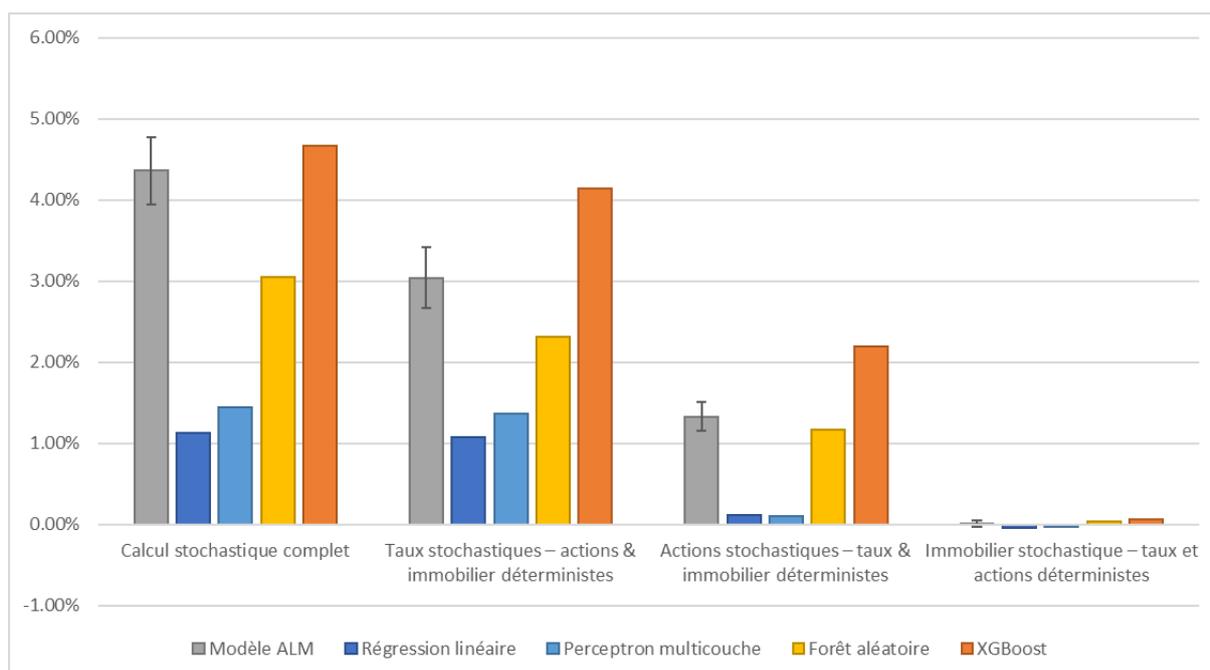
Jeu de scénarios	Modèle ALM	Régression linéaire	Perceptron multicouche	Forêt aléatoire	XGBoost
Scénario déterministe	95,82	98,89	98,60	97,05	95,56
Calcul stochastique complet	100,00	100,01	100,02	100,00	100,01
Taux stochastiques – actions & immobilier déterministes	98,73	99,95	99,95	99,29	99,52
Actions stochastiques – taux & immobilier déterministes	97,10	99,00	98,70	98,17	97,65
Immobilier stochastique – taux et actions déterministes	95,83	98,85	98,56	97,08	95,62

Tout d'abord, on note ici que **l'ajout du scénario déterministe dans les données d'apprentissage des modèles proxys présente un bilan contrasté pour l'estimation du *Best Estimate* déterministe par les modèles proxys**. En effet, l'ajout de ce scénario dans les données d'apprentissage n'a quasiment aucun impact par rapport aux résultats précédents pour le modèle le modèle linéaire et le perceptron multicouche, un léger impact sur la forêt aléatoire et un fort impact sur le modèle XGBoost.

Tableau 3.5 – Comparaison des TVOG calculées à l’aide des trois modèles proxys entraînés sur 1001 scénarios par rapport au calcul complet - % du BE déterministe

Jeu de scénarios	Modèle ALM	Régression linéaire	Perceptron multicouche	Forêt aléatoire	XGBoost	Incertitude statistique
Calcul stochastique complet	4,36%	1,13%	1,44%	3,05%	4,66%	0,40%
Taux stochastiques – actions & immobilier déterministes	3,04%	1,07%	1,37%	2,31%	4,14%	0,36%
Actions stochastiques – taux & immobilier déterministes	1,33%	0,11%	0,10%	1,16%	2,19%	0,17%
Immobilier stochastique – taux et actions déterministes	0,01%	-0,04%	-0,03%	0,03%	0,06%	0,04%

Figure 3.6 – Comparaison des TVOG obtenues par les modèles entraînés sur 1001 scénarios sur les différents jeux de scénarios économiques – % du BE déterministe



Ainsi, les résultats observés sur l’estimation du *Best Estimate* déterministe se retrouve dans les TVOG : la régression linéaire et le perceptron multicouche présentent des résultats très similaires à ceux obtenus dans la section précédente.

Par contre, on note qu’à partir des 1001 scénarios, le modèle XGBoost a tendance à surestimer la TVOG sur l’ensemble des jeux de scénarios étudiés.

3.1.2.3 SYNTHÈSE DES RÉSULTATS

Cette étude nous montre que les modèles proxys étudiés ici rencontrent des difficultés significatives pour répliquer correctement la TVOG sur les différents jeux de scénarios économiques étudiés ici.

Ces résultats s'expliquent notamment par la **difficulté que rencontrent les modèles proxys à répliquer correctement le *Best Estimate* déterministe**. Cette difficulté s'explique notamment par le fait que c'est le seul calcul qui repose sur un seul scénario. Par conséquent, **il est attendu que l'erreur commise sur un scénario soit bien supérieure à celle réalisée sur la moyenne de 1000 scénarios**.

S'il est possible de pallier ce problème en intégrant le scénario déterministe au jeu de scénario d'apprentissage des modèles proxys, cette solution ne fonctionne correctement que pour les modèles XGBoost et la forêt aléatoire.

Les résultats présentés ici sont finalement encourageants pour essayer de répliquer avec une grande précision la TVOG associée à différents jeux de scénarios économiques. Toutefois ils ne sont pas suffisamment précis par rapport au modèle ALM.

3.2 SENSIBILITÉS DES MODÈLES PROXYS AUX SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES

L'objectif de l'étude de sensibilité présentée dans cette section est d'interroger la performance et la robustesse des modèles proxys entraînés au chapitre 2 lorsqu'ils sont confrontés à des scénarios économiques différents.

La sous-section 3.2.1 présente une première analyse de sensibilité concernant le modèle de taux d'intérêt (G2++ vs HW1) qui est, d'après les résultats détaillés au 3.1.1, la source principale de la valeur actuelle des options et garanties (TVOG) contenues dans le *Best Estimate*.

La sous-section 3.2.2 interroge la robustesse des modèles proxys entraînés sur le jeu de scénarios économiques de référence (G2++) vis-à-vis d'un échantillon de jeux de scénarios économiques produits par des GSE utilisés par différents assureurs vie.

Enfin, la sous-section 3.2.3 interroge la robustesse des modèles proxys vis-à-vis du même échantillon de jeux de scénarios économiques présenté ci-dessus lorsque les modèles proxys sont entraînés sur les scénarios économiques d'un GSE alternatif.

3.2.1 SENSIBILITÉ DES MODÈLES PROXYS AU MODÈLE DE TAUX D'INTÉRÊT DU GÉNÉRATEUR DE SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES

Comme indiqué précédemment, afin d'évaluer la robustesse et la performance des modèles proxys présentés au chapitre 2, on confronte ces modèles à des scénarios économiques différents.

Dans un premier temps, on réalise une étude de sensibilité aux scénarios de taux d'intérêt. En effet, on a vu précédemment que la valeur actuelle options et garanties contenues dans les contrats d'assurance est particulièrement sensible aux scénarios de taux d'intérêt stochastiques.

3.2.1.1 COMPARAISON DES MODÈLES DE TAUX D'INTÉRÊT UTILISÉS

Les deux modèles de taux d'intérêt utilisés dans cette sous-section sont les modèles Hull & White à un facteur et le modèle G2++ présentés au chapitre 1. Pour rappel, les équations de diffusion et les principaux paramètres des modèles sont brièvement rappelées ci-après.

Modèle G2++

La dynamique du taux court r_t dans le modèle G2++ s'écrit :

$$r_t = x_t + y_t + \phi(t)$$

Avec :

- x_t et y_t deux processus stochastiques ;
- W_t^1 et W_t^2 sont deux mouvements browniens corrélés entre eux. Ils suivent tous les deux une loi normale centrée de variance unitaire $N(0,1)$;
- r_0, a, b, σ, η sont des constantes positives. Elles correspondent respectivement à la valeur initiale du taux court (r_0), aux vitesses de retour à la moyenne (a, b) ainsi qu'aux volatilités (σ, η) des deux processus x_t et y_t ;
- ϕ est une fonction déterministe permettant de reproduire exactement la courbe des taux initiale. En particulier, on a : $\phi(0) = r_0$.

Hull and White à 1 facteur

Le modèle de Hull and White présente l'avantage d'être relativement simple tout en autorisant une réplication parfaite de la courbe de taux en début de projection, celle-ci étant directement un paramètre d'entrée du modèle. La dynamique du modèle de Hull and White s'écrit :

$$dr_t = (\theta_t - ar_t) dt + \sigma dW_t$$

Avec :

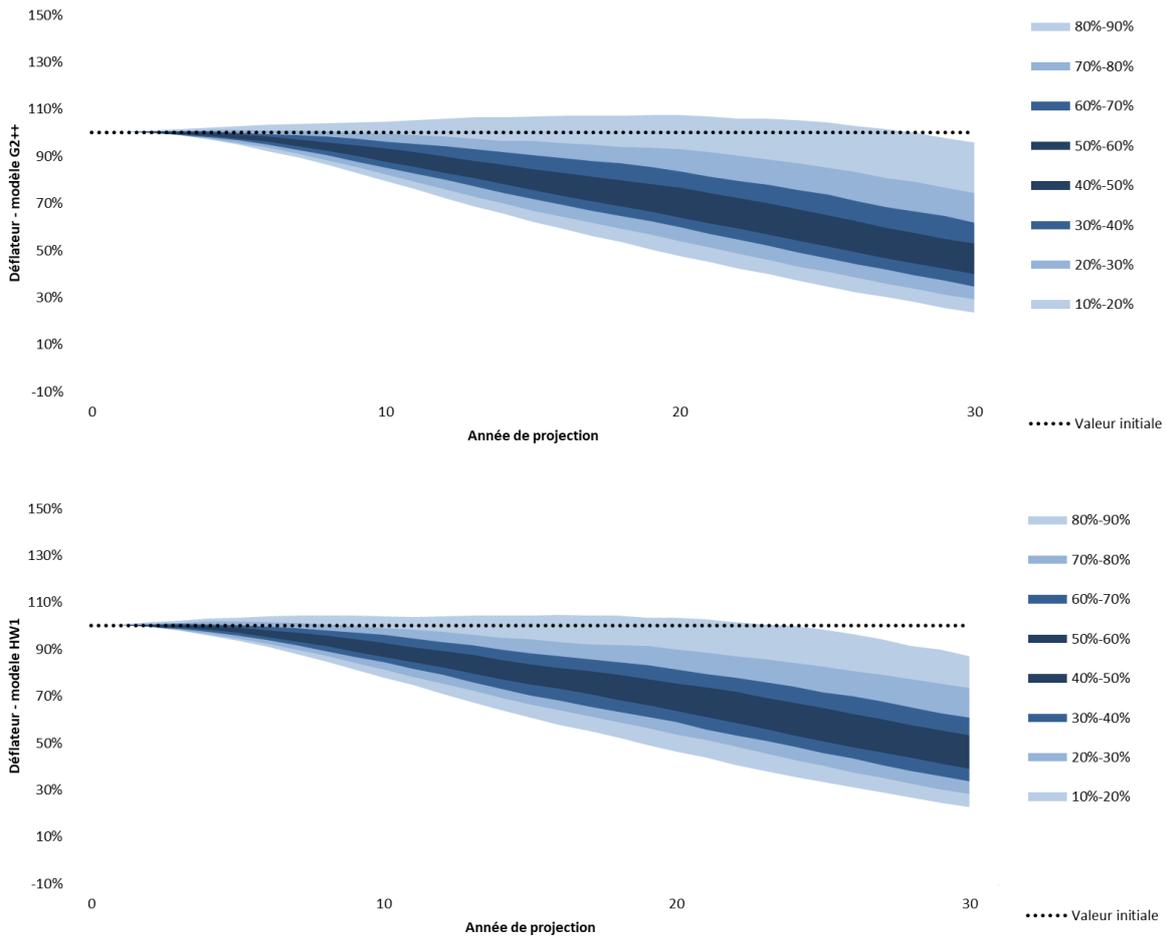
- r_t le taux court instantané, c'est-à-dire le taux de rendement/d'emprunt à un instant t donné sur une période infinitésimale dt ;
- θ_t une fonction dépendant du temps. Elle sera déterminée de manière à reproduire la courbe de taux initiale ;
- a la vitesse de retour à la moyenne, *mean reverting speed*, qui est ici supposée constante.;
- σ la volatilité du taux court à un instant donné qui est supposée ici constante.
- W_t un brownien suivant une loi normale centrée de variance unitaire $N(0,1)$.

Le modèle de Hull and White ainsi défini est appelé Hull and White 1 Facteur, *i.e.* HW1 dans la mesure où il présente un seul facteur de risque lié à une seule source d'aléa.

Comparaison des distributions de taux d'intérêt

Les distributions des déflateurs et des prix d'obligations zéro-coupons de maturité 10 ans sont présentées ci-après à titre de comparaison. On rappelle que le déflateur nécessaire à l'actualisation des flux dans le calcul du *Best Estimate* correspond à l'inverse du numéraire, c'est-à-dire $D_t = e^{-\int_0^t r_u du}$.

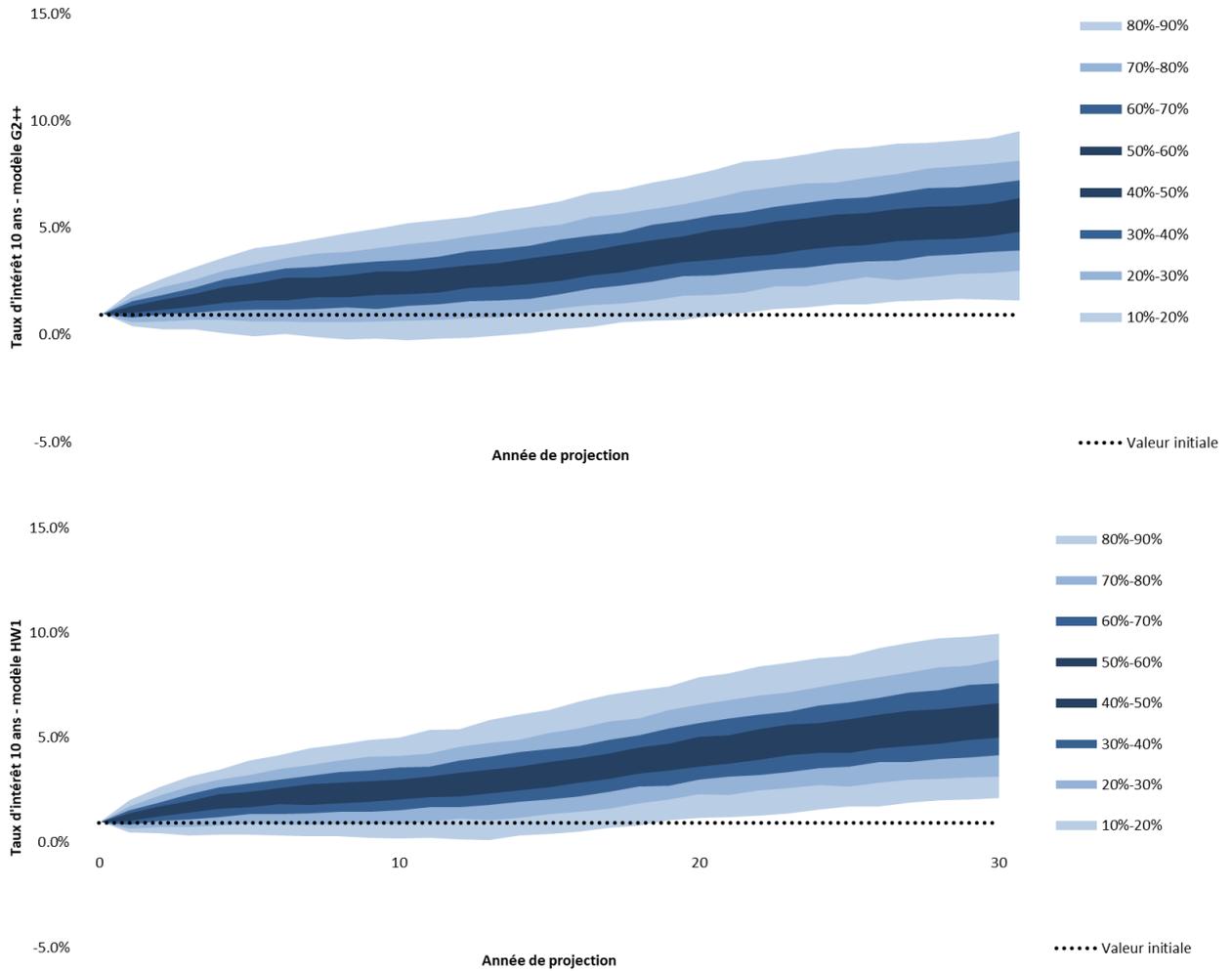
Figure 3.7 – Distributions du déflateur projeté de manière stochastique – modèle G2++ (haut) et HW1 (bas)



On remarque tout d'abord que les enveloppes des distributions des déflateurs sont très proches entre les deux modèles. Ceci n'est pas surprenant puisque les deux modèles de taux sont calibrés à partir des mêmes données de marché et que la diffusion démarre à partir de la même courbe de taux initiale.

On note toutefois que le modèle G2+ produit une distribution légèrement plus étendue, notamment en fin de projection.

Figure 3.8 – Distributions du taux d'intérêt 10 ans projeté de manière stochastique – modèle G2++ (haut) et HW1 (bas)



Tout comme pour les déflateurs, on remarque tout d'abord que les enveloppes des distributions produites par les deux modèles sont très similaires. Encore une fois, le modèle G2++ produit une distribution légèrement plus étalée que le modèle HW1.

3.2.1.2 PREMIER CAS : ENTRAÎNEMENT DES PROXYS À L'AIDE DES SCÉNARIOS G2++

Dans un premier temps, on entraîne les modèles proxys à partir des scénarios de taux issus du modèle G2++ et on applique ces modèles aux scénarios de taux issus du modèle HW1. Dans les deux cas, les modèles de diffusion des actions et de l'immobilier sont identiques. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant.

Tableau 3.6 – Comparaison des performances des modèles entraînés à partir du jeu de données G2++ sur le jeu de données HW1

Résultats sur le jeu de données HW1	Perceptron multicouche	Forêt aléatoire	XGBoost	Modèle linéaire
<i>Best Estimate</i> – modèle ALM	100,00	100,00	100,00	100,00
MAE par scénario	1,80	3,87	2,89	16,61
RMSE par scénario	2,52	5,04	3,93	31,78
<i>Best Estimate</i> – modèle proxy	99,76	100,25	100,11	103,22
Erreur sur le <i>Best Estimate</i> (%)	-0,24%	+0,25%	+0,11%	+3,22%

Pour l'ensemble des trois modèles proxys étudiés, les résultats restent satisfaisants puisque l'erreur relative sur le *Best Estimate* commise par les modèles proxys restent inférieurs à l'incertitude qui entoure le calcul complet réalisé par le modèle ALM (0,38% du BE sur le jeu de données HW1).

C'est le perceptron multicouche qui produit l'erreur moyenne absolue (MAE) et l'erreur quadratique moyenne (RMSE) les plus faibles. Toutefois, les performances des modèles proxys sont très similaires et aucun des trois modèles ne se détache nettement des autres modèles proxys.

On note par ailleurs que les performances du modèle linéaire, présenté ici comme point de référence, sont bien inférieures à celles des proxys. Si les résultats paraissent convaincants pour le modèle linéaire dans le cas de faibles variations et lorsque ce dernier est appliqué à des scénarios très proches de ceux utilisés pour le calibrage (cf. section 2.3), ils le sont beaucoup moins lorsque le modèle linéaire calibré avec un jeu de scénarios produits par un modèle de taux G2++ est appliqué aux scénarios produits par le modèle de taux HW1.

Enfin, ce premier cas de figure – entraînement des modèles proxys à partir des scénarios de taux plus complexes issus du modèle G2++ – est a priori le cas le plus facile à répliquer pour les modèles proxys. En effet, le modèle G2++ étant plus complexe que le modèle HW1, les modèles proxys ont été calibrés et entraînés sur des scénarios de taux d'intérêt plus complexes et plus riches que ceux du jeu de test. Le jeu de test est produit avec le modèle HW1 qui ne comporte qu'un aléa. Par conséquent, seules des modifications unidimensionnelles de la courbe de taux initiale sont possibles.

3.2.1.3 SECOND CAS : ENTRAÎNEMENT DES PROXYS À L'AIDE DES SCÉNARIOS HW1

Suite aux bons résultats des modèles proxys sur le cas de figure précédent, on effectue la même étude de sensibilité sur le cas de figure miroir, a priori plus difficile pour les modèles proxys : on les entraîne sur les scénarios les plus simples provenant du modèle HW1 et on les évalue sur les scénarios de taux plus complexes produits par le modèle G2++.

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant. La base 100 correspond à la valeur du *Best Estimate* calculé à partir du jeu de scénarios économiques de référence utilisant le modèle G2++.

Tableau 3.7 – Comparaison des performances des modèles entraînés à partir du jeu de données G2++ sur le jeu de données HW1

Résultats sur le jeu de données G2++	Perceptron multicouche	Forêt aléatoire	XGBoost	Modèle linéaire
<i>Best Estimate</i> – modèle ALM	100,27	100,27	100,27	100,27
MAE par scénario	1,70	3,71	2,89	$3,24 \times 10^6$
RMSE par scénario	2,31	4,96	3,93	$4,08 \times 10^6$
<i>Best Estimate</i> – modèle proxy	100,19	100,14	100,11	$6,39 \times 10^4$
Erreur sur le <i>Best Estimate</i> (%)	-0,08%	+0,13%	-0,20%	$> 6,3 \times 10^4 \%$

Tout d'abord, les très mauvais résultats du modèle linéaire indiquent que le problème de réplification ainsi posé dans ce deuxième cas de figure est effectivement plus difficile que le problème précédent.

Ensuite, pour l'ensemble des trois modèles proxys étudiés, les résultats sont tout à fait satisfaisants puisque l'erreur relative sur le *Best Estimate* commise par les modèles proxys restent inférieurs à l'incertitude qui entoure le calcul complet réalisé par le modèle ALM (0,35% du BE sur le jeu de données G2++).

Comme précédemment, le perceptron multicouche produit l'erreur moyenne absolue (MAE) et l'erreur quadratique moyenne (RMSE) les plus faibles. Toutefois, les performances des modèles proxys sont très similaires et aucun des trois modèles ne se détache nettement des autres modèles proxys.

On note par ailleurs que l'écart entre les *Best Estimates* calculés sur les deux jeux de scénarios est très faible. Il est de 0,27% et c'est le *Best Estimate* calculé à l'aide du modèle ALM et à partir des scénarios de taux issus du modèle HW1 qui est légèrement supérieur à celui calculé à partir du modèle G2++. Cet écart est très faible puisqu'il est lui-même inférieur à l'incertitude entourant les deux calculs stochastiques du modèle ALM qui est comprise entre 0,30% et 0,40%.

Les modèles proxys ne sont pas en mesure de répliquer de manière très précise l'écart de *Best Estimate* +0,27% entre les deux calculs, toutefois, il est à noter que la relation d'ordre est respectée : les trois modèles proxys prédisent un *Best Estimate* HW1 légèrement plus élevé que le *Best Estimate* G2++.

3.2.2 SENSIBILITÉ DU MODÈLE PROXY À DES SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES PRODUITS PAR D'AUTRES GÉNÉRATEURS DE SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES

Au vu de la robustesse satisfaisante des modèles proxys par rapport au modèle de taux, on poursuit l'analyse en appliquant les modèles proxys entraînés à partir de l'ESG de référence (G2++) à un échantillon de jeux de scénarios économiques provenant de 15 générateurs différents.

Cet échantillon provient de la revue transversale sur les générateurs de scénarios économiques menée par l'ACPR au second semestre 2020 [ACPR, 2020 2]. Ces générateurs de scénarios économiques proviennent de 15 organismes d'assurance illustratifs de la diversité des pratiques observées sur le marché français. Les jeux de scénarios économiques ont été collectés et analysés lors de contrôles sur place qui se sont déroulés à l'été 2020.

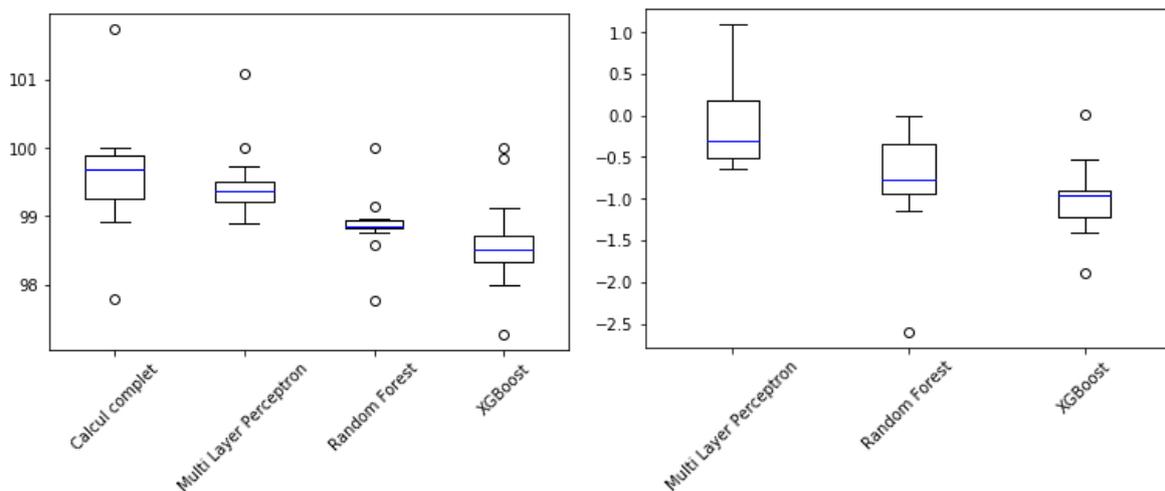
Pour chacun des jeux de l'échantillon, le nombre de scénarios utilisés pour le calcul du *Best Estimate* est compris entre 1000 et 5000.

En outre, 80% des GSE correspondant à l'échantillon d'étude utilisent des **modèles de taux dits de marché**, comme le *Libor Market Model*. Les 20% restants utilisent un **modèle dit de taux court** comme le G2++ ou le HW1 présentés dans ce mémoire.

Il est toutefois à noter que les jeux de scénarios manipulés ici proviennent des activités de contrôle de l'ACPR et sont confidentiels. Par conséquent, seuls des résultats agrégés pour l'ensemble des 15 jeux de scénarios économiques seront présentés dans la suite de ce mémoire.

La figure suivante est composée de deux panneaux. Celui de gauche présente les distributions des *Best Estimates* calculés à l'aide du modèle ALM ainsi que les *Best Estimates* calculés à partir des modèles proxys. Le panneau de droite présente les distributions de l'écart η entre le *Best Estimate* calculé à l'aide du modèle ALM (BE) et du modèle proxy (\widehat{BE}) : $\eta = (\widehat{BE} - BE)$. Dans les deux cas, les résultats sont présentés en base 100 correspondant à la valeur du *Best Estimate* calculée à l'aide du modèle ALM et du jeu de scénarios économique de référence (G2++). Les distributions correspondent à 16 jeux de scénarios différents : les 15 jeux de scénarios issus de la revue transversale de l'ACPR et le jeu de référence (G2++).

Figure 3.9 – Distributions des *Best Estimates* (à gauche) et des écarts au *Best Estimate* calculés à l'aide du modèle ALM (à droite). Distributions correspondant à l'échantillon de 16 jeux de scénarios économiques par modèle. Modèles proxys entraînés à partir du jeu de scénarios de référence (G2++). Base 100 : calcul complet avec le jeu de scénarios de référence (G2++)



Comme on le voit sur la figure précédente, le perceptron multicouche se démarque des autres modèles proxys. En effet, c'est le modèle proxy qui produit le plus faible écart η .

La forêt aléatoire produit également des résultats intéressants : elle a tendance à sous-estimer les *Best Estimates* mais elle produit des écarts relativement faibles. Toutefois, le fait que la dispersion de la distribution des *Best Estimates* soit faible, et plus faible que la distribution issue du modèle ALM, indique que la forêt aléatoire est susceptible de mal refléter les écarts provenant des différents jeux de scénarios économiques.

Quant à XGBoost, on remarque que ce proxy a tendance à sous-estimer le *Best Estimate* sur cet échantillon de jeux de scénarios. Par conséquent, il apparaît ici comme le moins précis et le plus biaisé des trois modèles proxys étudiés.

Enfin, il est à noter que les résultats du modèle linéaire ne sont pas présentés dans cette étude et en particulier sur les deux panneaux de la figure précédente, pour des raisons de lisibilité à cause des très mauvaises performances associées à ce modèle. En effet, pour l'ensemble des 15 jeux de scénarios économique n'ayant pas servi au calibrage du modèle linéaire, la valeur absolue des écarts $\eta = (\widehat{BE} - BE)$ obtenus avec le modèle linéaire est supérieure à 7 alors qu'elle est inférieure à 2 pour l'ensemble des autres modèles proxys (cf. panneau de droite).

Le tableau ci-après présente le nombre de jeux de scénarios économiques pour lesquels l'écart $\eta = (\widehat{BE} - BE)$ entre le BE réel et le BE proxy est inférieur à l'incertitude à 95% entourant le calcul du BE réel.

Tableau 3.8 – Comparaison de l'écart de prédiction avec l'incertitude entourant le calcul complet du *Best Estimate*

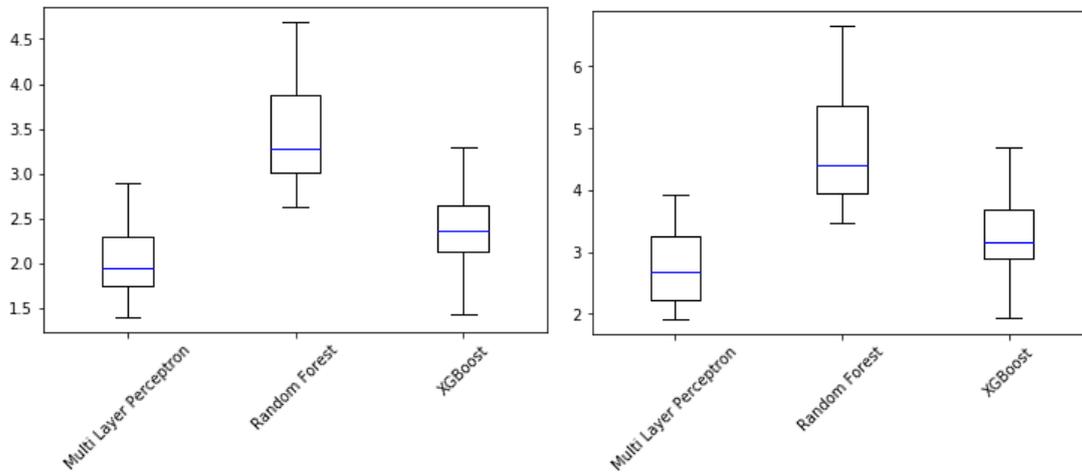
Nombre de jeux de scénarios pour lesquels la condition est respectée sur les 16 jeux étudiés	Perceptron multicouche	Forêt aléatoire	XGBoost	Modèle linéaire
Écart entre BE proxy et BE complet < Incertitude	5	4	1	1

L'ensemble de remarques précédentes sont corroborées par ce test : le perceptron multicouche a les meilleurs résultats. Pour 5 des 16 jeux de scénarios étudiés, l'erreur commise par le proxy est inférieure à l'incertitude entourant le calcul complet du *Best Estimate* à l'aide du modèle ALM.

Les résultats de la forêt aléatoire à ce test sont également corrects. Toutefois, le modèle XGBoost ayant tendance à sous-estimer le *Best Estimate*, il ne réussit ce test que pour le jeu de scénario de référence qui a servi à entraîner le modèle XGBoost proxy.

La figure suivante est également composée de deux panneaux. Celui de gauche présente les distributions des erreurs absolues moyennes (MAE) et celui de droite les distributions de la racine carrée des erreurs quadratiques moyennes (RMSE). Dans les deux cas, les résultats sont présentés en base 100 correspondant à la valeur du *Best Estimate* calculé à l'aide du modèle ALM et du jeu de scénarios économiques de référence (G2++). Les distributions correspondent à 16 jeux de scénarios différents : les 15 jeux de scénarios issus de la revue transversale de l'ACPR et le jeu de référence (G2++).

Figure 3.10 – Distributions des erreurs absolues moyennes (MAE) (à gauche) et des erreurs quadratiques moyennes (RMSE) (à droite). Distributions correspondant à l'échantillon de 15 jeux de scénarios économiques par modèle. Modèles proxys entraînés à partir du jeu de scénarios de référence (G2++). Base 100 : calcul complet avec le jeu de scénarios de référence (G2++)



S'agissant de ces deux métriques d'erreurs, le perceptron multicouche apparaît comme le modèle proxy le plus performant.

Toutefois, les erreurs absolues moyennes et la racine des erreurs quadratiques moyennes associées au modèle XGBoost sont inférieures à celles associées à la forêt aléatoire. Ceci est un résultat intéressant :

- d'une part, l'amplitude des erreurs correspondant au modèle XGBoost est limitée et elle est très proche des erreurs associées au perceptron multicouche ;
- d'autre part, cela vient confirmer le constat formulé précédemment concernant la forêt aléatoire. En effet, ces erreurs plus importantes indiquent que la forêt aléatoire est susceptible de mal refléter les écarts observés sur les *Best Estimates* réels provenant des différents jeux de scénarios économiques.

3.2.3 ENTRAÎNEMENT DES MODÈLES PROXYS À PARTIR DE SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES PROVENANT D'UN GÉNÉRATEUR DIFFÉRENT

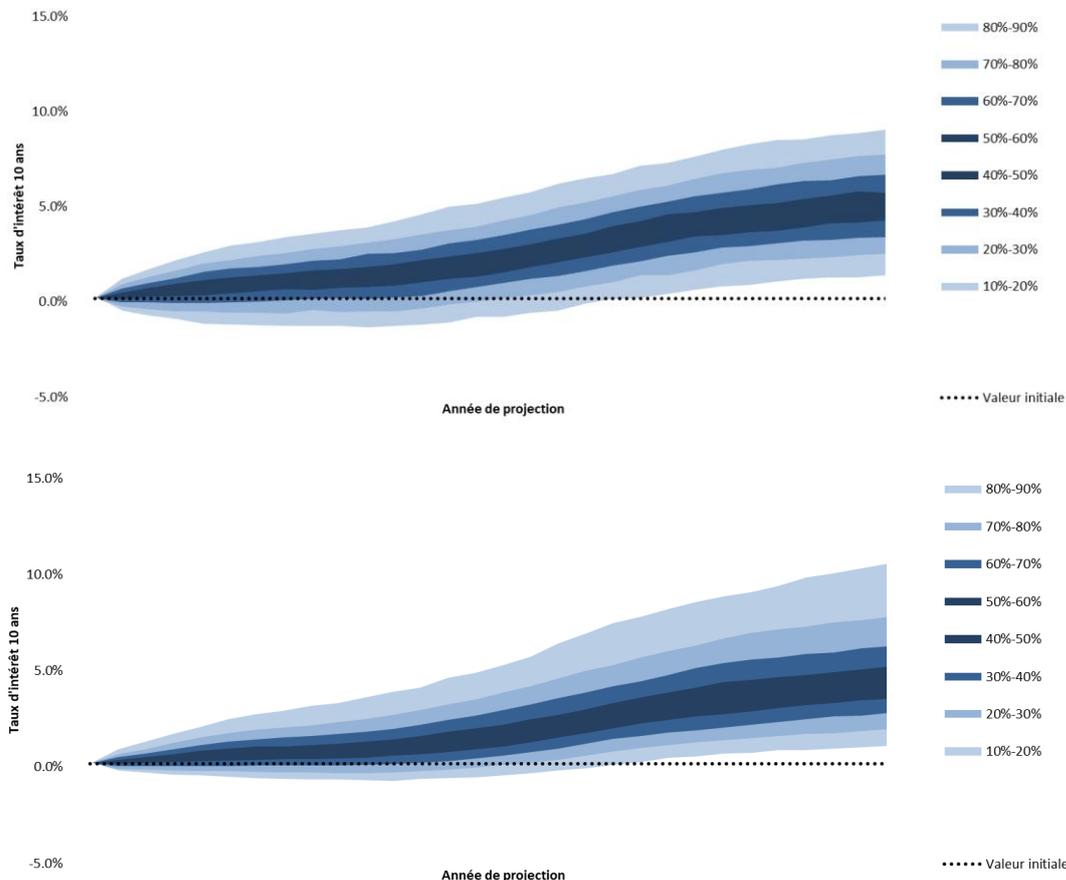
Afin de poursuivre l'analyse sur les jeux de scénarios économiques disponibles, une dernière étude est présentée ci-après : **on entraîne cette fois-ci les modèles proxys à partir d'un des jeux de scénarios économiques tiré de l'échantillon d'étude (ALT) et on l'applique aux 15 autres jeux de scénarios économiques étudiés, y compris le jeu de référence (G2++)**.

Le jeu de scénario alternatif (ALT) utilisé pour l'entraînement des modèles proxys est choisi parmi ceux qui reposent sur un **modèle de taux dit de marché**. En effet, comme on l'a vu précédemment, le modèle de taux G2++ du jeu de scénarios économiques de référence est un modèle de taux court. Or comme 12 des 15 jeux de scénarios issus de la revue transversale de l'ACPR sont issus d'un modèle de taux dit de marché, on poursuit l'étude en entraînant les modèles proxys à l'aide d'un de ces jeux. En effet, les modèles de taux de marché sont généralement plus complexes et capables de produire des mouvements de la courbe de taux plus variés qu'un modèle de taux court. Une rapide comparaison des distributions des modèles de taux, action et immobilier pour les deux jeux de scénarios économiques (ALT) et (G2++) est présentée ci-après.

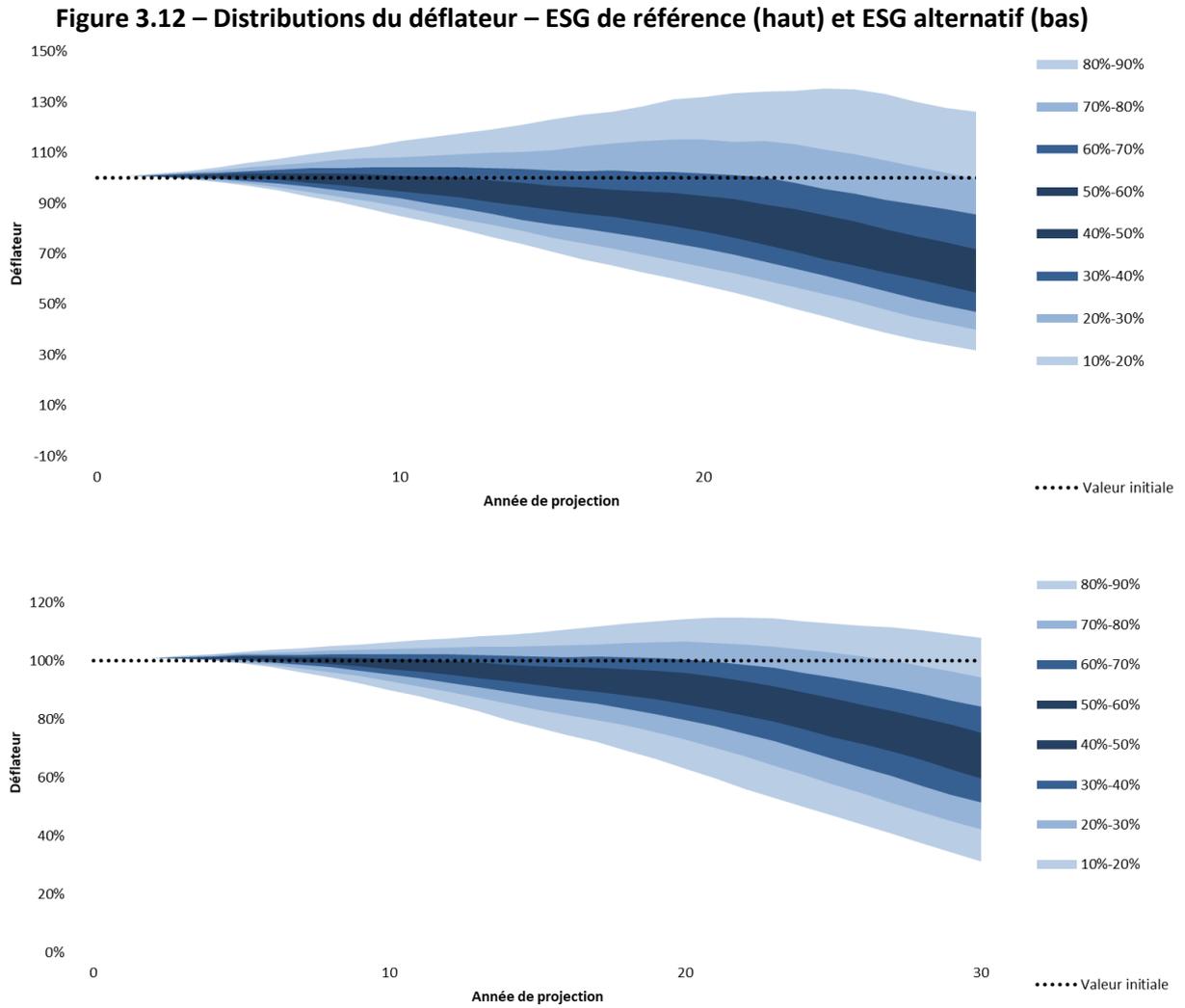
Comparaison des jeux de scénarios économiques – ESG de référence (G2++) & ESG alternatif (ALT)

Tout d'abord, s'agissant du modèle de taux, on voit ici sur l'exemple du taux d'intérêt de maturité 10 ans que les enveloppes des distributions de taux simulées sont légèrement différentes. Le modèle de taux court G2++ produit un peu plus de taux négatifs dans les 20 premières années de projection que le modèle de marché du jeu de scénarios (ALT). Par ailleurs, la distribution du modèle de marché est un peu moins dispersée que celle produite par le modèle G2++.

Figure 3.11 – Distributions du taux d'intérêt de maturité 10 ans – modèle G2++ de l'ESG de référence (haut) et modèle de marché de l'ESG alternatif (bas)

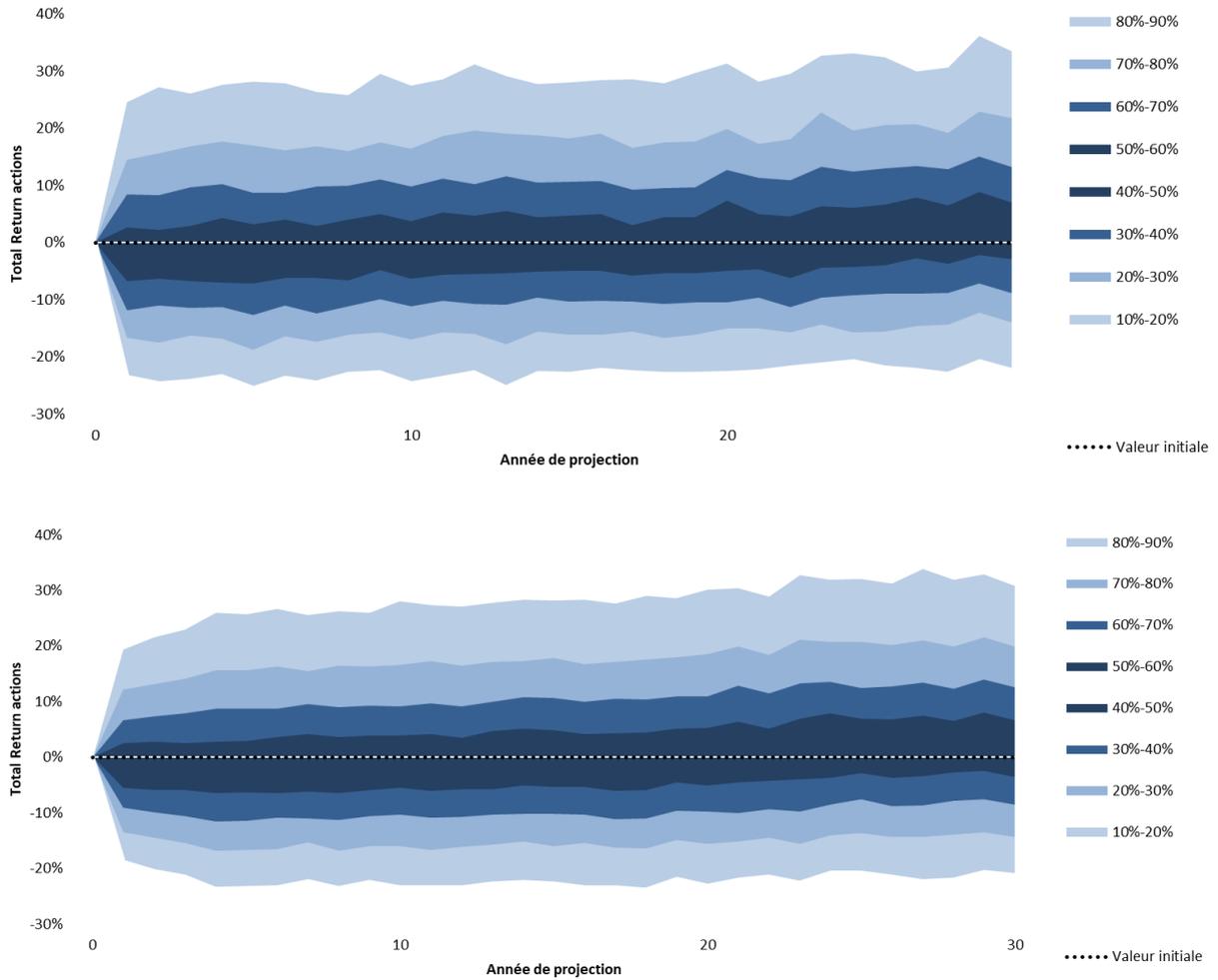


On retrouve ces observations sur les enveloppes des distributions du déflateur ci-dessous : le modèle de taux court de l'ESG de référence produit plus de taux négatifs, et donc plus de déflateurs supérieurs à 100%, que le modèle de marché de l'ESG ALT.



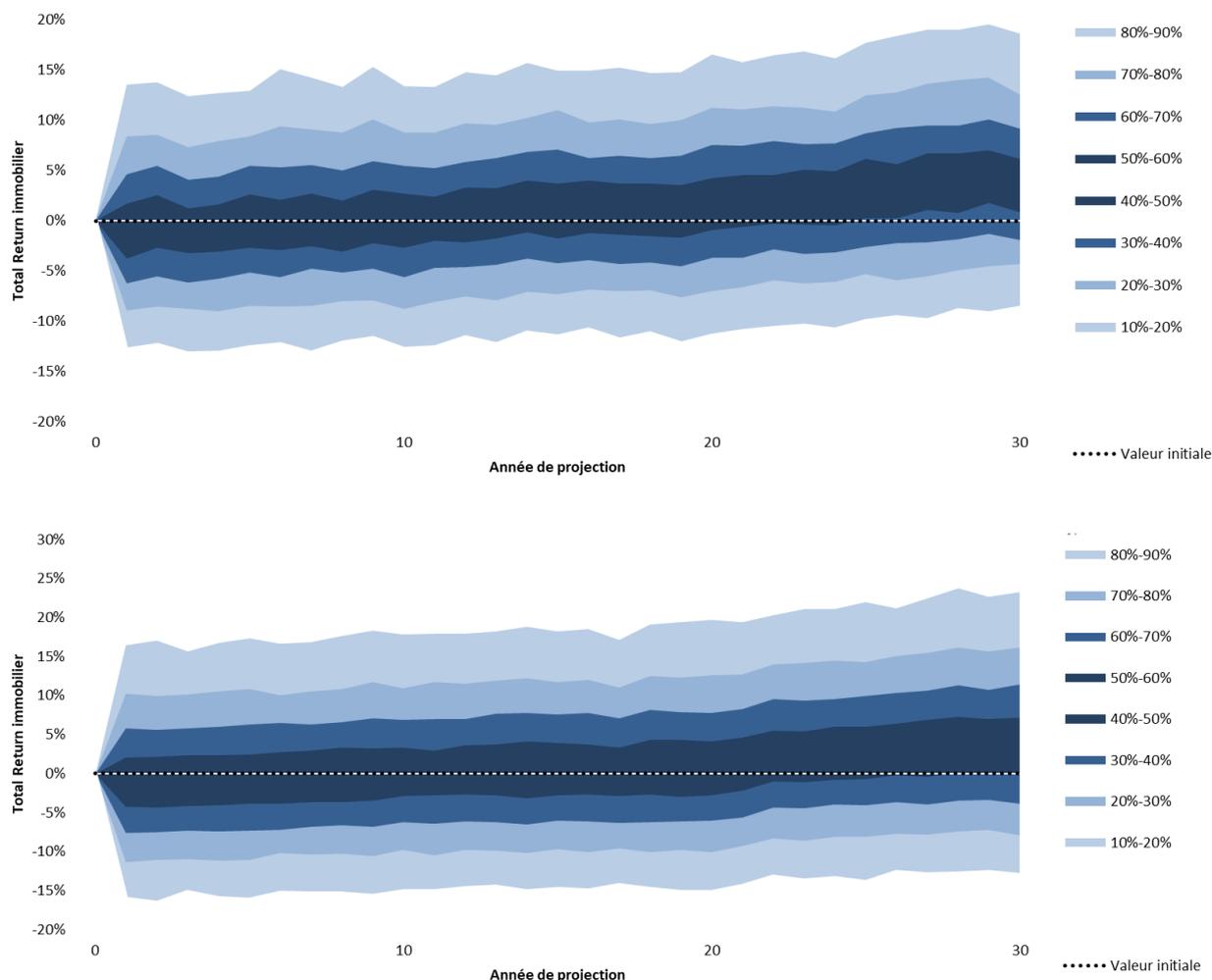
S'agissant des actions, les enveloppes des distributions sont très similaires. La principale différence entre les deux modèles est que l'ESG ALT utilise un modèle à volatilité locale alors que le modèle de diffusion des actions de l'ESG de référence est un modèle Black Scholes à volatilité constante.

Figure 3.13 – Distributions du *total return* de l'indice actions – ESG de référence (haut) et ESG alternatif (bas)



Enfin, les modèles de diffusion des actifs immobiliers sont très similaires : le modèle est identique mais le calibrage est réalisé à partir de données différentes. On note que le modèle immobilier de l'ESG alternatif est calibré avec une volatilité légèrement supérieure.

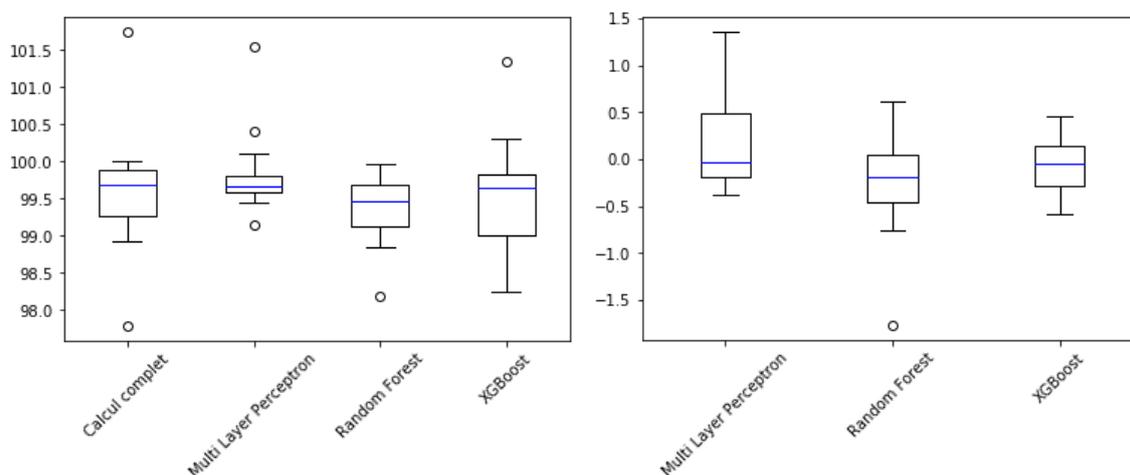
Figure 3.14 – Distributions du *total return* de l'indice immobilier – ESG de référence (haut) et ESG alternatif (bas)



Résultats

Comme présenté dans la section précédente, la figure ci-après est composée de deux panneaux. Celui de gauche présente les distributions des *Best Estimates* calculés à l'aide du modèle ALM ainsi que les *Best Estimates* calculés à partir des modèles proxys. Le panneau de droite présente les distributions de l'écart η entre le *Best Estimate* calculé à l'aide du modèle ALM (BE) et du modèle proxy (\widehat{BE}) : $\eta = (\widehat{BE} - BE)$. Dans les deux cas, les résultats sont présentés en base 100 correspondant à la valeur du *Best Estimate* calculé à l'aide du modèle ALM et du jeu de scénarios économique de référence (G2++). Les distributions correspondent à 16 jeux de scénarios différents : les 15 jeux de scénarios issus de la revue transversale de l'ACPR et le jeu de référence (G2++).

Figure 3.15 – Distributions des *Best Estimates* (à gauche) et des écarts au *Best Estimate* calculés à l'aide du modèle ALM. Distributions correspondant à l'échantillon de 15 jeux de scénarios économiques par modèle. Modèles proxys entraînés à partir du jeu de scénarios alternatif (ALT). Base 100 : calcul complet avec le jeu de scénarios de référence (G2++)



Comme on le voit sur la figure précédente, c'est maintenant le modèle XGBoost qui se démarque des autres modèles proxys. En effet, c'est le modèle proxy qui produit le plus faible écart η . On note notamment que la distribution des erreurs associées au modèle XGBoost est la moins étendue et une médiane plus proche de 0 que les autres modèles proxys.

On note par ailleurs de meilleurs résultats pour les trois modèles proxys que dans l'étude précédente, lorsque les modèles proxys sont entraînés sur le jeu de scénarios économiques de référence. En effet, les résultats du modèle XGBoost et de la forêt aléatoire sont améliorés alors que les résultats du perceptron multicouche apparaissent stables.

Comme précédemment, les résultats du modèle linéaire ne sont pas présentés dans cette étude pour des raisons de lisibilité à cause des très mauvaises performances associées à ce modèle.

Le tableau ci-après présente le nombre de jeux de scénarios économiques pour lesquels l'écart $\eta = (\widehat{BE} - BE)$ entre le BE réel et le BE proxy est inférieur à l'incertitude à 95% entourant le calcul du BE réel.

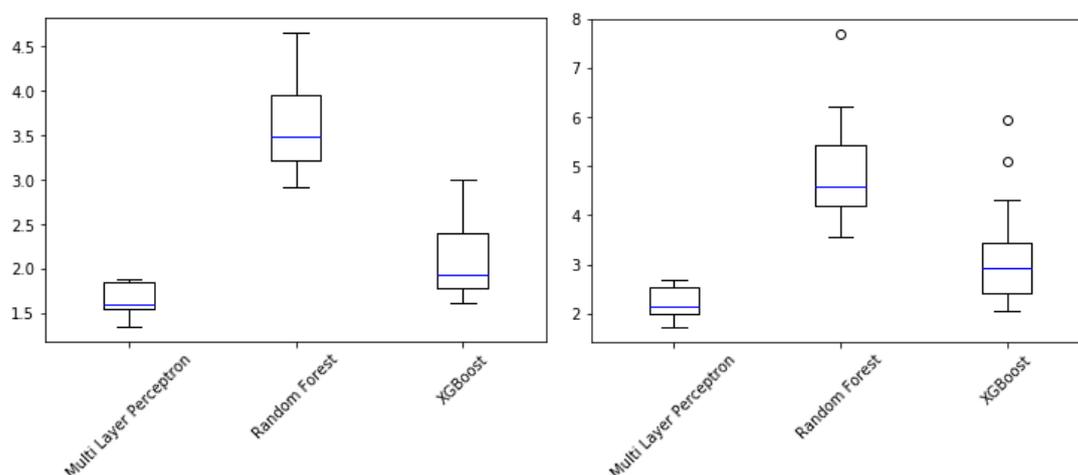
Tableau 3.9 – Comparaison de l'écart de prédiction avec l'incertitude entourant le calcul complet du *Best Estimate*

Nombre de jeux de scénarios pour lesquels la condition est respectée sur les 16 jeux étudiés	Perceptron multicouche	Forêt aléatoire	XGBoost	Modèle linéaire
Écart entre BE proxy et BE complet < Incertitude Proxys entraînés sur les scénarios de référence (G2++)	5	4	1	1
Écart entre BE proxy et BE complet < Incertitude Proxys entraînés sur les scénarios alternatifs (ALT)	5	6	8	1

Les remarques précédentes sont corroborées par ce test : le perceptron multicouche voit ses performances quasiment inchangées par rapport à la première étude et les meilleurs résultats viennent du modèle XGBoost. Pour 8 des 16 jeux de scénarios étudiés, l'erreur commise par le proxy est inférieure à l'incertitude entourant le calcul complet du *Best Estimate* à l'aide du modèle ALM. Par ailleurs, on note une légère amélioration des performances de la forêt aléatoire.

La figure suivante est également composée de deux panneaux. Celui de gauche présente les distributions erreurs absolues moyennes (MAE) et celui de droite les distributions de la racine des erreurs quadratiques moyennes (RMSE). Dans les deux cas, les résultats sont présentés en base 100 correspondant à la valeur du *Best Estimate* calculé à l'aide du modèle ALM et du jeu de scénarios économique de référence (G2++). Les distributions correspondent à 16 jeux de scénarios différents : les 15 jeux de scénarios issus de la revue transversale de l'ACPR et le jeu de référence (G2++).

Figure 3.16 – Distributions des erreurs absolues moyennes (MAE) (à gauche) et des erreurs quadratiques moyennes (RMSE) (à droite). Distributions correspondant à l'échantillon de 15 jeux de scénarios économiques par modèle. Modèles proxys entraînés à partir du jeu de scénarios alternatif (ALT). Base 100 : calcul complet avec le jeu de scénarios de référence (G2++)



S'agissant de ces deux métriques d'erreurs, les résultats sont très similaires aux résultats précédents : le perceptron multicouche apparaît toujours comme le modèle proxy le plus performant. On note toutefois, une légère dégradation des performances de la forêt aléatoire.

CONCLUSION

Ce mémoire a présenté différentes méthodes d'approximation par apprentissage supervisé appliquées au calcul de la meilleure estimation des engagements d'assurance vie au bilan prudentiel Solvabilité 2. Dans le cadre d'un fonds en euros, nous avons montré que des modèles comme le perceptron multicouche, la forêt aléatoire et la forêt aléatoire *boostée* XGBoost permettent de répliquer avec une grande précision le *Best Estimate* d'assurance vie.

L'approche retenue dans ce mémoire consistant à répliquer, non pas le *Best Estimate* directement, mais la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs dans chacune des simulations utilisées par le modèle ALM stochastique, permet d'atteindre pour le calcul du *Best Estimate* une précision similaire à celle du calcul complet à l'aide du modèle ALM. Par ailleurs, ces résultats sont obtenus très rapidement comparativement au modèle ALM : pour 1000 scénarios économiques risque-neutres, l'entraînement et l'utilisation des modèles proxys est de l'ordre de quelques secondes à quelques minutes, alors qu'un calcul complet par le modèle ALM nécessite plusieurs dizaines de minutes.

Toutefois, le gain de temps de calcul par cette approche est moindre qu'une réplification directe : en effet, avec l'approche suivie dans ce mémoire, il est nécessaire de produire les jeux de scénarios économiques risque-neutres à l'aide du GSE, ce qui reste coûteux en termes de calcul.

S'agissant de l'estimation de la valeur actuelle des options et garanties (TVOG) contenues dans les contrats d'assurance vie en euros, les modèles proxys rencontrent des difficultés pour répliquer correctement la TVOG sur certains jeux de scénarios économiques. En particulier, le perceptron multicouche n'arrive pas à correctement répliquer le *Best Estimate* déterministe. Les résultats obtenus pour la forêt aléatoire et le modèle XGBoost sont finalement encourageants bien qu'ils ne soient pas suffisamment précis pour répliquer systématiquement la TVOG.

Par ailleurs, ces modèles proxys se sont révélés performants et robustes au choix des scénarios économiques et des modèles. Toutefois, si les modèles proxys ont produit des résultats cohérents ainsi que des estimations d'impact proches des impacts réels correspondant à ceux calculés à l'aide du modèle ALM, aucun des trois modèles proxys étudiés ici ne permet d'estimer avec une précision similaire au modèle ALM l'impact d'un changement de jeu de scénarios économiques. En outre, aucun modèle ne semble se démarquer particulièrement des autres en termes de précision et de robustesse pour estimer l'impact d'un changement de GSE.

Enfin, ces travaux pourraient être approfondis et poursuivis selon les axes de développement suivants :

- Développer des stratégies pour mieux répliquer le calcul des provisions techniques dans des cas simples, comme celui d'un scénario central déterministe.
- Étendre le problème de régression et la base de données d'apprentissage à d'autres facteurs de risques que les facteurs de risques financiers, simulés par le générateur de scénarios économiques. Il serait par exemple intéressant d'appliquer la même démarche aux facteurs de risques de souscription comme les risques biométriques ou le comportement des assurés.
- Étendre les données d'apprentissage à des situations stressées afin, par exemple, d'utiliser ces modèles pour le calcul du SCR sous Solvabilité 2. Ces modèles proxys auraient un intérêt aussi bien pour le calcul du SCR selon la formule standard qu'à l'aide d'un modèle interne.
- Adapter ces modèles proxys aux autres référentiels pertinents pour l'assurance vie comme celui défini par les normes IFRS ainsi que celui défini par la MCEV.

BIBLIOGRAPHIE

[ACP, 2013] Autorité de Contrôle Prudentiel (2013). Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité II. URL https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/20130527-onc-2013_0.pdf

[ACPR, 2020 1] Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (Octobre 2020). Analyses et Synthèses : la situation des assureurs soumis à Solvabilité 2 en France à fin 2019.

[ACPR, 2020 2] Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (Décembre 2020). Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques, Revue de l'ACPR.

[Breiman, 1984] Breiman, L., J. Friedman, R. Olshen et C. Stone. 1984, «Classification and regression trees»,.

[Breiman, 2001] Breiman, Leo « Random Forests », Machine Learning, vol. 45, no 1, 2001, p. 5–32 (DOI 10.1023/A:1010933404324)

[Brigo & Mercurio, 2016] D. Brigo et F. Mercurio (23 octobre 2016). Interest Rate Models – Theory and Practice, 982 pages, éd. Springer.

[Buzzi, 2017] Buzzi, Arnaud (2017). Approximation du bilan économique sous Solvabilité II via des méthodes d'apprentissage automatique et application à l'ORSA. Mémoire d'actuariat, Université Paris Dauphine.

[CFO Forum, 2016] CFO Forum (Avril 2016). Market Consistent Embedded Value Principles. URL : <http://www.cfoforum.eu/downloads/CFO-Forum-MCEV-Principles-and-Guidance-April-2016.pdf>.

[FFA, 2020] Fédération Française de l'Assurance (Septembre 2020). L'assurance Française, données clés 2019. URL : <https://www.ffa-assurance.fr/etudes-et-chiffres-cles/assurance-francaise-donnees-cles-par-annee>.

[Frerix, 2018] Frerix, S.P.H.M (2018). Efficient estimation of the Solvency Capital Requirement using Neural Networks. Mémoire d'actuariat, Université d'Amsterdam.

[Godin, 2019] Godin, Maxime (2019). Évaluation du respect permanent des exigences de capital dans le cadre de l'ORSA d'un assureur épargne par « Least Squares Monte Carlo ». Mémoire d'actuariat, ENSAE.

[Gorrand, 2019] Gorrand, Raphaël (2019). Solvabilité 2, quelques années après l'entrée en vigueur de la réglementation, celle-ci remplit-elle ses ambitions ? Mémoire d'actuariat, Institut du Risk Management.

[Hull & White, 1990] J. Hull. et A. White, 1990, Pricing interest-rate derivative securities. Review of Financial Studies 3 (4) : 573-592.

[Haguet, 2013] Haguet, E. (2013). Mise en place d'indicateurs de suivi du risque dans un cadre d'ORSA épargne. Mémoire d'actuariat, Université Paris Dauphine.

[Ho, 1995] Ho, Tin Kam, « Random Decision Forests », Proceedings of the 3rd International Conference on Document Analysis and Recognition, Montreal, QC, 14-16 august 1995, p. 278-282.

[IA, 2018] Institut des Actuaire (Septembre 2018). Document d'orientation, « Les Générateurs de scénarios économiques ».

[Lasfargyes et al., 2014] Lasfargyes, M., Donio, M. et Guchet, A. (2014). L'ORSA : quelques exemples de pratiques actuarielles. Rapport technique, Institut des Actuaire.

[Mechergui, 2018] Mechergui, M.-A. (2018). Évaluation du capital économique sous Solvabilité 2 : Mise en place de l'approche Curve Fitting. Mémoire d'actuariat, Université Paris Dauphine.

[RD] RÈGLEMENT DÉLÉGUÉ (UE) 2015/35 DE LA COMMISSION du 10 octobre 2014 complétant la directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (Solvabilité II)

[S2] DIRECTIVE 2009/138/CE DU PARLEMENT EUROPÉEN ET DU CONSEIL du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (Solvabilité II)

[Scikit-learn, 2011] Scikit-learn: Machine Learning in Python, Pedregosa et al., JMLR 12, pp. 2825-2830, 2011. URL : https://scikit-learn.org/stable/auto_examples/tree/plot_tree_regression.html#sphx-glr-auto-examples-tree-plot-tree-regression-py

[Trabelsi, 2010] Trabelsi, I. (2010). Calcul du capital économique d'une compagnie d'assurance-vie via les approches : les simulations dans les simulations (SdS), le « replicating portfolio » et l'accélérateur SdS. Mémoire d'actuariat, ISUP.

[Traoré et Keilani, 2014] Traoré, A. et Keilani, H. (2014). Approche par Least-Squares Monte Carlo pour l'évaluation des fonds propres économiques. Mémoire d'actuariat, ENSAE.

[Turnbull, 2014] Turnbull, C. (2014). Implementation of Least-Squares Monte Carlo (LSMC) in a Life Insurance Context – A Case Study. Article, Moody's Analytics. URL <https://www.moodyanalytics.com/risk-perspectives-magazine/managing-insurance-risk/principles-and-practices/implementation-of-least-squares-monte-carlo-in-a-life-insurance-context>