

**Mémoire présenté le :  
pour l'obtention du diplôme  
de Statisticien Mention Actuariat  
et l'admission à l'Institut des Actuares**

Par : Guilhem BOIS

**Titre du mémoire : Tarification historique des branches longues et intégration  
de la clause de stabilisation**

Confidentialité :  NON     OUI (Durée :  1 an     2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de la    Signature :    Entreprise :  
filiale :

Nom : AXA Global Re

Signature :

Directeur de mémoire en  
entreprise

Membres présents du jury de  
l'Institut des Actuares :

Signature :    Nom : Coumes Maxime

Signature : 

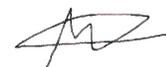
Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise  
en ligne sur un site de diffusion de  
documents actuariels (après expiration  
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable  
entreprise :



Signature du candidat :



# Résumé

L'évolution des sinistres en responsabilité civile s'effectuant sur une longue période, le calcul des indicateurs historiques nécessite de prendre un grand nombre de précautions. Il faut ainsi estimer le plus précisément possible le développement de ces sinistres, tout en tenant compte des conséquences de l'inflation sur les montants ultimes. Cette dernière donnée justifie l'existence éventuelle d'une clause de stabilisation pour les traités en excédent de sinistres (XS) en branche longue, permettant de répartir les effets d'inflation entre assureur et réassureur.

Pour intégrer une telle clause dans le calcul des indicateurs historiques, il est toutefois nécessaire de définir un cadre cohérent et précis, adapté à l'ensemble des situations qui seront trouvées dans les traités. Au-delà des conditions de réassurance, il s'agit donc également d'optimiser les traitements affectés au sinistre : que ce soit la mise en As-If, l'application d'une méthode de développement, le traitement des réserves ou encore les considérations en terme d'exposition.

Dans un premier temps, ce mémoire va permettre de définir une méthode de calcul du Burning Cost et du résultat historique sur des branches courtes, donnant ainsi un aperçu des configurations pouvant être rencontrées et des difficultés à appréhender. Dans un second temps, ce sont les subtilités propres aux branches longues qui seront étudiées pour construire une méthode de développement des sinistres efficace, tout en menant une réflexion sur les différents types d'inflation à prendre en compte, d'un point de vue économique et d'exposition. Enfin, cette structure permettra l'intégration de la clause de stabilisation dans le calcul des indicateurs historiques ainsi qu'une étude de la sensibilité des résultats aux différentes hypothèses effectuées.

*Mots Clés : Réassurance, Burning Cost, Résultat Historique, As-If, Responsabilité civile, Développement des sinistres, Chain-Ladder, Mean Excess Plot, Crédibilité, IBNR, Clause de stabilisation*

# Abstract

As the development of third party liability claims takes place over a long period of time, the calculation of historical indicators requires a large number of precautions. It is therefore necessary to estimate the development of these claims as accurately as possible, while taking into account the consequences of inflation on the final amounts. This last fact justifies the possible existence of an index clause for excess of loss (XS) treaties in the long-tail line of businesses, making it possible to share the effects of inflation between insurer and reinsurer.

However, in order to include such a clause in the calculation of the historical indicators, it is necessary to define a coherent and precise context, adjusted to all the situations that will be found in the treaties. Beyond the reinsurance conditions, it is therefore also a question of optimising the treatments assigned to the claim: be it the setting in As-If, the application of a development method, the treatment of outstanding amounts or even considerations in terms of exposure.

In the first instance, this paper will define a method for the calculation of the Burning Cost and the historical result in Short-Tail. This will give an overview of the configurations that can be faced and the difficulties to be dealt with. In a second step, the details inherent to Long-Tail will be studied in order to build an efficient claims development method. The different types of inflation will have to be taken into account too, from an economic and exposure point of view. Finally, this structure will allow the inclusion of the index clause in the computation of the historical indicators, as well as a study of the sensitivity of the results to the different assumptions made.

*Keywords : Reinsurance, Burning Cost, Historical Result, As-If, Third-party liability, Claims development, Chain-Ladder, Mean Excess Plot, Credibility, IBNR, Index clause*

# Note de synthèse

Les clauses au sein d'un traité de réassurance permettent de dessiner les contours et spécificités du lien entre l'assureur et le réassureur. Ainsi, la clause de stabilisation permet de se concentrer sur les effets d'inflation impactant des sinistres longs, et de répartir cette charge entre les deux parties. Nous considérons alors des sinistres dont le déroulement se fait sur un intervalle de temps important, et pour lesquels un développement élevé au niveau de la charge entre l'année de survenance et l'année ultime peut être attendu.

Intégrer l'impact de la clause de stabilisation au sein de la tarification, et plus particulièrement dans le calcul des indicateurs historiques, demande un cadre de traitement des sinistres le plus précis possible, mais également un processus de calcul des indicateurs exhaustif et pertinent. Un réassureur n'a pas forcément accès à beaucoup de données historiques du fait des risques couverts. Il faut donc exploiter au mieux les sources d'information et mettre en place des méthodes adaptées pour constituer un cadre solide. En fixant l'étude dans le cas précis des traités XS, un réassureur comme AXA Global Re est lié aux cédantes, les entités d'AXA ici, par des structures de réassurance différentes selon les traités. Ces changements peuvent concerner les variables du traité (AAD, nombre de reconstitutions, priorité, ..) mais la nature du traité peut aussi avoir des conséquences. On pense par exemple au cas de traités régionaux pour lesquels plusieurs entités partagent une même tranche de réassurance. Enfin, les effets d'inflation et leur étude précise motive l'intégration de la clause de stabilisation, nécessitant alors un choix réfléchi et adapté.

Ce mémoire a pour but de structurer le calcul des indicateurs historiques pour la tarification en réassurance en implémentant la clause de stabilisation à ce processus. Il s'agit donc d'intégrer un élément contractuel précis au sein d'une méthodologie de calcul qui soit adaptée à toutes les entités couvertes. L'objectif étant d'avoir un mode de fonctionnement unique prenant en considération les différentes spécificités possibles.

Dans un premier temps, nous mettons en place l'approche de calcul des indicateurs dans le cadre des branches courtes. Cette démarche permet de cerner les cas de traités particuliers et de mieux analyser les besoins en amont de l'application de la technique de calcul. Le schéma de la mise en place est donné en figure 1 :

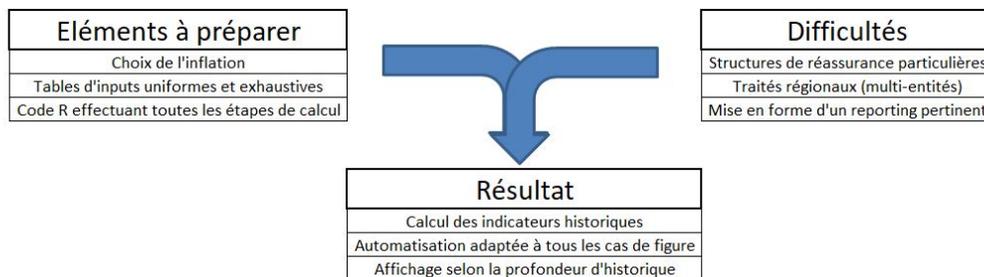


Figure 1: Calcul des indicateurs historiques

Cette première approche donne un aperçu des problèmes pouvant être rencontrés au niveau de l'utilisation des données de réassurance. Il sera ensuite possible de les anticiper et d'utiliser ce recul pour que les entrées et sorties soient le plus claires possibles.

Dans un second temps, nous nous concentrons sur les propriétés caractéristiques des branches longues. Les sinistres nécessitent alors un temps long avant de voir leur coût se stabiliser, il faut donc établir l'estimation de leur coût final pour ensuite les intégrer aux calculs des indicateurs historiques.

Cette estimation s'articule en plusieurs étapes :

- Mise en As-If des montants payés
- Développement de la charge totale à l'ultime
- Traitement des réserves restantes

A chacun de ces niveaux, des hypothèses doivent être faites et différentes méthodes sont confrontées pour fixer un choix pertinent et en adéquation avec l'objectif recherché.

La mise en As-If requiert une étude précise des indices d'inflation économique pour savoir lequel sera le plus approprié et évaluer les avantages et inconvénients des différentes options. Il est ensuite nécessaire de projeter cet indice sur une longue période, à partir d'une régression linéaire, car le montant du sinistre varie sur plusieurs années. De plus, la perspective de l'implémentation de la clause de stabilisation incite à effectuer cette mise en As-If uniquement sur les montants payés et non pas la charge totale.

Le développement des sinistres à l'ultime est effectué à partir d'une technique qui doit être fixée. Plusieurs pistes sont suivies et confrontées pour aboutir à une méthode finale. La figure 2 reprend les méthodes essayées.

Méthode initiale	Méthodes testées	Méthode conservée
	<b>Chain-Ladder pondéré</b>	
	Permet de donner un poids plus important aux sinistres ayant le profil le plus récurrent	
	Choix des poids et des conditions subjectifs	
	<b>Exclusion des valeurs basses</b>	
	Conservation uniquement des sinistres cohérents avec la transmission par les entités	
	Seuil d'exclusion donné par la nature du traité (intervention seulement sur les sinistres coûteux)	
<b>Chain-Ladder classique</b>	<b>Exclusion des valeurs hautes</b>	<b>Exclusion des valeurs basses</b>
Facile à mettre en place	Théorie des valeurs extrêmes pour définir un seuil	<b>&amp; Moyenne des coefficients de développements individuels</b>
Manque de précision, faussé par des valeurs extrêmes	Méthode visuelle difficile à automatiser	Les sinistres conservés ont un impact aussi fort les uns que les autres
	<b>Théorie de la crédibilité</b>	
	Coefficients ajustés par une mesure de confiance sur les classes de risque	
	Moins facile à mettre en place et choix subjectif des classes de risque	
	<b>Lissage par des fonctions à deux paramètres</b>	
	Peu d'intérêt sur les années de développement pour lesquelles le recul est grand	
	Permet de projeter les coefficients sur un horizon de temps de développement plus grand	

Figure 2: Méthodes de développement des sinistres

Appliquer cette approche donne un montant ultime. Nous pouvons alors nous trouver en situation d'une réserve restante non-nulle. Celle-ci doit être progressivement transformée en montant payés selon les cadences de paiements initialement prévues par l'entité. Cette étape est importante puisque ces nouveaux montants payés doivent être mis en As-If.

Ces trois étapes déployées permettent d'aboutir à un montant final auquel la structure de réassurance sera appliquée de manière analogue au cas du Short-Tail. Pour les sinistres clos toutefois, seule la partie de mise en As-If est effectuée puisque ces sinistres sont supposés par nature ne plus se développer.

Les bornes du traité vont être recalculées pour chaque sinistre sous l'effet de la clause de stabilisation avant d'appliquer les éléments de réassurance. Chaque étape de traitement du sinistre va être à nouveau effectuée en parallèle, mais cette fois en annulant les effets d'inflation quand l'évolution d'un indice donné excède un certain seuil.

L'impact de la clause de stabilisation sur les montants payés se présente ainsi : nous regardons pour chaque année de développement si l'indice de référence excède un seuil donné. Si c'est le cas, les montants sont recalculés comme s'ils avaient été payés pendant l'année de survenance. Un exemple est donné en figure 3.

	Year1	Year2	Year3	Year4	Year5	
Indice de référence	100	107	115	122	130	
Variation de l'indice		7%	15%	22%	30%	
	Year1	Year2	Year3	Year4	Year5	Total
Payements	2M	1M	1M	2M	1M	7M
Payements avec stabilisation	2M	1M	1M	1,64M	0,77M	6,41M

Figure 3: Exemple d'application de la clause de stabilisation, seuil à 20%

Obtenir ce deuxième montant permet de voir le coût du sinistre s'il avait été intégralement payé sans effet de l'inflation à partir du moment où le seuil donné est dépassé. Ces deux résultats finalement obtenus servent ensuite pour recalculer les bornes du traité pour chaque

sinistre. Ce sont les nouvelles priorités et limites qui vont être utilisées par la suite pour déterminer les indicateurs historiques, comme présenté en figure 4.

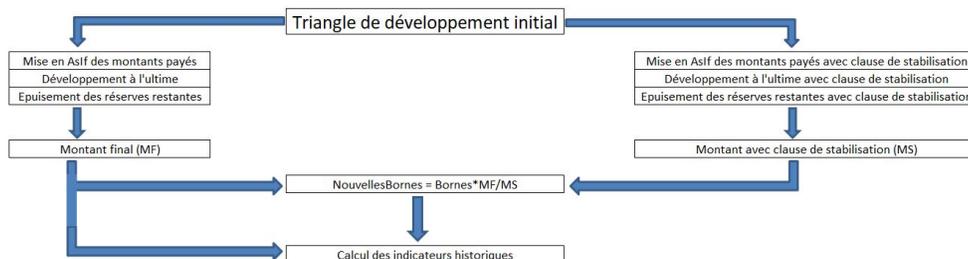


Figure 4: Intégration de la clause de stabilisation dans le calcul des indicateurs historiques

Un élément important également implémenté est l'application d'une mesure d'exposition sur les récupérations. Cette donnée correspond à la combinaison de plusieurs paramètres : Earned Premium Income, nombre d'accidents de la route pour la responsabilité civile automobile, IBNyR. Cette dernière composante est calculée en se servant du seuil de transmission des données par les entités. Une méthode de Chain-Ladder est alors mise en place sur le nombre de sinistres connus. Ceci permet de prévoir une plus grande sinistralité que celle connue aujourd'hui pour des années de survenance récentes notamment.

Les étapes présentées mettent en lumière les hypothèses établies, et donc la nécessité de les tester en comparant les résultats finaux selon les choix effectués. La dernière étape de ce mémoire consiste donc en l'étude de la sensibilité des indicateurs historiques aux paramètres intégrés dans la démarche : indice d'inflation, clause de stabilisation, prise en compte des IBNyR, choix des seuils. Un élément essentiel observé est l'impact des coefficients de la méthode de développement choisie. En effet, de nombreuses approches sont possibles, il est donc nécessaire de chercher les limites de ce choix en adoptant une approche stochastique. Un grand nombre de simulations est effectué pour les coefficients de développement et les résultats associés sont calculés pour chaque configuration. Nous obtenons ainsi une distribution de résultats donnant une indication sur l'étendue des valeurs possibles pour les résultats en incluant une part d'aléatoire.

Pour aller plus loin dans la démarche, il serait intéressant de tester ce modèle construit dans un autre cadre : celui des branches courtes. Bien que l'on puisse penser que les conséquences et impacts des développements seront moindres, il est possible que des éléments décrits dans le cas des branches longues aient une influence, permettant donc de gagner en précision s'ils sont pris en compte. Il paraît cependant peu probable que l'inclusion d'une clause de stabilisation soit utile : les sinistres sont clôturés rapidement.

# Executive summary

The clauses in a reinsurance treaty make it possible to define the boundaries and specific features of the relationship between the insurer and the reinsurer. Thus, the index clause allows to focus on the effects of inflation impacting long claims, and to share this cost between the two sides. This is done for claims that occur over a long period of time and for which a high development of the expense between the year of occurrence and the final year can be expected.

Including the impact of the index clause in pricing, and especially in the calculation of historical indicators, requires the most accurate claims handling structure possible, but also a complete and relevant process for calculating the indicators. A reinsurer does not necessarily have access to a lot of historical data due to the risks covered. It is therefore necessary to make the best possible use of information resources and to put in place appropriate methods to build a solid basis. In the specific case of the XS treaties, a reinsurer such as AXA Global Re is linked to the ceding companies, the AXA entities in our case, by different reinsurance agreements depending on the treaties. These changes can relate to the variables of the treaty (AAL, number of reinstatements, priority, etc.) but the nature of the treaty can also have consequences. One example is the case of regional treaties where several entities share the same reinsurance layer. Finally, the inflation effects and their detailed study motivate the integration of the index clause, thus requiring a well considered and adapted choice.

This paper aims to organise the calculation of historical indicators for reinsurance pricing by implementing the index clause in this process. The idea is to integrate a specific contractual element into a calculation methodology that is applicable to all covered entities. The objective is to have a single operating procedure that takes into account the various possible characteristics.

First, the approach to calculate the indicators in the context of Short-Tail is set up. This step makes it possible to identify the specific cases of treatment and to better analyse the needs before applying the calculation technique. The implementation scheme is as follows:

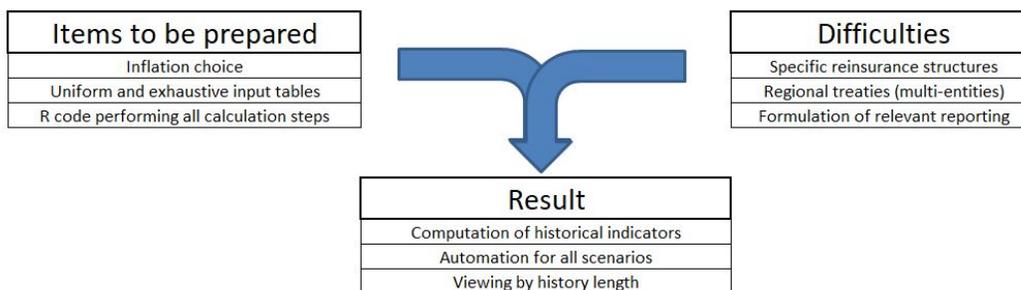


Figure 5: Historical indicators calculation

This first perspective gives an overview of the issues that may be faced in the use of reinsurance data. It will then be possible to anticipate them and use this hindsight to make the inputs and outputs as clear as possible.

In a second step, the focus is on the characteristic properties of Long-Tail. Claims then take a long time to stabilise, so it is necessary to estimate their final cost and then include this one in the calculations of the historical indicators.

This estimate is made in several stages:

- Setting the amounts paid in As-If
- Development of the total ultimate cost
- Treatment of remaining outstanding

At each of these levels, assumptions must be made and different methods are compared in order to make a relevant choice that is in line with the desired objective.

The As-If setting requires a clear study of the economic inflation indexes to know which one will be the most relevant and to evaluate the advantages and disadvantages of the different options. It is then necessary to project this index over a long period of time, using a linear regression, as the amount of losses vary over several years. Furthermore, the perspective of the implementation of the index clause encourages this As-If step to be carried out only on the amounts paid and not the total charge.

The development of claims to their ultimate value is based on a technique that must be established. Several options are followed and discussed in order to reach a final method.

Initial method	Methods tried	Retained method
	Chain-Ladder with weighting system Allows to give a bigger weight to claims with the most common profile Subjective choice of weights and conditions	
	Low values exclusion Keeping only claims that match the transmission system from the entities Exclusion threshold determined by the nature of the treaty (action only on expensive claims)	
Classical Chain-Ladder Easy to introduce Lack of accuracy, distorted by extreme values	High values exclusion Extreme value theory for defining a threshold Visual method difficult to automate	Low values exclusion & Average of individual development factors Retained losses have an equally strong impact
	Credibility theory Factors adjusted by a confidence measure on the risk categories Harder to set up and subjective choice of risk classes	
	Smoothing by two-parameter functions Little interest in the development years where there is a lot of perspective Allows factors to be projected over a longer development horizon	

Figure 6: Claims development methods

Using this method gives an ultimate amount. This may result in a non-zero remaining reserve. This must be gradually converted into paid amounts according to the payment patterns initially planned by the entity. This step is important because these new amounts paid must be set up as As-If.

These three steps lead to a final amount to which the reinsurance structure will be applied in a similar way to the Short-Tail case. It should be noticed that for closed claims, only the As-If part is carried out since these claims are assumed by nature not to be developing any longer.

The treaty limits will be recomputed for each claim under the index clause before applying the reinsurance components. Each step in the treatment of the claim will again be carried out in parallel, but this time cancelling out the inflation effects when the evolution of a given index exceeds a specified threshold.

The impact of the index clause on the amounts paid is as follows: for each year of development, we check whether the reference index exceeds a given threshold. If it does, the amounts are recalculated as if they had been paid in the year of occurrence.

	Year1	Year2	Year3	Year4	Year5
Base index	100	107	115	122	130
Index fluctuation		7%	15%	22%	30%

	Year1	Year2	Year3	Year4	Year5	Total
Paid	2M	1M	1M	2M	1M	7M
Paid with index clause	2M	1M	1M	1,64M	0,77M	6,41M

Figure 7: Exemple of index clause application, threshold 20%

Getting this second amount allows us to know what the cost of the claim would have been if it had been fully paid without the effect of inflation from the moment the given threshold is exceeded. These two final results are then used to recalculate the treaty limit and retention for each claim. These are the new priorities and limits that will be used later to determine

the historical indicators.

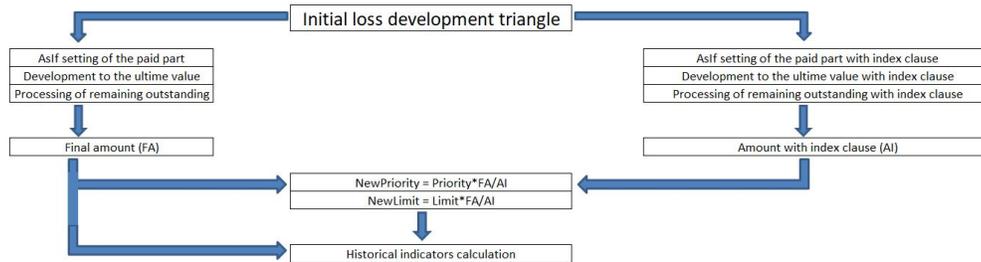


Figure 8: Implementation of index clause into historical indicators calculation

An essential component also being implemented is the application of an exposure measure on recoveries. This is a combination of several parameters: Earned Premium Income, number of road accidents for motor liability, IBNyR. This last item is calculated using the threshold for data transmission by the entities. A Chain-Ladder method is then implemented on the number of known claims. This allows to predict a higher loss expectancy than the one known today, particularly for recent years of occurrence.

The steps presented highlight the assumptions made, and therefore the need to challenge them by comparing the final results according to the choices made. The final stage of this report therefore consists of a study of the sensitivity of historical indicators to the parameters included in the approach: inflation index, index clause, consideration of IBNyR, choices of thresholds. An essential element observed is the impact of the chosen development method factors. Indeed, we have seen that many options are possible, so it is necessary to look for the limits of this choice by adopting a stochastic approach. A large number of simulations are performed for the development factors, and the associated results are calculated for each configuration. A distribution of results is thus obtained, giving an impression of the range of possible values for the results, including a random element.

In order to go further in the process, it would be interesting to check this model in another environment: Short-Tail. Although the consequences and impacts of the developments are likely to be weaker, it is possible that some elements described in the case of Long-Tail could have an influence, thus allowing for greater precision if they are taken into account. However, it seems unlikely that the addition of an index clause would be useful: claims are closed quickly.

# Remerciements

Avant toutes choses, je souhaite remercier l'ensemble des personnes grâce auxquelles le déroulement de cette année en alternance et la rédaction de ce mémoire ont été possibles.

En premier lieu, j'adresse toute ma reconnaissance à Olivier LOPEZ et l'ensemble de l'équipe pédagogique de l'ISUP pour la formation qui m'a été donnée pendant trois années. Je remercie notamment ma tutrice académique Maud THOMAS pour ses conseils et ses indications.

Un grand merci à tous les collaborateurs d'AXA Global Re pour tout ce qu'ils m'ont appris, pour leur disponibilité et leur présence tout au long de l'année.

Je souhaite remercier tout particulièrement l'équipe "Analytics&Pricing" pour l'aide précieuse qui m'a été apportée, je garderai de nombreux souvenirs de cette expérience. J'ai une pensée pour Jérôme CRETEN, manager de cette équipe, pour son accueil et son expertise. Je tiens à remercier Anne SUCHEL pour ses conseils et les nombreuses réponses qu'elle a su m'apporter. J'adresse de chaleureux remerciements à Maxime COUMES, mon tuteur au sein de cette équipe, pour m'avoir guidé du premier jusqu'au dernier moment de la réalisation de ce mémoire, pour sa précision et sa pédagogie.

Plus généralement, un remerciement est destiné à toutes les personnes qui ont structuré mes parcours académiques et professionnels, me permettant d'approfondir mes connaissances. Leur enthousiasme et leur patience m'ont permis d'améliorer ma réflexion en me faisant découvrir des sujets captivants.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis pour leurs encouragements et le rôle essentiel qu'ils ont tenu au cours de la rédaction de ce mémoire.

# Table des matières

Résumé . . . . .	2
Abstract . . . . .	3
Note de synthèse . . . . .	4
Executive summary . . . . .	8
Remerciements . . . . .	12
Introduction . . . . .	16
<b>1 Eléments de contexte</b>	<b>18</b>
1.1 Réassurance . . . . .	18
1.1.1 Le marché de la réassurance . . . . .	18
1.1.2 Présentation et rôle d'AXA Global RE . . . . .	19
1.1.3 Fonctions et formes de la réassurance . . . . .	20
1.1.4 Les types de traités . . . . .	21
1.2 Tarification . . . . .	26
1.2.1 Branche courte et branche longue . . . . .	26
1.2.2 Tarification par expérience . . . . .	29
1.2.3 Clauses de réassurance . . . . .	33
<b>2 Short-Tail</b>	<b>36</b>
2.1 Données . . . . .	36
2.1.1 Input Claims . . . . .	37
2.1.2 Input Taux de change . . . . .	38
2.1.3 Input Inflation . . . . .	38
2.1.4 Input Réassurance . . . . .	46
2.2 Formulation mathématique . . . . .	46
2.2.1 Automatisation du pricing . . . . .	48
2.3 Difficultés et réponses . . . . .	49
2.3.1 Pourcentages de reconstitution différents . . . . .	49
2.3.2 Subtilité des traités régionaux . . . . .	50
2.3.3 Comparaison historique . . . . .	53
2.3.4 Autres indicateurs . . . . .	56
2.3.5 Sensibilité de la tarification à l'inflation . . . . .	58
2.4 Conclusion du chapitre . . . . .	61

<b>3</b>	<b>Long-Tail</b>	<b>62</b>
3.1	IBNR	62
3.2	Choix de l'inflation	63
3.2.1	Inflation économique	63
3.2.2	Inflation en terme d'exposition	64
3.2.3	Projection de l'inflation	66
3.3	Données	67
3.4	Inflation des sinistres	68
3.5	Développement des sinistres	70
3.5.1	Chain-Ladder simple	70
3.5.2	Chain-Ladder pondéré	73
3.5.3	Exclusion des données	79
3.5.4	Crédibilité pour améliorer la précision du développement	84
3.5.5	Lissage des résultats	90
3.5.6	Méthode finalement conservée	92
3.6	Traitement des réserves restantes	94
3.7	IBNyR	96
3.7.1	Problème rencontré	96
3.7.2	Intégrer ces sinistres à l'approche historique	97
3.8	Clause de stabilisation	100
3.8.1	Montant du sinistre sans clause	100
3.8.2	Montant du sinistre avec clause	101
3.8.3	Exemple pratique : Sinistre final avec et sans application de la clause	103
3.9	Calcul des indicateurs historiques	106
3.9.1	Inputs	106
3.9.2	Application de la tarification	107
3.10	Résultats de l'intégration de la clause de stabilisation	108
3.10.1	Impact de la clause dans la tarification	108
3.10.2	Sensibilité au choix de l'indice de mise en As-If	109
3.10.3	Effet du choix de l'indice dans la clause de stabilisation sur les indicateurs	110
3.10.4	Effet du choix du seuil dans la clause de stabilisation sur les indicateurs	111
3.10.5	Poids des IBNyR dans les résultats finaux	112
3.10.6	Choix du seuil d'exclusion des sinistres pour la méthode de développement et IBNyR : conséquences sur les indicateurs	113
3.11	Sensibilité aux coefficients de développement	114
3.11.1	Methodologie	115
3.11.2	Résultats	116
3.11.3	Critique de la méthode	117
	Conclusion	119

**Annexes** **121**

**Annexe 1: Preuve, pondération choisie diminue le coefficient de Chain-Ladder** **121**

**Annexe 2: Preuve, fonction moyenne des excès GPD affine au dessus du seuil** **122**

<b>Annexe 3: Pertinence de l'indicateur de crédibilité</b>	<b>123</b>
<b>Annexe 4: Tables</b>	<b>125</b>
<b>Annexe 5: QQ-Plot loi de sévérité</b>	<b>125</b>

# Introduction

Le montant des sinistres en responsabilité civile ne peut pas être fixé instantanément : il faut attendre un temps long avant de voir le coût être définitivement déterminé. Les variations éventuelles en termes de charge peuvent donc survenir sur de longues périodes. Cette particularité des branches longues va alors poser deux problèmes au niveau du calcul des indicateurs historiques pour la tarification : l'estimation du développement des sinistres pour obtenir un montant ultime, et les considérations de l'impact de l'inflation sur la charge. C'est pourquoi la clause de stabilisation a pour but de répartir les effets d'inflation entre assureur et réassureur. L'intégration de cette clause dans l'approche historique représente cependant un défi car cela demande une méthode de considération des sinistres adaptée et fidèle aux données manipulées. Il s'agit en effet d'évènements au coût élevé : leur estimation doit être précise et basée sur des hypothèses fiables. C'est pourquoi les différentes approches seront testées et comparées.

La problématique autour de laquelle ce mémoire va s'articuler est donc la suivante :

Comment définir une méthode de calcul des indicateurs historiques pour les traités en excédent de sinistres en branche longue complète et incluant la clause de stabilisation ?

Le premier chapitre de ce mémoire présentera le contexte général dans lequel cette étude va s'inscrire. Les objectifs et fonctions de la réassurance ainsi que le rôle d'AXA Global Re seront notamment détaillés pour comprendre l'intérêt des indicateurs historiques qui seront calculés. Une attention particulière sera également portée aussi bien aux principes de tarification historique des traités en excédent de sinistres qu'aux réglementations et clauses ayant un impact dans cette analyse.

Le second chapitre sera consacré à la mise en place des calculs de Burning Cost et résultat historique dans le cas des branches courtes. Cette partie permettra ainsi de formaliser le processus de tarification historique, mais également de détailler les paramètres devant être pris en considération par la suite. L'examen détaillé des indices d'inflation, ainsi que la réflexion menée sur les difficultés propres à chaque traité sont en effet indispensables pour organiser une automatisation complète. C'est donc dans cette partie que seront explicités la création des tables d'entrées, les cas particuliers rencontrés et les décisions prises pour fournir des sorties pertinentes.

Le troisième chapitre permettra de centrer l'étude sur les aspects représentatifs des

branches longues. Dans un premier temps, le choix de l'inflation, la projection de cet indice et son utilisation pour la mise en As-If des sinistres seront exposés. Une seconde étape sera dédiée à la comparaison des différentes méthodes de développement : leur mise en place, leurs avantages et leurs limites. Une décision pourra ainsi être prise pour sélectionner celle qui sera la plus adéquate par rapport à la nature des données. Enfin, la clause de stabilisation et son intégration dans les calculs mis en place seront exprimées. Cette dernière phase mettant en jeu un certain nombre de paramètres, un suivi de la sensibilité aux hypothèses sera effectué pour comprendre l'incidence des éléments choisis.

NB : Pour des raisons de confidentialité, toute valeur numérique utilisée dans ce mémoire correspond à une valeur modifiée par le biais d'une technique qui ne sera pas précisée. Bien que ces valeurs ne soient pas réelles, elles restent cohérentes entre elles et permettent donc de dessiner des tendances conformes.

# Chapitre 1

## Eléments de contexte

La clause de stabilisation est une composante précise des traités de réassurance. Ceux-ci sont définis dans un cadre déterminé s'appuyant sur des conditions fixes et exactes. C'est pourquoi il convient tout d'abord de rappeler le contexte dans lequel l'étude de cette clause va s'inscrire. Ce premier chapitre va donc revenir dans un premier temps sur les notions de réassurance en faisant un état des lieux complet. Dans un second temps, ce sont les principes de tarification qui seront détaillés.

### 1.1 Réassurance

La réassurance permet de relier de nombreux acteurs du monde de l'assurance dans le but de sécuriser la gestion des risques. Nous allons donc voir tout d'abord dans quel contexte ce soutien s'inscrit et sous quelles formes.

#### 1.1.1 Le marché de la réassurance

La réassurance est un ensemble de services par lequel un réassureur, nommé cessionnaire, va apporter son soutien à un assureur, nommé cédante, par exemple en prenant en charge une partie de ses risques. Au cours de ce processus, le réassureur ne se substitue pas aux engagements de la cédante qu'il réassure, celle-ci reste seule responsable vis-à-vis de ses assurés. Le transfert de risque s'établit en contrepartie d'une rémunération, la prime de réassurance, et dans des conditions prédéfinies en termes de seuil d'intervention et de limite de couverture.

Pratiquée depuis plusieurs siècles, la cession de risque en échange d'une prime a fortement évolué à la fin du XIXème siècle. En effet, une conséquence de la révolution industrielle a été l'essor de grandes usines et infrastructures. Des dommages importants sur de telles structures comme ceux causés par un incendie étaient alors difficiles à couvrir pour les assurances. La création de sociétés dont l'activité est spécifiquement la réassurance a débuté à ce moment là en Allemagne, puis cette activité s'est développée non seulement géographiquement, mais aussi en terme de couverture.

Cette diversification de l'activité de réassurance s'observe encore aujourd'hui avec des risques nouveaux aux coûts très élevés. Nous pouvons penser notamment aux catastrophes naturelles avec l'exemple de l'ouragan Andrew en août 1992, classé dans la catégorie la plus élevée de l'époque par le National Hurricane Center. Cet événement a engendré des coûts jamais vus pour une catastrophe et une véritable part de l'assurance et de la réassurance se focalise depuis sur les événements de ce type. Cette constante évolution se retrouve également dans des risques comme le Cyber, qui peut prendre plusieurs formes comme la cybercriminalité, l'espionnage ou le sabotage. Les coûts sont pour le moment difficiles à quantifier, les réassureurs doivent donc s'adapter à ces nouveaux risques et trouver des solutions pour fournir une offre toujours adaptée.

### 1.1.2 Présentation et rôle d'AXA Global RE

Au sein de cet écosystème, Axa Global RE (AGRe) a un rôle particulier. Créée en 2017 au moment de la fusion entre l'entité de réassurance Vie "AXA Global Life" et l'entité de réassurance Non-Vie "AXA Global P&C", AGRe est en charge de la réassurance de l'ensemble du groupe AXA. Ainsi, tous les traités concernant des risques cédés par des entités d'AXA passent par AGRe, sauf cession spécifique. En effet, certains risques d'entités particulières sont traités séparément mais ce cas ne sera donc logiquement pas observé dans ce mémoire.

L'activité d'AGRe se décompose en cinq grandes branches majeures : les dommages aux biens (Property), la responsabilité civile générale (GTPL pour General Third Party Liability), la responsabilité civile automobile (MTPL pour Motor Third Party Liability), la vie (Life) et l'assurance relative à la marine et aviation (Transport).

AGRe a plusieurs possibilités d'action pour gérer un traité, pour lesquelles il faut tout d'abord définir la notion de "Pool". Il s'agit d'une mutualisation de risques qui vont être pris en charge par une couverture commune. Il y a un pool par branche majeure, ceci permettant notamment une diversification géographique des risques conservés.

Trois possibilités existent ensuite pour AGRe :

- Mettre le traité sur le marché de la réassurance et donc ne pas le garder dans le pool. Il s'agit d'un système dit "back to back" pour lequel AGRe doit trouver un réassureur externe qui veuille bien prendre ce traité tel qu'il est. Les primes et les risques associés sont transférés en externe et ne restent pas au sein du groupe.
- Conserver intégralement dans le Pool, ce qui constituera l'unique forme de réassurance de ce traité. L'intérêt de cette formule est alors de conserver le volume de primes associé au sein du groupe. Cependant, cela complique la possibilité d'avoir une idée du prix du marché. Pour ce dernier point, nous pouvons noter tout de même que les courtiers donnent les prix à AGRe via des études comparatives, révélant ainsi les tendances de marché.
- Choisir un système intermédiaire, en conservant une partie du traité dans le Pool et en cédant l'autre partie sur le marché de la réassurance, c'est-à-dire en passant par un

réassureur externe. Cette option permet d'obtenir un vrai prix de marché car le traité est réellement placé.

L'ensemble des éléments pris en charge par le Pool est ensuite réassuré via une couverture groupe (Group Cover) auprès d'un réassureur externe. Certains ajustements peuvent alors être opérés : dans le cadre du Pool Property par exemple, le résultat du Pool est redistribué aux entités selon une répartition établie dépendant entre autre de leur contribution.

Les discussions à propos des couvertures des entités sont menées au cours des comités de souscription : la situation et les études conduites sur chaque entité sont présentées pour aboutir à une décision quant à la souscription, et notamment le fait de conserver intégralement, partiellement, ou non le traité au sein du Pool.

### **1.1.3 Fonctions et formes de la réassurance**

De manière générale, le recours à la réassurance peut se faire avec différents objectifs pour lesquels la solution optimale ne sera pas toujours la même. Nous allons donc voir le contexte dans lequel ce processus s'intègre.

#### **1.1.3.1 Fonctions de la réassurance**

L'offre de réassurance se développe de façon à répondre le mieux possible aux difficultés rencontrées par les assureurs et donc en multipliant les possibilités de réponses à ces besoins.

Trois fonctions principales de cette activité sont alors relevées :

- Le transfert de risque, le cessionnaire étant en quelque sorte l'assurance de l'assureur. Une certaine quantité de risque est cédée au réassureur en échange d'une prime de réassurance et dans des conditions prédéfinies. Le recours à cette méthode permet notamment à l'assureur de ne pas faire face seul à un sinistre extrêmement coûteux. L'intérêt est également de se protéger contre des risques difficiles à évaluer et dont la quantité est donc difficile à prévoir. De façon plus générale, ceci permet de prévenir un risque d'intensité, de fréquence comme une augmentation de risques sur une ligne de business, ou encore le risque d'erreur par exemple au moment de la mise en place d'un nouveau produit.
- La réassurance peut s'exprimer en tant que support financier en compensant l'absence de fonds propres. L'objectif peut alors être d'augmenter la capacité de souscription ou d'optimiser l'allocation de capital, permettant ainsi à l'assureur de diminuer son besoin de marge de solvabilité.
- La réassurance peut tenir un rôle de support technique. Elle est effectivement source d'information et de technicité. Cette fonction se retrouve aussi bien dans l'aide au démarrage d'une nouvelle branche ou la tarification pour des situations spécifiques.

### 1.1.3.2 Formes de réassurance

Pour ce qui est du transfert de risque, il existe trois formes de réassurance : la réassurance obligatoire, facultative et facultative-obligatoire.

- En réassurance obligatoire, l'assureur va obtenir la couverture de l'ensemble de son portefeuille de risques relatifs à une branche d'activité. Le cessionnaire a alors obligation d'accepter et le contrat liant les deux est appelé traité. Pour la cédante, ce type de traité présente l'avantage de sécuriser le transfert de risques car le réassureur ne peut pas refuser. Cependant, elle a l'obligation systématique de céder et il existe des exclusions puisque les risques couverts sont définis par des clauses contractuelles.
- En réassurance facultative, les deux acteurs ont le choix. Il s'agit pour l'assureur de sélectionner un risque ou des polices spécifiques qu'elle souhaite céder. Pour sa part, le réassureur a aussi bien la possibilité de refuser que d'accepter, en se basant sur sa vision du risque et son appétence au risque. Il a en effet une vision parfaite du risque et la liberté de souscription. En revanche, une antisélection est possible étant donné que c'est l'assureur qui choisit les polices qu'il veut réassurer. Il y a également peu de mutualisation de ces risques car il s'agit ici de risques atypiques.
- En réassurance facultative-obligatoire (facob), l'assureur transfère les risques qu'il souhaite et le réassureur est obligé d'accepter. Ce contrat est donc facultatif pour la cédante et obligatoire pour le réassureur. Ce type de réassurance est cependant assez rare, et est facilité par une relation de confiance entre les deux parties.

Quelle que soit la forme de réassurance en jeu, plusieurs solutions sont possibles en termes de profil du traité de réassurance. Les traités pouvant être choisis seront décrits dans la section suivante.

### 1.1.4 Les types de traités

Au moment de définir les termes contractuels qui vont lier la cédante et le cessionnaire, il faut déterminer le format de traité que l'on souhaite mettre en place. Il existe deux grandes familles de traités : ceux en réassurance proportionnelle et ceux en réassurance non proportionnelle.[1]

#### 1.1.4.1 Traité proportionnel

La réassurance proportionnelle repose sur un partage proportionnel des sinistres et des primes entre la cédante et le cessionnaire, quelque soit la quantité de sinistres qui surviendra. Les proportions de primes et de risque cédé sont donc identiques. Nous distinguons ici les traités en quote-part (Quota Share en anglais) et les traités en excédent de pleins (Surplus Share).

#### 1.1.4.1.1 Traité Quote-Part

Pour un traité Quote-Part, un pourcentage  $x$  entre 0 et 100 est déterminé et représente la part cédée au réassureur sur l'ensemble des polices. Le cessionnaire reçoit donc  $x\%$  des primes et du risque en échange d'une commission. Ainsi, un sinistre de montant  $Y$  aura un coût de  $x * \frac{Y}{100}$  pour le réassureur et  $(100 - x) * \frac{Y}{100}$  pour l'assureur. Le montant de la commission va notamment dépendre du rapport *Sinistres/Primes*, c'est-à-dire le Loss Ratio.

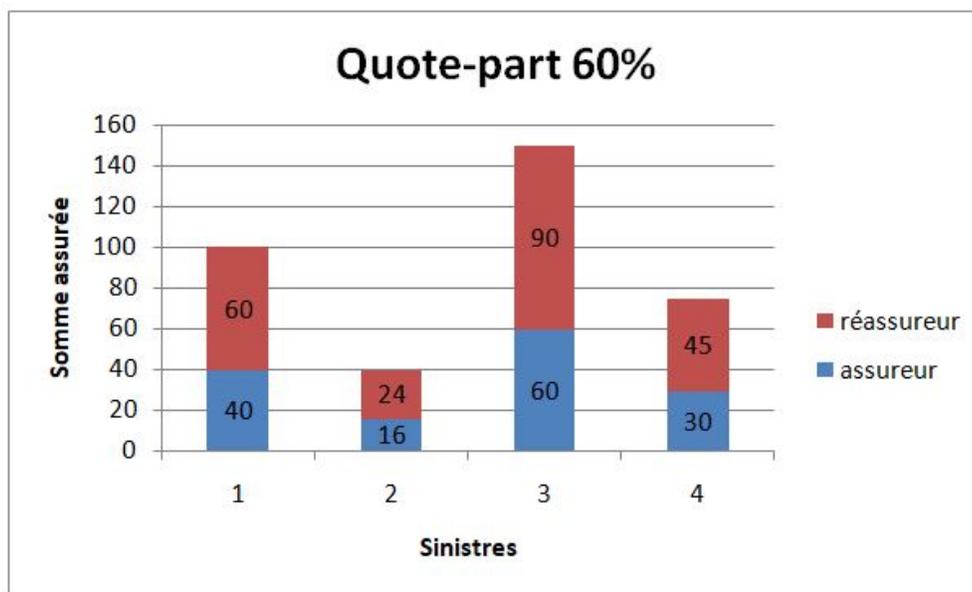


Figure 9: Répartition de l'engagement pour un traité Quote-Part 60%

Les primes et les montants des sinistres sont partagés selon le même pourcentage de cession. Dans la figure 9 ci-dessus, 60% des primes et du montant de chaque sinistre reviennent ainsi au réassureur. Cette formule peut notamment être utilisée au lancement d'un nouveau produit pour lequel l'assureur a peu de recul.

#### 1.1.4.1.2 Traité en excédent de plein

Un traité en Excédent de plein a un fonctionnement similaire à un Quote-Part mais le pourcentage de cession varie d'une police à l'autre. L'assureur détermine un montant de somme assurée, appelé plein de rétention, en-deçà duquel il conserve l'intégralité du risque. Pour les risques qui excèdent ce plein, la partie supérieure au seuil est cédée au réassureur, comme expliqué en figure 10.

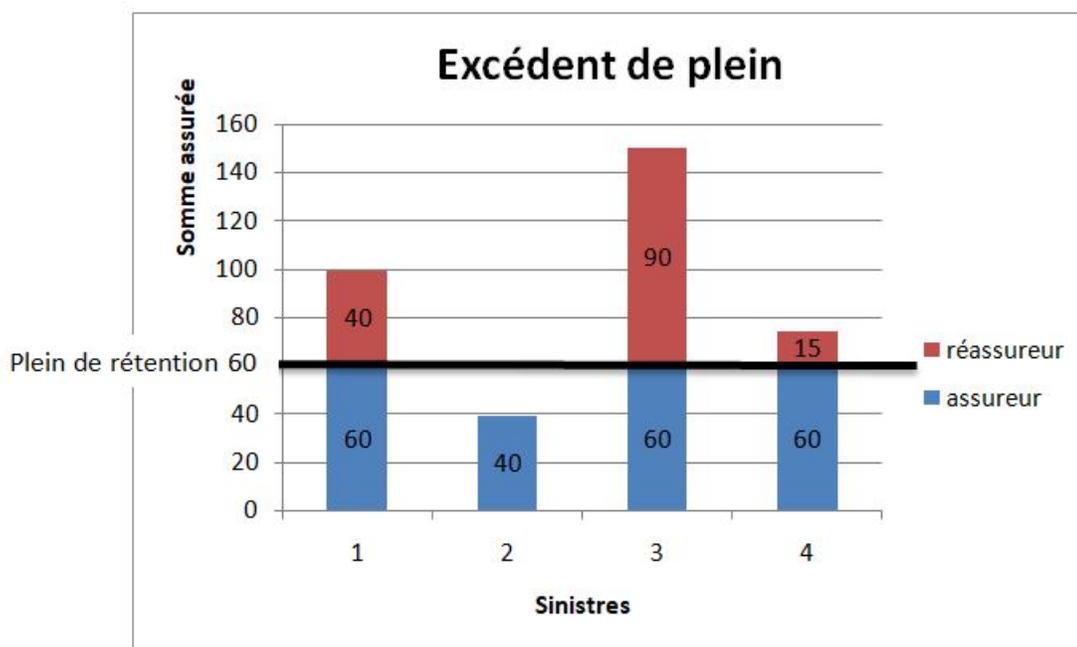


Figure 10: Répartition de l'engagement pour traité en excédent de plein

Pour la première police, 40% de la prime et du coût du sinistre reviennent au réassureur, tandis que la deuxième police n'est pas concernée par le processus de réassurance : la valeur assurée est trop basse. La troisième et la quatrième police utilisent également le plein de rétention pour définir la répartition entre assureur et réassureur.

Ce type de réassurance ne sera pas utilisé par la suite dans ce mémoire. En effet, en prenant l'exemple de la responsabilité civile automobile, la somme assurée n'est pas connue à l'avance donc il est impossible de mettre en place cette méthode.

#### 1.1.4.2 Traité non-proportionnel

Ce type de réassurance n'est pas un partage proportionnel du sort entre l'assureur et le réassureur. L'engagement de chaque partie va dépendre de deux paramètres indépendants de la somme assurée et délimitant l'intervention de la cédante et du réassureur.

##### 1.1.4.2.1 Traités en Excédent de sinistres - XS

Au cours de ce mémoire, nous nous concentrerons sur les traités en excédent de sinistres dont le principe est détaillé ci-dessous.

L'intérêt de ces traités est de déterminer un montant à partir duquel la réassurance entre en jeu, la priorité, ainsi qu'un montant au-delà duquel les coûts des sinistres reviennent à l'assureur, la limite. Ce type de traité est noté de la forme "limite XS priorité". Ce fonctionnement peut être expliqué à partir de la figure 11 :

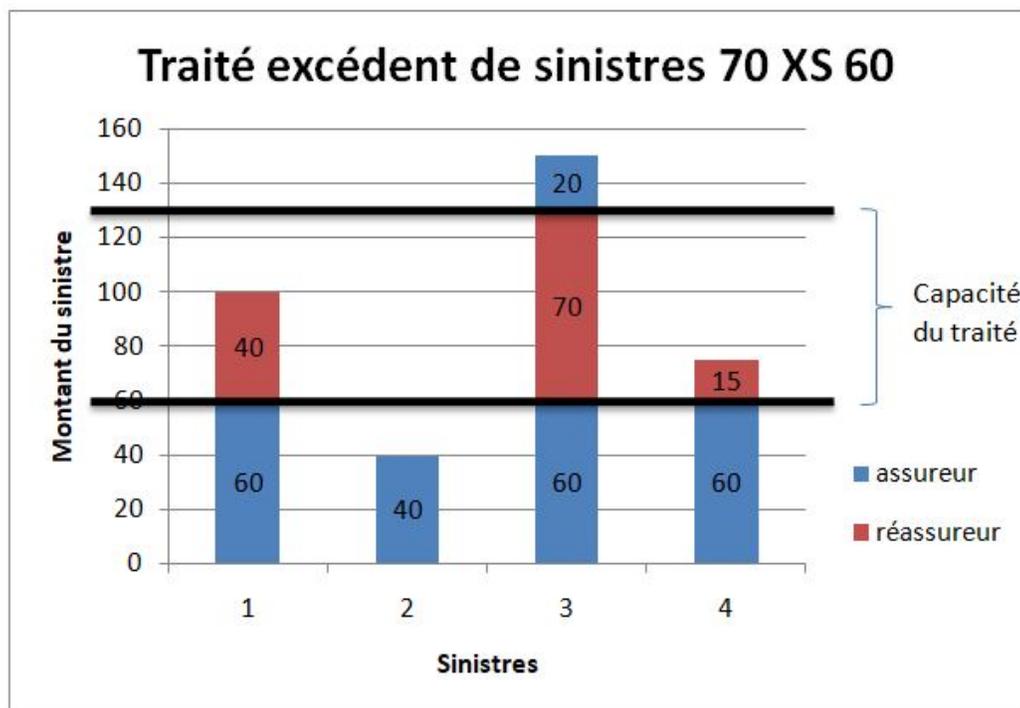


Figure 11: Traité en excédent de sinistres 70 XS 60

En dessous de la priorité (ici 60), l'intégralité de la charge du sinistre est assumée par la cédante. L'ensemble du coût du sinistre à partir de la priorité et ce jusqu'à épuisement de la limite est transféré au réassureur. Enfin, au-delà de ces montants, c'est l'assureur qui intervient. La partie que le cessionnaire va régler à la cédante est appelée récupération.

Cependant, cette définition simple des traités XS est incomplète car il faut également établir des paramètres qui vont encadrer la prise en charge par le réassureur.

- AAD et AAL : des limites de garantie. L'AAD pour Annual Aggregate Deductible fonctionne comme une franchise annuelle sur l'agrégation des paiements affectés au réassureur. Jusqu'à épuisement de l'AAD, les sinistres entrant dans le traité restent à la charge de l'assureur. L'AAL pour Annual Aggregate Limit est un plafond annuel des engagements du réassureur. Il s'agit du montant maximal que le réassureur accepte de payer. Au-delà, tout sinistre qui serait dans le cadre du traité revient à la cédante.
- nbRec : le nombre de reconstitutions. Si la limite est épuisée par des sinistres au cours de l'année, l'assureur pourra toujours être couvert s'il lui reste des reconstitutions qui

n'ont pas été consommées. Au total, la cédante est couverte (nbRec +1) fois. A chaque reconstitution est associé un pourcentage de reconstitution Prec, qui indiquera si la reconstitution est payante pour l'assureur.

Pour mieux protéger la cédante, un traité est généralement défini par un enchaînement de plusieurs tranches de réassurance, chacune couvrant une certaine classe de charge de sinistres. Chaque tranche (layer) a donc un prix propre qui peut être tarifé selon la sinistralité attendue.

Différentes possibilités existent pour définir les conditions de réassurance, chacune ayant un impact sur les calculs de réassurance et la tarification comme nous le verrons plus tard. Dans l'étude menée au cours de ce mémoire, nous nous concentrerons en effet sur les traités de type XS. Un exemple fictif dans la partie 1.2.2.3 montrera comment le choix des paramètres comme l'AAD, l'AAL ou le nombre de reconstitutions peut impacter les montants transférés entre assureur et réassureur.

#### 1.1.4.2.2 Excédent de perte - Stop loss

La protection de l'assureur se fait ici contre un excédent de perte. Le fonctionnement est assez similaire à celui du traité XS mais c'est ici la sinistralité annuelle agrégée qui est assurée. La priorité et la limite en figure 12 sont définies à partir du loss-ratio, c'est-à-dire le rapport sinistre/prime.

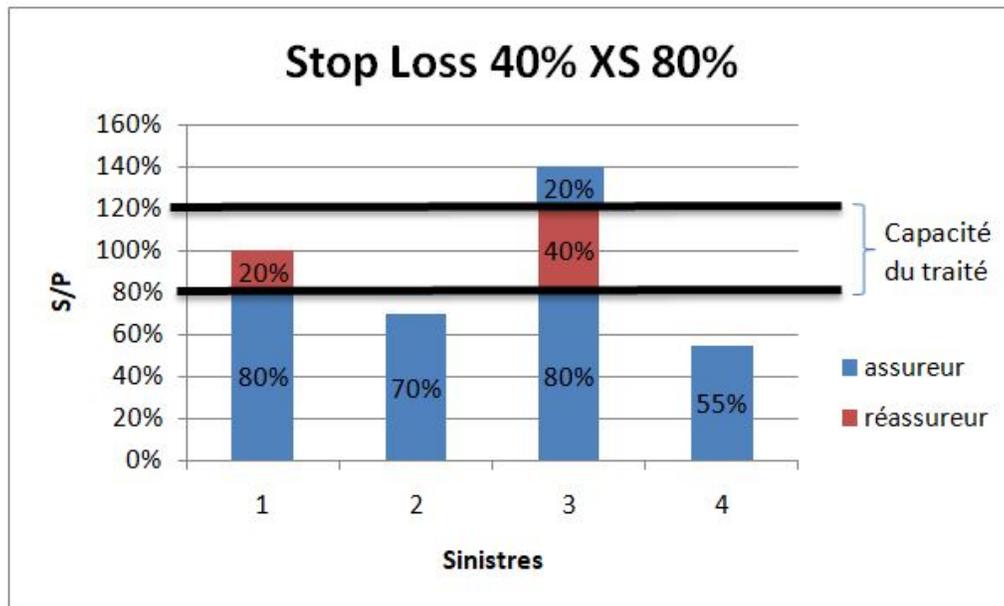


Figure 12: Traité en excédent de perte annuelle 40% XS 80%

Ce type de traité est utilisé à la base pour répondre à une problématique de surfréquence, mais il couvre aussi des questions de montants.

Parmi l'ensemble des formes de traités, ce mémoire va se focaliser sur les traités XS, nous allons désormais voir comment s'opère leur tarification, et dans quel cadre celle-ci va s'inscrire.

## 1.2 Tarification

Comme nous avons pu le voir, AGRe s'occupe des activités de réassurance des entités constituant le groupe AXA. Chacune ayant ses spécificités, la tarification est un enjeu important puisqu'il s'agit de déterminer la prime en échange de laquelle le risque sera cédé au réassureur.

### 1.2.1 Branche courte et branche longue

Une première distinction s'opère selon la nature de la ligne de business. La tarification prendra en compte des aspects différents selon les sinistres observés.

#### 1.2.1.1 Distinction des branches

Obtenir une évaluation correcte du montant final d'un sinistre peut s'avérer difficile selon la nature même du sinistre. En effet, le coût correspondant à l'incendie d'un bâtiment par exemple pourra rapidement être déterminé et ne devrait normalement pas évoluer par la suite. A l'inverse, un accident de voiture engendrant la prise en charge d'un handicap grave par la responsabilité civile requiert un horizon bien plus large du fait du temps nécessaire à la stabilisation de l'état de la victime.

La branche courte (Short-Tail) va regrouper l'ensemble des risques associés à une évaluation et une indemnisation rapides. Les lignes de business concernées sont le Property Cat (dans le cas d'évènements climatiques), l'aviation, la marine, le Property per risk et Engineering. De nombreux types de sinistres peuvent alors être retrouvés dans cette catégorie : incendies, tempêtes, inondations, explosion, ..etc.

La branche longue (Long-Tail) correspond aux risques dont le développement et le règlement vont nécessiter un recul de plusieurs années. Il est tout à fait possible d'avoir des sinistres dont le déroulement prendra plus de quinze ans. Les lignes de business qui y sont associées ici sont MTPL et GTPL, qui sont respectivement la responsabilité civile automobile et générale.

Au cours de ce mémoire, les méthodes de tarification seront tout d'abord analysées sur le Short-Tail, puis nous développerons ces méthodes dans le cas du Long-Tail avec les ajustements nécessaires. Dans la section suivante, le cadre général de la responsabilité civile sera plus particulièrement détaillé puisqu'il s'agit de la ligne de business visée par la problématique de cette étude.

### 1.2.1.2 Le cas de la RC

Au sein de la branche longue, la responsabilité civile est un bon exemple. Le montant des sinistres peut encore évoluer de nombreuses années après la déclaration du sinistre. Ces changements peuvent survenir consécutivement à diverses situations, que ce soit une décision de justice, une contre-expertise ou même l'aggravation de l'état de santé de la victime dans le cas d'un incident corporel.

Nous allons donc préciser le contexte dans lequel s'inscrit la responsabilité civile.

#### 1.2.1.2.1 Définition

La responsabilité civile est régie par le droit français qui apporte une législation sur la réparation des préjudices qui sont causés à autrui. On en trouve trace dans le livre III du code civil. [2]

- Article 1240 "Tout fait quelconque de l'homme, qui cause à autrui un dommage, oblige celui par la faute duquel il est arrivé à le réparer."
- Article 1241 "Chacun est responsable du dommage qu'il a causé non seulement par son fait, mais encore par sa négligence ou par son imprudence."
- Article 1242 "On est responsable non seulement du dommage que l'on cause par son propre fait, mais encore de celui qui est causé par le fait des personnes dont on doit répondre, ou des choses que l'on a sous sa garde. [...]" Cet article détaille par exemple la responsabilité des parents ou des instituteurs sur les enfants et élèves respectivement.
- Article 1243 "Le propriétaire d'un animal, ou celui qui s'en sert, pendant qu'il est à son usage, est responsable du dommage que l'animal a causé, soit que l'animal fût sous sa garde, soit qu'il fût égaré ou échappé."
- Article 1244 "Le propriétaire d'un bâtiment est responsable du dommage causé par sa ruine, lorsqu'elle est arrivée par une suite du défaut d'entretien ou par le vice de sa construction."

Nous pouvons noter que ces articles étaient déjà actifs avant la réforme du droit des obligations entrée en vigueur au 1er octobre 2016, et ce dans des dispositions quasiment inchangées depuis 1804, sous les numéros allant de 1382 à 1386.

*Pour ce qui est du sujet de ce mémoire, ceci assure ainsi une stabilité du point de vue légal pour la prise en compte de ce type de sinistres. Dans le cas inverse, nous aurions dû effectuer les études nécessaires pour considérer l'impact d'un changement de législation selon les années observées.*

Ces articles encadrent les termes de responsabilité pour les torts que chacun peut causer à autrui. Cependant, nous ne sommes pas dans un contexte de sanction comme cela pourrait

être le cas dans un cadre pénal. Nous nous inscrivons ici dans une démarche de réparation du dommage. Le responsable a obligation de réparer le préjudice causé.

L'assurance responsabilité civile (RC) est alors un moyen contractuel de garantir la réparation du dommage. L'assureur n'a alors aucun impact sur l'aspect pénal, mais garantit l'indemnisation de la victime selon les termes du contrat, les enjeux financiers pouvant prendre une ampleur importante. Une garantie RC générale peut être trouvée dans les contrats Multi-Risque Habitation (MRH) pour indemniser les dégâts causés par l'assuré dans certaines conditions prédéfinies, que ce soit à l'intérieur de l'habitation ou même au-dehors. L'assurance RC Auto, pour sa part, est obligatoire depuis 1958. Elle permet d'indemniser les victimes au cours d'accidents mettant en jeu des véhicules motorisés.

Ces types de RC sont souscrits par des particuliers généralement hors de tout cadre professionnel. Pour ce qui est du contexte de métiers spécialisés, il existe des RC professionnelles qui peuvent même être obligatoires pour des métiers réglementés, comme la RC médicale par exemple.

AGRe ayant la charge d'entités réparties dans le monde, la législation peut changer selon le lieu concerné. Cependant, cette notion de responsabilité civile est bien présente à l'étranger et nous pourrions donc bien prendre en considération les entités hors-France adaptées dans cette étude. Ainsi, en Allemagne par exemple, il existe un système similaire au français puisque toute personne souhaitant conduire un véhicule a obligation d'être couverte par la Kfz-Haftpflichtversicherung (KH) qui est l'équivalent de la RC Auto en France. Il en est de même pour tous les pays couverts considérés. De façon générale, nous utiliserons les abréviations anglo-saxonnes MTPL et GTPL pour respectivement Motor Third Party Liability (RC Auto) et General Third Party Liability (RC Générale).

*Cette proximité dans la législation des pays observés sera nécessaire dans le chapitre 3 de ce mémoire car nous voulons mettre en place une méthode qui puisse s'adapter aussi bien pour toutes les entités. Les différences éventuelles devront être prises en compte au niveau des données.*

Nous allons désormais voir comment se présente la réparation du dommage d'un point de vue financier.

#### **1.2.1.2.2 Indemnisation**

L'indemnisation de la victime pour la réparation du préjudice causé peut se faire sous deux formes différentes : en capital ou en rente.

- Capital : Versement de l'indemnisation à la victime en une seule fois.
- Rente : Un montant nommé arrérage est défini, il est versé régulièrement sur une durée totale fixée. Celle-ci peut être la durée de vie du bénéficiaire jusqu'à son décès dans le cadre d'une rente viagère. Une somme fixe serait injuste du fait de l'inflation des

prix dans la vie courante, c'est pourquoi une rente indexée peut être mise en place. Le montant est alors actualisé à partir du niveau d'un indice de référence.

Dans le cadre d'une rente, le Capital Constitutif de Rente (CCR) peut être calculé. Il correspond à la somme capitalisée des arrérages futurs en fonction de l'espérance de vie de la victime. En réassurance, nous trouvons aussi généralement une clause de rente au sein des traités. Celle-ci a pour visée de fixer certains points comme la révision des arrérages ou l'indexation. Cette clause sera présentée en partie 1.2.3.1. [3]

Aussi bien pour une rente que pour un capital, la durée avant d'avoir un montant stabilisé peut être très importante puisque cela nécessite d'évaluer parfaitement l'état de la victime.

La base de sinistres fournie pour ce type d'indemnisation donne les montants des règlements déjà payés ainsi que ceux à payer, constituant ainsi la charge du sinistre à un instant  $t$ . Ces valeurs peuvent évoluer dans le temps, notamment pour des sinistres à développement long comme c'est le cas en RC, formant à terme la charge ultime.

## 1.2.2 Tarification par expérience

La tarification par expérience se base sur l'exploitation et l'analyse de l'historique de sinistres associé à une entité. Nous récupérons donc pour les années passées les sinistres qui seraient pris en compte par le traité s'ils survenaient aujourd'hui.

### 1.2.2.1 Développement des sinistres

Les sinistres à développement long vont mettre en jeu des montants qui peuvent évoluer pendant de nombreuses années. Il faut donc prendre en compte ces changements pour estimer quel sera le montant final d'un sinistre récent censé subir ce type de modifications.

Pour cela, la méthode de Chain-Ladder, entre autres, utilise des données historiques pour trouver les coefficients de passage d'une année de développement à la suivante. Nous prenons alors en entrée un triangle d'historique de sinistres comme dans la figure 13, et l'objectif est de trouver les coefficients  $\lambda$  qui sont les coefficients de passage d'une année de développement à la suivante.

Année de survenance	DevYear1	DevYear2	DevYear3	DevYear4	DevYear5	DevYear6	DevYear7
2014	1M	1,2M	1,3M	1,32M	1,4M	1,4M	1,4M
2015	2M	2,6M	2,7M	2,7M	2,75M	2,75M	?
2016	1,5M	2M	2,3M	2,35M	2,35M	?	?
2017	1,2M	1,8M	2M	2,1M	?	?	?
2018	1,7M	1,9M	2,1M	?	?	?	?
2019	1M	2M	?	?	?	?	?
2020	1,4M	?	?	?	?	?	?

Figure 13: Exemple fictif de triangle de données

Les coefficients de passage sont estimés par expérience en se basant sur l'historique de sinistralité pour toutes les années de survenance passées. L'utilisation de cette méthode demande le respect de certaines hypothèses comme nous le verrons plus précisément dans le chapitre 3 pour savoir si ce procédé est adapté aux données.

De plus, nous regarderons en détail le principe de cette méthode, comment l'implémenter et quelles modifications peuvent être mises en place pour optimiser ce procédé, que ce soit en passant par de la pondération, du lissage ou même de la crédibilité.

### 1.2.2.2 Mise en As-If

Aussi bien en Short-Tail qu'en Long-Tail, la tarification par expérience fait intervenir l'historique de sinistres, donnant ainsi une indication des coûts pour la réassurance chaque année. Cependant, le montant d'un sinistre survenant aujourd'hui ne sera pas le même que celui d'un sinistre identique ayant eu lieu vingt ans plus tôt. Il est donc essentiel d'actualiser les montants en prenant en compte l'évolution de l'inflation sur cette période et son impact sur une ligne de business particulière. Cette méthode de mise à jour est dite "As-If".

En Long-Tail, cette manipulation doit également être effectuée sur la charge finale des sinistres appelée ultime. A ce moment-là, il faudra être prudent dans sa mise en place en faisant attention au fait que les effets d'inflation ne soient pas déjà pris en compte dans le développement des sinistres. De plus, les distinctions à faire entre règlements payés et règlements à payer seront expliquées.

Le choix de l'inflation selon la ligne de business ainsi que la mise en place seront étudiés au sein des chapitres 2 et 3.

### 1.2.2.3 Burning Cost

Le Burning Cost s'exprime généralement comme étant le coût pris en charge par le réassureur selon le montant total des primes encaissées par la cédante sur le portefeuille considéré. Il s'agit donc d'un taux. Pour rester cohérent avec le format des résultats et méthodes déjà mis en place, et ainsi faciliter toute comparaison, une convention différente va être adoptée ici en appelant Burning Cost le montant de la prime pure.

Pour déterminer la prime pure d'un traité de réassurance, il est nécessaire de prendre en considération l'ensemble des notions décrites au moment de définir les traités en excédent de sinistres.

La prime pure est alors l'espérance de sinistralité touchant le réassureur par le biais de ce traité. En ajoutant à ceci les chargements et frais, nous obtenons ensuite la prime technique, puis la prime commerciale après négociation, qui est celle réellement versée par la cédante

au moment de souscrire au traité.

Les récupérations représentent le montant que le réassureur doit verser à la cédante du fait de la sinistralité de cette dernière d'après les termes du traité de réassurance.

Pour l'année  $k$ , la valeur est donnée par la formule :

$REC_k = \min(\min(\max(\sum_{i=1}^n X_{i,k} - AAD, 0), (nbRec + 1) * Limit - AAD), AAL)$  avec  $X_{i,k}$  le montant du sinistre  $i$  de l'année  $k$ .

La prime de reconstitution pour l'année  $k$  correspond au montant que la cédante doit régler au réassureur en plus de sa prime initiale en fonction de sa sinistralité.

Elle est calculée pour l'année  $k$  à partir de cette formule :

$$REI_k = \frac{\min(REC_k, nbRec * Limit) * Price * PRec}{Limit}$$

Ces valeurs permettent de mettre en place le calcul du Burning Cost qui peut s'assimiler à l'espérance de montants versés par le réassureur en fonction des primes recues.

La formule du Burning Cost est alors :

$$BC = \frac{E[REC]}{1 + \frac{E[REI]}{Price}} \quad (1.1)$$

Cette formule est simplement utilisée pour le moment, le détail du calcul aboutissant à ce résultat sera donné dans la partie 2.2 correspondant à la formulation mathématique de la tarification dans le chapitre 2.

Nous avons vu dans la partie 1.1.4.2.1 que différentes options peuvent être mises en place pour réguler les conditions du traité : AAD, AAL, reconstitutions.

Voyons avec un simple exemple fictif les effets notables des conditions de réassurance. Nous nous plaçons dans le cadre d'un traité 3M XS 2M dont le prix est de 3M. L'historique de sinistre pour une année fixée est alors le suivant :

NuméroSinistre	MontantSinistre	MontantEntrantReassurance
1	3M	1M
2	4M	2M
3	7M	3M
4	4.5M	2.5M
5	12M	3M

Alors nous avons le bilan de réassurance suivant, selon les conditions attribuées au traité :

Format de réassurance	Recoveries	Primes de reconstitution
RecIllimitéesGratuites, sans AAD ni AAL	11.5M	0
RecIllimitéesGratuites, AAD 1M, pas AAL	10.5M	0
RecIllimitéesGratuites, AAD 1M, AAL 7M	7M	0
4rec100%, sans AAD ni AAL	11.5M	3.833M
4rec100%, AAD 1M, pas AAL	10.5M	3.5M

Les trois premières reconstitutions sont nulles car le pourcentage associé est égal à zéro. Pour les deux dernières lignes, les calculs respectifs sont les suivants :

$$\frac{\min(11.5M, 4*3M)}{3M} * 1M * 100\% = \frac{11.5}{3} * 1M = 3.833M$$

et  $\frac{\min(10.5M, 4*3M)}{3M} * 1M * 100\% = \frac{10.5}{3} * 1M = 3.5M$

Nous trouvons alors les montants de Burning Cost :

- $\frac{11.5M*1M}{1*1M+0M} = 11.5M$
- $\frac{10.5M*1M}{1*1M+0M} = 10.5M$
- $\frac{7M*1M}{1*1M+0M} = 7M$
- $\frac{11.5M*1M}{1*1M+3.833M} = 2.38M$
- $\frac{10.5M*1M}{1*1M+3.5M} = 2.33M$

Et les résultats sont regroupés pour comparaison.

Format de réassurance	Burning Cost sur 1 an
RecIllimitéesGratuites, sans AAD ni AAL	11.5M
RecIllimitéesGratuites, AAD 1M, pas AAL	10.5M
RecIllimitéesGratuites, AAD 1M, AAL 7M	7M
4rec100%, sans AAD ni AAL	2.38M
4rec100%, AAD 1M, pas AAL	2.33M

Nous avons pris ici un exemple basique sur une seule année mais l'intérêt de cette méthode est de s'appuyer sur l'historique et donc d'avoir un nombre d'années d'étude assez important. Généralement, un traité est défini soit avec un nombre de récupérations fini, soit avec l'AAL, mais il n'est pas utile de mettre les deux ensemble puisque les deux apportent une limitation au montant total des récupérations.

Ces paramètres permettent par exemple de diminuer le coût de la réassurance. En effet, que ce soit l'AAD ou l'AAL, ils diminuent le champ d'intervention du réassureur et donc la prime. De même, des primes de reconstitution payantes permettent de réduire le montant de la prime initiale puisqu'elles seront réglées en plus en cas de sinistralité importante. Il faut donc bien les prendre en compte au moment de la tarification.

Il faut être prudent au moment d'utiliser la méthode du Burning Cost car elle n'est applicable que sur les tranches travaillantes, c'est-à-dire qui ont une sinistralité. En effet, une absence totale de sinistres donnerait une prime pure nulle alors qu'il ne peut pas être affirmé qu'il n'y aura jamais de sinistres.

### 1.2.3 Clauses de réassurance

Etant donné que la problématique de ce mémoire va se concentrer sur les sinistres en Long-Tail et notamment en RC, il est important de rappeler le fonctionnement de deux clauses qui ont une influence dans la lecture des traités.

#### 1.2.3.1 Clause de rente

Comme nous l'avons déjà souligné, les sinistres peuvent être réglés en capital ou en rente. Dans ce dernier cas, l'établissement d'une clause de rente permet d'encadrer tous les aspects à ce propos dans un traité de réassurance. Nous y retrouvons donc les considérations à prendre en compte dans le calcul de la Perte Nette Définitive, la méthodologie de calcul du capital constitutif de rente ainsi que la façon de provisionner ces rentes dans le traité.

Il est alors nécessaire d'avoir une clause suffisamment exhaustive pour répondre à chaque situation possible et à chaque étape du processus : que ce soit avant, pendant ou après l'attribution.

Les conditions stipulées dans cette clause ont un impact direct sur les garanties et la couverture proposée, entraînant donc une variation de prix si elles sont modifiées.

Dans le cadre de ce mémoire, nous ne considérerons pas ces effets mais nous nous concentrerons uniquement sur l'impact de la clause de stabilisation présentée dans le point suivant.

#### 1.2.3.2 Clause de stabilisation

L'objectif de cette clause dans les traités XS en branche longue est de partager le coût de l'inflation entre le réassureur et la cédante. Les sinistres peuvent se développer sur un nombre d'années très élevé, et vont être également impactés par l'effet de l'inflation. La rétention du traité est aussi concernée par l'inflation qui pourrait baisser sa valeur relative. Les conséquences dont notamment le surcoût sont supportées par le réassureur dans cette situation. [4] Nous implémentons finalement cette clause de stabilisation pour fixer la répartition entre assureur et réassureur, et donc avoir un impact de l'inflation partagé.

Nous allons en voir la mise en place de façon pratique.

En se basant sur l'inflation et l'historique des paiements, nous déterminons un montant de sinistre équivalent au règlement du coût du sinistre en une fois sans impact de l'inflation économique par la suite.

Soit  $S_0$  ce montant,  $X_i$  le paiement associé à l'année  $i$  pour ce sinistre, et  $I_i$  le montant d'inflation à l'année  $i$  pour l'indice  $I$  indiqué dans le traité.

Alors,

$$S_0 = \sum_{i=anneeSurvenance}^{nbYearDev} X_i * \frac{I_{anneeSurvenance}}{I_i} \quad (1.2)$$

Dans les traités, un seuil pour l'inflation est le plus souvent utilisé. C'est à dire que nous ne considérons l'impact de ces variations d'inflation que si elles excèdent une certaine hausse ou baisse.

Les bornes du traité sont alors modifiées sous cet effet :

•

$$PrioriteStab = Priorite * \frac{\sum_{i=anneeSurvenance}^{nbYearDev} X_i}{S_0} \quad (1.3)$$

•

$$LimiteStab = Limite * \frac{\sum_{i=anneeSurvenance}^{nbYearDev} X_i}{S_0} \quad (1.4)$$

Voyons désormais un exemple d'application fictif en prenant un traité 200 XS 100. Soit un sinistre survenant en 2011 avec les paiements suivants :

	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	Total
Index	100	105	110	116	122	128	134	141	
Paiement	10	10	20	30	30	50	50	30	230
Paiement Indexé	10	9,5	18,2	25,9	24,6	39,1	37,3	21,3	185,9

Ce qui donne alors les nouvelles bornes du traité :

•

$$PrioriteStab = 100 * \frac{230}{185,9} \quad (1.5)$$

$$= 123,7 \quad (1.6)$$

•

$$LimiteStab = 200 * \frac{230}{185,9} \quad (1.7)$$

$$= 247,4 \quad (1.8)$$

Et nous avons donc le bilan :

	Avec clause	Sans clause
Charge réassureur	230-123,7 = 106,3	230 - 100 = 130
Charge assureur	230-106,3 = 123,7	230-130 = 100

Nous pouvons également reprendre ce même exemple mais cette fois en incluant un seuil à 20%.

	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	Total
Index	100	105	110	116	122	128	134	141	
Paiement	10	10	20	30	30	50	50	30	230
Paiement Indexé avec treshold	10	10	20	30	24,6	39,1	37,3	21,3	192,3

Ce qui donne alors les nouvelles bornes du traité :

•

$$PrioriteStab = 100 * \frac{230}{192,3} \quad (1.9)$$

$$= 119,6 \quad (1.10)$$

•

$$LimiteStab = 200 * \frac{230}{192,3} \quad (1.11)$$

$$= 239,2 \quad (1.12)$$

	Avec clause	Sans clause	
Et nous avons donc le bilan :	Charge réassureur	230-119,6 = 110,4	230 - 100 = 130
	Charge assureur	230-110,4 = 119,6	230-130 = 100

L'application de la clause de stabilisation soulève cependant de nombreuses questions, que ce soit le choix de l'inflation utilisée ou même le développement des sinistres. C'est pourquoi il peut être difficile de l'intégrer dans la tarification. L'élaboration de ce mémoire vise à comprendre les difficultés et solutions pour la mise en place d'une structure de tarification historique et de développement des sinistres avec l'intégration de cette clause.

## Chapitre 2

# Short-Tail

Pour obtenir une première vision claire de la tarification des traités XS, nous nous intéressons tout d'abord aux traités en Short-Tail. Ceux-ci vont mettre en avant des premières subtilités qui seront reprises dans le cas du Long-Tail par la suite. Des premiers effets et choix peuvent en effet être analysés dans cette partie pour éviter tout biais qui pourrait être retrouvé en Long-Tail, par exemple du fait du développement des sinistres, facilitant ainsi la compréhension et le recul sur les grandeurs mises en jeu.

### 2.1 Données

Cette tarification étant constituée d'indicateurs comme le Burning Cost qui nécessitent un historique de sinistres complet, il est essentiel de se servir de données les plus précises et exhaustives possibles.

Du fait du rôle et de la structure d'AGRe, ce sont les entités couvertes (les cédantes) qui transmettent les données de renouvellement. Cependant, toutes les informations sinistres de l'entité ne sont pas transférées. AGRe obtient seulement les données susceptibles de s'approcher d'un impact sur la réassurance. En pratique, un pourcentage de la rétention est choisi (par exemple 50%) au-delà duquel les renseignements sur les sinistres sont communiqués.

Pour chaque traité, la cédante fournit également le montant des Earned Premium Income (EPI) qui permet à AGRe d'avoir une vision de l'évolution du portefeuille. Il s'agit en effet du montant global des primes reçues par l'entité pour les risques susceptibles d'être couverts par le traité.

Enfin, les traités (Wording) sont une source essentielle d'information sur la structure de la réassurance. C'est ici par exemple que le nombre de tranches, les récupérations associées ou même les limites définies sont retrouvés.

Pour mettre en place les calculs de réassurance, l'ensemble de ces informations doivent

être prises en compte et organisées pour en optimiser le traitement. Différentes tables d'input seront utilisées.

### 2.1.1 Input Claims

L'input de sinistralité rassemble l'ensemble des sinistres qui ont touché l'entité et qui pourraient être pris en compte dans le traité XS. Bien que seuls les sinistres avec un montant supérieur à la priorité affectent les calculs, il faut tout de même ajouter à cette base les sinistres qui en sont proches car l'effet de l'inflation pourrait à terme conduire à une prise en charge de ces sinistres par le traité au moment de la tarification. De plus, nous pouvons penser qu'un sinistre réévalué à la hausse pourrait avoir un impact en touchant une tranche de réassurance. Si nous comparons aux bases chaque année, il faut bien voir qu'il ne s'agit pas d'un sinistre totalement nouveau mais bien d'un sinistre existant dont le montant a évolué. C'est pourquoi il faut prendre un ensemble de sinistres assez large : l'entité fournit les sinistres au-dessus d'un seuil définit en fonction d'un pourcentage donné de la rétention.

Un certain nombre de variables permettent de définir un sinistre. Par souci d'efficacité dans la méthode développée, nous décidons de conserver le nom du programme, le LoB, l'entité et le type de sinistre associés. En effet, ces paramètres permettent de s'assurer que seuls les sinistres liés au traité sont conservés. Le type de sinistre est une variable qui prend son sens par exemple pour les catastrophes naturelles. Si un traité possède plusieurs tranches distinguant les phénomènes, comme une séparation entre tremblement de terre et les autres catastrophes possibles, il faut prendre garde à associer un péril à la bonne tranche.

Cette situation peut être visualisée avec un exemple fictif :

Entity	Layer	Sinistres couverts	Priorite	Limite
X	1.a	Tout sauf earthquake	5M	10M
X	1.b	Earthquake uniquement	7.5M	7.5M
X	2	Tout	15M	20M

Nous voyons bien dans cet exemple que tous les sinistres ne sont pas éligibles aux layers 1.a et 1.b du fait des périls couverts. Pourtant, tous les sinistres associés au programme feront parti de la base de données. Il faut donc bien établir ce tri sur le type de sinistre au moment du traitement des tranches de réassurance.

De plus, nous associons à chaque sinistre un identifiant sous la forme de numéro pour établir rapidement les causes de modifications notables dans la tarification d'une année sur l'autre.

Enfin, nous avons le montant du sinistre, son année de survenance et la monnaie associée. En effet, une première étape sera de mettre tous les sinistres dans la même base de monnaie pour être certains d'avoir des montants réellement comparables. L'année de survenance, pour sa part, aura une influence quand l'inflation sera appliquée en actualisant les sinistres aux valeurs d'aujourd'hui.

## 2.1.2 Input Taux de change

Cette table permet de mettre les montants des sinistres dans la même monnaie. Nous associons alors ici pour chaque monnaie locale sa valeur par rapport à un euro non seulement pour la valeur actuelle mais aussi pour celle de l'année précédente. Avoir ces résultats sur deux années successives permettra ensuite d'isoler l'effet du taux de change, c'est-à-dire d'observer l'impact unique de l'évolution de la valeur d'une monnaie.

Les valeurs de taux de change sont récupérées via le site "fxtop". D'un point de vue pratique, un document interne regroupe ces valeurs pour des dates fixes. En ligne avec la modélisation, ce sont les taux de change au 31/12 qui seront utilisés dans l'outil de calcul.

## 2.1.3 Input Inflation

L'inflation est un paramètre important dans l'ensemble des calculs à venir puisque c'est à partir de l'évolution de ses valeurs que nous allons déterminer le coût de sinistres passés s'ils survenaient aujourd'hui.

### 2.1.3.1 Types et sources d'inflation

Nous regroupons ici l'ensemble des données d'inflation associées à des entités couvertes par AGRe. Ainsi, nous avons pour chaque année et pour chaque pays le montant d'inflation. Une subtilité existe dans cette table au niveau de l'inflation choisie. En effet, l'objectif de cet indicateur est de mettre à jour les sinistres en regardant quel serait leur coût aujourd'hui. Dans cette démarche, nous distinguerons deux types d'inflation qui auront un impact selon le type de ligne de business.

- Inflation économique : il s'agit de l'inflation au sens de l'évolution du coût des biens dans un pays. Nous allons tout de même chercher une certaine précision du fait des lignes de business considérées avec une étude détaillée dans la sous-partie suivante. Nous comprendrons ainsi en quoi le choix de cet indice est déterminant.
- Inflation d'exposition : L'intérêt de cette mesure est d'observer des variations dans la souscription et donc anticiper une sous-exposition ou une sur-exposition par rapport à l'état des années précédentes. En effet, si nous avons deux fois plus d'exposition que l'année précédente, nous établissons l'hypothèse que l'entité aura un montant total de sinistres à payer deux fois plus important. Cette mesure prend particulièrement son sens pour les catastrophes naturelles (CAT) : un évènement climatique affectant une zone, l'impact sur l'assureur va dépendre de la somme assurée sur cette région. La donnée la plus adaptée serait le nombre de sites assurés pour un territoire, mais le réassureur n'a pas forcément accès à un tel degré de précision. Nous considérerons donc que l'exposition est traduite par les primes, qui rendent compte de l'évolution du portefeuille assuré. L'indicateur choisi est le montant des EPI renseigné par la cédante, dont l'historique peut être établi.

Nous conservons donc pour la suite le choix de la mesure d'inflation économique pour le Property per risk et l'indice d'exposition pour le CAT. Pour cette dernière ligne de business, les sinistres doivent subir une inflation économique, mais nous considérons que celle-ci est portée implicitement par les EPI.

### **2.1.3.2 Choix de l'indice d'inflation économique**

Dans cette partie, une comparaison des différents indicateurs économiques qui pourraient servir afin d'appliquer un effet d'inflation aux sinistres va être menée. En tout, ce sont quatre grandeurs qui sont considérées :

- Indice des salaires, source INSEE, FMI et OCDE [5] [6]
- Indice du coût de la construction, source FFB, ABEX et Eurostat [7]
- Indice des prix à la consommation, source FMI
- Indice du coût des dépenses de santé, source OCDE [8]

Chacune de ces données reflète ainsi l'évolution du coût des dépenses pour les assurés, ou les changements nationaux en terme de salaire. Ceci impacte directement les frais dans la vie quotidienne et donc potentiellement le montant des sinistres. Choisir un indice d'inflation adapté est important puisque l'impact sera fort, surtout sur des sinistres anciens. C'est pourquoi cette étude détaillée est conduite.

#### **2.1.3.2.1 Variations d'inflation économique selon l'entité**

Voyons tout d'abord si les différents types d'inflation choisis ont une évolution qui dépend de l'entité concernée. En effet, la tarification va être effectuée sur toutes les entités couvertes, le choix de l'indice d'inflation ne doit donc pas être anodin, son impact n'étant pas forcément le même dans chaque pays.

L'indice des prix à la consommation est souvent utilisé car il reflète le coût des dépenses quotidiennes. De plus, il est facilement accessible : sa publication mensuelle se trouve dans la base de données publique du FMI. Pour observer l'évolution dans la figure 14, nous sélectionnons sept pays : cinq européens pour lesquels nous pouvons émettre l'hypothèse que les résultats seront proches, une entité asiatique et une entité américaine dont les données seront sûrement bien différentes.

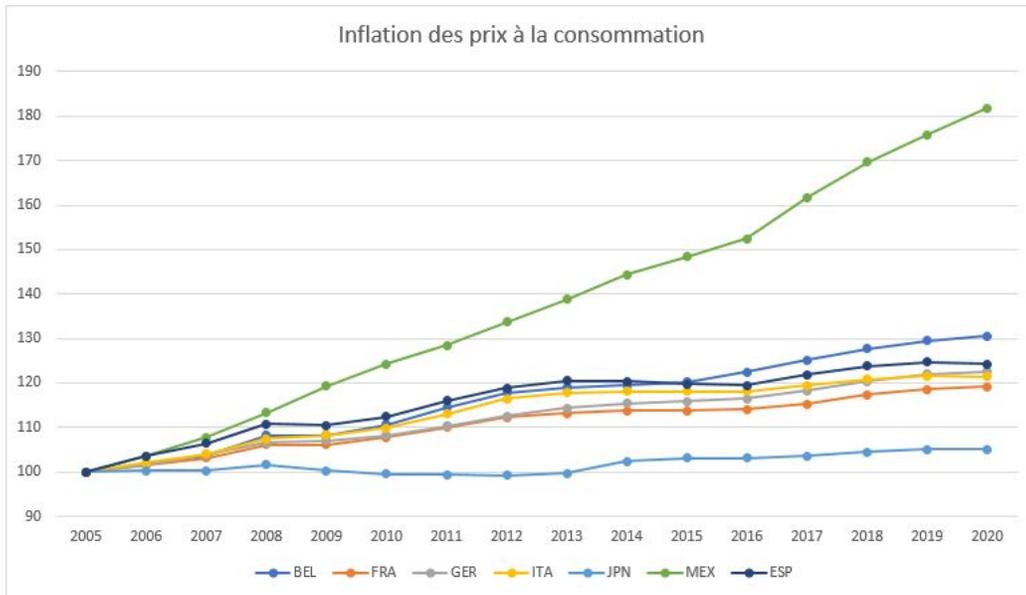


Figure 14: Inflation des prix à la consommation

Pour les pays européens, nous avons bien une tendance assez semblable malgré le fait que l'ampleur puisse varier. Les montants suivent une tendance assez régulière à la hausse tout au long de la période considérée. Le Mexique étant un pays à développement rapide, il est logique de constater une augmentation rapide de cet indicateur. Enfin, le Japon a des résultats qui restent assez stables au fil des années.

Considérons désormais les dépenses de santé dans la figure 15. Celles-ci pourraient constituer un bon indicateur, par exemple dans le cadre de dommages corporels, étant donné qu'elles représentent des frais pouvant être indemnisés.

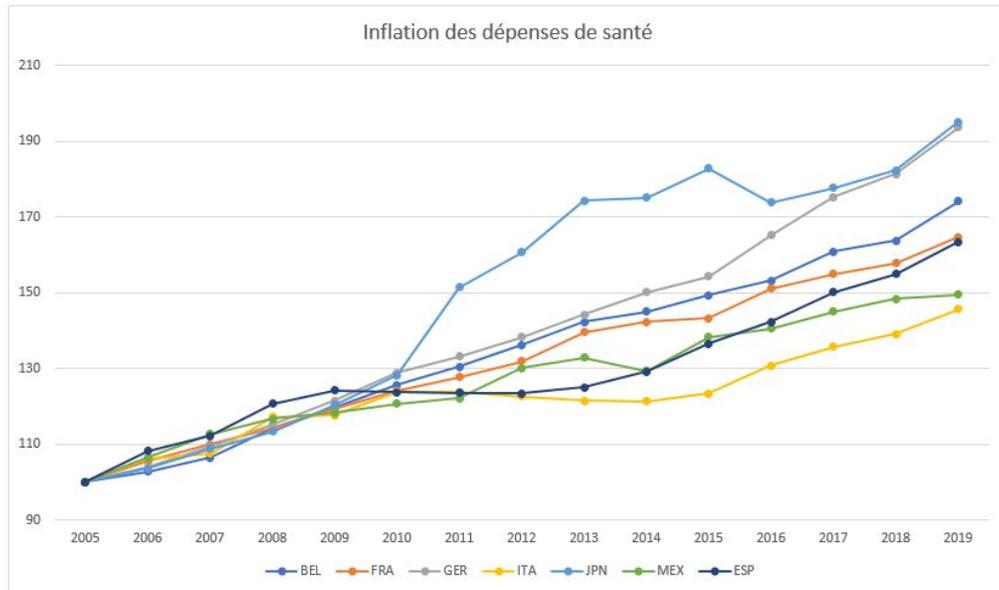


Figure 15: Inflation du coût des dépenses de santé

Pour l'ensemble des pays étudiés ici, nous voyons bien une augmentation régulière du même type. L'Espagne et l'Italie ont tout de même eu des périodes de stabilisation au début des années 2010, tandis que le Japon a connu à ce moment là une hausse plus brutale que les autres.

Cette donnée d'inflation pourrait sembler pertinente, mais il s'agit d'un élément difficilement utilisable dans le cas du Short-Tail. En effet, les dommages corporels vont plutôt être traités en Long-Tail. Cet indice est donc conservé pour voir s'il sera applicable dans le cadre du chapitre 3, mais pas dans la tarification des branches courtes.

L'augmentation, ou la diminution, générale des salaires montre une évolution dans le coût et la valeur de l'activité. Ceci est à mettre en parallèle avec la hausse globale des prix à la consommation remarquée dans le premier graphe de cette partie, mais il s'agit d'un bon paramètre économique pour analyser la santé financière d'un pays. Son évolution est présentée dans la figure 16.

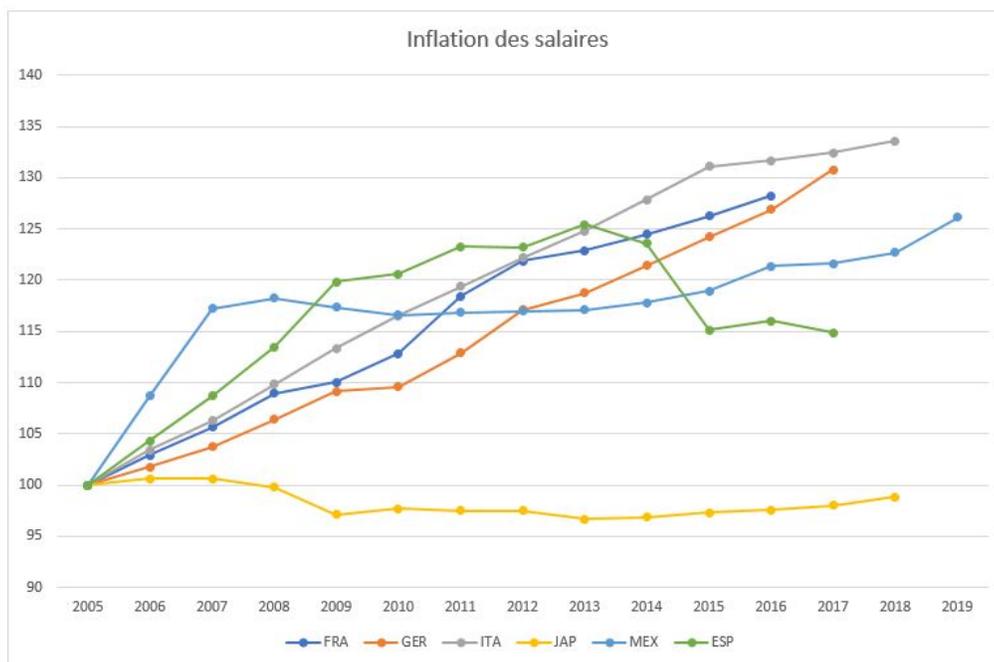


Figure 16: Inflation des salaires

Ici, le comportement varie beaucoup selon le pays considéré. En effet, France, Italie et Allemagne ont une tendance à la hausse assez régulière comme nous avons pu le voir pour les autres paramètres, mais ce n'est pas le cas des autres pays. Japon et Mexique ont des valeurs qui restent beaucoup plus stables, voire quasiment constantes sur plusieurs années. L'Espagne, pour sa part, a des périodes de hausse mais aussi de baisse.

La variation des salaires, tout comme les dépenses de santé, serait plutôt destinée à être utilisée en Long-Tail. En effet, cet indice est beaucoup utilisé dans les traités (wording), notamment dans la clause de stabilisation. Les rentes, par exemple, peuvent être vues dans certaines situations comme une indemnisation pour compenser un salaire ne pouvant plus être perçu. Son utilisation sera surtout détaillée dans le chapitre 3.

Enfin, l'indice du coût de la construction représenté en figure 17 est une donnée fournie trimestriellement en France par la fédération française du bâtiment et reflétant les variations dans le coût des différents éléments intervenant dans la composition d'un ouvrage. Pour les autres pays, l'ABEX en Belgique publie une valeur équivalente, tandis que le site Eurostat tient à jour cette donnée pour les pays européens. Par contre, les valeurs pour les pays non-européens étudiés jusque là n'existent pas.

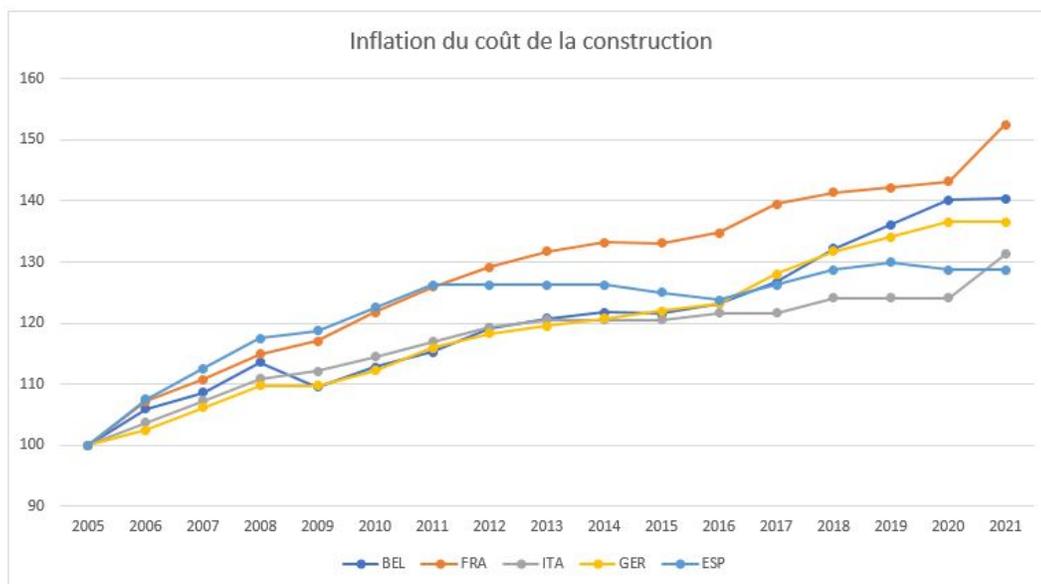


Figure 17: Inflation du coût de la construction

La tendance est presque constamment une hausse régulière. Certaines périodes mettent en jeu des valeurs constantes voir même de légères baisses mais une certaine cohérence entre les pays est conservée.

L'indice du coût de la construction, de par sa définition, semble parfaitement adapté au Short-Tail. Pour la ligne de business Property per risk par exemple, il correspond à l'évolution des coûts engendrés pour des réparations ou reconstructions. Nous avons vu dans cette partie que les évolutions dépendent des pays, mais une certaine homogénéité est tout de même conservée entre les pays d'Europe de l'ouest. Cependant, cet indicateur n'est pas disponible pour l'ensemble des pays. Nous pouvons alors penser que l'indice des prix à la consommation est une bonne alternative. Voyons donc comment se comportent les indices considérés les uns par rapport aux autres.

### 2.1.3.2.2 Comparaison des indices d'inflation économique

Nous allons comparer de la figure 18 à la figure 21 les quatre indicateurs d'inflation pour les quatre entités pour lesquelles toutes les données sont présentes : France, Allemagne, Italie et Espagne. De plus, le montant annuel du PIB est ajouté aux graphes pour rendre compte de l'évolution des indices par rapport à la richesse globale du pays.

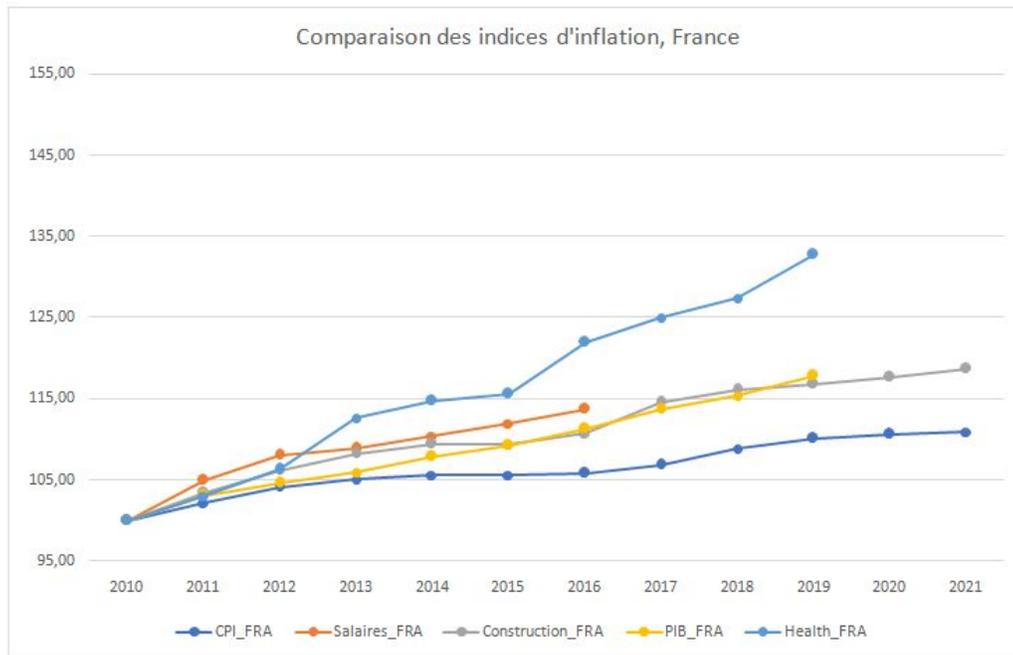


Figure 18: Comparaison des indices d'inflation en France

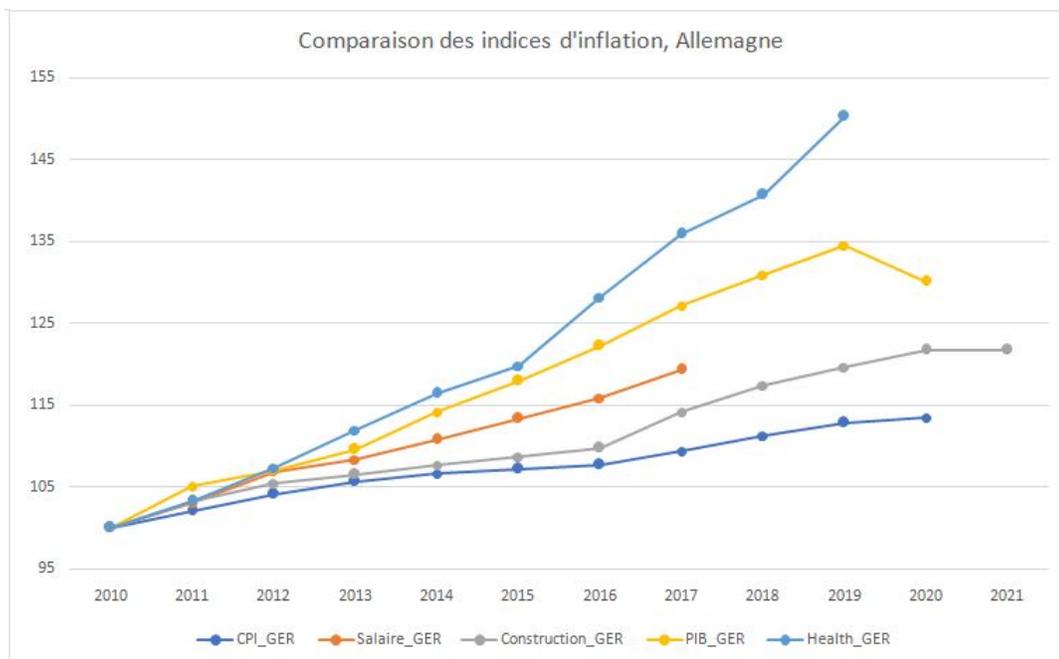


Figure 19: Comparaison des indices d'inflation en Allemagne

L'évolution des salaires et des dépenses de santé sont pour ces deux pays plus importantes que les autres indicateurs. L'indice du coût de la construction et celui des prix à la consommation semblent suivre les mêmes tendances mais avec des amplitudes légèrement différentes. La croissance du coût de la construction est tout de même plus forte.

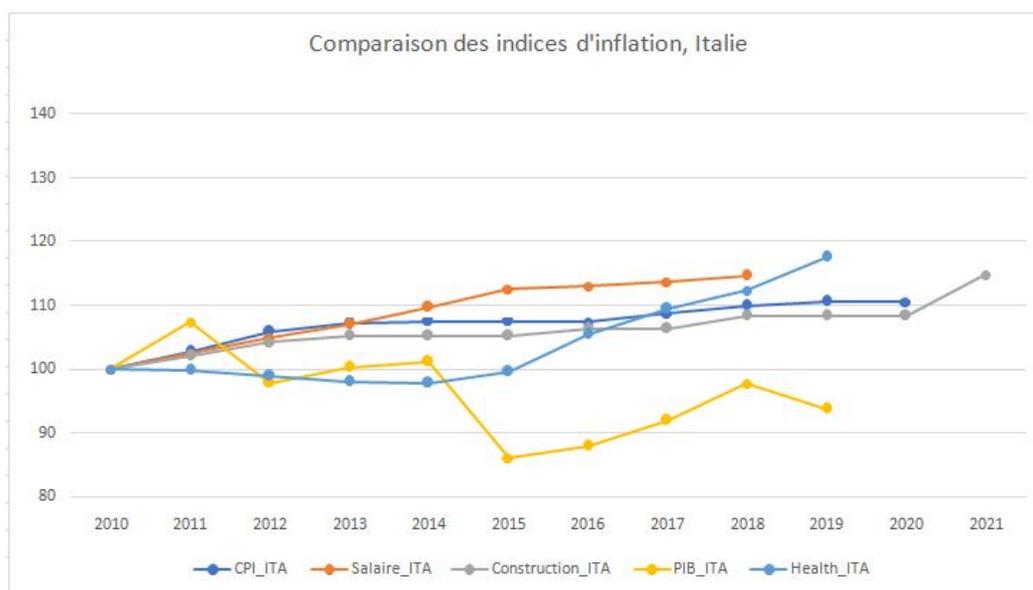


Figure 20: Comparaison des indices d'inflation en Italie

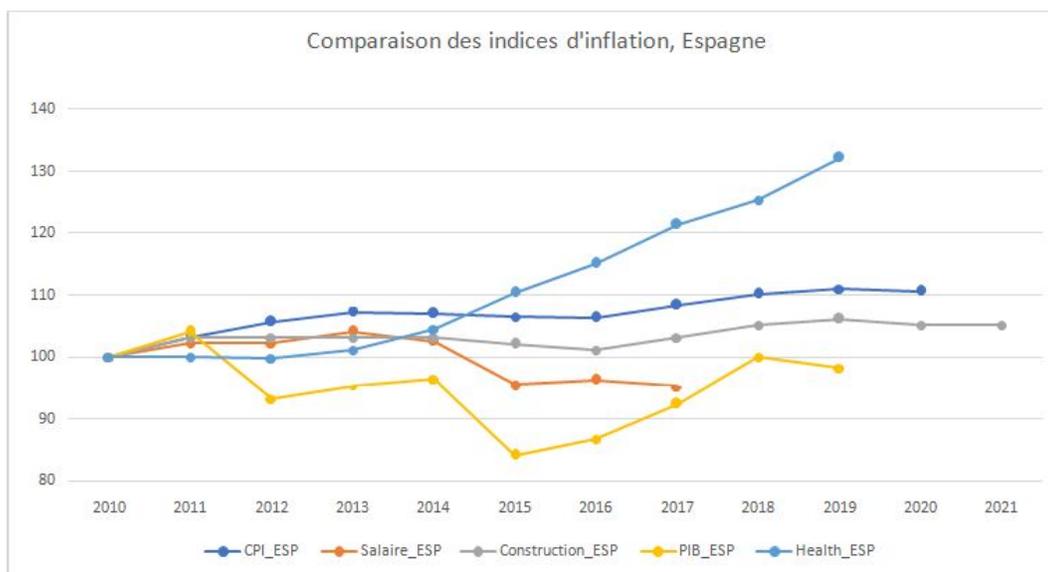


Figure 21: Comparaison des indices d'inflation en Espagne

Pour ces deux pays, la similitude de comportement entre l'indice du coût de la construction et celui des prix à la consommation est très marquée. Ils suivent globalement chaque année les mêmes variations, assez stables, bien que les changements pour l'indice des prix à la consommation restent un peu plus amples. Les deux autres indices ont des valeurs moins stables, notamment le coût des dépenses de santé qui se démarque en ayant stagné puis fortement augmenté sur une période régulière.

Pour la ligne de business Property per risk, le choix le plus pertinent du fait du risque couvert est l'indice du coût de la construction. C'est principalement cette LoB qui est considérée dans l'étude en Short-Tail (avec le CAT). C'est donc cette donnée qui sera conservée dans la tarification Short-Tail, avec l'indice des coûts à la consommation qui sera également pertinent quand nécessaire. Les autres indices observés pourront être utiles notamment par la suite dans l'étude du Long-Tail.

### 2.1.4 Input Réassurance

Cette table est essentielle car c'est ici que sont définies toutes les données de réassurance. Nous avons donc pour un programme de réassurance différents Layer, c'est-à-dire tranches de réassurance, et pour chacun de ceux-ci les entités et risques couverts, ainsi que les données de couverture. Nous entendons par là l'ensemble des paramètres qui caractérisent le traité : priorité, limite, AAD, AAL, nombre et pourcentage de reconstitutions, prix et PoolCession. Cette dernière donnée est directement liée à la structure d'AGRe. En effet, nous avons précisé dans le premier chapitre les différentes façons pour AGRe de gérer les traités, et notamment la possibilité d'en conserver une partie au sein du Pool. PoolCession correspond alors au pourcentage qui est placé au sein du Pool. Le reste étant placé directement sur le marché de la réassurance.

Voyons un exemple en figure 22 pour cet input :

Program	LoB	Layer	SubLayer	Entity	Peril	Priority	Limit	Rel_Num1	Rel_Num2	Rel_Num3	PercentRec1	PercentRec2	PercentRec3	AAD	SubAAD	AAL	SubAAL	Price	PoolCession	Currency
PPR_X	PPR	1	1	X	All	6000000	78500000	2	0	0	1	0	0	0	0	1,00E+15	1,00E+15	5501200	1	EUR
PPR_Y	PPR	1	1	Y	All	4550000	7450000	1	3	0	0	1	0	1650000	1650000	1E+15	1E+15	4495757	0	EUR

Figure 22: Input de réassurance

Ce tableau comporte plusieurs valeurs pour les nombres et pourcentages de reconstitution. Ce choix résulte d'une problématique posée par des pourcentages de reconstitution différents au sein d'une tranche de réassurance, comme nous le détaillerons en partie 2.3.1.

## 2.2 Formulation mathématique

La tarification par détermination du Burning-Cost se base sur l'expérience de sinistralité. Tout d'abord, nous sélectionnons uniquement les sinistres entrant dans le cadre du traité de réassurance. Nous devons donc prendre les événements sur la bonne entité, la bonne ligne de business, mais aussi le bon péril.

Nous notons alors  $X_{i,k}$  le montant du sinistre numéro  $i$  pour l'année  $k$ . Les calculs mis en place ayant pour but de déterminer l'espérance de sinistralité et de coût pour la réassurance en se projetant sur l'année de renouvellement, nous considérons les sinistres mis en "As-If". C'est-à-dire le montant qu'ils auraient s'ils survenaient à l'identique aujourd'hui. Nous supposons pour la suite 2021 comme étant l'année de mise en As-If :

$$Y_{i,k} = X_{i,k} * \frac{I_{2021}}{I_k} \quad (2.1)$$

avec  $I_k$  indice d'inflation de l'année  $k$ .

Nous notons alors  $Z_{i,k}$  la récupération pour la tranche de réassurance.

$$Z_{i,k} = \max(0, \min(Limite, Y_{i,k} - Priorite)) \quad (2.2)$$

Nous définissons  $n_k$  le nombre de sinistres pour l'année  $k$  et les montants obtenus sont agrégés par année pour obtenir les récupérations, tout en respectant les conditions de réassurance.

$$REC_k = \min(\min(\max(\sum_{i=1}^{n_k} Z_{i,k} - AAD, 0), (NbRec + 1) * Limite - AAD), AAL) \quad (2.3)$$

Les caractéristiques du traité permettent également de définir les primes de reconstitution.

$$REI_k = \frac{\min(REC_k, NbRec * Limite) * Price * PRec}{Limite} \quad (2.4)$$

Ces reconstitutions font que le réassureur peut recevoir plusieurs fois la prime une même année.

Nous pouvons ainsi voir l'exemple de plusieurs configurations possibles :

- 2 reconstitutions à 100% entièrement consommées  
→ 3 primes payées
- 1 reconstitution à 100% à moitié consommée  
→ 1,5 prime payée
- 1 reconstitution à 25% entièrement consommée  
→ 1,25 prime payée

L'ensemble de ces éléments permet finalement de définir le Burning Cost. D'après la Society of Actuaries, il s'agit du coût pris en charge par le réassureur selon le montant total des primes encaissées par la cédante sur le portefeuille considéré ("incurred excess losses over the theoretical amount of premium it would take only to cover losses"). Il s'exprime donc comme un taux. Une convention différente sera utilisée dans ce mémoire en appelant Burning Cost le montant de la prime pure : l'espérance de montant pris en charge par le réassureur selon le

nombre de primes reçues. Comme nous l'avons vu, le dénominateur va dépendre des primes de reconstitution.

$$BC = \frac{\sum_{k=1}^{nbYear} REC_k}{nbPrimes} \quad (2.5)$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{nbYear} REC_k}{nbYear + \sum_{k=1}^{nbYear} \frac{\min(REC_k, nbRec * Limite) * PRec}{Limite}} \quad (2.6)$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{nbYear} REC_k * Price}{nbYear * Price + \sum_{k=1}^{nbYear} REI_k} \quad (2.7)$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{nbYear} REC_k}{nbYear} * \frac{1}{1 + \frac{\sum_{k=1}^{nbYear} REI_k}{nbYear * Price}} \quad (2.8)$$

$$= \frac{E[REC]}{1 + \frac{E[REI]}{Price}} \quad (2.9)$$

En observant les éléments entrant en compte dans ce calcul, nous remarquons que le montant des sinistres a un impact fort puisqu'il intervient dans les reconstitutions et récupérations. Une modification de ces montants a donc des répercussions directes. Plusieurs situations peuvent conduire à un tel changement au niveau du coût des sinistres d'une année d'étude à la suivante.

- Effet de l'inflation, au moment de la mise en "As-If" des sinistres;
- La survenance de nouveaux sinistres;
- Une réévaluation du montant des sinistres;
- Effet taux de change : variation de la valeur des monnaies.

Ces variations seront plus particulièrement étudiées dans la partie 2.4.3 de ce chapitre.

### 2.2.1 Automatisation du pricing

Pour automatiser l'ensemble de ces calculs, il a été décidé d'utiliser un code en R. Ce code permet de marquer différentes étapes correspondant aux états successifs du processus : Tout d'abord l'inflation des sinistres, la caractérisation des montants entrant dans le cadre du traité, puis le calcul des récupérations et reconstitutions. Enfin, nous déterminons le Burning Cost et les indicateurs pertinents pour aider à la souscription.

Ce programme nécessite des entrées qui correspondent aux Inputs présentés en partie 2.1. Cette première considération de l'ensemble des variables nécessaires a conditionné la suite du projet en révélant les étapes nécessaires, par exemple en terme de périls couverts, mais aussi les cas particuliers et subtilités précises. Ces dernières impliquent non seulement un code exhaustif, mais aussi des fichiers d'inputs qui soient adaptés à toutes les configurations possibles.

## 2.3 Difficultés et réponses

Etant donné la diversité d'entités couvertes, les traités sont différents et nous pouvons rencontrer des cas à part qui doivent être pris en compte lors de l'automatisation. Chaque exception doit être gérée de façon optimale au moment de son inclusion dans le code.

### 2.3.1 Pourcentages de reconstitution différents

Un premier obstacle rencontré était la prise en charge de pourcentages de reconstitution différents au sein d'une même tranche de réassurance. En effet, bien que la plupart des tranches se présentent avec un nombre de reconstitutions et un pourcentage associé unique, certaines peuvent avoir une structure un peu plus complexe.

Prenons les exemples des programmes de réassurance fictifs X et Y :

Entity	Layer	Reconstitutions
X	1	2 à 100%
Y	1	2 gratuites, puis 1 à 100%, puis 1 à 50%

Le cas de l'entité X est classique avec un nombre de reconstitutions associé à un pourcentage. C'est pour le traité Y que l'automatisation nécessite de s'adapter. En effet, cette variation dans les pourcentages selon la reconstitution impose de bien les prendre en compte successivement selon l'épuisement de la tranche.

Reprenons le cas du layer 1 du traité de l'entité Y dans le tableau ci-dessus. Nous supposons qu'il s'agit d'un traité 2M XS 3M, dont le prix est 1M, avec un montant total de recoveries de 10M pour l'année étudiée. Nous avons alors les étapes suivantes pour les reconstitutions :

Etape	Reconstitutions	PrimeRec	Recoveries couvertes	Recoveries restantes
1	2rec gratuites	0M	6M de recoveries	4M
2	1rec à 100%	1M	3M, et 9M en cumulé	1M
3	1rec à 50%	0.166M	Couvre le 1M restant	0M

Les calculs de chaque ligne pour trouver les primes de reconstitution sont :

$$\frac{\min(10M, 2*3M)*1M*0\%}{3M} = 0M$$

$$\frac{\min(10M - 6M, 1*3M)*1M*100\%}{3M} = 1M$$

$$\frac{\min(10M - 9M, 1*3M)*1M*50\%}{3M} = 0.166M$$

De façon plus automatisée, la formulation est la suivante si nous distinguons les reconstitutions en nbRec1, nbRec2, nbRec3 avec les pourcentages associés P1, P2, P3 :

Etape	Reconstitutions	Formule
1	2rec gratuites	$\frac{\min(recoveries, nbRec1*Limit)*Prix*P1}{Limit}$
2	1rec à 100%	$\frac{\min(\max(0, recoveries - nbRec1*Limit), nbRec2*Limit)*Prix*P2}{Limit}$
3	1rec à 50%	$\frac{\min(\max(0, recoveries - (nbRec1 + nbRec2)*Limit), nbRec3*Limit)*Prix*P3}{Limit}$

L'intérêt de cette manipulation est de bien prendre en compte chaque reconstitution dans le bon ordre, en ayant donc les pourcentages de reconstitution utilisés sur le bon montant.

Après analyse de l'ensemble des traités XS considérés, nous remarquons que pour un layer donné, le nombre de pourcentages différents n'excède pas trois. Ainsi, il faut adapter le fichier d'input de réassurance tout comme le code pour ne pas prendre seulement un nombre de reconstitutions mais plutôt trois nombres, dont les deux derniers seront le plus souvent nuls. De même, nous avons trois pourcentages associés, dont les deux derniers seront rarement utilisés.

## 2.3.2 Subtilité des traités régionaux

Bien que la plupart des traités soient souscrits dans le but de couvrir une entité unique, des regroupements d'entités peuvent également être mis en place pour les couvrir ensemble. Elles partagent donc une ou plusieurs tranches mais pas forcément avec les mêmes conditions de réassurance.

### 2.3.2.1 Présentation et but de ces traités

Inclure plusieurs entités au sein d'un même traité permet de partager le coût et le risque. Chaque layer peut alors être divisé en différents sublayers couvrant chacun une ou plusieurs entités. Nous avons un partage des tranches de réassurance et donc du coût. Regardons un exemple fictif.

Layer	Sublayer	Entity	Risque	Priorite	Limite	AAD
1	1	X	Tous	5M	5M	1M
1	2	Y	Tous	3M	7M	0M
1	3	Z	Tous	5M	5M	0M
2	1	X,Y,Z	Tous sauf les earthquake de Z	10M	10M	0M
2	2	Z	Earthquake uniquement	10M	10M	0M
3	1	X,Y,Z	Tous	20M	30M	0M

Cette structure permet de s'adapter à plusieurs configurations dont notamment :

- Des conditions de réassurance différentes selon les entités au sein d'un layer, que ce soit en terme d'AAL (layer 1.1) ou même des montants de priorité et limite inégaux (layer 1.2 par rapport au layer 1.3)
- L'exclusion de certains types de sinistres seulement pour une entité

Les entités partageant un contrat de ce type peuvent être proches géographiquement et donc avoir une exposition similaire à certains risques, par exemple en pensant aux catastrophes naturelles. Il peut aussi bien s'agir d'entités très éloignées mais au développement similaire : le partage entre elles leur donne une sécurité financière. Cette problématique de regroupement est un véritable enjeu depuis de nombreuses années puisqu'elle ne se retrouve pas seulement à l'échelle d'AGRe, mais aussi à celle des pays concernés. La conférence des

Nations Unies sur le commerce et le développement constate en effet qu'une telle coopération "peut devenir un moyen très efficace de réduire les dépenses en devises de l'ensemble de la région ou sous-région", et ce notamment "par une mise en commun des risques" pour renforcer ces pays. [9]

### **2.3.2.2 Problème d'avoir des entités différentes**

Les données de réassurance sont définies par layer. Bien que celui-ci puisse être décomposé selon les entités, nous exprimons tout de même les notions comme l'AAL, le prix de la tranche ou le nombre de reconstitutions pour le layer global.

Une difficulté apparaît car nous ne pouvons pas seulement sommer les récupérations et primes de reconstitutions des sous-tranches formant un layer. Il faut prendre en compte les limites et données de la tranche totale. Cette nuance est importante car ne pas la prendre en compte fausserait les résultats tels que le Burning Cost.

De plus, une problématique se pose dans le cas où un même événement touche plusieurs entités du traité. Nous pouvons ainsi penser à un événement climatique touchant les entités X,Y et Z. La mise en As-If nécessite alors une manipulation car chacun des trois pays a son inflation propre.

Ces difficultés identifiées, les fichiers d'input ont pu être ajustés pour que le code soit suffisamment exhaustif et puisse prendre en compte toutes les configurations. Les réponses aux difficultés sont expliquées dans la partie suivante.

### **2.3.2.3 Solution pour inclure les traités régionaux**

L'input de réassurance a été construit de façon à répondre à toutes les situations. Nous nous inspirons de la table de réassurance de la partie 2.1.4, avec bien sûr plus de variables (prix, AAL, reconstitutions, ..), pour avoir une structure qui s'adapte aussi bien aux traités régionaux et non-régionaux. Pour obtenir cette exhaustivité, il a fallu inclure pour chaque ligne de la table une valeur SubAAD et une valeur SubAAL correspondant respectivement à l'AAD et l'AAL d'une sous-tranche au sein d'un layer. Nous conservons bien entendu les valeurs AAD et AAL, qui elles correspondent au layer global.

En adoptant ce concept et en l'appliquant à l'exemple de la partie 2.4.2.1, la forme suivante est obtenue en s'intéressant particulièrement à l'AAD :

Layer	Sublayer	Entity	Risque	Priorite	Limite	AAD	SubAAD
1	1	X	Tous	5M	5M	0M	1M
1	2	Y	Tous	3M	7M	0M	0M
1	3	Z	Tous	5M	5M	0M	0M
2	1	X,Y,Z	Tous sauf earthquake de Z	10M	10M	0M	0M
2	2	Z	Earthquake uniquement	10M	10M	0M	0M
3	1	X,Y,Z	Tous	20M	30M	0M	0M

Pour le premier layer associé à ce traité, il n'y a pas d'AAD global s'appliquant à l'ensemble des tranches, mais nous avons bien la sous-tranche numéro 1 concernant l'entité X qui possède un AAD s'élevant à 1M. Le même fonctionnement est appliqué en ce qui concerne l'AAL.

Pour la prise en considération des événements affectant plusieurs entités couvertes par le traité régional, trois changements sont effectués : sur la table de réassurance, celle des sinistres et celle d'inflation. Nous allons présenter ces modifications et les illustrer en pratique ensuite :

Dans la table de sinistres, un tel événement doit occuper une seule ligne malgré le fait que le coût soit partagé par plusieurs entités. Chaque partie est donc inflatée manuellement et individuellement grâce à l'inflation associée au pays de survenance pour obtenir une valeur du montant de sinistre en As-If. Ce nouveau sinistre affecte alors l'entité  $X\_Y\_Z$  mais ne doit plus être inflaté étant donné que cela a déjà été fait. Une colonne est donc ajoutée dans la table d'inflation pour cette nouvelle entité  $X\_Y\_Z$  mais avec une inflation inexistante. Enfin, cette nouvelle combinaison d'entité doit être ajoutée à la table de réassurance puisque c'est à cet endroit que sont spécifiées les entités pouvant être touchées par des sinistres dans le cadre de ce traité.

Voyons un exemple d'application en figure 23 avec le layer 3 de la table vue précédemment et en considérant un événement touchant les entités X,Y et Z.

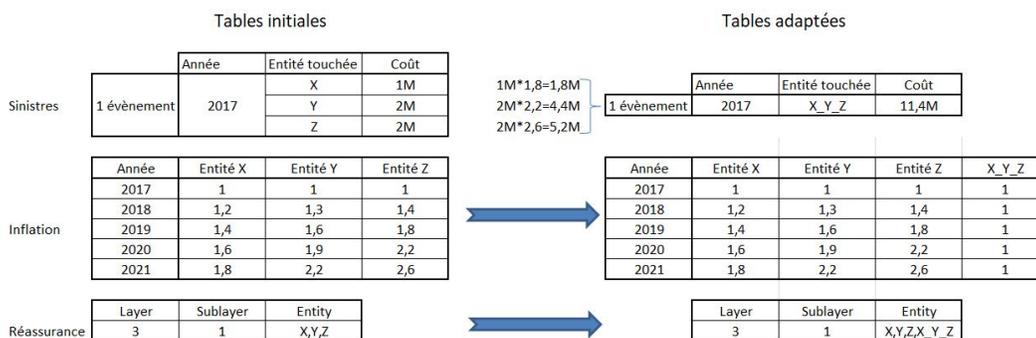


Figure 23: Manipulations pour les événements touchant plusieurs entités

Nous avons donc bien un seul sinistre qui s'applique aux trois entités, la table d'inflation impactée ainsi que la table de réassurance ajustée. Ces changements sont nécessaires pour

prendre en compte ces sinistres particuliers de façon optimale.

Les subtilités des traités régionaux se retrouvent à la fois dans les tables d'input et dans le code pour gérer tous les types d'évènements et les considérations à avoir entre layer et sublayer. Ainsi, nous pouvons avoir les résultats pour tout type de traités XS en Short-Tail.

### **2.3.3 Comparaison historique**

Nous avons vu au moment de décrire le fonctionnement d'AGRe que de nombreuses discussions ont lieu pour déterminer la couverture des entités, notamment au cours des comités de souscription. A cette occasion, les résultats historiques et leur évolution par rapport à l'année précédente représentent un indicateur clé dans la lecture des études menées. Ces éventuelles variations en comparant à l'année n-1 doivent être rapidement compréhensibles. Nous nous intéressons donc aux réponses qui ont pu être apportées pour améliorer la vision d'évolution des paramètres et des montants de sinistres.

#### **2.3.3.1 Comparaison des sinistres par rapport à l'année précédente**

En sortie de cette analyse, nous aimerions savoir s'il y a bien une cohérence par rapport à cette même étude réalisée l'année précédente. Pour cela, il faut s'appuyer sur le numéro d'identification de sinistres ainsi que sur la base de sinistres avec la vue de l'année précédente. Il a donc fallu mettre en place ces deux nouvelles notions pour pouvoir les utiliser.

Nous pouvons ainsi tout d'abord exprimer en sortie avec la figure 24 l'évolution des sinistres sans influence de l'inflation, c'est-à-dire une réévaluation du montant du sinistre :

Year	Program	Entity	LoB	Peril	Currency	IDClaim	Amount_Claims_MO_YearN1	Amount_Claims_MO_YearN	DiffEvaluationClaim
2010	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X1	5 782 645,00	5 782 645,00	0,00%
2011	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X2	6 605 241,60	6 605 241,60	0,00%
2011	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X3	8 501 265,95	8 501 265,95	0,00%
2011	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X4	8 197 575,05	8 197 575,05	0,00%
2012	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X5	5 879 217,90	5 879 217,90	0,00%
2012	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X6	13 762 415,50	13 762 415,50	0,00%
2013	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X7	5 461 648,35	5 461 648,35	0,00%
2013	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X8	4 542 992,15	4 542 992,15	0,00%
2013	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X9	7 250 451,00	7 250 451,00	0,00%
2014	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X10	2 281 437,30	2 281 437,30	0,00%
2014	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X11	1 977 128,70	1 977 128,70	0,00%
2015	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X12	5 132 575,20	5 132 575,20	0,00%
2015	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X13	10 885 395,10	10 885 395,10	0,00%
2015	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X14	12 878 730,40	12 181 065,80	-5,42%
2016	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X16	4 661 634,05	4 661 634,05	0,00%
2017	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X17	2 550 293,40	2 738 032,15	7,36%
2017	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X18	1 245 615,30	1 263 150,15	1,41%
2017	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X19	5 362 000,00	5 386 983,50	0,47%
2017	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X20	4 343 386,60	2 958 974,45	-31,87%
2017	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X21	2 348 900,00	2 955 340,75	25,82%
2018	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X22	2 810 000,00	2 810 000,00	0,00%
2018	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X23	3 825 050,75	4 908 187,70	28,32%
2018	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X24	14 990 000,00	15 402 957,10	2,75%
2019	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X25	4 550 000,00	4 550 000,00	0,00%
2019	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X26	-	3 203 482,15	NouveauSinistre
2019	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X27	5 347 500,00	5 347 500,00	0,00%
2019	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X28	15 171 250,00	15 170 720,75	0,00%
2020	PPR_X	X	PPR	All	EUR	X29	-	2 556 250,00	NouveauSinistre

Figure 24: Différence d'évaluation des montants entre deux années consécutives

Nous déterminons donc simplement l'évolution d'un sinistre d'une année sur l'autre, ce qui pourrait avoir notamment un intérêt explicatif dans le cas d'une tendance inattendue. Nous voyons clairement que ce sont les années les plus récentes qui sont les plus exposées à cette situation. Il peut s'agir d'un sinistre non déclaré auparavant qui est donc un nouveau dans la base, ce qui est le cas pour un sinistre en 2019 et un en 2020 dans le tableau ci-dessus. De plus, des sinistres récents peuvent être réévalués, que ce soit à la hausse ou à la baisse : nous avons comme exemple dans le tableau de fortes hausses, 26% et 28%, mais aussi une baisse importante : -31%. Ces changements peuvent affecter la réassurance s'il s'agit de montants élevés, il faut donc surveiller ce reporting.

Nous pouvons ajouter à ce paramètre l'effet de l'inflation, c'est-à-dire la différence d'inflation depuis l'année passée, qui peut avoir un impact fort au moment de la mise à jour des sinistres en « As-If ». Dans la situation présente, en ce qui concerne l'entité X, nous prenons le rapport entre l'indice du coût de la construction en 2021 et en 2020. Nous avons une évolution de +0,12%. Cette faible variation peut surprendre : les valeurs d'inflation pour l'année 2021 n'existent pas encore et ce résultat provient d'une projection par régression linéaire. Dans l'exemple, la valeur calculée pour 2021 est proche de celle de 2020. Cette idée de projection des indices aura d'ailleurs une place importante dans le chapitre 3 sur le Long-Tail, ce qui sera l'occasion de revenir plus en détail sur cet aspect.

Enfin, l'effet taux de change est un élément de comparaison entre deux années consécutives. Déterminé à partir des données ayant trait au taux de change, celui-ci isole l'importance de l'évolution de la valeur des monnaies. Si nous nous intéressons plus partic-

ulièrement à une entité non-européenne, un résultat de ce type est obtenu en figure 25 :

AmountAsif_MO	FX_Rate_Year_N_Minus1	FX_Rate_Year_N	AmountAsif_EUR_N1	AmountAsif_EUR_N	DiffRateChange
1 812 771,64	1,12	1,08	1 618 546,10	1 678 492,26	3,70%
1 319 073,96	1,12	1,08	1 177 744,61	1 221 364,78	3,70%
1 872 448,37	1,12	1,08	1 671 828,91	1 733 748,49	3,70%
2 071 000,85	1,12	1,08	1 849 107,90	1 917 593,38	3,70%
636 281,86	1,12	1,08	568 108,81	589 149,87	3,70%
3 274 947,15	1,12	1,08	2 924 059,96	3 032 358,47	3,70%
868 595,09	1,12	1,08	775 531,33	804 254,72	3,70%
2 089 321,86	1,12	1,08	1 865 465,95	1 934 557,28	3,70%
3 113 046,32	1,12	1,08	2 779 505,64	2 882 450,29	3,70%
1 544 938,04	1,12	1,08	1 379 408,96	1 430 498,18	3,70%
3 029 985,40	1,12	1,08	2 705 344,11	2 805 542,04	3,70%
1 279 667,29	1,12	1,08	1 142 560,08	1 184 877,12	3,70%
1 676 501,88	1,12	1,08	1 496 876,68	1 552 316,56	3,70%
387 565,41	1,12	1,08	346 040,55	358 856,87	3,70%
1 391 137,06	1,12	1,08	1 242 086,66	1 288 089,87	3,70%
93 216,96	1,12	1,08	83 229,43	86 312,00	3,70%

Figure 25: Différence des montants en euros du fait de l'effet taux de change

Nous voyons directement que considérer le taux de change de 2020 ou de 2021 pour convertir les sinistres en euro ne donne pas le même résultat. Cette considération montre l'impact de la valeur des monnaies dans le temps. Etant donné que l'entité qui sera étudiée par la suite utilise l'euro comme monnaie, l'effet sera logiquement nul.

### 2.3.3.2 Burning Cost selon la profondeur d'historique

Le calcul du Burning Cost s'inscrit dans une estimation de la sinistralité et des coûts d'après l'expérience passée. Le résultat dépend donc forcément des années observées. C'est pourquoi le code créé permet de faire varier la taille de l'historique et donc de suivre l'évolution de l'indicateur selon l'ampleur de l'historique considéré. Au sein d'AGRe, le Burning Cost associé au Property Cat est calculé sur tout l'historique disponible tandis que sur la ligne de business Property per risk nous nous intéressons uniquement aux cinq dernières années. Ce choix de cinq années est dû au fait qu'il y a beaucoup de sinistres et un portefeuille pouvant évoluer fortement. Considérer un temps assez court donne une meilleure représentativité du portefeuille. En Property Cat, il y a moins de sinistres, les données impactantes proviennent d'événements climatiques souvent rares, d'où la nécessité de prendre un recul important. Dans la plupart des cas, il faudra remonter aux années 1990 pour retrouver les premiers événements CAT déclarés comme tel.

Cependant, la vision donnée dans la figure 26 en faisant varier la période considérée montre les biais possibles dus à des années particulières et peut donc faciliter ou impacter les décisions de souscription.

Program	YearVision	BurningCost_ConstructionIndex
PPR_X	2	4 543 215,67
PPR_X	5	3 806 004,65
PPR_X	7	4 654 025,43
PPR_X	10	5 483 031,93

Program	YearVision	BurningCostconstru
PPR_Y	2	5 371 045,15
PPR_Y	5	4 459 694,03
PPR_Y	7	4 316 769,98

Figure 26: Niveau du Burning Cost selon le nombre d'années considérées

Pour l'entité X, le Burning Cost est assez instable selon la profondeur d'historique considérée, avec notamment une très grosse différence entre 5 et 10 ans. Le choix pour fixer le nombre d'années change donc complètement les résultats historiques. Pour l'entité Y, à la lecture des résultats, il semblerait que la sinistralité impactante soit récente et donc que prendre en compte plus d'années "améliore" le Burning Cost. Cette tendance à la hausse récente peut ainsi inciter à la prudence au moment de la souscription : il faut comprendre pourquoi cette tranche est de plus en plus touchée et agir en conséquence.

Il était important de se rendre compte de ces répercussions à ce niveau. En effet, conduire cette même analyse directement en Long-Tail est compliqué car d'autres paramètres ont leur influence, entre autre le choix de la méthode de développement des sinistres et la projection des indices économiques. Cette vue en Short-Tail permet donc bien de se rendre compte de l'importance de la longueur d'historique exploité.

### 2.3.4 Autres indicateurs

En Short-Tail, et du fait de la structure d'AGRe, le Burning Cost n'est pas le seul élément qui sera pris en considération. Nous déterminerons donc pour chaque traité le résultat historique et la vision pool associée au programme de réassurance.

#### 2.3.4.1 Résultat historique

Le résultat historique est le bilan annuel moyen d'AGRe sur ce traité avec les conditions de réassurance données. Pour les traités déjà existants, ces conditions correspondent à la structure actuelle. Ce calcul met donc en jeu l'ensemble des flux entrants, prime et primes de reconstitutions, ainsi que les flux sortants : les récupérations.

La formule mathématique en reprenant les notations utilisées précédemment est alors :

$$HR = Price - \frac{(\sum_{k=1}^{nbYear} (REC_k - REI_k))}{nbYear} \quad (2.10)$$

Comme pour le Burning Cost, le résultat historique est donné selon la longueur de la période observée : ces deux évolutions peuvent donc être visualisées dans la figure 27 en parallèle.

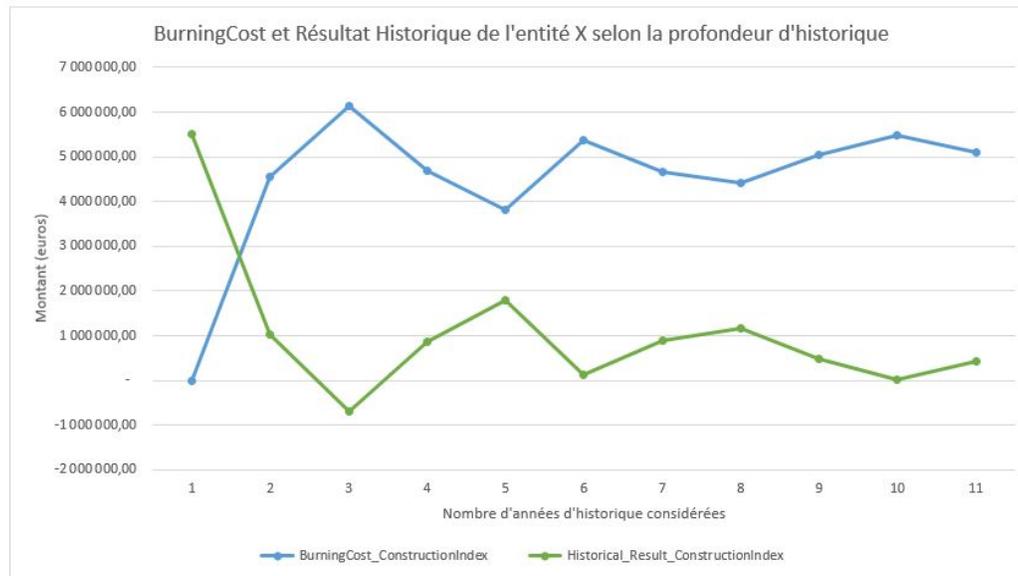


Figure 27: Niveau du Burning Cost et Résultat historique selon le nombre d'années considérées

Nous observons sur le graphique que le Burning Cost et le résultat historique ont des évolutions symétriques en regardant l'évolution selon la profondeur d'historique. En effet, le Burning Cost est représentatif de la sinistralité en terme d'impact financier, tandis que le résultat historique donne le bilan des flux financiers entrants et sortants. Pour l'entité X, observer les résultats sur une durée très courte, trois ans par exemple, peut induire un biais puisque les variations sont assez fortes. Les résultats semblent se stabiliser par la suite mais nous pouvons bien sûr toujours imaginer avoir une année dont la sinistralité serait significativement différente.

### 2.3.4.2 Vision Pool

Nous avons vu au moment de détailler le rôle et l'organisation d'AGRe que l'ensemble ou une partie d'un traité peut être intégré à un pool de réassurance. Les calculs mis en place de même que les données choisies permettent ainsi de mieux comprendre le point de vue du pool.

La vision du Pool se définit comme étant le bilan pour une tranche de réassurance associée à un traité des flux entrants et sortants pour le Pool. Cette vision se décompose en quatre sous-parties :

- $PoolRecoveries = (\sum_{k=1}^{nbYear} REC_k) * PoolCession$
- $PoolReiPremium = (\sum_{k=1}^{nbYear} REI_k) * PoolCession$
- $PoolPremium = Price * PoolCession$

- $PoolVisionResult = PoolPremium + PoolReiPremium - PoolRecoveries$

Avec PoolCession le pourcentage affecté au pool. Cette valeur est donnée en input au sein des traités pour chaque tranche.

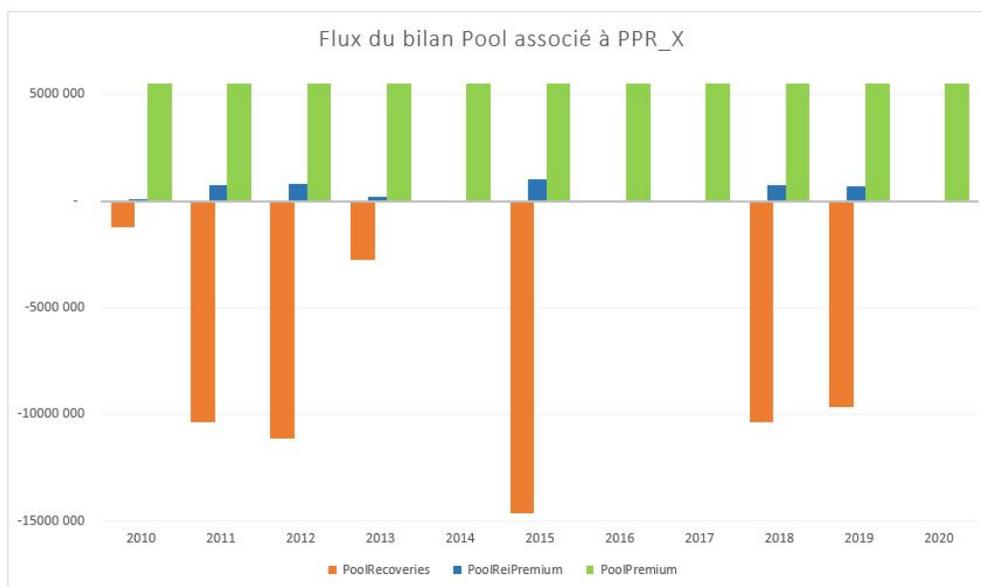


Figure 28: Flux au niveau du bilan Pool considérant le programme  $PPR\_X$

La figure 28 ci-dessus montre les flux entrants et sortants associés à ce traité du point de vue du Pool. Dans cette approche historique, la prime est constante, et les deux autres éléments varient chaque année puisqu'ils dépendent directement de la sinistralité. L'année 2015 est particulièrement impactante ici. Les primes de reconstitutions restent assez basses en montants car la limite du traité n'est pas épuisée : celui-ci est assez peu touché.

La PoolCession est déterminée au cours des comités de souscription, puisqu'elle impacte directement le placement et les négociations avec les réassureurs.

### 2.3.5 Sensibilité de la tarification à l'inflation

Nous avons vu au début de ce chapitre que le choix de l'inflation représentait un réel travail de compréhension des enjeux économiques. Ces questionnements seront également marqués dans le prochain chapitre sur la tarification en Long-Tail. Nous pouvons déjà estimer ici avec le Short-Tail les conséquences de la décision adoptée au niveau de l'inflation économique. En effet, nous pouvons comparer les processus de tarification par expérience d'une entité selon l'inflation retenue. Pour cela, nous considérons la ligne de business Property per risk. Les résultats comparés en figure 29 sont pour trois choix différents : sans mise en As-If, avec l'inflation du coût de la construction, puis avec l'indice des prix à la consommation.

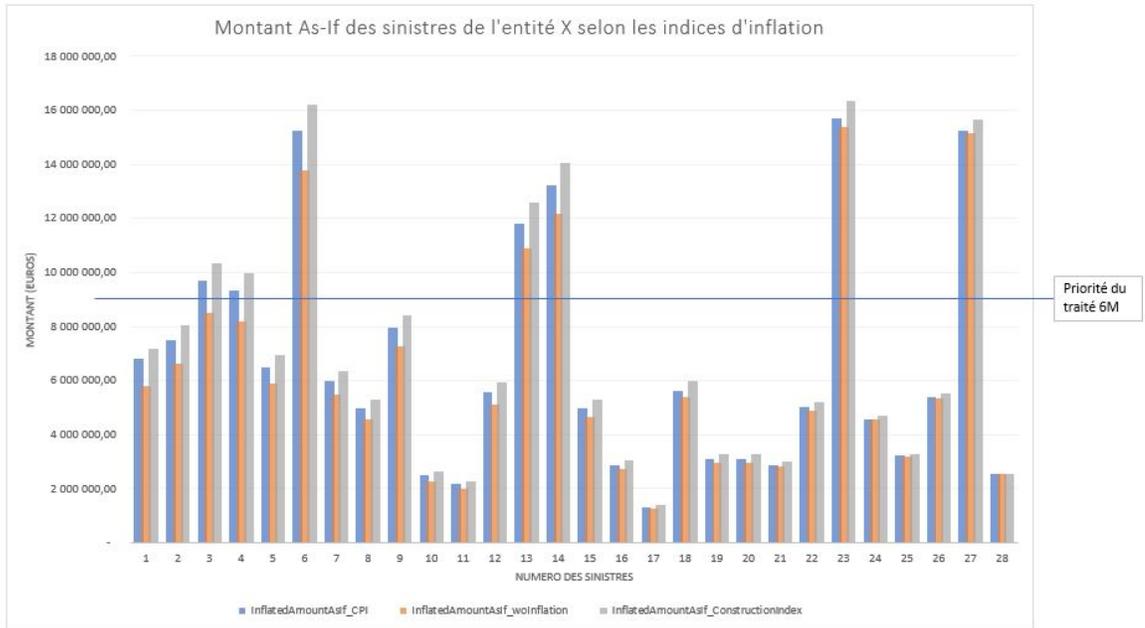


Figure 29: Influence du choix de l'inflation sur le montant des sinistres

L'impact est assez fort sur les années anciennes, et se réduit quand nous arrivons sur des sinistres récents. Les conséquences se retrouvent ensuite au niveau des récupérations comme présenté en figure 30.

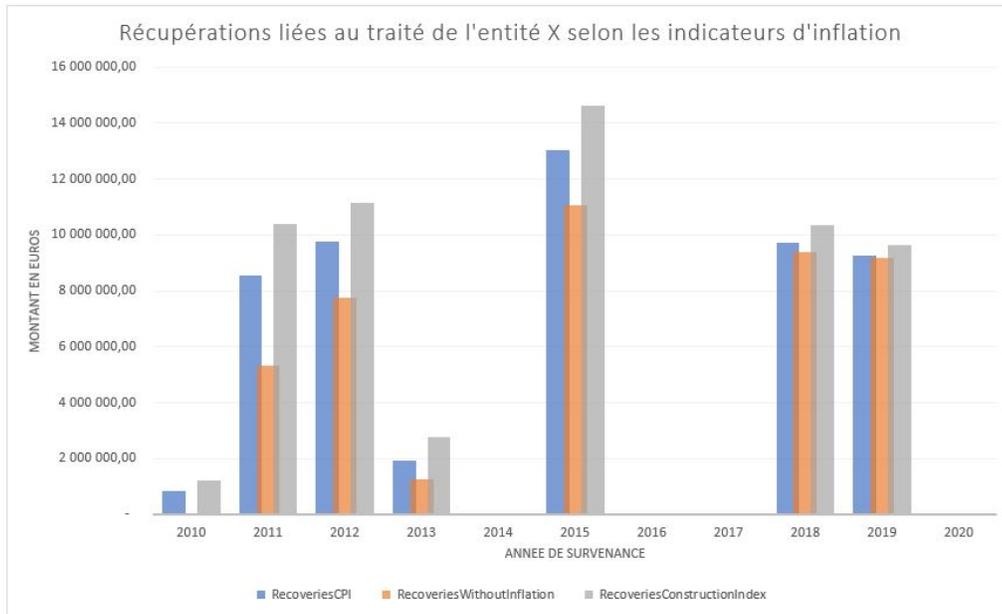


Figure 30: Influence du choix de l'inflation sur le montant des récupérations

La logique reste la même puisque les années récentes sont moins impactées par le choix de l'inflation en terme de récupérations. Enfin, nous pouvons observer avec la figure 31 les conséquences sur les indicateurs de tarification, en considérant l'évolution selon la profondeur d'historique comme vu précédemment.

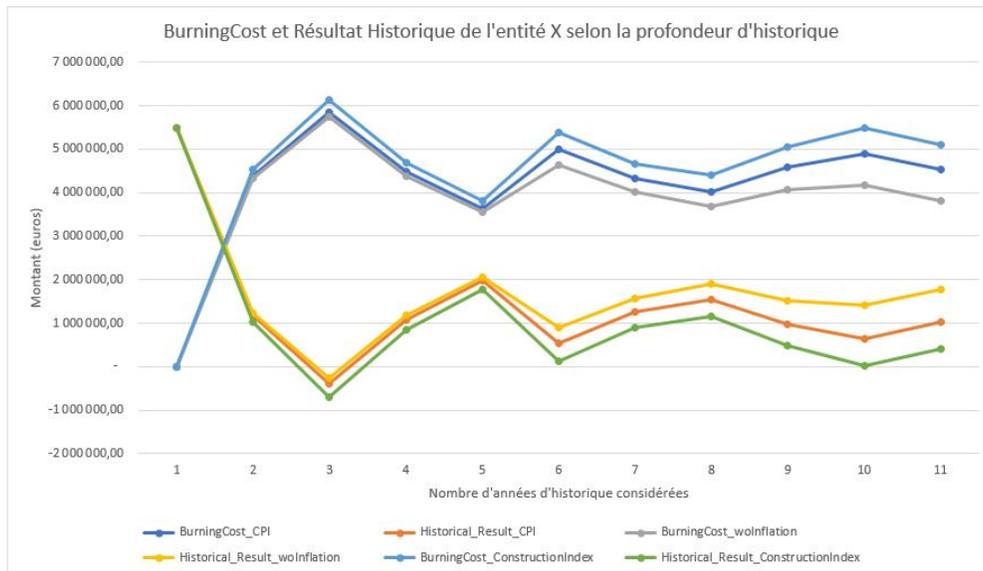


Figure 31: Influence du choix de l'inflation sur Burning Cost et Résultat Historique

En considérant une profondeur d'historique assez importante, plus de six ans par exemple, l'impact du choix de l'inflation devient assez important. Ne pas appliquer d'inflation diminue le niveau du Burning Cost car nous sommes dans une situation où l'indice d'inflation augmente dans le temps. La mise en As-If via l'indice du coût de la construction induit des montants plus élevés qu'avec l'indice des prix à la consommation, ce qui est en cohérence avec l'étude des indices d'inflation menée au début de ce chapitre.

Ce choix d'inflation doit donc bien être défini avec précaution puisque les conséquences en terme de tarification peuvent être importantes. Nous avons isolé ici les effets de la sélection de l'indice économique à conserver pour la mise en As-If des sinistres. Ceci justifie ainsi l'importance de bien étudier ce sujet dans le chapitre suivant sur le Long-Tail, les impacts sur la réassurance pouvant être réels, d'autant plus en ajoutant à ceci les caractéristiques propres aux branches longues.

## 2.4 Conclusion du chapitre

La tarification par expérience et notamment via le Burning Cost est efficace mais seulement pour les tranches travaillantes, c'est-à-dire qui ont une sinistralité régulière (non nulle). Pour les tranches non-travaillantes, de nombreuses méthodes sont possibles pour la tarification, et notamment l'utilisation d'une vision modélisée. L'analyse de ces méthodes spécifiques constituerait un mémoire à part entière et n'est pas l'objet de l'étude ici. Nous nous restreignons donc dans le cadre de ce mémoire aux tranches travaillantes.

Cette première approche sur le Short-Tail a permis de mettre en valeur les difficultés pouvant être rencontrées mais également de bien structurer les indicateurs et méthodes de tarification en comprenant leurs effets et les conséquences économiques induites par les choix effectués. De fait, nous avons pu vérifier la pertinence des moyens utilisés ainsi que les questionnements nécessitant un approfondissement. La question est à présent de savoir comment emprunter cette démarche dans le cas du Long-Tail.

Il faudra surveiller que nous sommes bien dans le cas de tranches travaillantes, mais aussi prendre en compte les éléments propres au Long-Tail, notamment le développement des sinistres. L'enjeu sera de trouver une méthode précise pour la détermination des charges ultimes, puis intégrer celles-ci au processus de tarification par Burning Cost tout en considérant les effets spécifiques au Long-Tail comme la clause de stabilisation par exemple. Les éléments présentés dans le chapitre 2 serviront alors du fait des caractéristiques qu'ils mettent en valeur, mais il faudra tout de même les adapter.

## Chapitre 3

# Long-Tail

La première vision de la tarification des traités XS que nous venons de voir a souligné un certain nombre de points d'attention dont il faudra se méfier à présent. A cela vont s'ajouter des aspects particuliers du Long-Tail qu'il faudra structurer : projection des indices, mise en As-If et développement des sinistres, traitement des sinistres non-déclarés, ..etc. Enfin, la mise en place de ce cadre permettra de se concentrer sur l'intégration de la clause de stabilisation dans la tarification afin de répondre à la problématique de ce mémoire.

### 3.1 IBNR

Nous utilisons l'abréviation IBNR (Incurred but not reported) pour définir les sinistres qui sont déjà survenus mais pour lesquels de l'information est encore manquante. Il peut s'agir de sinistres qui n'ont pas encore été déclarés (IBNyR : Incurred but not yet reported) ou d'évènements dont l'information est incomplète (IBNeR : Incurred but not enough reported). Leur montant est donc voué à évoluer à l'avenir.

L'étude menée mettant en jeu des sinistres à développement long, sur plusieurs années, les IBNeR représentent un enjeu important. En effet, nous avons déjà vu dans le cas de la responsabilité civile que la charge des sinistres peut changer plus de quinze ans après la survenance. C'est pourquoi nous verrons en détail comment estimer le développement futur des sinistres pour tarifier ensuite sur une charge ultime correspondant à une valeur stabilisée.

Du fait du rôle d'AGRe, l'information des sinistres est transmise par la cédante seulement à partir du moment où le coût dépasse un certain seuil. Un sinistre dont le montant serait en dessous du seuil mais qui finira par passer au dessus dans les années futures s'assimile alors à un IBNyR. Pour les années suffisamment anciennes, cette donnée est assez faible, mais pour les toutes dernières années, nous pouvons nous attendre à une influence significative sur les résultats. La prise en compte de cet aspect sera également regardée.

## 3.2 Choix de l'inflation

L'étude sur les indices d'inflation menée ici s'inscrit dans la continuité de la partie 2.1.3.2 où une comparaison des indicateurs économiques pouvant assumer le rôle d'inflation avait été conduite. Quatre indices avaient été sélectionnés à ce moment là : les prix à la consommation, le coût des dépenses de santé, les salaires et le coût de la construction. Dans le cadre du Short-Tail, l'indice du coût de la construction et celui des prix à la consommation étaient conservés car ils étaient les plus cohérents vis-à-vis des lignes de business considérées.

Etant donné que nous nous plaçons à présent en Long-Tail, le choix de l'indice d'inflation pourrait être différent : les risques considérés ne sont pas les mêmes, et ne mettent pas en jeu les mêmes grandeurs économiques. Nous allons donc nous intéresser au choix le plus pertinent, mais également réfléchir à une mesure d'exposition adaptée.

### 3.2.1 Inflation économique

Voyons tout d'abord le cas des dépenses de santé. Cet indice semble en première approche complètement cohérent dans le cadre de dommages corporels qui peuvent être observés en Long-Tail. Le coût des dépenses de santé a une tendance à la hausse et devrait conserver cette orientation. Cette augmentation des coûts peut survenir du fait de plusieurs éléments [10] : vieillissement de la population, émergence de nouveaux pays pour l'accès à la santé, évolution des modes de vie, innovations techniques et technologiques ou encore décisions politiques. A ces faits cités dans l'article, nous pouvons également ajouter le risque de pandémie comme l'actualité récente l'a bien montré. Les répercussions sur les hôpitaux et les systèmes de santé à travers le monde sont imposantes. La croissance de ces coûts se retrouve d'ailleurs bien sur les figures 18, 19, 20 et 21 de ce mémoire : malgré une stabilisation en Espagne et en Italie de cet indice au début des années 2010, nous avons des flambées de l'indice extrêmes, plus fortes que pour les autres indices.

Les données collectées sur le site de l'OCDE pour cet indicateur correspondent à l'ensemble de la consommation de biens et de services médicaux, incluant les soins de santé personnels et le prix des services et structures collectifs. Les investissements ne sont par contre pas pris en compte.

Cet indicateur est très pertinent pour la plupart des sinistres qui seront considérés, mais une certaine difficulté peut tout de même être crainte pour l'estimer : cette donnée est accessible pour peu de pays, et la crise sanitaire actuelle laisse penser que ces coûts ont une volatilité difficilement estimable. De plus, les montants de sinistres peuvent contenir une partie de type compensation des pertes de revenus. Cette composante est indépendante des coûts de santé, et inciterait donc à privilégier une autre option pour le choix de ce paramètre.

L'étude des traités de réassurance pour les entités considérées en Long-Tail révèle les indices régulièrement utilisés, en particulier au moment de définir les conditions d'application de la clause de stabilisation qui sera une composante clé de ce mémoire. En effet, la mise en place de cette clause nécessite un indice de référence. Pour les marchés pouvant être qualifiés de matures, cet indice dans les traités est le plus souvent l'inflation des salaires, avec une

précision sur l'organisme national fournissant la donnée. Pour les marchés à développement rapide, l'indice des prix à la consommation est le plus souvent trouvé. Ceci s'explique car ce dernier indicateur est plus facile à trouver, par exemple sur le site du FMI.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2 au moment de comparer les indices, les prix à la consommation ont des comportements assez proches pour les pays d'Europe de l'ouest. A l'inverse, l'évolution des salaires est complètement différente entre les pays : cette donnée cerne peut-être mieux les subtilités propres à un pays.

L'indice du coût de la construction, pour sa part, n'a pas vraiment de sens en Long-Tail car il ne correspond pas à la réalité des sinistres concernés.

*Choisir comme indice d'inflation économique le même indice que celui définissant la clause de stabilisation du traité est cohérent car cela permet de mettre en jeu des grandeurs ayant subi les mêmes effets. C'est pourquoi nous utiliserons cet indice : l'inflation des salaires pour les marchés dits matures, et l'indice des prix à la consommation pour les entités à développement rapide. Nous traiterons également le cas d'une inflation liée aux montants des frais de santé : cela permettra de comparer les résultats avec un autre indice pertinent et d'évaluer l'ampleur des conséquences de ce choix.*

### 3.2.2 Inflation en terme d'exposition

Une question se pose également pour la mesure d'exposition des entités. Dans le chapitre 2, il a été décidé de se servir du montant des Earned Premium Income (EPI). Pour la responsabilité civile automobile (MTPL), par contre, un autre élément pourrait avoir son influence : l'évolution de la sinistralité automobile. En effet, si le portefeuille de l'assureur reste le même sur deux années consécutives mais que le nombre d'accidents de la route nationaux diminue (ou augmente), nous pouvons considérer que l'exposition diminue (ou augmente).

Regardons l'évolution de ce paramètre sur les pays déjà observés pour voir si une tendance est lisible. Nous nous basons sur les données fournies par l'OCDE.[11] Les chiffres obtenus représentent alors le nombre d'accidents ayant fait des victimes. Cela concerne les personnes blessées ou décédées du fait d'un accident mettant en jeu un véhicule motorisé, en excluant uniquement les suicides ainsi que les incidents quotidiens sans gravité notable. Le nombre de décès est une donnée qui aurait aussi pû être prise, mais cette valeur peut subir un biais dans son évolution du fait des progrès technologiques et dans la prise en charge des victimes.

Nous allons voir tout d'abord avec la figure 32 le nombre annuel d'accidents de la route pour les pays européens vus précédemment. Nous ne prenons pas le Mexique et le Japon sur ce graphe car leurs valeurs ne sont pas à la même échelle que pour les autres pays.

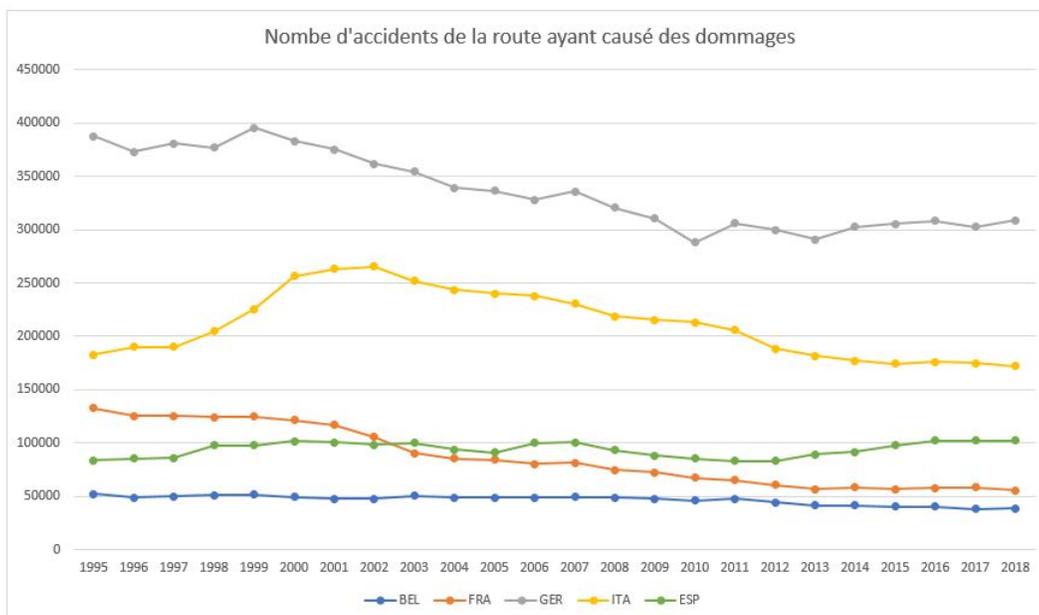


Figure 32: Evolution du nombre d'accidents de la route

Malgré le fait qu'une baisse puisse être observée pour la Belgique, la France et l'Allemagne, ce graphique est difficile à lire car les échelles sont différentes selon les pays. Nous allons donc nous concentrer en figure 33 sur l'évolution sous forme d'inflation en plaçant la valeur de l'année 1995 à 100 et les autres en conséquence. Les valeurs du Japon et du Mexique sont alors ajoutées à ce graphe.

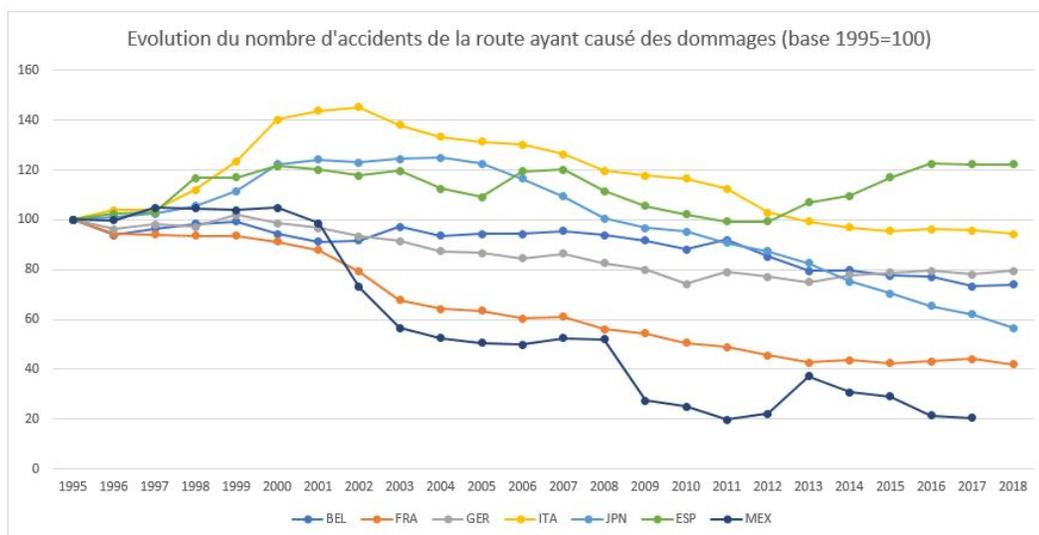


Figure 33: Evolution du nombre d'accidents de la route, 1995 base 100

Depuis le début des années 2000, nous observons pour la plupart des pays étudiés une baisse significative de l'accidentologie routière. Il y a ainsi près de 60% de sinistres en moins en France depuis 1995. Cette donnée doit donc être prise en compte au moment d'estimer l'exposition du portefeuille. L'Espagne est un contre-exemple par contre puisque le nombre d'accidents n'a pas diminué, ce qui renforce le besoin de bien prendre des indices propres à l'entité concernée.

*Cette mesure semblant dessiner une réelle tendance, nous souhaitons la prendre en compte pour les entités où elle est disponible. L'inflation en terme d'exposition pour le MTPL se composera donc de l'évolution du portefeuille pour l'entité mais aussi de l'évolution de la sinistralité automobile nationale en se basant sur les données récoltées par l'OCDE.*

*Une mesure supplémentaire sera utilisée combinée à ces deux-là, ce que nous verrons par la suite du fait d'une étude plus approfondie des sinistres à disposition. Elle s'appuiera sur les caractéristiques de développement, et en particulier le fait que certains sinistres soient encore inconnus pour les années les plus récentes. Nous détaillerons précisément l'intérêt, la forme et la mise en place de cette mesure dans la partie 3.7.*

### 3.2.3 Projection de l'inflation

Au cours de cette partie, nous verrons qu'il est nécessaire d'effectuer une manipulation préalable sur les données d'inflation économique. En effet, la mise en As-If des sinistres va s'étaler sur une durée plus longue que dans le cas du Short-Tail.



AnnéeSurvenance	Charge2015	Charge2016	Charge2017	Charge2018	Charge2019	Charge2020
2015	2 500 000	3 000 000	3 200 000	3 300 000	3 350 000	3 350 000
CoefficientInflation	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
AnnéeAsif	ChargeAsif2021	ChargeAsif2022	ChargeAsif2023	ChargeAsif2024	ChargeAsif2025	ChargeAsif2026
2021	3 750 000	4 800 000	5 440 000	5 940 000	6 365 000	6 700 000

Figure 34: Mise en As-If des sinistres en Long-Tail

Grâce à ce schéma figure 34, nous voyons bien qu'un sinistre long va nécessiter des données économiques pour l'inflation sur un horizon de temps couvrant tout d'abord les années correspondant réellement au développement du sinistre, comme en Short-Tail, mais aussi un nombre d'années suffisant via des projections pour effectuer ensuite la mise en As-If.

La méthode de projection qui sera utilisée par la suite est une régression linéaire. C'est-à-dire que des coefficients  $a$  et  $b$  sont recherchés pour obtenir une relation de la forme  $y = ax + b$ . Une distribution annuelle de la forme suivante figure 35 est alors récupérée :

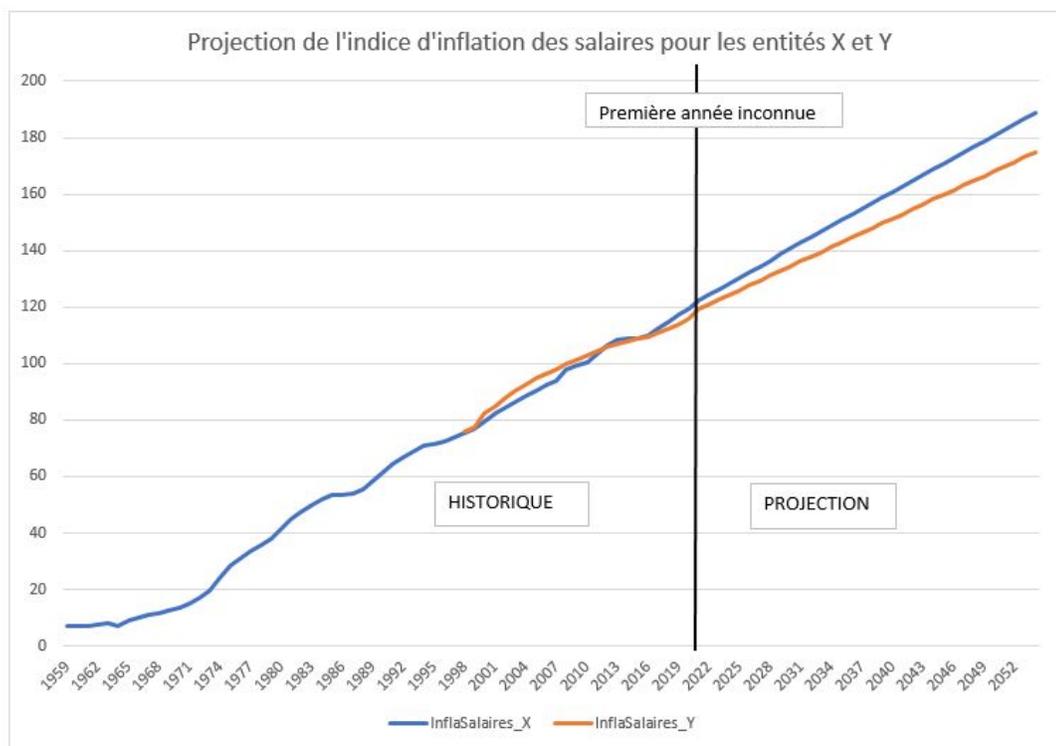


Figure 35: Mise en As-If des sinistres en Long-Tail

La courbe des salaires de l'entité Y est donnée à partir de l'année 1998. Dans cet exemple, les coefficients pour l'entité X sont : " $a=2,0074$  et  $b=-3934,451$ ". Pour l'entité Y, nous obtenons " $a=1,6842$  et  $b=-3284,512$ ". Graphiquement, des droites affines à partir de l'année 2021 permettent alors de prolonger la tendance historique.

L'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'approximer les valeurs futures en conservant un développement cohérent vis-à-vis des données passées. L'inconvénient est qu'une hypothèse forte est alors émise : La progression moyenne pendant les années futures sera la même que celle pendant les années déjà vécues. Un aplatissement ou une amplitude plus forte ne sont donc pas envisagés.

### 3.3 Données

Les données d'inflation, de réassurance et de taux de change se trouvent de manière similaire à ce que nous avons pu décrire dans le chapitre 2. Une différence survient tout de même pour l'inflation puisqu'il s'agit de risques mettant en jeu des paramètres économiques différents du Short-Tail. Nous avons pu voir dans la partie 3.2 l'intérêt d'une étude précise à ce sujet, permettant de définir le choix des indicateurs conservés.



chaque année. La deuxième option consiste à regarder la charge globale, c'est-à-dire aussi les réserves. Pour les deux méthodes, nous utiliserons ce qui a déjà été développé en partie 3.2.3 avec la projection de l'indice d'inflation, permettant d'accéder aux valeurs futures attendues, et donc une mise en As-If étendue sur l'ensemble des années à considérer en conservant la structure de développement.

Dans les tableaux suivants, figure 37, présentant les méthodes de développement, nous montrons seulement les premières années de développement par souci de lisibilité. De plus, un zoom est effectué sur le passage de l'année 2006 à 2007 pour bien détailler les mécanismes mis en place. Nous affichons en vert les éléments intervenant dans la méthode d'incrément de paiements, et en jaune les éléments utilisés dans la méthode d'incrément de charge. Les résultats pour chaque méthode ainsi que le détail des calculs sont alors en orange.

#### ***Sinistres sans inflation***

YearSurvance	Compteur	Program	Statut	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
2005	1	MTPL_X	Paid	4 038	29 846	56 509	116 003	2 208 162	2 261 673	2 264 221
		MTPL_X	Outstandi	3 374 450	3 378 522	3 368 109	3 394 366	534 967	481 455	478 907
		MTPL_X	Total	3 378 488	3 408 368	3 424 618	3 510 369	2 743 128	2 743 128	2 743 128

#### ***Inflation des incréments de paiement***

$$73\,847 + (56\,509 - 29\,846) * 2,33 = 136\,060$$

YearSurvance	Compteur	Program	Statut	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Coefficient d'inflation As-If				2,6	2,45	2,33	2,23	2,14	2,07	2,00
2005	1	MTPL_X	Paid	10 498	73 847	136 060	268 776	4 751 974	4 862 565	4 867 661
		MTPL_X	Outstandi	3 374 450	3 378 522	3 368 109	3 394 366	534 967	481 455	478 907
		MTPL_X	Total	3 384 948	3 452 368	3 504 169	3 663 142	5 286 940	5 344 019	5 346 567

#### ***Inflation des incréments de charge***

$$8\,857\,411 + (3\,424\,618 - 3\,408\,368) * 2,33 = 8\,895\,327$$

YearSurvance	Compteur	Program	Statut	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Coefficient d'inflation As-If				2,6	2,45	2,33	2,23	2,14	2,07	2,00
2005	1	MTPL_X	Total	8 784 068	8 857 411	8 895 327	9 086 617	7 442 530	7 442 530	7 442 530

Figure 37: Méthodes de mise en As-If pour des sinistres longs

Selon la méthode choisie, l'inflation est appliquée aux paiements ou à la charge totale. Toutefois, ces deux montants peuvent avoir des évolutions très différentes. Les paiements peuvent être accomplis progressivement, comme nous le voyons bien pour le sinistre servant d'exemple, alors que la charge totale dépend des réserves. Les incréments n'étant pas les mêmes et ne survenant pas aux mêmes moments, les conséquences au niveau de l'application de l'inflation sont inégales.

Pour ce qui est du choix de la méthode dans la suite de ce mémoire, la première sur les incréments de paiements est conservée. La deuxième méthode peut sembler plus prudente étant donné qu'elle affecte la charge globale, mais les réserves calculées dans les triangles anticipent déjà l'effet de l'inflation. Nous ne voulons pas cumuler plusieurs fois cet effet : un point spécifique sera fait sur le traitement des réserves, et notamment la démarche pour obtenir une réserve nulle à terme.

Ce choix est également guidé par l'objectif du mémoire qui est l'intégration de la clause de stabilisation dans la tarification. Cette clause s'applique sur les montants payés et il est donc cohérent de considérer l'inflation sur ces valeurs.

## 3.5 Développement des sinistres

Nous avons vu la mise en forme des triangles de paiement et l'application de l'inflation, ceci accompagne une problématique importante à présent : le développement des sinistres. En effet, ces triangles rendent compte de l'évolution de la charge des sinistres d'un point de vue historique. Plus un sinistre est ancien, plus le recul sur le déroulement de son coût est important. A l'inverse, un sinistre très récent représente une inconnue puisque son coût peut beaucoup varier avant la stabilisation. Nous verrons donc les méthodes pouvant être installées pour évaluer la charge finale des sinistres en se basant sur l'expérience, et ainsi définir celle qui sera la plus adaptée du fait des données à disposition.

### 3.5.1 Chain-Ladder simple

La méthode Chain-Ladder est une technique de développement des sinistres se basant sur des triangles déterministes. Elle est très courante en assurance du fait de la facilité pour la mettre en place, de sa robustesse et de sa stabilité.

#### 3.5.1.1 Description de la méthode

Nous notons  $j$  l'année de développement d'un sinistre et  $i$  son année de survenance.  $C_{i,j}$  est alors la charge des sinistres survenus l'année  $i$ , vue depuis la  $j$ -ème année de développement. Ici, nous supposons une application de la méthode au triangle des charges totales après mise en As-If de la partie connue.

Pour mettre en place cette méthode, il faut émettre les hypothèses suivantes selon Mack [12]:

1. Il existe des facteurs de développement  $f_1, f_2, \dots, f_{I-1} > 0$  avec  $I$  la dernière année de survenance tel que  $E[C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = C_{i,j} * f_j, 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq I-1$

2. Pour tout  $0 \leq j \leq n$ , les ratios des charges successives sont indépendants de l'année de survenance. C'est à dire :

$$\frac{C_{0,j+1}}{C_{0,j}} = \frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} = \dots = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \text{ avec } 0 \leq i \leq n-j-1.$$

Nous supposons plus globalement l'indépendance des années de survenance.

Alors la méthode de Chain-Ladder a pour but de trouver un estimateur des facteurs de développements définis dans la première hypothèse à partir de la formule suivante :

$$\widehat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}}, 1 \leq j \leq I-1 \quad (3.1)$$

La charge ultime du sinistre étant donnée par  $C_{i,I} = C_{i,I+1-i} * \prod_{k=I+1-i}^{I-1} f_k$  et donc en passant par l'estimateur nous avons :

$$\widehat{C}_{i,I} = C_{i,I+1-i} * \prod_{k=I+1-i}^{I-1} \widehat{\lambda}_k \quad (3.2)$$

### 3.5.1.2 Vérification des hypothèses

Les montants As-If des sinistres de l'entité X sur deux années consécutives sont affichés graphiquement figure 38. Nous retrouvons donc en abscisses la charge As-If correspondant à l'année de développement n, et en ordonnées cette même valeur pour l'année n+1. Dans une situation justifiant totalement le choix d'une méthode de Chain-Ladder, nous devrions avoir une approximation de droite linéaire, et donc visuellement un nuage de point adoptant cette forme. Pour ce qui est des données, un sinistre a été exclu de cette visualisation car son montant est très élevé et posait des problèmes d'échelle au moment de regarder les valeurs plus basses.

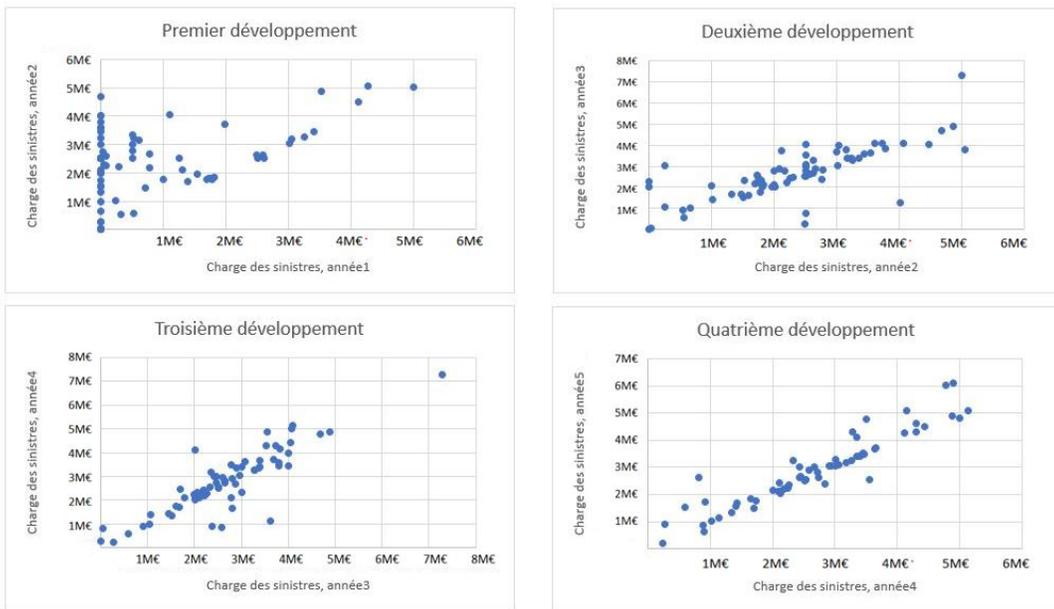


Figure 38: Vérification des hypothèses de Chain-Ladder pour les quatre premiers développements, entité X

Pour la première année, l'évolution des sinistres pose problème. Malgré le fait que plusieurs sinistres aient un développement "habituel", de nombreuses valeurs basses augmentent brutalement, et ce dans des proportions diverses. Le comportement paraît donc très aléatoire. Cet effet se retrouve un peu pour le deuxième développement. Nous avons ensuite des évolutions plus en adéquation avec les hypothèses de Chain-Ladder, validant ce

choix pour le troisième et le quatrième développement.

Les problèmes observés sur les premières années inciteront à considérer des alternatives, que ce soit la pondération, l'exclusion de données ou même la crédibilité. Un gain en précision pourra ainsi être espéré dans la méthode utilisant les sinistres historiques.

### 3.5.1.3 Résultats

Nous affichons dans la figure 39 les coefficients de Chain-Ladder pour l'entité X sur le MTPL, ainsi que les résultats à l'ultime sur les trois sinistres les plus récents.

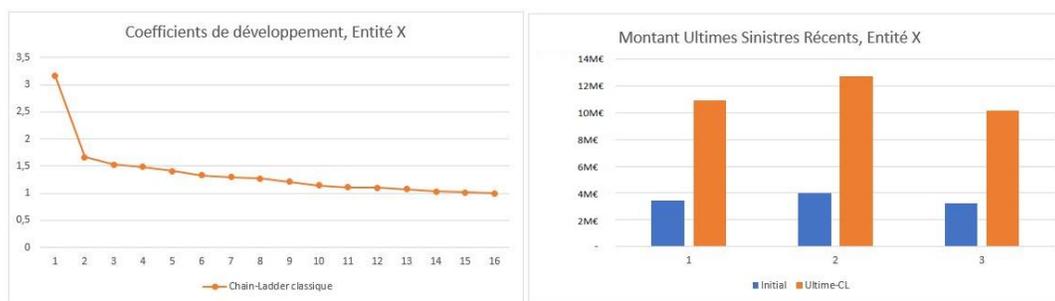


Figure 39: Coefficients de Chain-Ladder et calcul de l'ultime

Les conséquences sur les montants ultimes sont directes : un coefficient de Chain-Ladder élevé impliquera un montant ultime important. Ici, le premier facteur est particulièrement haut, ce qui peut être expliqué car il a été vu dans la partie précédente que les hypothèses de Chain-Ladder ne sont pas exactement vérifiées. Cette approche manque de précision.

### 3.5.1.4 Questionnement sur les limites du modèle

Le choix de cette méthode de développement soulève certaines questions du fait des hypothèses et des données utilisées.

Tout d'abord, l'évolution dans le passé ne doit pas être due à des modifications importantes comme des changements dans la gestion des sinistres par exemple. Le passé doit donc être stable.

De plus, nous devons avoir un nombre de données assez important. En effet, cette méthode se base sur l'historique, celui-ci doit donc avoir une ampleur suffisante et être fiable. Cette problématique du nombre de sinistres pour estimer les coefficients de passage sera abordée par la suite puisque nous verrons en quelle mesure il est possible d'exclure certaines

données.

Enfin, les sinistres considérés doivent être d'un ordre de montant assez stable. C'est-à-dire que la branche observée doit être peu volatile. Effectivement, un sinistre au montant beaucoup plus élevé que les autres aurait un poids plus important dans le calcul des coefficients de Chain-Ladder : son impact serait disproportionné, d'autant plus qu'il s'agit a priori de sinistres arrivant rarement. Nous retrouvons le même type de problème pour les sinistres au coût initialement bas dans la base de données. Comme nous le verrons plus en détail par la suite, la cédante partage l'intégralité de l'historique des sinistres fournis. Or, dans cette situation, un sinistre coûtant par exemple 20k€ en première année pourrait avoir sa charge qui monte à 2M€ l'année suivante. Cette évolution brutale se répercute sur le calcul des coefficients automatiquement.

Les considérations sur les données extrêmes vont faire l'objet des deux prochaines parties : la pondération et l'exclusion de données. Ces deux démarches vont être effectuées dans le but de mieux gérer ces données atypiques pouvant fausser le développement des sinistres.

### 3.5.2 Chain-Ladder pondéré

Introduire de la pondération dans le calcul des coefficients de Chain-Ladder consiste en un réajustement des données par l'affectation de poids. En effet, des critères sont prédéfinis pour attribuer à chaque sinistre un poids plus ou moins important dans le calcul des coefficients.

#### 3.5.2.1 Théorie

Nous allons désormais raisonner sinistre par sinistre et non plus considérer la charge de l'ensemble d'une année de survenance. Ceci permettra de mieux appréhender l'objectif de traitement particulier de certains sinistres dans les calculs. Nous considérons donc  $nbSinistres$  le nombre de sinistres faisant parti de l'historique et étant éligibles au calcul du fait de leur année de survenance.  $C_{i,j}$  est alors la charge totale mise en As-If du sinistre  $i$ , vue à la  $j$ -ème année de développement.

Pour réaliser cette pondération, nous débutons avec la formule de Mack [13]:

$$\widehat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{nbSinistre} f_{i,j} * w_{i,j} * C_{i,j}^\alpha}{\sum_{i=1}^{nbSinistre} w_{i,j} * C_{i,j}^\alpha} \quad (3.3)$$

avec  $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$

Le coefficient alpha permet de déterminer la méthode de Chain-Ladder choisie.

- $\alpha = 0$  : cas d'un Chain-Ladder simple, avec donc les  $\widehat{\lambda}_j$  qui représentent les moyennes arithmétiques des  $f_{i,j}$ .

- $\alpha = 1$  : cas d'un Chain-Ladder classique, avec donc les  $\widehat{\lambda}_j$  qui sont pondérés par les volumes.
- $\alpha = 2$  : la méthode de Chain-Ladder ici peut être assimilée à une régression puisque les estimateurs  $\widehat{\lambda}_j$  sont alors issus d'une minimisation des moindres carrés.

Dans cette étude, nous nous plaçons dans le cas  $\alpha = 1$ , et différentes méthodes sont testées en jouant sur les poids  $w_{i,j}$ . L'application de ces poids va être différente selon la nature des données à disposition. L'objectif final étant de réduire l'impact de certaines données considérées comme étant non-représentatives. Cela peut venir de différentes causes, comme des événements atypiques ou une évolution exceptionnelle du sinistre par rapport à ce qui a été anticipé. Une méthode peut ainsi être d'exclure les évolutions extrêmes (minimum et maximum) en leur affectant un poids nul. Pour cela, les coefficients de développement individuels sont regardés et des poids sont attribués. Un exemple est présenté dans la figure 40.

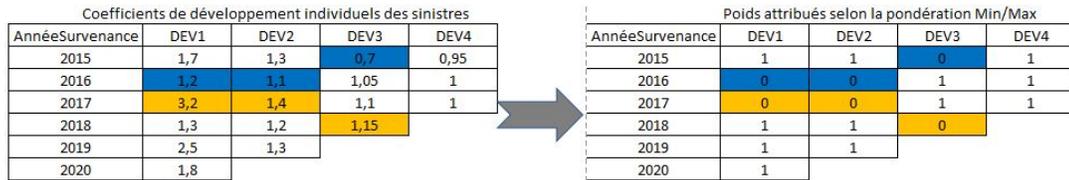


Figure 40: Attribution des poids dans une pondération Min/Max

Pour chaque année de développement, nous enlevons le sinistre correspondant au plus gros développement individuel, ainsi que celui correspondant au développement le plus faible. Dans l'exemple ci-dessus, cette méthode n'est pas appliquée à la dernière année de développement car enlever un minimum et un maximum sur un très faible nombre de données réduirait beaucoup trop l'information. Il s'agit de plus d'une année avec peu de volatilité car les sinistres sont déjà bien développés : une telle méthode n'est plus forcément pertinente.

Ici, une problématique précise est rencontrée. En effet, les coefficients de développement de certains sinistres sont énormes et ne sont pas adaptés à une étude globale. Voyons cela dans la figure 41 en reprenant le développement des sinistres numéro 1 pour chaque année de survenance de l'entité X.

Survenance	Compteur	Program	Statut	DEV1	DEV2	DEV3	DEV4	DEV5	DEV6	DEV7	DEV8	DEV9	DEV10	DEV11	DEV12	DEV13	DEV14	DEV15
2005	1	MTPL_X	Total	1,01	1,00	1,03	0,78	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	1,00	1,00	1,00
2006	1	MTPL_X	Total	1,61	1,72	1,00	1,99	1,28	1,13	1,13	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00
2007	1	MTPL_X	Total	2,07	1,14	1,01	0,87	1,04	1,29	1,02	1,15	1,06	1,00	1,08	1,01	1,01		
2008	1	MTPL_X	Total	35,66	1,07	1,26	1,00	1,10	1,02	1,02	1,17	1,00	1,14	0,98	1,00			
2009	1	MTPL_X	Total	6,23	1,04	1,00	1,01	1,10	1,04	1,00	1,06	1,07	1,02	1,01				
2010	1	MTPL_X	Total	1,28	1,02	0,99	1,08	1,01	1,21	1,01	1,00	1,06	1,02					
2011	1	MTPL_X	Total	5,28	1,19	0,93	0,70	1,00	1,00	1,00	1,00	0,96						
2012	1	MTPL_X	Total	6,72	1,00	1,07	1,00	1,00	1,35	1,16	1,10							
2013	1	MTPL_X	Total	1,86	1,08	1,23	0,96	1,09	1,06	1,03								
2014	1	MTPL_X	Total	4,13	1,41	1,00	1,18	2,13	1,00									
2015	1	MTPL_X	Total	1,00	1,14	1,00	1,14	1,51										
2016	1	MTPL_X	Total	7,69	1,00	1,11	1,24											
2017	1	MTPL_X	Total	1,00	1,32	1,00												
2018	1	MTPL_X	Total	3,69	1,00													

Figure 41: Développements individuels des sinistres numéro 1 de chaque année, entité X

Nous pouvons effectivement rencontrer un sinistre coûtant 78954€ en première estimation mais dont le montant va être multiplié par 36 dès l'année suivante. De plus, seulement le premier sinistre de chaque année est regardé dans le tableau ci-dessus, mais nous pouvons avoir des sinistres pour lesquels le facteur de développement est supérieur à 100 entre deux années successives. Cependant, il est peu vraisemblable d'avoir une telle évolution pour un sinistre dont le montant initial est déjà très élevé.

C'est pourquoi nous introduisons une pondération pour  $j$  fixé de type :

$$\widehat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{nbSinistre} f_{i,j} * 1_{jugementExpert} * C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{nbSinistre} 1_{jugementExpert} * C_{i,j}}, \text{ avec } f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \quad (3.4)$$

Et nous posons ici le jugement d'expert tel que  $1_{jugementExpert} = 1_{C_{i,j+1} < \gamma * C_{i,j}}$  avec  $\gamma$  que nous pouvons faire varier pour gagner en précision. Cette configuration sera testée plus loin avec  $\gamma$  prenant une série de valeurs entre 2 et 10.

De cette manière, les sinistres au développement très important sont exclus : ils ne représentent donc pas une situation à laquelle nous nous attendons forcément.

L'effet que donne cette pondération par rapport aux coefficients de Chain-Ladder trouvés de façon habituelle est détaillé en Annexe n°1.

Dans cette situation, le nouveau coefficient de Chain-Ladder est plus faible. Ce résultat n'est pas surprenant puisque les sinistres au développement brutal à la hausse sont élevés, diminuant ainsi les écarts possibles de valeurs entre les montants sur deux années de développement successives. Appliquer ce type de pondération permet de diminuer les coefficients de Chain-Ladder par exclusion de sinistres au développement exceptionnel, et donc de s'approcher de valeurs plus vraisemblables.

### 3.5.2.2 Pondération simple

Nous allons appeler ici pondération simple la pondération définie dans la partie précédente.

C'est-à-dire  $\widehat{\lambda}_j^{pond} = \frac{\sum_{i=1}^{nbSinistre} C_{i,j+1} * 1_{jugExpert}}{\sum_{i=1}^{nbSinistre} C_{i,j} * 1_{jugExpert}}$   
avec  $1_{jugementExpert} = 1_{C_{i,j+1} < \gamma * C_{i,j}}$ .

Le choix du  $\gamma$  permet d'exclure du calcul les parties de sinistres dont le développement sur deux années consécutives est très important, diminuant ainsi le coefficient de passage entre ces deux années.

En pratique, voyons en figure 42 un exemple d'attribution des poids du fait d'une pondération avec un coefficient égal à 5. Nous reprenons toujours le premier sinistre de chaque année de survenance pour l'entité X, en affichant par souci de lisibilité uniquement les deux premiers coefficients de développement, étant donné que les autres ne sont pas affectés par la pondération dans cet exemple précis.

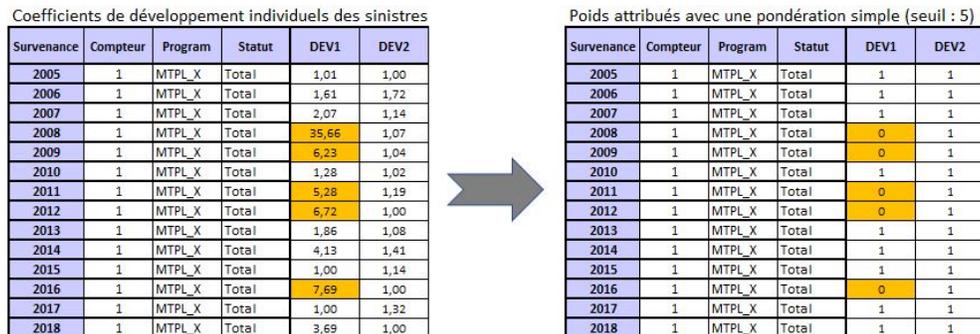


Figure 42: Attribution des poids dans une pondération simple, seuil de 5

Nous attribuons bien aux sinistres dont le développement est trop élevé un poids nul. Ils n'interviendront pas dans le calcul de Chain-Ladder pour les années de développement concernées. Pour ce qui est du cas inverse, c'est-à-dire un montant de sinistre fortement ramené à la baisse, il a été choisi de les conserver. En effet, il s'agit le plus souvent d'entités qui ont tendance à surestimer la charge en première approche et donc qui sont exposées à ce type de situation.

Afin d'affiner les estimateurs, différentes valeurs possibles sont testées pour  $\gamma$  et nous voyons en figure 43 les différences sur les coefficients cumulés qui en découlent. La borne haute dans cette analyse est 10, mettant donc de côté les sinistres dont le montant d'une année à la suivante est multiplié par plus de 10. La borne basse est 2, et une série de résultats est observée avec les valeurs entières ou égales à la moitié d'entiers entre ces deux bornes. La borne inférieure est très sélective puisqu'un sinistre dont la valeur double entre deux années succesives ne sera pas pris en compte. Or cette situation pourrait possiblement survenir, surtout dans les toutes premières années de développement où l'estimation du sinistre n'est pas forcément encore très précise.

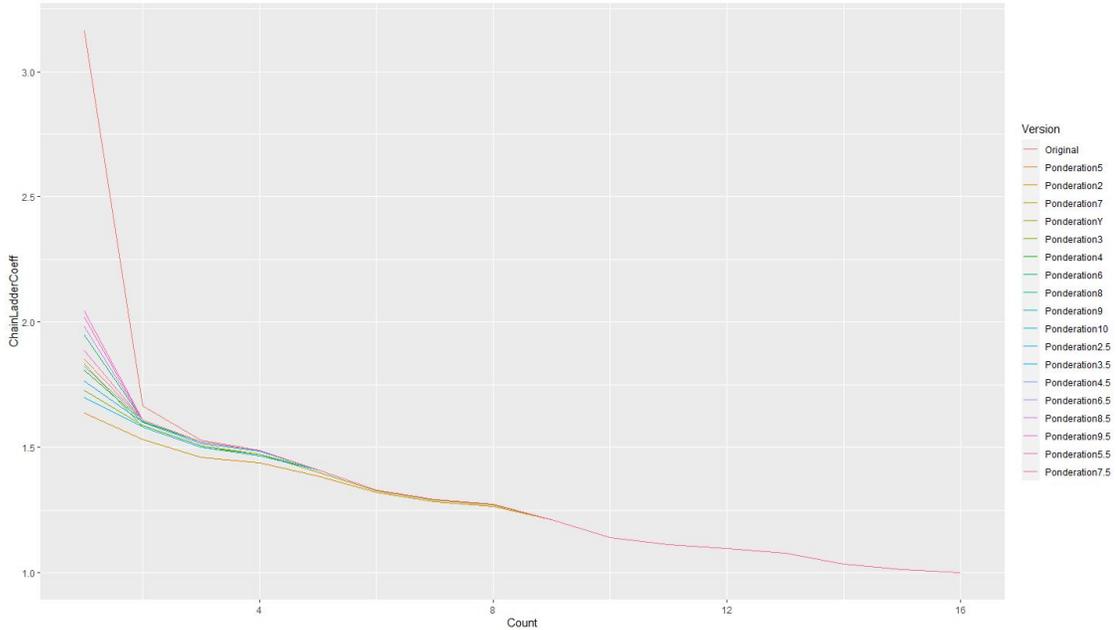


Figure 43: Sensibilité des coefficients de développement au choix du seuil

A la lecture de ce graphique, nous voyons bien les conséquences du choix du seuil, en particulier pour les quatre premières années. Ces coefficients permettant d'obtenir les montants développés ultimes, les différences en terme de montants peuvent alors être importantes. Le problème du choix du seuil est donc bien présent puisqu'il s'agirait d'un choix personnel.

Cette méthode peut paraître un peu brutale car elle fonctionne sur un principe binaire : un poids de 0 ou de 1. Un lissage peut être essayé comme nous allons le voir à présent.

### 3.5.2.3 Pondération combinée

Par pondération combinée, nous définissons une structure de pondération s'inspirant complètement de ce qui a été vu dans le paragraphe précédent, mais en adoptant plus de seuils de façon à lisser en quelque sorte la pondération.

Nous avons alors un estimateur de la forme  $\widehat{\lambda}_j^{pond} = \frac{\sum_{i=1}^{nbSinistre} C_{i,j+1} * 1_{jugExpert}}{\sum_{i=1}^{nbSinistre} C_{i,j} * 1_{jugExpert}}$

$$1_{jugementExpert} = \alpha_1 * 1_{C_{i,j+1} < \gamma_1 * C_{i,j}} + \alpha_2 * 1_{\gamma_1 * C_{i,j} < C_{i,j+1} < \gamma_2 * C_{i,j}} + \alpha_3 * 1_{\gamma_2 * C_{i,j} < C_{i,j+1} < \gamma_3 * C_{i,j}}$$

L'intérêt est alors d'avoir une sélection moins abrupte du fait des seuils, et de prendre en compte plus de sinistres avec un poids adapté pour chacun.

En prenant les seuils 2,5 et 7, une configuration de la forme suivante peut ainsi être mise en place :

$$1_{\text{jugementExpert}} = 1 * 1_{C_{i,j+1} < 2 * C_{i,j}} + 0.66 * 1_{2 * C_{i,j} \leq C_{i,j+1} < 5 * C_{i,j}} + 0.33 * 1_{5 * C_{i,j} \leq C_{i,j+1} < 7 * C_{i,j}}$$

Nous considérons dans ce cas que chaque intervalle est associé à un poids différent. Ceci se base sur l'hypothèse que leur probabilité d'occurrence est régressive quand le coefficient de développement augmente. Dans l'exemple présent, nous avons bien un poids qui diminue si l'état du sinistre appartient à la catégorie de ceux qui se développent fortement.

L'exemple du premier sinistre de chaque année de surveillance pour l'entité X est repris, et nous observons en pratique dans la figure 44 l'attribution des poids selon cette méthode combinée.

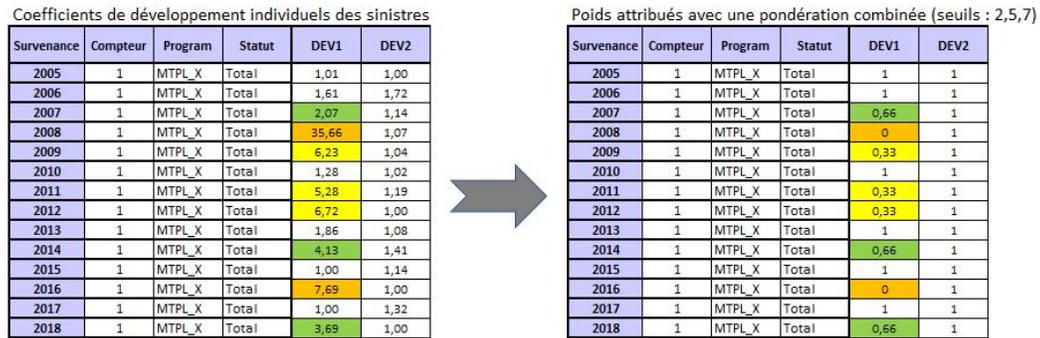


Figure 44: Attribution des poids dans une pondération combinée, seuils 2,5,7

L'attribution des poids est moins brutale du fait de cette répartition en classes. Dans cet exemple précis, nous voyons bien que le choix des seuils a tout de même un impact fort puisqu'il affecte directement la contribution des sinistres à la méthode de Chain-Ladder.

### 3.5.2.4 Comparaison des résultats

Si nous considérons les trois sinistres les plus récents de la base de données pour l'entité X, les montants ultimes sont obtenus à partir des coefficients de développement. Nous avons ainsi le comportement sans pondération, avec un seuil de 5 puis avec un seuil de 7. Nous voyons donc en figure 45 les conséquences du choix de ce seuil sur le montant ultime du sinistre :

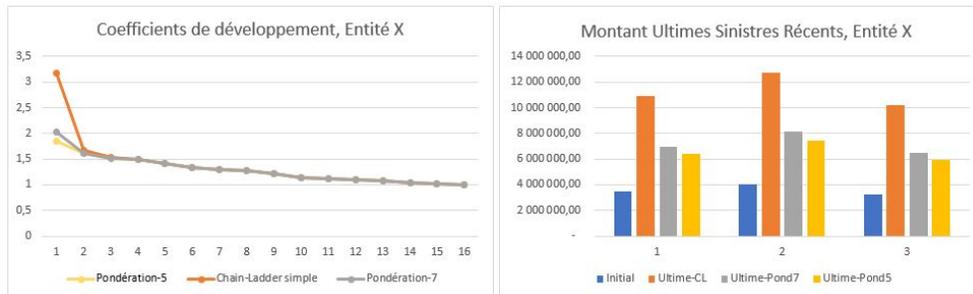


Figure 45: Variation des résultats selon la pondération choisie, seuils 5 et 7

L'utilisation faite de la pondération enlève les sinistres au développement élevé. C'est pourquoi l'effet est important en termes de charge ultime. Nous avons une différence visible entre les deux résultats de pondération, ce qui montre l'impact des hypothèses à faire dans la condition de pondération.

La pondération présente des avantages puisqu'elle permet de donner un poids aux sinistres dans les calculs des coefficients de Chain-Ladder, et donc de privilégier ceux qui semblent le plus représentatifs de ce qui peut être observé. Cependant, la mise en place de ce jugement d'expert est compliquée en pratique car les choix à faire (poids, seuil) sont alors subjectifs et varient selon l'entité et la branche considérée. Nous risquons également de mettre de côté certains sinistres automatiquement alors qu'ils pourraient être représentatifs de situations réelles.

Au moment d'adopter une telle démarche, il est important de faire preuve de prudence. Or, l'exclusion des sinistres représentant des situations plausibles comme nous pourrions le faire par erreur via cette méthode représente un risque trop important. C'est pourquoi une autre méthode va désormais être cherchée pour déterminer comment les développements de sinistres atypiques doivent être gérés.

### 3.5.3 Exclusion des données

En tant que réassureur, AGRé reçoit uniquement les données sinistres au-delà d'un certain seuil, ce qui représente un nombre assez faible pour chaque entité. Chaque donnée est précieuse dans le cadre d'une tarification par expérience : il faut essayer d'en utiliser le maximum. Cependant, certaines valeurs extrêmes nécessitent une étude particulière pour valider ou non leur emploi.

#### 3.5.3.1 Exclusion de valeurs basses

Les sinistres sont fournis par les entités à AGRé à partir du moment où ils dépassent un seuil donné qui est fixé en fonction d'un pourcentage de la rétention du traité. Imaginons un sinistre qui aurait le développement suivant :

DevYear	1	2	3	4	5	6	7
Montant	20 000	22 000	75 000	2 000 000	2 100 000	2 150 000	2 125 000

Si nous sommes en présence d'une entité qui ne transmet ses sinistres qu'à partir de 1M€, alors AGRé n'a connaissance de ce sinistre qu'à partir de la quatrième année de développement. Cependant, à partir de ce moment là, c'est l'ensemble de l'historique du sinistre qui est dévoilé : les montants des années précédentes sont aussi visibles. C'est au cours de ces années là que nous pouvons avoir un montant qui risque d'augmenter fortement par la suite : c'est-à-dire le type de situations que nous cherchions à éviter avec la pondération de Chain-Ladder.

Nous choisissons donc d'exclure les sinistres pour les années de développement où ils sont en dessous du seuil de transmission à AGRé. Dans l'exemple donné ci-dessus, le sinistre est pris en compte dans le calcul des coefficients de Chain-Ladder seulement à partir du

passage de l'année 4 à 5. Ainsi, des développements de sinistres extrêmes sont évités, mais sans exclusion des sinistres représentatifs de situations possibles au-delà du seuil de cession des données par la cédante.

De plus, il est très important de noter que le sinistre n'est pas totalement supprimé, puisque nous le récupérons pour toutes les années de développement à partir du moment où son montant dépasse le seuil. Cette partie là est cruciale car en tant que réassureur, AGRe a peu de données en sa possession et il faut donc en utiliser le plus possible pour avoir un historique suffisamment fourni. Toute information est précieuse et il faut veiller à en conserver le maximum. Ces situations rencontrées posent aussi la question de l'existence de sinistres sous-estimés sur des années très récentes et donc non connus malgré leur survenance. Ce point sera détaillé dans la partie 3.7 décrivant la gestion des IBNyR.

Si le choix d'un seuil pour les valeurs basses est simplifié par la nature de la transmission des données entre cédante et réassureur, il en est autrement pour les valeurs très hautes qui peuvent aussi poser des problèmes comme nous allons le voir à présent.

### 3.5.3.2 Exclusion de valeurs hautes

Nous avons vu que le développement de sinistres dont les montants sont initialement bas sont à surveiller. Il en est de même pour les sinistres aux coûts très élevés qui auraient un impact très forts sur les coefficients de passage des années de développement.

#### 3.5.3.2.1 Problème des sinistres atypiques

Appliquer brutalement une méthode de développement des sinistres par expérience sans analyser les données préalablement pourrait poser problème. En effet, des valeurs très élevées auraient un poids important dans les calculs. Voyons en quoi cette configuration peut être problématique.

	NumSinistre	DevYearPreviousYear	DevYearCurrentYear
Situation :	1	5M	7M
	2	6M	7.5M
	3	70M	71M
	4	5M	7,2M

Le coefficient de Chain-Ladder associé à cet historique de sinistres est :  
 $CL_{coeff} = \frac{92,7}{86} = 1,078$

Sans le sinistre numéro 3, nous aurions le coefficient :  
 $CL_{coeffbis} = \frac{21,7}{16} = 1,356$

Dans cette situation, un sinistre atypique faussera le développement de sinistres au profil plus récurrent. En effet, nous pouvons émettre l'hypothèse qu'un très gros sinistre a une

probabilité de voir son coût être fortement revu à la hausse plus faible qu'un sinistre au montant pus bas. Pourtant, son impact dans le calcul des coefficients sera plus fort.

De façon presque identique, nous pouvons également imaginer un sinistre important, dont le montant a été fixé une première fois, mais dont la responsabilité est suspendue à une décision de justice. Ces décisions pouvant nécessiter du temps, le montant du sinistre ne se développe pas dans la base de données fournie par la cédante alors que son coût exceptionnel impacte fortement le calcul. Il peut donc être délicat d'utiliser ce sinistre pour une étude de développement, surtout si son montant écrase les autres. Un sinistre au coût plus bas dont le montant n'évolue pas est moins problématique puisque son poids n'est pas disproportionné par rapport aux autres, et il représente un cas de figure possible.

Prendre en compte ou non ces sinistres extrêmes nécessite par conséquent une étude de ceux-ci pour mieux les comprendre, et ainsi pouvoir déterminer leur traitement au cas par cas.

Nous allons donc chercher un seuil à partir duquel les sinistres seront considérés extrêmes et nécessiteront une observation plus précise. L'idée est de regarder ces sinistres particuliers pour savoir s'ils rentrent dans le cadre de la modélisation des développements, ou si nous devons leur affecter un montant ultime séparément par jugement d'expert. Il ne faudra en effet pas les oublier au moment de la tarification.

La détermination de ce seuil va se faire par la mise en place de théorie des valeurs extrêmes, et notamment l'étude des Mean Excess Plot. Nous allons commencer par des rappels théoriques pour expliquer dans quel cadre se développe cette méthode.

### 3.5.3.2.2 Théorie des valeurs extrêmes

Soit  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$   $n$  variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (iid). Nous introduisons également les statistiques d'ordre associées :

$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  avec donc  $X_{(1)}$  qui représente le minimum de cette distribution et  $X_{(n)}$  le maximum.

Le théorème de Fisher-Tippet-Gnedenko indique les résultats possibles en terme de convergence dans ce type de situation.

Théorème :  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$   $n$  variables aléatoires iid. S'il existe les constantes de normalisation  $A_n \geq 0$  et  $B_n \in R$ , et une fonction de répartition  $G$  tel que  $\frac{X_{(n)} - B_n}{A_n}$  converge en distribution vers  $G$ , alors  $G$  peut seulement être une des fonctions de répartition suivantes :

- Gumbel :  $G_0(x) = \exp(-\exp(-x))$ ,  $x \in R$
- Fréchet :  $G_{1,\alpha}(x) = \exp(-x^{-\alpha})$ ,  $x \geq 0$ ,  $\alpha > 0$
- Reversed Weibull :  $G_{2,\alpha}(x) = \exp(-(-x)^{-\alpha})$ ,  $x \leq 0$ ,  $\alpha < 0$

Autrement dit, après renormalisation,  $X_{(n)}$  ne peut converger que vers trois types de distributions : Gumbel, Fréchet et Weibull inversé.

Ces trois types de distribution ont été combinés en une famille nommée Generalized Extreme Value Distribution (GEV) [14]:

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \gamma * x)_+^{\frac{-1}{\gamma}}) & \text{si } \gamma \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

En adoptant la convention  $Y_+ = \max(0, Y)$ .

C'est le paramètres de forme  $\gamma$  qui permet de déterminer la nature de la distribution, il est nommé extreme-value index.

- $\gamma > 0$  : loi de Fréchet
- $\gamma = 0$  : loi de Gumbel
- $\gamma < 0$  : loi de Weibull inversée

En se basant sur ce que nous venons de voir, un résultat mettant en jeu un seuil est alors souhaité, c'est à dire une approche Peak over treshold (POT). Nous avancerons alors notamment grâce au théorème de Pickands-Balkema-deHaan.

Il faut tout d'abord introduire la fonction de distribution des excès :

$$F_u(x) = P[X - u \leq x | X > u], x \geq 0 \quad (3.6)$$

Théorème de Pickands-Balkema-deHaan (1975) :

Si  $X_{(n)}$  a pour distribution limite une Generalized Extreme Value Distribution, alors pour un seuil assez grand  $u$ ,

$$\lim_{u \rightarrow x_F^+} \sup_{0 \leq y \leq x_F^+ - u} |F_u(y) - G_{\epsilon, \sigma(u)}(y)| = 0 \quad (3.7)$$

avec  $G_{\epsilon, \sigma(u)}(y)$  la distribution généralisée d'une loi de Pareto, notée GPD, avec  $\sigma(u) > 0$ , donnée par :

$$G_{\epsilon, \sigma(u)}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \epsilon * \frac{y}{\sigma(u)})^{\frac{-1}{\epsilon}} & \text{si } \epsilon \neq 0 \\ 1 - \exp(\frac{-y}{\sigma(u)}) & \text{si } \epsilon = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

avec  $y \geq 0$  si  $\epsilon \geq 0$  et  $0 \leq y \leq \frac{-\sigma(u)}{\epsilon}$  si  $\epsilon < 0$

Interprétation du théorème : Pour un seuil  $u$  assez grand,  $\exists \sigma(u) > 0$  et  $\epsilon \in R$  tel que  $F_u(y) \approx G_{\epsilon, \sigma(u)}(y)$  [15]

C'est donc au dessus d'un certain seuil que la distribution de l'échantillon peut être approximée par une GPD.

Un des objectifs est de trouver ce seuil, ce qui correspond à la même idée que dans le problème que nous avons. En effet, ce sont ces sinistres là qui seront isolés pour une étude particulière.

### 3.5.3.2.3 Mean Excess Plot

Pour déterminer ce seuil, nous allons à présent noter  $e(u)$  la fonction moyenne des excès définie plus haut:  $e(u) = E[X - u \mid X > u]$

Nous remarquons d'ailleurs que cette fonction  $e(u)$  est souvent utilisée en réassurance car elle peut être vue comme la perte moyenne espérée dans un traité de priorité  $u$ .

Si le modèle GPD est valide au-delà d'un seuil  $u$ , comme exprimé dans le paragraphe précédent, alors la fonction moyenne des excès est affine à partir de ce seuil. [Preuve Annexe n°2]

C'est à partir de cette propriété que nous pourrons déterminer visuellement si les données peuvent provenir d'une loi GPD.

La méthode du Mean Excess Plot est un outil graphique qui permet d'afficher les valeurs  $\{(X_{(k)}, e_n(X_{(k)})), k=1, \dots, n\}$  avec les  $X_{(k)}$  les statistiques d'ordre des  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $e_n(u)$  la fonction moyenne des excès empirique.

Tout d'abord développée pour les GPD par Davison et Smith en 1990, cette méthode aide également à décider d'un seuil approprié pour les méthodes basées sur l'excédance comme nous voulons le faire ici. Il s'agit d'une méthode supervisée. [16]

### 3.5.3.2.4 Utilisation et résultats

En affichant le Mean Excess Plot via R, une évolution affine des fonctions moyennes des excès est recherchée. Nous affichons alors sur la figure 46 deux seuils candidats à partir desquels une tendance affine peut être considérée.

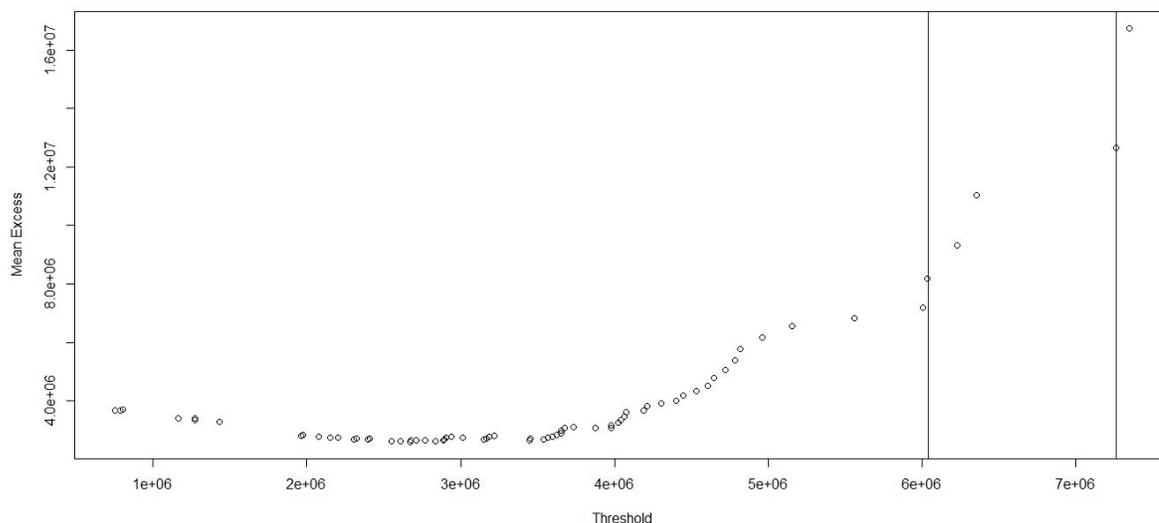


Figure 46: Mean Excess Plot, MTPL entité X

Le seuil le plus bas n'est pas parfait car la tendance ensuite n'est pas complètement affine. Le deuxième seuil est en pratique trop élevé pour voir réellement si la fonction moyenne des excès est affine à parti de ce niveau.

L'historique de ce programme de réassurance contient 93 sinistres. Choisir le premier seuil permet d'exclure les 7 sinistres dont les valeurs sont les plus élevées. Le deuxième seuil est plus sélectif et détache les 4 plus gros sinistres.

Nous voyons bien que cette méthode permet d'isoler les sinistres les plus importants pour éviter tout biais qu'ils pourraient impliquer au moment de mettre en place une méthode de développement. Toutefois, cette technique est limitée du fait de son manque de précision puisqu'elle doit être effectuée "à la main", avec une lecture du graphique restant subjective. Exclure ces valeurs élevées peut donc être délicat, c'est pourquoi nous verrons par la suite d'autres manières de considérer ces sinistres.

### 3.5.4 Crédibilité pour améliorer la précision du développement

Développer les sinistres d'une entité en se basant sur l'expérience est délicat pour le réassureur car il peut avoir peu d'historique afin de construire son modèle, et celui-ci peut être constitué d'événements très différents en terme de charge. De plus, nous avons vu que tous les sinistres ne sont pas forcément utilisables directement quand ils ont des valeurs atypiques. Nous allons donc voir s'il est possible d'étoffer la base de données pour avoir un ensemble plus complet, ou de travailler sur des classes pour ajuster le développement.

### 3.5.4.1 Prise en compte du portefeuille global

Pour avoir accès à plus de données au moment de construire le modèle Chain-Ladder, une piste de réflexion pourrait être d'intégrer les sinistres de l'ensemble des entités accessibles. Nous avons alors une base plus diverse et donc plus représentative des situations possibles quand un sinistre se développe. Cependant, chaque entité a ses spécificités. En effet, nous pouvons avoir de grosses différences dans l'estimation, le traitement et la façon de gérer les sinistres selon la cédante.

En faisant appel à la théorie de la crédibilité qui sera présentée par la suite, nous pourrions chercher à mettre en évidence un estimateur qui indiquerait s'il est plus opportun selon l'historique d'utiliser les données propres à l'entité ou de considérer l'ensemble du portefeuille.

Néanmoins, l'étude plus précise des triangles de développement des entités montre de trop grosses différences dans les modes de développement propres aux cédantes. Cela s'oppose à l'idée d'avoir une notion de dépendance entre le comportement d'un sinistre et les développements historiques d'une autre entité. Pour le moment, des triangles assez réguliers ont été vus, mais nous pouvons avoir certaines entités comme dans la figure 47 donnant ce type de situation :

Year/Survenance	Compteur	Program	Statut	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	
2001	1	MTP_LY	Paid	17 532	150 813	177 807	232 667	232 667	232 667	232 667	232 667	232 667	232 667	232 667	
			Outstanding	6 627 419	497 345	470 350	77 490	77 490	77 490	77 489	77 489	-	-	-	-
			Total	6 644 951	648 157	648 157	310 157	310 157	310 157	310 156	310 156	232 667	232 667	232 667	232 667
Year/Survenance	Compteur	Program	Statut	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	
2010	1	MTP_LY	Paid	118 746	387 558	1 556 494	1 704 462	1 824 893	1 831 705	1 837 398	1 838 065	1 840 200	1 839 014	1 888 726	
			Outstanding	12 878 890	12 609 776	3 635 100	3 487 472	3 335 658	3 328 820	714 000	714 000	711 842	662 000	612 366	
			Total	12 997 636	12 997 334	5 191 594	5 191 934	5 160 551	5 160 525	2 551 398	2 552 065	2 552 042	2 501 014	2 501 092	

Figure 47: Développements particuliers de l'entité Y

Sur ces deux exemples, nous voyons des sinistres fortement sur-évalués en première approche. Le montant des réserves chute brutalement après quelques années, sans que le coût soit transféré en montants payés. Il s'agit donc d'une entité pour laquelle la prise en charge et le développement des sinistres sont complètement différents de ce qui était en place pour l'entité observée jusqu'à présent.

Il ne semble pas cohérent d'appliquer une méthode de crédibilité dans ce cas puisqu'il y a trop de différences dans l'évolution des sinistres : la nature des événements et les réglementations locales peuvent varier fortement d'un pays à l'autre. Ces caractéristiques se retrouvent par exemple dans les délais des décisions de justice. Nous considérerons donc une autre méthodologie pour introduire la notion de crédibilité.

### 3.5.4.2 Répartition des sinistres en classes

En se plaçant dans l'étude d'une entité précise, nous pouvons considérer que la méthode de prise en charge des sinistres, et donc l'évolution des développements, n'est pas exposée à de grosses variations de façon générale. Nous pouvons tout de même émettre l'hypothèse que les sinistres coûteux n'auront pas le même développement que des sinistres moins coûteux. C'est bien cette idée qui était recherchée avec les méthodes d'exclusion de sinistres.

Parmi les sinistres qui sont conservés, nous pouvons alors penser qu'un sinistre au montant "faible" a plus de probabilité de voir son coût augmenter fortement qu'un sinistre dont la charge est déjà très élevée. Une décomposition de l'historique en classes se basant sur la charge des sinistres est donc possible. Ainsi, nous pouvons mettre en place un estimateur qui indiquera s'il est plus opportun d'exploiter l'historique de la classe représentant les montants plus faibles, ou s'il faut s'appuyer sur l'ensemble des sinistres.

Pour développer cette méthode, le concept de crédibilité est introduit et nous observons comment il peut s'adapter plus précisément dans le cadre de développements de type Chain-Ladder.

### 3.5.4.3 Théorie générale de la crédibilité et modèle de Bühlmann-Straub

Soit  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  un échantillon de lois indépendantes et identiquement distribuées (iid), et nous supposons également  $\widehat{X}_A$  et  $\widehat{X}_B$  deux estimateurs sans biais de  $E[X]$ , de variance respective  $V[\widehat{X}_A]$  et  $V[\widehat{X}_B]$ .

Les deux estimateurs étant sans biais, nous avons donc  $E[\widehat{X}_A] = E[\widehat{X}_B] = E[X]$

En crédibilité, nous allons chercher à construire un estimateur  $\widehat{X}_C$  sous forme de combinaison linéaire de deux estimateurs précédents avec pour objectif d'améliorer l'estimation. [17]

$$\widehat{X}_C = z * \widehat{X}_A + (1 - z) * \widehat{X}_B \quad (3.9)$$

avec  $z \in [0, 1]$

Nous vérifierons en annexe numéro 3 la pertinence de cet estimateur.

Désormais, nous nous inscrivons dans le cadre du modèle de Bühlmann-Straub (1970), avec notamment l'introduction de facteurs de poids qui permettent de prendre en considération les différences d'exposition au risque entre les classes.

Nous considérons un portefeuille de  $I$  classes de risque, avec  $X_{i,j}$  le ratio de sinistres de la classe  $i$  en l'année  $j$  et  $W_{i,j}$  le poids associé.  $Y_i$  est la variable aléatoire dont le profil de risque caractérisant le risque  $i$  est une réalisation. Les hypothèses du modèle de Bühlmann-Straub

sont alors les suivantes [18] :

- Conditionnellement à  $Y_i$ , les variables  $X_{i,j}$  sont indépendantes et nous avons  $E[X_{i,j}|Y_i] = \mu(Y_i)$  ainsi que  $Var[X_{i,j}|Y_i] = \frac{\sigma^2(Y_i)}{W_{i,j}}$
- Il y a indépendance des couples  $(Y_i, X_i)$  et les  $Y_i$  sont indépendants et identiquement distribués.

L'estimateur de crédibilité homogène est alors :

$$\widehat{\mu}(Y_i) = \alpha_i * X_i + (1 - \alpha_i) * \widehat{\mu}_0 \quad (3.10)$$

avec  $X_i = \sum_j \frac{W_{i,j}}{W_{i..}} * X_{i,j}$  ;  $W_{i..} = \sum_j W_{i,j}$  ;  $\widehat{\mu}_0 = \sum_i \frac{\alpha_i}{\alpha_i} * X_i$  et  $\alpha_i = \frac{W_{i..}}{W_{i..} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$

Nous nous posons alors la question du calcul des paramètres de structure  $\sigma^2$  et  $\tau^2$ . En notant  $W_{..} = \sum_{i,j} W_{i,j}$  et  $\widehat{X} = \sum_{i,j} \frac{W_{i,j}}{W_{..}} * X_{i,j}$  Bühlmann et Gisler proposent les estimateurs suivants :

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{I} * \sum_{i=1}^I \frac{1}{n-1} * \sum_{j=1}^n W_{i,j} * (X_{i,j} - X_i)^2 \quad (3.11)$$

$$\widehat{\tau}_{bis}^2 = c * \left( \frac{I}{I-1} * \sum_{i=1}^I \frac{W_{i..}}{W_{..}} * (X_i - \widehat{X})^2 - I * \frac{\widehat{\sigma}^2}{W_{..}} \right) \quad (3.12)$$

avec  $c = \frac{I-1}{I} * \frac{1}{\sum_{i=1}^I \frac{W_{i..}}{W_{..}} * (1 - \frac{W_{i..}}{W_{..}})}$  et nous conservons finalement l'estimateur  $\widehat{\tau}^2 = \max(0, \widehat{\tau}_{bis}^2)$ .

Ce dernier estimateur est donc biaisé, tandis que celui de  $\sigma^2$  est sans biais et consistant.

Nous allons désormais voir comment utiliser ces résultats dans le but de calculer des coefficients de développement de type Chain-Ladder plus précis.

#### 3.5.4.4 Théorie de la crédibilité pour Chain-Ladder

En se plaçant dans le cadre Bayésien pour Chain-Ladder et en notant  $C_{k,j}$  la charge pour l'année  $k$  en regardant l'année de développement  $j$ , nous avons les hypothèses suivantes [19] :

- Conditionnellement à  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{j-1})$  correspondant au vecteur de variables aléatoires dont les coefficients de Chain-Ladder inconnus sont supposés être des réalisations, il y a indépendance des années de survenance. C'est-à-dire que les charges  $C_{k,j}$ , avec  $k$  l'année de survenance variant de 0 à  $n$ , et  $j$  l'année de développement, sont des variables aléatoires conditionnellement à  $\lambda$ .
- Conditionnellement à  $\lambda$ , la distribution de  $\frac{C_{k,j+1}}{C_{k,j}}$  dépend seulement de  $C_{k,j}$  et nous avons  $E[\frac{C_{k,j+1}}{C_{k,j}}|\lambda] = \lambda_j$  ainsi que  $Var[\frac{C_{k,j+1}}{C_{k,j}}|\lambda] = \frac{\sigma_j^2(\lambda_j)}{C_{k,j}}$

Nous introduisons alors l'estimateur de Chain-Ladder présenté plus haut  $\widehat{\lambda}_j = \frac{S_j^{[n]}}{S_j^{[n-1]}}$ , avec  $S_j^{[n]} = \sum_{k=0}^n C_{k,j}$  et nous déduisons des hypothèses citées précédemment que  $E[\widehat{\lambda}_j|\lambda] = \lambda_j$  ainsi que  $Var[\widehat{\lambda}_j|\lambda] = \frac{\sigma_j^2(\lambda_j)}{S_j^{[n]}}$ .

Les hypothèses de Bühlmann-Straub sont vérifiées donc pour un risque fixé le résultat suivant est obtenu [20]:

$$\lambda_j^{red} = \alpha_j * \widehat{\lambda}_j + (1 - \alpha_j) * f_j \quad (3.13)$$

avec  $\widehat{\lambda}_j$  l'estimateur de Chain-Ladder décrit précédemment,  $f_j = E[\lambda_j]$  et  $\alpha_j = \frac{S_j^{[I-j-1]}}{S_j^{[I-j-1]} + \frac{\sigma_j^2}{\tau_j^2}}$

De plus, les paramètres de structure sont donnés par  $\sigma_j^2 = E[\sigma_j^2(\lambda_j)]$  et  $\tau_j^2 = Var(\lambda_j)$  pour lesquels il faut construire des estimateurs à partir de ce qui a été défini dans la partie précédente.

Nous notons  $i$  la classe de risque,  $j$  l'année de développement (qui va donc rester fixe puisque nous nous fixons sur le calcul d'un coefficient de développement), et  $k$  l'année de survenance. Nous avons à présent  $C_{i,k,j}$  la charge définie précédemment mais pour la classe de risque  $i$ . Alors  $W_{i,k,j} = C_{i,k,j}$ ;  $W_{i,..,j} = \sum_{k=0}^n C_{i,k,j} = S_{i,j}^{[n]}$  ainsi que  $W_{,..,j} = \sum_{i,k} (W_{i,k,j}) = \sum_i S_{i,j}^{[n]} = S_j^{[n]}$  et  $X_{i,k,j} = \frac{C_{i,k,j+1}}{C_{i,k,j}}$ ; nous avons donc :

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{I} * \sum_{i=1}^I \frac{1}{n-1} * \sum_{k=1}^n W_{i,k,j} * (X_{i,k,j} - X_{i,j})^2 \quad (3.14)$$

$$\widehat{\tau}_{bis}^2 = c * \left( \frac{I}{I-1} * \sum_{i=1}^I \frac{W_{i,..,j}}{W_{,..,j}} * (X_{i,j} - \widehat{X}_j)^2 - I * \frac{\widehat{\sigma}^2}{W_{,..,j}} \right) \quad (3.15)$$

Avec  $c = \frac{I-1}{I} * \frac{1}{(\sum_{i=1}^I \frac{W_{i,..,j}}{W_{,..,j}} * (1 - \frac{W_{i,..,j}}{W_{,..,j}}))}$ ;  $\widehat{X}_j = \sum_{i,k} \frac{W_{i,k,j}}{W_{,..,j}} * X_{i,k,j}$ ; et en utilisant aussi le fait que  $X_{i,j} = \sum_k \frac{W_{i,k,j}}{W_{i,..,j}} * X_{i,j,k} = \sum_k \frac{C_{i,k,j}}{S_{i,j}^{[n]}} * \frac{C_{i,k,j+1}}{C_{i,k,j}} = \frac{S_{i,j+1}^{[n]}}{S_{i,j}^{[n]}}$

Enfin, nous avons  $\hat{f}_j = \sum_i \frac{\alpha_{i,j}}{\alpha_{.,j}} * X_{i,j}$

### 3.5.4.5 Calcul du coefficient de développement

La première étape est la répartition des sinistres en classes. Il a été décidé plus haut d'établir ces classes selon le montant des sinistres. Nous distinguons donc une classe dite "normale" correspondant aux sinistres auxquels on s'attend le plus, et une classe "extrême" donnée par les sinistres au montant élevé, et donc théoriquement moins fréquents. La limite entre les deux est donnée par la moyenne de la charge totale des sinistres vue à l'année n si nous effectuons le développement entre les années n et n+1.

Cette séparation n'est pas idéale mis il est délicat de juger quel type de sinistre est le plus probable. Nous faisons donc ici une hypothèse : les sinistres au montant inférieur à la moyenne ont une probabilité de survenance plus forte. Cette hypothèse va être confrontée au calcul de crédibilité qui va ajuster le coefficient de développement en prenant en considération l'ensemble des sinistres.

Nous en voyons un exemple dans la figure 48 pour le passage de la cinquième à la sixième année de développement pour l'entité X en MTPL :

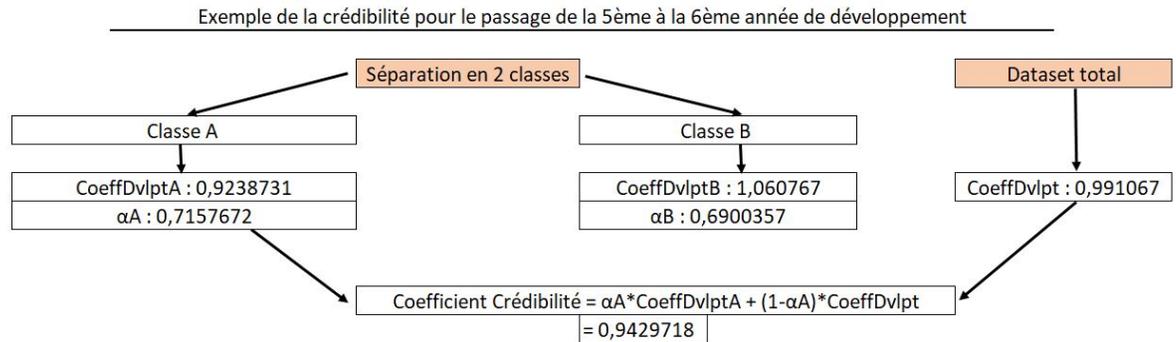


Figure 48: Application de la crédibilité dans le calcul du coefficient de développement entre la cinquième et la sixième année, MTPL entité X

L'utilisation de la crédibilité permet donc de donner un poids différent à la classe A et au dataset total. Nous avons alors un coefficient calculé avec la crédibilité qui prend bien en considération les spécificités des sinistres.

Cette méthode présente un désavantage car le choix de la séparation entre les classes est subjectif. La décision de prendre la moyenne ici pour définir un sinistre comme étant extrême pourrait être contestée, tandis que nous avons vu précédemment que les approches par la théorie des valeurs extrêmes posent des difficultés en terme d'automatisation. Nous verrons plus loin l'effet de cette méthode par rapport aux autres techniques possibles.

### 3.5.5 Lissage des résultats

Les sinistres considérés sont des sinistres à développement long, pour lesquels nous n'avons pas forcément une longueur d'historique suffisante. Il peut en effet arriver que le montant du sinistre ne soit toujours pas stabilisé plus de quinze ans après la survenance. Nous allons donc approximer la queue de distribution associée aux années manquantes de développement de Chain-Ladder en passant par des fonctions de lissage. En effet, ces fonctions vont approximer la courbe des coefficients de Chain-Ladder et nous pouvons d'ailleurs utiliser cette estimation par ces fonctions pour ajuster les coefficients.

#### 3.5.5.1 Théorie pour déterminer les paramètres des fonctions

Les fonctions communément utilisées pour approximer la queue de distribution sont des fonctions à deux paramètres. Nous étudions particulièrement les fonctions suivantes : exponentielle négative, puissance, Weibull, puissance inverse.

La première étape est la détermination des paramètres  $a$  et  $b$  propres à chaque fonction, permettant ensuite de paramétrer ces dernières et les appliquer pour le lissage.

Fonction exponentielle négative :  $f(j) = 1 + a \exp(-bj)$   
 $\rightarrow \ln(f(j) - 1) = \ln(a) - bj$

Fonction puissance :  $f(j) = a^{b^j}$  donc  $\ln(f(j)) = b^j \ln(a)$  par composition avec le logarithme. Nous composons une deuxième fois par le logarithme pour isoler  $a$  et  $b$ .  
 $\rightarrow \ln(\ln(f(j))) = j \ln(b) + \ln(\ln(a))$

Fonction de Weibull :  $f(j) = \frac{1}{(1 - \exp(-aj^b))}$  d'où  $f(j) - 1 = \exp(-aj^b)$ . Nous composons par le logarithme pour obtenir  $\ln(f(j) - 1) = \ln(f(j)) - aj^b$ , c'est-à-dire  $\ln\left(\frac{f(j)-1}{f(j)}\right) = -aj^b$   
 $\rightarrow \ln\left(\ln\left(\frac{f(j)-1}{f(j)}\right)\right) = -\ln(a) - b \ln(j)$

Fonction puissance inverse :  $f(j) = 1 + bj^{-a}$  que nous allons ici aussi composer par le logarithme.  
 $\rightarrow \ln(f(j) - 1) = \ln(b) - a \ln(j)$

En se servant des  $f(j)$  les coefficients de Chain-Ladder obtenus, et de  $j$  l'année de développement, nous pouvons déterminer les coefficients  $a$  et  $b$  par régression linéaire.

Plus précisément, la régression linéaire ne donne pas directement les estimations de  $a$  et  $b$ , il faut ensuite une petite manipulation.

Fonction de lissage	1er paramètre de la régression	2ème paramètre de la régression
Exponentielle négative	$\ln(a)$	$-b$
Puissance	$\ln(\ln(a))$	$\ln(b)$
Weibull	$-\ln(a)$	$-b$
Puissance inverse	$-a$	$\ln(b)$

Il suffit ensuite de composer par la fonction appropriée pour trouver directement  $a$  et  $b$ . Nous pouvons ensuite utiliser ceux-ci dans les fonctions de lissage pour approximer la distribution des coefficients de Chain-Ladder, et notamment visualiser la queue de distribution. Ayant accès à cette dernière, nous définissons manuellement un seuil à partir duquel il peut être considéré que les coefficients de Chain-Ladder valent 1.

### 3.5.5.2 Résultats du lissage

Pour visualiser l'effet introduit par l'approximation des coefficients par des fonctions continues à deux paramètres, nous allons afficher dans la figure 49 les coefficients obtenus par la méthode de crédibilité et les courbes associées par le lissage.

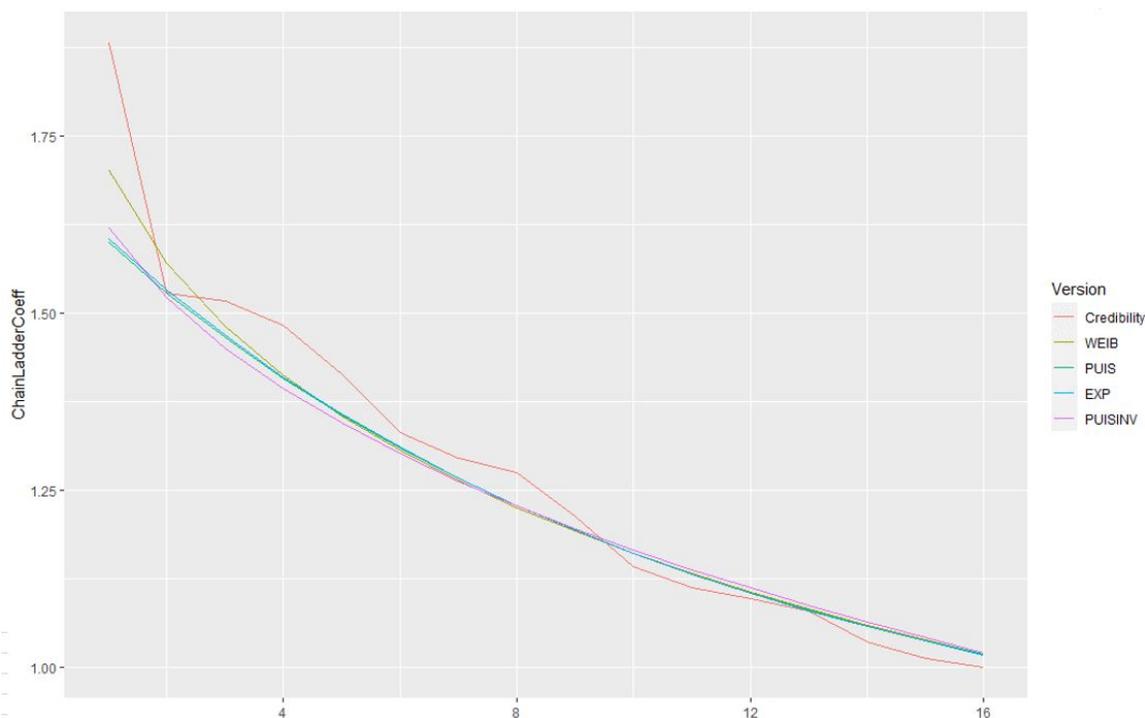


Figure 49: Application du lissage sur les coefficients obtenus par crédibilité

L'approximation par les fonctions est sous-estimée pour le premier facteur de développement, mais nous obtenons par la suite des résultats assez proches suivant la même tendance.

Le principal intérêt d'une telle méthode est de pouvoir projeter des facteurs de développement sur une durée plus longue que celle de l'historique. Toutefois, une autre technique sera

utilisée par la suite, se basant sur les cadences de paiements pour traiter ce problème au-delà de l'ultime.

### 3.5.6 Méthode finalement conservée

Le choix de la méthode qui doit être conservée s'appuie sur plusieurs facteurs. Nous regardons en effet la précision et la cohérence par rapport aux données et à la prise en charge des sinistres. Nous avons également une considération pratique. Ainsi, la méthode de détermination de seuil de type Mean Excess Plot doit être menée à la main alors que la construction d'un processus automatisé est souhaitée ici. De même, le recours à la crédibilité, à la pondération ou au lissage demande des choix ou jugements d'experts subjectifs quant à la meilleure configuration. C'est pourquoi une autre solution est introduite.

Dans la méthode finale, nous conservons le principe d'exclure les valeurs basses à l'aide du seuil de transmission des données sinistres par les entités. Ceci permet de ne pas prendre en compte les développements extrêmes vus notamment en situation de charges sous-estimées en première année. Ensuite, nous choisissons de ne pas adopter une méthode de type Chain-Ladder classique, mais de faire la moyenne des coefficients de développements individuels des sinistres. Il s'agit d'une méthode de Chain-Ladder simple,  $\alpha = 0$  dans la formule de Mack.

En notant  $C_{i,j}$  la charge du sinistre numéro  $i$  pour l'année de développement  $j$ , ainsi que nbSinistres le nombre de sinistres ayant un historique de montant pour les années  $j$  et  $j + 1$ , la méthode se formule ainsi :

$$\widehat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{nbSinistres} C_{i,j+1} * 1_{C_{i,j} > SeuilDclaration}}{\sum_{i=1}^{nbSinistres} 1_{C_{i,j} > SeuilDclaration} C_{i,j}}$$

En pratique, comme présenté dans la figure 50, nous procédons de la manière suivante en considérant seulement les sinistres dont la charge est supérieure au seuil inférieur correspondant au montant minimum de déclaration de l'entité.

Coefficients individuels de développement des sinistres					
AnnéeSurvenance	DEV1	DEV2	DEV3	DEV4	DEV5
2014	2,8	1,4	1,12	1,07	1
2015	2,3	1,5	1,2	1,05	
2016	2,5	1,3	1,1		
2017	1,9	1,24			
2018	3,1				
Moyenne des coefficients	2,52	1,36	1,14	1,06	1

Figure 50: Prise en compte de la moyenne des coefficients individuels

L'intérêt de cette méthode est qu'elle enlève le poids affecté du fait que le montant de sinistre soit plus ou moins élevé. Ici, tous les sinistres ont le même impact, et nous pouvons donc aussi conserver les sinistres au montant élevé. Auparavant, ceux-ci écrasaient en

quelque sorte les autres avec un coût beaucoup plus important. En choisissant cette procédure, nous considérons donc que seul le développement du sinistre compte, et non pas aussi son coût propre.

Voyons en figure 51 pour l'entité X sur la ligne de business MTPL où se situent les facteurs de développements conservés par rapport aux autres méthodes présentées.

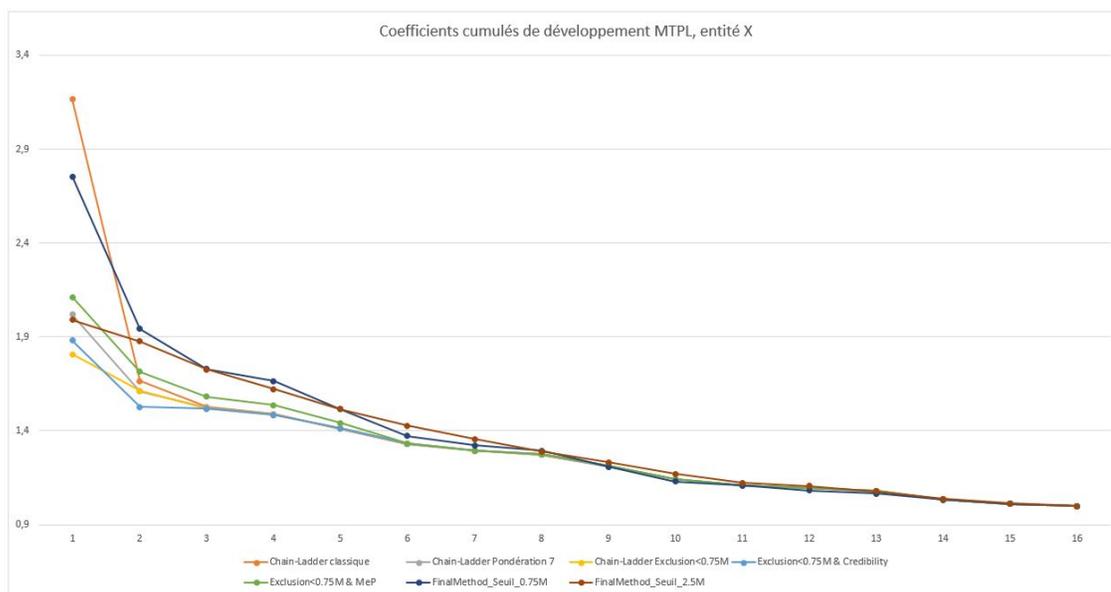


Figure 51: Comparaison des facteurs de développement selon la méthode considérée

Les différences entre les approches se situent principalement dans les six premières années de développement, et notamment sur la première. La méthode Chain-Ladder classique est particulièrement sévère. Nous observons également l'impact du choix du seuil dans la méthode finalement choisie : tous les sinistres ne sont pas conservés et les coefficients en sont modifiés.

Les conséquences se répercutent sur les charges ultimes, comme nous pouvons le voir dans la figure 52 sur les sinistres les plus récents ayant seulement une année de développement.

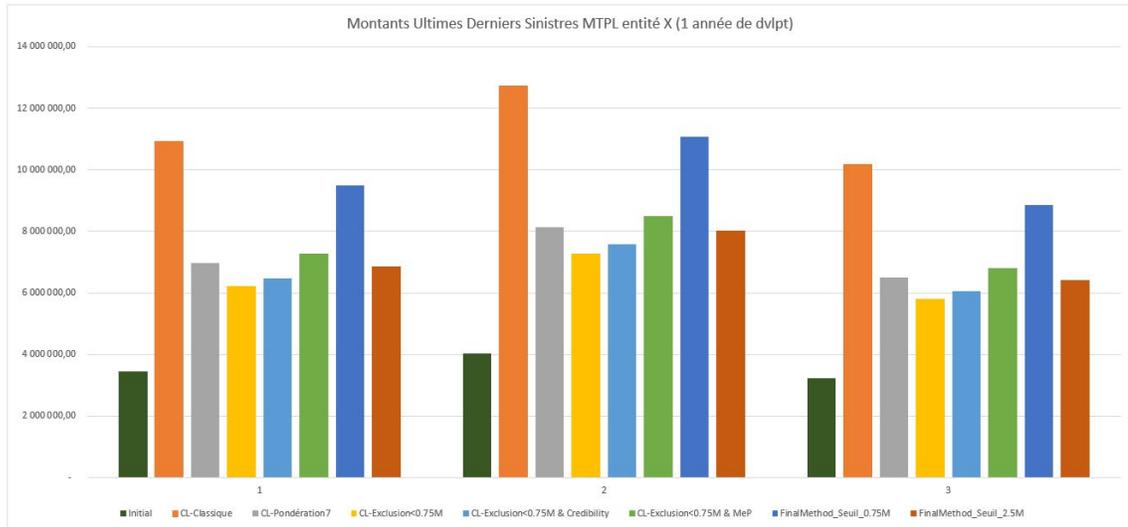


Figure 52: Comparaison des montants ultimes selon la méthode considérée

Nous retrouvons bien des montants de sinistres plus élevés avec la méthode de Chain-Ladder classique. Pour la méthode finalement conservée sur l'exemple de l'entité regardée, les résultats sont proches de ce qui est obtenu avec la crédibilité et l'application du Mean Excess Plot.

### 3.6 Traitement des réserves restantes

Après utilisation de la méthode de développement, nous avons une charge ultime finale. Cette approche a été effectuée sur les montants constitués de la somme des paiements mis en As-If et des réserves. Nous avons supposé que le montant des réserves était déjà déterminé en prenant en compte les effets futurs d'inflation. Cependant, une question se pose pour les réserves qui subsistent à l'année ultime. En effet, elles ne vont pas se transformer d'un coup en montants payés donc cela complique l'application de l'inflation sur ces montants en suspens. Une situation idéale serait alors de savoir quel montant de réserve va être payé à quel moment, pour lui appliquer l'indice d'inflation correspondant. Cette fois, la méthode de type Chain-Ladder ne peut pas être appliquée étant donné que la période que nous souhaitons développer se situe hors de l'horizon d'historique.

La mise en forme de la problématique se présente ainsi en figure 53 pour le premier sinistre de l'année 2005 :

YearSurvvenance	Compteur	Program	Statut	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	Ultime2021	
2005	1	MTPL_X	Paid	4 038	29 846	56 509	116 003	2 208 162	2 261 673	2 264 221	2 289 763	2 309 393	2 309 393	2 309 393	2 309 393	2 309 393	2 309 393	2 309 393	2 309 393	2 309 392	
		MTPL_X	Outstanding	3 374 450	3 378 522	3 368 109	3 394 366	534 967	481 455	478 907	457 916	437 588	437 588	437 588	437 588	389 000	389 000	389 000	389 000	389 000	389 000
		MTPL_X	Total	3 378 488	3 408 368	3 424 618	3 510 369	2 743 128	2 743 128	2 743 128	2 747 678	2 746 980	2 746 980	2 746 980	2 746 980	2 698 393	2 698 393	2 698 393	2 698 393	2 698 392	2 698 392

Paiement des réserves sur 30 ans								
YearSurvvenance	Compteur	Program	Statut	2021	2022	2023	2024	2025
2005	1	MTPL_X	Paid	2 309 392				
		MTPL_X	Outstanding	389 000				0
		MTPL_X	Total	2 698 392				

Hypothèse : Paid2022=Paid2021+As-If(Outstanding2022-Outstanding2021)  
 Donc Total2022=Total2021+As-If(Outstanding2022-Outstanding2021)-(Outstanding2022-Outstanding2021)  
 car la partie des réserves transformée en payés ne fait plus parti des réserves ensuite

Figure 53: Problématique de l'inflation et du développement de la réserve restante, sinistre 1 année 2005

Nous avons bien un montant restant en réserve. Nous supposons que celui-ci va se développer en montants payés, auxquels il faudra alors appliquer l'inflation.

Nous proposons deux méthodes pour développer les réserves restantes en payés.

- Considérer un transfert uniforme des réserves restantes en montants payés sur une période fixée. Les entités fournissent un fichier contenant les cadences de paiement, et celles-ci se font sur une durée donnée, le plus souvent de 30 ans. C'est donc cette valeur propre à chaque entité qui sera choisie pour l'horizon de temps.
- S'appuyer sur les cadences de paiement transmises par l'entité. C'est-à-dire reprendre les attentes de l'entités en terme de gestion des sinistres et les adapter pour une application sur les réserves toujours présentes.

Toujours en reprenant le premier sinistre de 2005, la première méthode se présente schématiquement de la façon suivante en figure 54 :

Méthode1 : Uniforme
2035-2021=14
389000/15=27786

YearSurvenance	Compteur	Program	Statut	2021	2022	....	2035
2005	1	MTPL_X	Paid	2 309 392	2 309 392 + As-If(27 786)	....	Montant payé final As-If
		MTPL_X	Outstanding	389 000	389 000 - 27 786	....	0
		MTPL_X	Total	2 698 392	Paid + Outstanding	....	Charge totale finale As-If

Figure 54: transfert uniforme des réserves restantes en montants payés

Chaque année entre 2022 et 2035, c'est le même montant qui est transféré des réserves restantes en payé, de manière à avoir une réserve finale nulle. Le choix de l'année 2035 est naturel puisqu'il correspond à l'horizon final dans la cadence de paiement prévue par l'entité.

La méthode 2 prenant en considération les cadences de paiement théoriques, nous prenons en figure 55 l'exemple de celle donnée par l'entité X pour le MTPL. Ceci permet de définir les coefficients de développement théoriques initialement prévus pour les années restantes :

Méthode2 : Cadence de paiement fournie par l'entité																														
Cadence	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MTPL_X X Pourcentage cumulé Payés	0,32%	2,84%	7,64%	11,13%	15,75%	22,95%	29,51%	32,63%	39,14%	43,28%	45,56%	50,81%	52,64%	55,22%	57,53%	63,85%	67,23%	70,48%	73,60%	76,61%	79,48%	82,23%	84,86%	87,35%	89,73%	91,98%	94,10%	96,10%	97,97%	100,00%
Pourcentage des réserves payées annuel																3,38%	3,25%	3,13%	3,00%	2,88%	2,75%	2,62%	2,50%	2,37%	2,25%	2,12%	2,00%	1,87%	2,03%	

Figure 55: Cadence de paiement, entité X, MTPL

De fait, nous pouvons en déduire les nouveaux pourcentages de paiement à attribuer en respectant l'évolution prévue au début par les cadences de paiement. Seules les années restantes prévues pour la cadence sont donc isolées, comme sur la figure 56.

Année	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	TotalCumulé
Cadence Cumulée initiale	67,23%	70,48%	73,60%	76,61%	79,48%	82,23%	84,86%	87,35%	89,73%	91,98%	94,10%	96,10%	97,97%	100,00%	
Cadence initiale	3,38%	3,25%	3,13%	3,00%	2,88%	2,75%	2,62%	2,50%	2,37%	2,25%	2,12%	2,00%	1,87%	2,03%	36,15%
Nouvelle cadence	9,34%	8,99%	8,65%	8,30%	7,95%	7,61%	7,26%	6,91%	6,57%	6,22%	5,87%	5,53%	5,18%	5,62%	100,00%

Figure 56: Transfert des réserves en payés selon la logique de cadence de paiement

Nous obtenons pour chaque année restante un pourcentage des réserves de l'année ultime devant être transformé en montant payé. La principale différence dans cet exemple par rapport à la méthode uniforme est qu'une part plus grande des réserves est transformée dans les premières années. Ceci évolue dégressivement, et nous avons donc une part assez faible pour les toutes dernières années.

La méthode uniforme pourrait être pratique si aucune information sur le développement théorique prévu par l'entité n'était fournie, mais seulement le nombre d'années à considérer. Etant donné que nous avons accès aux cadences de paiements, nous pouvons beaucoup mieux nous rapprocher des proportions envisagées par l'entité, et donc être plus proche de la réalité avec la deuxième méthode. La méthode des cadences de paiement théoriques est donc conservée.

## 3.7 IBNyR

Nous appelons IBNyR les sinistres déjà survenus mais dont nous n'avons pas encore connaissance au moment de l'utilisation des sinistres dans la modélisation et la tarification. Le développement des sinistres sous-estimés a été vu pour le moment, nous pouvons désormais voir comment prendre en compte ceux qui sont survenus mais non connus.

### 3.7.1 Problème rencontré

Plusieurs types de sinistres permettent de définir l'étendue des IBNyR. Nous pouvons par exemple penser à des sinistres tardifs dont l'assureur n'a pas encore connaissance de la survenance. Du fait de la structure et du rôle d'AGRe, une autre composante entre également en jeu. En effet, nous avons déjà vu que les données sinistres sont transmises par l'assureur seulement à partir du moment où la charge dépasse un certain seuil. Tant que la charge reste en dessous de ce seuil, le cessionnaire ne sait pas que ce sinistre existe : il s'agit donc d'un IBNyR jusqu'à ce que son montant soit supérieur au seuil.

Nous pouvons afficher ceci sur la figure 57 en regardant les années de survenance de 2008 à 2011 toujours pour l'entité X en MTPL, en considérant un seuil de 3 249 500€.

Charge totale des sinistres (seuil IBNyR : 3249500)																
YearSurvenance	Compteur	Program	Statut	DEV_Year1	DEV_Year2	DEV_Year3	DEV_Year4	DEV_Year5	DEV_Year6	DEV_Year7	DEV_Year8	DEV_Year9	DEV_Year10	DEV_Year11	DEV_Year12	DEV_Year13
2008	1	MTPL_X	Total	78 954	2 816 140	3 011 136	3 795 815	3 812 612	4 209 168	4 284 684	4 374 821	5 119 721	5 119 721	5 850 038	5 720 039	5 720 037
	2	MTPL_X	Total	4 581 432	6 319 882	6 351 788	6 326 554	6 341 149	6 568 961	6 889 586	7 508 824	7 508 824	7 919 596	7 919 596	6 701 621	6 701 620
	3	MTPL_X	Total	0	3 271 668	3 329 466	1 104 650	1 104 650	1 104 650	1 046 852	1 046 852	1 046 852	1 046 852	1 046 852	1 046 852	1 046 852
2009	1	MTPL_X	Total	673 922	4 193 427	4 358 397	4 350 526	4 393 315	4 844 555	5 039 601	5 042 160	5 354 160	5 720 011	5 857 623	5 887 804	
	2	MTPL_X	Total	1 798 850	2 140 619	2 738 048	3 019 133	3 269 839	3 561 415	3 663 725	3 715 725	3 715 335	3 754 335	3 791 679	4 095 376	
	3	MTPL_X	Total	1 703 352	2 728 917	4 782 643	5 413 800	5 416 389	5 507 354	5 635 760	6 023 762	6 162 873	6 514 353	6 426 078	6 445 001	
	4	MTPL_X	Total	0	2 060 254	2 087 576	2 207 864	2 237 446	2 397 618	2 469 541	2 585 910	2 630 182	3 052 888	2 952 382	3 774 385	
	5	MTPL_X	Total	0	4 882 345	4 880 747	5 268 008	6 455 822	6 458 765	4 863 590	5 167 050	4 911 920	4 872 456	5 032 441	5 035 498	
2010	1	MTPL_X	Total	2 001 077	2 555 520	2 607 700	2 587 379	2 789 484	2 823 784	3 403 148	3 422 436	3 422 436	3 623 514	3 690 457		
	2	MTPL_X	Total	656 280	3 908 100	3 875 880	4 355 768	4 355 888	4 356 369	4 924 534	4 924 535	6 156 246	6 156 246	6 261 187		
	3	MTPL_X	Total	0	0	0	331 712	1 173 462	1 169 692	1 316 592	1 308 545	2 696 100	4 016 553	4 671 265		
2011	1	MTPL_X	Total	767 871	4 053 545	4 813 658	4 487 127	3 128 949	3 131 549	3 129 286	3 129 284	3 129 287	3 017 093			
	2	MTPL_X	Total	1 003 777	3 448 833	3 707 219	3 443 134	3 837 868	3 844 368	4 328 655	4 378 543	4 774 230	4 774 230			
	3	MTPL_X	Total	650 230	3 252 049	3 589 217	4 430 083	6 014 758	6 953 394	6 028 503	6 028 503	6 139 668	6 215 372			
	4	MTPL_X	Total	0	1 300 925	2 646 986	2 956 577	4 053 356	4 183 544	4 242 394	5 337 342	5 710 758	5 776 301			

Statut des sinistres : IBNyR (0) ou déjà connu (1)																
YearSurvenance	Compteur	Program	Statut	DEV_Year1	DEV_Year2	DEV_Year3	DEV_Year4	DEV_Year5	DEV_Year6	DEV_Year7	DEV_Year8	DEV_Year9	DEV_Year10	DEV_Year11	DEV_Year12	DEV_Year13
2008	1	MTPL_X	Total	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	MTPL_X	Total	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	3	MTPL_X	Total	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2009	1	MTPL_X	Total	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	MTPL_X	Total	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	3	MTPL_X	Total	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	4	MTPL_X	Total	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	5	MTPL_X	Total	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2010	1	MTPL_X	Total	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	MTPL_X	Total	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	3	MTPL_X	Total	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1		
2011	1	MTPL_X	Total	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
	2	MTPL_X	Total	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
	3	MTPL_X	Total	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
	4	MTPL_X	Total	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1		

Figure 57: Sinistres assimilés à des IBNyR du point de vue historique

Nous voyons bien que cette problématique est réelle puisque pour chaque année de survénance, ce sont plusieurs sinistres qui sont dans ce cas. Pour les années 2009, 2010 et 2011, c'est l'intégralité des sinistres qui n'était pas connue la première année.

Nous pouvons penser que les années de survénance anciennes vont moins être touchées par de nouveaux IBNyR. Suffisamment de recul a été accumulé : les sinistres au montant initialement faible ont assez d'années de développement pour passer au-dessus du seuil si le coût est assez élevé. A l'inverse, des années très récentes sont susceptibles de cacher encore aujourd'hui des sinistres fortement sous-estimés qui pourraient entrer dans les calculs à l'avenir. Ceux-ci existeront plus tard donc il s'agit de les estimer.

### 3.7.2 Intégrer ces sinistres à l'approche historique

Plusieurs méthodes permettraient d'utiliser ces nouveaux sinistres. Nous pourrions penser tout d'abord à mettre en place un estimateur de leur fréquence ainsi qu'un estimateur du coût, c'est-à-dire de la sévérité. Le problème de cette méthode est qu'elle s'approche d'une vision modélisée, pour laquelle de nouveaux sinistres seraient en quelque sorte créés et dont les montants seraient fictifs. Or, comme nous l'avons précisé à la fin du deuxième chapitre, il existe déjà une vision modélisée pour la tarification, à laquelle la vision historique est justement comparée. Nous allons donc chercher à rester le plus proche possible des données et méthodes purement historiques.

C'est pourquoi ces IBNyR seront plutôt considérés comme une mesure d'exposition, de façon similaire aux EPI et accidents de la route, dans le cadre de la responsabilité civile

automobile. Ainsi, nous "n'inventons" pas de sinistres aux coûts aléatoires.

Pour mettre en place ce choix, le comportement historique des IBNyR est considéré, c'est à dire leur nombre, le pourcentage qu'ils représentent chaque année, ou encore la charge finale correspondant à ces sinistres par rapport à la charge totale. Nous pouvons ainsi déterminer pour les années récentes le poids attendu du fait de ces sinistres particuliers. Les années anciennes auront un poids égal à 1 pour cet indice puisque nous avons déjà vu qu'elles ne sont pas susceptibles de voir apparaître de nouveaux sinistres aujourd'hui. Une méthode de type Chain-Ladder est aussi développée sur l'évolution du nombre de sinistres connus.

Pour avoir le point de vue pratique, reprenons les sinistres de 2008 à 2011 pour l'entité X et regardons figure 58 les indicateurs propres aux IBNyR qui peuvent être calculés. Nous affichons en orange foncé les IBNyR, et en orange clair les indices pour la troisième année de développement car c'est celle-ci qui servira d'exemple d'application.

Charge totale des sinistres (seuil IBNyR : 3249500)																
YearSurvénance	Compteur	Program	Statut	DEV_Year1	DEV_Year2	DEV_Year3	DEV_Year4	DEV_Year5	DEV_Year6	DEV_Year7	DEV_Year8	DEV_Year9	DEV_Year10	DEV_Year11	DEV_Year12	DEV_Year13
2008	1	MTPL_X	Total	78 954	2 816 140	3 011 136	3 795 815	3 812 612	4 209 168	4 284 684	4 374 821	5 119 721	5 119 721	5 850 038	5 720 039	5 720 037
	2	MTPL_X	Total	4 581 432	6 319 882	6 351 788	6 326 554	6 341 149	6 568 961	6 889 586	7 508 824	7 508 824	7 919 596	7 919 596	6 701 621	6 701 620
	3	MTPL_X	Total	0	3 271 668	3 329 466	1 104 650	1 104 650	1 104 650	1 046 852	1 046 852	1 046 852	1 046 852	1 046 852	1 046 852	1 046 852
2009	1	MTPL_X	Total	673 922	4 193 427	4 358 397	4 350 526	4 393 315	4 844 555	5 039 601	5 042 160	5 354 160	5 720 011	5 857 623	5 887 804	
	2	MTPL_X	Total	1 798 850	2 140 619	2 738 048	3 019 133	3 269 839	3 561 415	3 663 725	3 715 725	3 715 335	3 754 335	3 791 679	4 095 376	
	3	MTPL_X	Total	1 703 352	2 728 917	4 782 643	5 413 800	5 416 389	5 507 354	5 635 760	6 023 762	6 162 873	6 514 353	6 426 078	6 445 001	
	4	MTPL_X	Total	0	2 060 254	2 087 576	2 207 864	2 237 446	2 397 618	2 469 541	2 585 910	2 630 182	3 052 898	2 952 382	3 774 385	
	5	MTPL_X	Total	0	4 882 345	4 880 747	5 268 008	6 455 822	6 458 765	4 863 590	5 167 050	4 911 920	4 872 456	5 032 441	5 035 498	
2010	1	MTPL_X	Total	2 001 077	2 555 520	2 607 700	2 587 379	2 789 484	2 823 784	3 403 148	3 422 436	3 422 436	3 623 514	3 690 457		
	2	MTPL_X	Total	656 280	3 908 100	3 875 880	4 355 768	4 355 888	4 356 369	4 924 534	4 924 535	6 156 246	6 156 246	6 261 187		
	3	MTPL_X	Total	0	0	0	331 712	1 173 462	1 169 692	1 316 592	1 308 545	2 696 100	4 016 553	4 671 265		
2011	1	MTPL_X	Total	767 871	4 053 545	4 813 658	4 487 127	3 128 949	3 131 549	3 129 286	3 129 284	3 129 287	3 017 093			
	2	MTPL_X	Total	1 003 777	3 448 833	3 707 219	3 443 134	3 837 868	3 844 368	4 328 655	4 378 543	4 774 230	4 774 230			
	3	MTPL_X	Total	650 230	3 252 049	3 589 217	4 430 083	6 014 758	6 953 394	6 028 503	6 028 503	6 139 668	6 215 372			
	4	MTPL_X	Total	0	1 300 925	2 646 986	2 956 577	4 053 356	4 183 544	4 242 394	5 337 342	5 710 758	5 776 301			
Nombre moyens d'IBNyR				3,5	1,75	1,50	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0	0
Pourcentage moyen d'IBNyR				91,7%	46,3%	41,3%	24,6%	13%	13%	13%	13%	13%	5%	5%	0%	0%
Pourcentage de la charge finale représentée par IBNyR				87,6%	46,4%	40,0%	23,1%	11,7%	11,7%	11,7%	11,7%	11,7%	3,7%	3,7%	0%	0%
Coefficients Chain-Ladder fréquence				2	1,125	1,222	1,182	1	1	1	1	1,077	1,000	1,000	1,143	1
Coefficients Chain-Ladder cumulés				4	2	1,78	1,455	1,231	1,231	1,231	1,231	1,231	1,143	1,143	1,143	1

Figure 58: Comportement annuel des IBNyR

Nous voyons bien que les indicateurs atteignent des niveaux plus élevés pour les toutes premières années de développement. Pour cet exemple précis, les paramètres calculés semblent suivre des tendances similaires, les trois premiers devant toutefois encore être ajustés pour obtenir l'indice réel.

Nous affichons ensuite figure 59 les sinistres de l'année 2018, qui serviront de base au calcul des récupérations pour cette année. Ces sinistres possèdent déjà trois années de développement, ils vont donc bien être concernés par les indices en orange clair ci-dessus.

				DEV_Year1	DEV_Year2	DEV_Year3
2018	1	MTPL_X	Total	1 101 431	4 064 462	4 073 998
	2	MTPL_X	Total	0	2 506 385	756 135
	3	MTPL_X	Total	0	4 010 352	1 275 909

		Indice d'exposition
Méthode 1		On a déjà 3 sinistres, donc $(3+1,5)/3=1,5$
Nb moyen de sinistres associé à la dernière année de développement : 1,5		
Méthode 2		$1/(1-41,3\%)=1,704$
Pourcentage moyen associé à la dernière année de développement : 41,3%		
Méthode 3		$1/(1-40\%)=1,667$
Pourcentage moyen de charge associé à la dernière année de développement : 40%		
Méthode 4		1,778
Utilisation des coefficients de Chain-Ladder		

Figure 59: Comparaison des méthodes d'application des IBNyR

La première méthode donne le nombre de sinistres qu'il faudrait "ajouter", la deuxième le pourcentage moyen d'IBNyR attendus pour cette année de développement. La troisième approche est similaire à la deuxième mais en raisonnant sur le pourcentage de charge finale annuelle que les IBNyR représentent. Pour le raisonnement de type Chain-Ladder, nous effectuons pour chaque année de développement le rapport entre le nombre de sinistres connus pour l'année de développement  $n+1$  et ce même nombre pour l'année  $n$ . Nous notons qu'une hypothèse est faite : chaque année de survenance a au moins un sinistre connu dans les calculs. Ces quatre indices possibles, bien que calculés de manières différentes donnent des résultats assez proches dans cet exemple. Cela est dû au fait que nous considérons le passage de la troisième à la quatrième année de développement, qui n'est pas le plus affecté, mais aussi parce que nous considérons quatre années de survenance comme historique. Voyons les résultats dans la figure 60 sur tout l'historique :

**Calculs sur tout l'historique**

		DEV_Year1	DEV_Year2	DEV_Year3	DEV_Year4	DEV_Year5
Méthode 1	Nombre moyens d'IBNyR	4,42	2,75	2,25	1,83	1,33
Méthode 2	Pourcentage moyen d'IBNyR	84,13%	49,34%	42,12%	35,33%	22,41%
Méthode 3	Pourcentage de la charge finale représentée par IBNyR	79,87%	49,09%	40,74%	32,21%	23,45%
Méthode 4	Coefficients de Chain-Ladder cumulés	4,55	2,50	2,09	1,84	1,61

Indice d'inflation pour utilisation sur les 3 sinistres de 2018		
	Exposition 2008-2011	Exposition sur tout l'historique
Méthode 1	On a déjà 3 sinistres, donc $(3+1,5)/3=1,5$	On a déjà 3 sinistres, donc $(3+2,25)/3=1,75$
Méthode 2	1,704	$1/(1-42,12\%)=1,728$
Méthode 3	1,667	$1/(1-40,74\%)=1,687$
Méthode 4	1,778	2,091

Figure 60: Résultat de l'application des méthodes sur tout l'historique

Nous remarquons déjà des différences plus marquées entre les méthodes, en particulier pour

les toutes premières années de développement. La première approche est toujours plus difficile à comparer étant donné sa dépendance envers les sinistres déjà déclarés. En réduisant l'historique, les années les plus impactées par ce phénomène ne sont pas considérées, c'est pourquoi nous avons des valeurs plus élevées pour les indices en prenant toutes les années de survenance.

Une fois la mesure d'exposition annuelle déterminée, elle peut être combinée aux autres données d'exposition pour obtenir un unique indice d'inflation en terme d'exposition. Ce paramètre sera ensuite appliqué au niveau des récupérations comme expliqué dans la partie 3.2.2. Dans la suite de ce mémoire, c'est la méthode de type Chain-Ladder sur le nombre de sinistres connus qui a été sélectionnée car cette approche se concentre sur les sinistres qui seront connus à l'avenir.

## 3.8 Clause de stabilisation

Mettre en place la clause de stabilisation nécessite de calculer deux montants ultimes de sinistres : un premier de façon simple identique à ce qui a été décrit dans l'ensemble de ce chapitre, et un deuxième similaire mais incluant les conditions propres à la clause que nous voulons insérer. Cette clause s'applique uniquement sur les montants payés, ce qui est bien le cas ici, et les sinistres sont développés jusqu'à l'obtention d'une réserve nulle. Nous formaliserons tout d'abord ces deux montants de façon théorique, puis nous verrons de façon plus visuelle comment cela s'organise pour les sinistres étudiés.

### 3.8.1 Montant du sinistre sans clause

Etant donné que la clause va s'appliquer à chaque sinistre indépendamment des autres, nous allons formaliser le montant final d'un unique sinistre. Cette méthode doit ensuite être reportée de façon identique sur tous les sinistres constituant la base d'historique permettant la tarification.

Nous introduisons les variables suivantes :

- $P_i$ , l'incrément de paiement de l'année  $i$ .
- *Ultime*, le nombre de développements maximal dans l'ensemble des sinistres connus pour ce programme de réassurance.
- $CMD=(CMD_1, CMD_2, \dots, CMD_{Ultime-1})$ , la liste des coefficients cumulés de la méthode de développement. Avec donc  $CMD_j$  le coefficient pour passer du montant de l'année  $j$  jusqu'au montant ultime.
- $k$ , le nombre de développements connus pour le sinistre.
- *AsIf*, l'année de mise en *As-If* des sinistres.
- *UWY*, l'année de survenance du sinistre.

- nbCadence, le nombre de paiements théorique prévu par l'entité pour avoir une réserve finale nulle. (nbCadence > k)
- PCad = (A<sub>Ultime+1</sub>, A<sub>Ultime+2</sub>, ..., A<sub>nbCadence</sub>), la liste des pourcentages de paiements normalisés, se basant sur la cadence de paiement pour les années au-delà de l'ultime.
- R<sub>k</sub>, la réserve pour le k-ème développement du sinistre.
- R, la réserve développée à l'ultime.
- I, l'indice de référence pour l'inflation

La première étape est la mise en As-If des incréments de paiement pour chaque année de développement ainsi que l'application de la méthode de développement pour atteindre un montant ultime.

$$Step1 = CMD_k * (R_k + \sum_{i=1}^k P_i * \frac{I_{AsIf+i-1}}{I_{UWY+i-1}})$$

La deuxième étape demande de regarder la réserve restante et de la transformer progressivement en montant payé auquel l'inflation est appliquée.

$$Step2 = Step1 + \sum_{j=Ultime+1}^{nbCadence} R * A_j * (\frac{I_{AsIf+j}}{I_{UWY+j}} - 1)$$

Dans cette dernière expression, nous avons bien un "-1" dans la somme puisque le montant transféré en payé doit être enlevé des réserves. Le montant final du sinistre est donc :

$$Amount1 = CMD_k * (R_k + \sum_{i=1}^k P_i * \frac{I_{AsIf+i-1}}{I_{UWY+i-1}}) + \sum_{j=Ultime+1}^{nbCadence} R * A_j * (\frac{I_{AsIf+j}}{I_{UWY+j}} - 1)$$

Un élément n'est pas pris en compte dans cette formule : les sinistres clos. En effet, nous procédons ainsi pour les sinistres actifs, mais si le sinistre est renseigné comme étant clos, alors il ne doit pas être développé et sa réserve finale est déjà nulle. Dans ce cas, seulement la mise en As-If est appliquée.

$$\text{Pour un sinistre qualifié de "clos", } Amount1 = \sum_{i=1}^k P_i * \frac{I_{AsIf+i-1}}{I_{UWY+i-1}}$$

Nous avons détaillé ici le montant du sinistre sans application de la clause de stabilisation, reprenant ainsi les éléments exposés dans le chapitre 3 de ce mémoire. Nous allons voir désormais les modifications induites par l'inclusion de la clause de stabilisation.

### 3.8.2 Montant du sinistre avec clause

Dans le cadre de la clause de stabilisation, les notations introduites dans la partie précédente vont être reprises. Toutefois, nous n'allons plus utiliser la liste CMD des coefficients cumulés mais plutôt la liste des coefficients de passage annuels MD = (MD<sub>1</sub>, MD<sub>2</sub>, ..., MD<sub>Ultime-1</sub>). De plus, nous avons cette fois une indicatrice, 1<sub>C</sub> égale à 1 si l'évolution de l'indice cité dans le traité est inférieure au seuil fixé dans le traité, et égale à 0 si elle est supérieure au seuil. Parallèlement, on a l'indicatrice 1<sub>NC</sub> = 1 - 1<sub>C</sub>. Nous allons noter à présent Ind l'indice précisé pour la clause de stabilisation. Ce dernier peut être différent de l'indice I de mise en

As-If, et choisir le même indice entraîne des simplifications.

La première étape est la mise en As-If des sinistres, qui cette fois ne s'applique pas exactement comme dans la partie ci-dessus. Nous reprenons le fonctionnement dû à la clause de stabilisation décrit dans le chapitre 1 et donc :

$$Step1 = R_k + \sum_{i=1}^k P_i * \left( \frac{I_{AsIf+i-1}}{I_{UWY+i-1}} * 1_C + \frac{I_{AsIf+i-1}}{I_{UWY+i-1}} * \frac{Ind_{AsIf}}{Ind_{AsIf+i-1}} * 1_{NC} \right)$$

Dans le terme entre parenthèses, la composante  $\frac{I_{AsIf+i-1}}{I_{UWY+i-1}} * 1_C$  correspond à une mise en As-If habituelle dans le cas où la clause ne s'applique pas.

La partie  $\frac{I_{AsIf+i-1}}{I_{UWY+i-1}} * \frac{Ind_{AsIf}}{Ind_{AsIf+i-1}} * 1_{NC}$  est employée quand la clause est effective, en ramenant le paiement comme s'il était effectué à l'année de survenance puis considéré comme s'il survenait en l'année AsIf.

Choisir comme indice I le même indice que Ind impliquerait une simplification directe de la formule :

$$Step1bis = R_k + \sum_{i=1}^k P_i * \left( \frac{I_{AsIf+i-1}}{I_{UWY+i-1}} * 1_C + \frac{I_{AsIf}}{I_{UWY+i-1}} * 1_{NC} \right)$$

Nous observons à présent les développements année par année. Considérons un  $n$  fixé tel que  $n \in [k; Ultime - 1]$ . Soit  $X_n$  la charge As-If de l'année  $n$ , alors :

$$X_{n+1} = X_n + (MD_n * X_n - X_n) * \left( 1_C + \frac{Ind_{AsIf}}{Ind_{AsIf+n+1}} * 1_{NC} \right)$$

Dans cette formule, la partie  $MD_n * X_n - X_n$  correspond à l'incrément de charge totale sur les valeurs As-If dû au développement entre les années  $n$  et  $n + 1$ .

La partie  $1_C + \frac{Ind_{AsIf}}{Ind_{AsIf+n+1}} * 1_{NC}$  permet de choisir si la clause de stabilisation s'applique ou non. Les montants  $X_n$  ont subi une mise en As-If auparavant, et sont développés à partir de coefficients de développements  $MD_n$  qui prennent déjà en compte l'inflation de l'année  $n$  à l'année  $n+1$ . Nous avons donc une vision à l'année AsIf+n+1 en terme d'inflation pour ces incréments. Une hypothèse forte est utilisée ici puisque nous supposons l'indépendance des années de survenance, comme vu en présentant la méthode de Chain-Ladder.

Nous n'avons donc pas besoin d'appliquer un nouveau facteur supplémentaire d'inflation pour les parties non-impactées par la stabilisation : elle est déjà appliquée implicitement. Pour les incréments entrant dans le cadre de la stabilisation, les effets d'inflation doivent être contrebalancés en utilisant l'indice de la clause : Ind.

$$\text{Par souci de lisibilité, nous notons } Infla_{n+1} = 1_C + \frac{Ind_{AsIf}}{Ind_{AsIf+n+1}} * 1_{NC}.$$

$$\text{Nous avons donc } X_{n+1} = X_n * (1 + MD_n * Infla_{n+1} - Infla_{n+1}).$$

$$\text{Et alors } X_{n+1} = X_n * (1 + Infla_{n+1} * (MD_n - 1))$$

Selon le même processus,

$$X_{n+2} = X_{n+1} * (1 + Infla_{n+2} * (MD_{n+1} - 1))$$

En injectant l'expression de  $X_{n+1}$ , nous obtenons :

$$X_{n+2} = X_n * (1 + Infla_{n+1} * (MD_n - 1)) * (1 + Infla_{n+2} * (MD_{n+1} - 1))$$

De façon plus générale, finalement :

$$Step2 = Step1 * \prod_{j=k}^{Ultime-1} (1 + [1_C + \frac{Ind_{AsIf}}{Ind_{AsIf+j+1}} * 1_{NC}] * (MD_j - 1))$$

Enfin, nous retrouvons la troisième étape qui correspond au développement des réserves restantes à l'ultime. Le fonctionnement est presque le même que dans la méthode sans clause de stabilisation, excepté que la mise en As-If diffère selon l'évolution d'inflation.

$$Amount2 = Step2 + \sum_{l=Ultime+1}^{nbCadence} R * A_l * (\frac{I_{AsIf+l}}{I_{UWY+l}} * 1_C + \frac{I_{AsIf+l}}{I_{UWY+l}} * \frac{Ind_{AsIf}}{Ind_{AsIf+l}} * 1_{NC} - 1)$$

Nous avons Amount2 qui est le montant calculé dans le cadre de l'application de la clause de stabilisation, avec à nouveau une simplification qui serait directe dans le cas I=Ind. Encore une fois, il faut tout de même traiter le cas des sinistres clos à part.

$$\text{Pour un sinistre clos, } Amount2 = R_k + \sum_{i=1}^k P_i * (\frac{I_{AsIf+i-1}}{I_{UWY+i-1}} * 1_C + \frac{I_{AsIf+i-1}}{I_{UWY+i-1}} * \frac{Ind_{AsIf}}{Ind_{AsIf+i-1}} * 1_{NC})$$

Avoir les deux données Amount1 et Amount2 permet de calculer les nouvelles bornes du traité, ce qui servira ensuite notamment au moment de calculer les récupérations puis les indicateurs historiques introduits dans le chapitre 2.

### 3.8.3 Exemple pratique : Sinistre final avec et sans application de la clause

Illustrons la formulation des parties précédentes pour voir comment la clause appliquée se met en place d'un point de vue pratique. Nous choisissons tout d'abord un sinistre fictif actif pour lequel l'application d'une méthode de développement sera impactante. Ceci permettra de bien observer les effets au moment de la mise en As-If de la partie connue historiquement, au niveau de la méthode de développement puis de l'épuisement des réserves restantes. Nous supposons dans cet exemple que I=Ind, c'est à dire l'indice de mise en As-If est le même que l'indice utilisé pour la clause de stabilisation.

Le sinistre fictif choisi pour illustrer le processus est donné figure 61 :

Statut	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Paid	3 875	23 728	44 238	90 002	1 699 355	1 740 518	1 742 478	1 762 125	1 777 225
Outstanding	2 596 500	2 599 632	2 591 622	2 611 820	412 282	371 119	369 159	353 012	337 375
<b>Total</b>	<b>2 600 375</b>	<b>2 623 360</b>	<b>2 635 860</b>	<b>2 701 822</b>	<b>2 111 637</b>	<b>2 111 637</b>	<b>2 111 637</b>	<b>2 115 137</b>	<b>2 114 600</b>

Figure 61: Sinistre initial auquel sera appliqué la clause de stabilisation

Nous allons désormais voir figure 62 l'application de la clause au moment de la mise en As-If de la partie déjà connue. Nous affichons en vert les coefficients d'inflation correspondant à une mise en As-If classique. En rose, nous avons les années pour lesquelles l'évolution d'inflation est supérieure au seuil fixé par le traité : 20%. Les incréments de ces années sont alors ramenés à l'année de mise en As-If fixée initialement, 2021 ici. Les années en vue 2021 sont affichées en jaune.

### Mise en As-If de la partie connue

	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Asif-Inflation	1,300	1,290	1,281	1,273	1,265	1,257	1,250	1,243	1,237

	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
<b>Statut</b>									
Paid	5 038	30 654	56 933	115 178	2 150 536	2 202 284	2 204 734	2 229 160	2 247 836
Outstanding	2 596 500	2 599 632	2 591 622	2 611 820	412 282	371 119	369 159	353 012	337 375
<b>Total</b>	<b>2 601 538</b>	<b>2 630 286</b>	<b>2 648 555</b>	<b>2 726 998</b>	<b>2 562 818</b>	<b>2 573 403</b>	<b>2 573 893</b>	<b>2 582 172</b>	<b>2 585 211</b>

Sans stabilisation

	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Delta-Index	0%	3%	7%	10%	13%	17%	20%	23%	27%
Asif-Inflation	1,300	1,290	1,281	1,273	1,265	1,257	1,08	1,05	1,03

	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
<b>Statut</b>									
Paid	5 038	30 654	56 933	115 178	2 150 536	2 202 284	2 204 407	2 225 116	2 240 613
Outstanding	2 596 500	2 599 632	2 591 622	2 611 820	412 282	371 119	369 159	353 012	337 375
<b>Total</b>	<b>2 601 538</b>	<b>2 630 286</b>	<b>2 648 555</b>	<b>2 726 998</b>	<b>2 562 818</b>	<b>2 573 403</b>	<b>2 573 566</b>	<b>2 578 128</b>	<b>2 577 988</b>

Avec stabilisation

Figure 62: Mise en As-If avec et sans clause de stabilisation

Les montants payés se situant dans les premières années de développement, la clause a peu d'impact ici. Les incréments à partir de 2018 sont tout de même concernés, ce qui explique la différence finale puisque trois années de développement sont dans cette situation.

Pour regarder l'application au niveau de la méthode de développement, nous remarquons que neuf développements sont déjà connus. En considérant un historique sur dix-sept années dans nos données, il manque donc huit développements pour atteindre l'ultime, ce qui se fait à partir des coefficients de la méthode de développement. Nous regardons dans un premier temps en figure 63 la méthode sans stabilisation, c'est à dire à partir des coefficients de développement cumulés. L'inflation est alors prise en compte dans les coefficients de la méthode de développement.

On connaît déjà 9 années de développement

	coeff9	coeff10	coeff11	coeff12	coeff13	coeff14	coeff15	coeff16
Coefficient Dvlpt Cumulé	1,80	1,50	1,30	1,20	1,10	1,05	1	1
Coefficient Dvlpt Réserves Cumulé	0,75	0,85	0,90	0,94	0,97	0,99	1	1

	2020	2028-Ultime
<b>Statut</b>		
Paid	2 247 836	4 400 349
Réserves restantes	337 375	253 031
<b>Total</b>	<b>2 585 211</b>	<b>4 653 380</b>

Sans stabilisation

Figure 63: Méthode de développement sans clause de stabilisation

Nous obtenons directement les montants payés ultimes, sans besoin de mise en As-If supplémentaire étant donné que l'inflation est incluse dans les coefficients de développement et que l'indépendance des années de survenance est supposée. Nous avons aussi les réserves

restantes ultimes auxquelles appliquer le processus d'épuisement des réserves.

Au moment de procéder dans le cadre de la stabilisation effective, ce sont les coefficients de développement non-cumulés qui sont utilisés. La différence entre le montant de l'année n et celui de l'année n+1 est donnée par l'application de ce coefficient. Si le delta d'inflation est supérieur à 20%, nous devons de plus appliquer à cette différence de montant l'indice d'inflation de stabilisation pour ramener la valeur de l'incrément en vue 2021. Voici les résultats sur la figure 64.

		coeff9	coeff10	coeff11	coeff12	coeff13	coeff14	coeff15	coeff16
Coefficient Dvlpt		1,20	1,15	1,08	1,09	1,05	1,05	1	1
Coefficient Dvlpt Réserves		0,88	0,94	0,96	0,97	0,98	0,99	1	1

		2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028
Delta-Index		30%	33%	37%	40%	43%	47%	50%	53%
Inflation stabilisation		1,000	0,975	0,951	0,929	0,907	0,886	0,867	0,848

Avec stabilisation

Statut	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028-Ultime
<b>Paid</b>	2 240 613	2 795 902	3 276 478	3 570 449	3 902 899	4 087 998	4 283 054	4 283 054	4 283 054
<b>Réserves restantes</b>	337 375	297 684	281 146	269 182	260 857	255 587	253 031	253 031	253 031
<b>Total</b>	<b>2 577 988</b>	<b>3 093 586</b>	<b>3 557 624</b>	<b>3 839 631</b>	<b>4 163 756</b>	<b>4 343 586</b>	<b>4 536 085</b>	<b>4 536 085</b>	<b>4 536 085</b>

Figure 64: Méthode de développement avec clause de stabilisation

Nous ne nous plaçons pas dans une mise en As-If classique car tous les deltas sont supérieurs à 20%. Tous les incréments calculés sont ramenés à 2021. Nous observons que tous les coefficients d'inflation sont inférieurs ou égaux à 1, car l'inflation est croissante et parce que nous considérons des incréments des années 2022,2023, 2024,...etc. pour les ramener en 2021. La différence avec la méthode sans stabilisation est assez marquée.

L'inflation n'est pas appliquée aux réserves puisque nous avons estimé en première approche que seuls les payés doivent être inflatés. Cela explique pourquoi nous avons le même montant de réserves ultimes avec et sans clause de stabilisation. En effet, utiliser le coefficient de développement cumulé, ou prendre en compte successivement les coefficients de développements annuels, constituent le même calcul. Nous aurions immédiatement la même idée sur les montants payés si les deltas étaient inférieurs à 20% puisque que nous considérons à ce moment là uniquement l'inflation assumée dans les coefficients de développement.

Pour le traitement des réserves, nous introduisons les cadences de paiement qui sont les mêmes pour les deux méthodes : la différence est que ce sont deux inflations différentes qui seront appliquées aux portions de réserves tirées de la cadence, une pour mise en As-If et l'autre pour ramener les sinistres en vue 2021 du fait de la clause. Ces portions de réserves deviennent ainsi des payés, comme en figure 65.

## Développement des réserves restantes

		2029	2030	2031	2032	2033	2034	2035	2036	2037	2038	2039	2040	2041	2042
Asif-Inflation		1,191	1,188	1,184	1,180	1,176	1,173	1,170	1,167	1,164	1,161	1,158	1,155	1,153	1,150
Cadence-Payement		15%	14%	13%	11%	8%	7%	6%	5%	5%	4%	4%	3%	3%	2%
<b>Statut</b>	<b>2028-Ultime</b>	<b>2029</b>	<b>2030</b>	<b>2031</b>	<b>2032</b>	<b>2033</b>	<b>2034</b>	<b>2035</b>	<b>2036</b>	<b>2037</b>	<b>2038</b>	<b>2039</b>	<b>2040</b>	<b>2041</b>	<b>2042</b>
Paid	4 400 349	4 445 571	4 487 638	4 526 574	4 559 417	4 583 232	4 604 010	4 621 769	4 636 530	4 651 251	4 662 999	4 674 719	4 683 487	4 692 236	4 698 056
Réserve restante	253 031	215 077	179 652	146 758	118 925	98 682	80 970	65 788	53 137	40 485	30 364	20 343	12 652	5 061	0
<b>Total</b>	<b>4 653 380</b>	<b>4 660 648</b>	<b>4 667 290</b>	<b>4 673 332</b>	<b>4 678 342</b>	<b>4 681 914</b>	<b>4 684 980</b>	<b>4 687 558</b>	<b>4 689 666</b>	<b>4 691 736</b>	<b>4 693 363</b>	<b>4 694 961</b>	<b>4 696 139</b>	<b>4 697 297</b>	<b>4 698 056</b>
		2029	2030	2031	2032	2033	2034	2035	2036	2037	2038	2039	2040	2041	2042
Delta-Index		57%	60%	63%	67%	70%	73%	77%	80%	83%	87%	90%	93%	97%	100%
Asif-Inflation		0,83	0,81	0,80	0,78	0,76	0,75	0,74	0,72	0,71	0,70	0,68	0,67	0,66	0,65
Cadence-Payement		15%	14%	13%	11%	8%	7%	6%	5%	5%	4%	4%	3%	3%	2%
<b>Statut</b>	<b>2028-Ultime</b>	<b>2029</b>	<b>2030</b>	<b>2031</b>	<b>2032</b>	<b>2033</b>	<b>2034</b>	<b>2035</b>	<b>2036</b>	<b>2037</b>	<b>2038</b>	<b>2039</b>	<b>2040</b>	<b>2041</b>	<b>2042</b>
Paid	4 283 064	4 314 548	4 343 331	4 369 512	4 391 222	4 406 701	4 419 986	4 431 157	4 440 294	4 449 265	4 456 314	4 463 239	4 468 343	4 473 361	4 476 651
Réserve restante	253 031	215 077	179 652	146 758	118 925	98 682	80 970	65 788	53 137	40 485	30 364	20 343	12 652	5 061	0
<b>Total</b>	<b>4 536 095</b>	<b>4 529 625</b>	<b>4 522 983</b>	<b>4 516 270</b>	<b>4 510 146</b>	<b>4 505 384</b>	<b>4 500 956</b>	<b>4 496 945</b>	<b>4 493 431</b>	<b>4 489 750</b>	<b>4 486 678</b>	<b>4 483 482</b>	<b>4 480 995</b>	<b>4 478 422</b>	<b>4 476 651</b>

Figure 65: Epuisement des réserves avec et sans clause de stabilisation

Dans cet exemple, l'impact se fait ressentir sur l'ensemble des réserves restantes. Le montant de réserves est assez faible donc la différence reste limitée mais nous pouvons nous trouver dans des situations où cette valeur peut être beaucoup plus élevée : la différence peut devenir importante.

Ayant mis en place ces différentes étapes de développement et d'inflation des sinistres, les nouvelles bornes du traité peuvent être calculées à partir du rapport entre les deux montants finaux obtenus. Ces nouvelles bornes sont ensuite introduites dans les calculs de réassurance effectués comme nous allons le voir à présent.

## 3.9 Calcul des indicateurs historiques

L'ensemble des spécificités données dans ce chapitre va se retrouver au moment de calculer les indicateurs historiques pour la tarification en Long-Tail. La méthode va alors être similaire à celle du Short-Tail en terme de principe général, mais quelques différences vont survenir au niveau des données d'entrée ainsi que du fait de l'implémentation de la clause de stabilisation.

### 3.9.1 Inputs

Le code permettant d'effectuer la tarification va prendre en entrée des documents csv regroupant les données nécessaires à l'ensemble des calculs qui vont être menés. De par leur nature, leur forme et leur utilisation, ces inputs vont être proches de ce que nous avons déjà pu voir dans le cadre du Short-Tail.

Comme vu au début de ce chapitre, le choix de l'inflation est fixé et ses valeurs sont prises sur un nombre d'années assez conséquent. En effet, les sinistres vont être développés à l'ultime et il faut donc une projection des indices économiques sur un intervalle de temps important.

Le taux de change correspond exactement à la donnée que nous avons en Short-Tail.

Les inputs de sinistres et de réassurance présentent certaines subtilités en Long-Tail : Pour l'input de réassurance, il a fallu ajouter le seuil à partir duquel la clause de stabilisation est appliquée, ainsi que le seuil de déclaration des sinistres par l'entité. Pour les

sinistres, ils se présentent désormais sous forme de triangle de développement comme nous l'avons vu dans l'ensemble de ce chapitre. Ceci permet de mettre en place les méthodes de développement vues et donc de projeter les charges des sinistres à l'ultime, auxquelles la tarification sera appliquée.

Enfin, nous avons une donnée d'entrée supplémentaire avec les cadences de paiement théoriques de l'entité, servant au calcul de l'épuisement des réserves restantes. Ces tables sont affichées en annexe numéro 4.

Ces entrées sont ensuite exploitées par le code en R qui permet d'automatiser le calcul des indicateurs techniques.

### 3.9.2 Application de la tarification

Le code se décompose en plusieurs étapes nécessaires à l'inclusion de toutes les composantes propres au Long-Tail.

Tout d'abord, il s'agit d'affecter l'inflation aux sinistres comme vu dans la partie 3.4 et d'appliquer la méthode choisie pour obtenir les coefficients entre les années de développement des sinistres. L'application de ces deux phases ainsi que l'inflation du développement des réserves restantes sous forme de cadence donne la charge finale en As-If. En parallèle, la charge du sinistre est également calculée dans le cas de l'application de la clause de stabilisation comme présenté en partie 3.8. Le rapport de ces deux montants donne les nouvelles bornes du traité ajustées.

A partir des nouvelles limites et priorités, nous déterminons pour chaque sinistre le montant entrant dans une tranche de réassurance donnée. Ces valeurs sont ensuite agrégées par année pour obtenir les récupérations en respectant les conditions du traité et la clause de stabilisation.

Si nous prenons la notation  $Amount1_{i,k}$  le montant du sinistre numéro  $i$  pour l'année  $k$ , après application de la mise en As-If et du développement sans clause de stabilisation, et  $Amount2_{i,k}$  ce même montant mais avec application de la clause de stabilisation, nous avons :

$$NewPriorite_{i,k} = Priorite * \frac{Amount1_{i,k}}{Amount2_{i,k}} \quad (3.16)$$

$$NewLimite_{i,k} = Limite * \frac{Amount1_{i,k}}{Amount2_{i,k}} \quad (3.17)$$

Nous notons alors  $Z_{i,k}$  le montant du sinistre entrant dans la tranche de réassurance.

$$Z_{i,k} = \max(0, \min(NewLimite_{i,k}, Amount1_{i,k} - NewPriorite_{i,k})) \quad (3.18)$$

et  $REC_k$  les récupérations annuelles pour l'année  $k$  :

$$REC_k = \min(\min(\max(\sum_{i=1}^n Z_{i,k} - AAD, 0), (NbRec + 1) * Limite - AAD), AAL) \quad (3.19)$$

Nous affectons ensuite l'indice d'exposition aux récupérations, c'est à dire la combinaison des EPI et des IBNyR, ainsi que l'évolution du nombre d'accidents de la route dans le cas du MTPL. En notant  $Ind_k$  la valeur de cet indice d'exposition pour l'année  $k$  et AsIf l'année de mise en As-If, les récupérations sont obtenues avec impact de l'exposition :

$$NewREC_k = \min(\min((REC_k * \frac{Ind_{AsIf}}{Ind_k}), (NbRec + 1) * Limite - AAD), AAL) \quad (3.20)$$

Nous introduisons tout de même des conditions dans cette formule car il ne peut pas y avoir plus de récupérations que prévu par le traité "dans le pire des cas".

Enfin, nous pouvons calculer les primes de reconstitution et les indicateurs présentés dans le chapitre 2 : le Burning Cost, le résultat historique, les résultats du point de vue Pool et la comparaison des sinistres par rapport à la tarification vue l'année précédente.

$$REI_k = \frac{\min(NewREC_k, NbRec * Limite) * Price * PRec}{Limite} \quad (3.21)$$

Ce qui donne pour les indicateurs de tarification historique :

$$BC = \frac{E[NewREC]}{1 + \frac{E[REI]}{Price}} \quad (3.22)$$

$$HR = Price - \frac{(\sum_{k=1}^{nbYear} (NewREC_k - REI_k))}{nbYear} \quad (3.23)$$

Enfin, la formule suivante est obtenue pour la vision du Pool par année, en notant PC la PoolCession :

$$PoolVisionResult_k = Price * PC + REI_k * PC - NewREC_k * PC \quad (3.24)$$

La vision pool prend son sens dans l'analyse de l'impact de la souscription du traité pour le pool, mais nous allons surtout chercher ici à comprendre les deux paramètres plus généraux : nous nous concentrerons sur le Burning Cost et le résultat historique.

## 3.10 Résultats de l'intégration de la clause de stabilisation

Voyons à présent en quelle mesure l'application de la clause de stabilisation dans la tarification peut apporter des changements significatifs sur les indicateurs avec l'exemple de l'entité X sur la ligne de business MTPL. La configuration de base sera la considération de l'indice des salaires pour la mise en As-If et la clause de stabilisation. Le seuil de cette clause est de 20%. Les IBNyR sont intégrés à la mesure d'exposition d'après un seuil de 3,125M.

### 3.10.1 Impact de la clause dans la tarification

Nous affichons figure 66 l'évolution des indicateurs historiques selon la profondeur d'historique utilisé, en comparant deux méthodes de tarification : avec et sans clause de stabilisation. L'indice de la clause de stabilisation et celui de mise en As-If des sinistres correspondent à l'indice d'inflation des salaires pour le pays concerné.

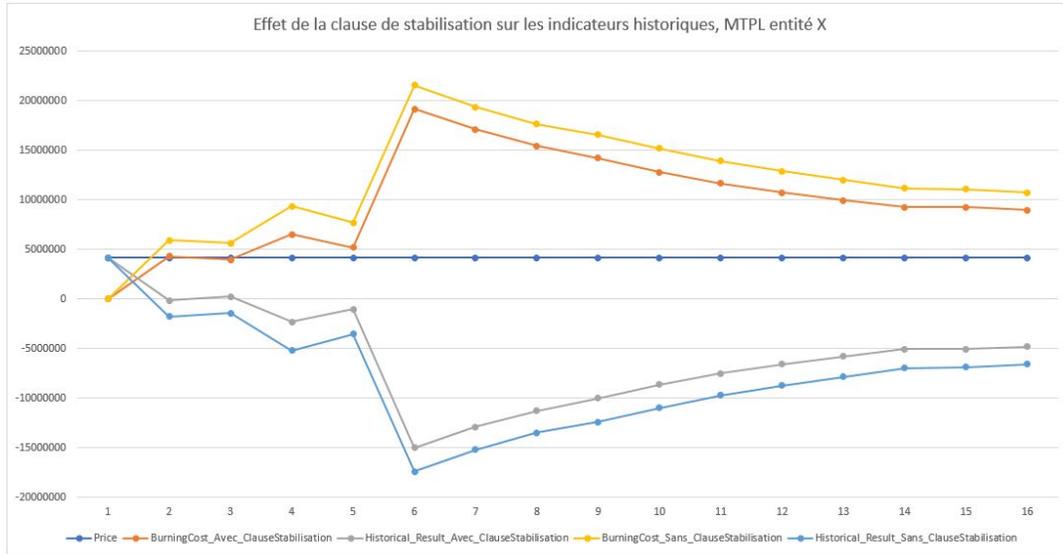


Figure 66: Indicateurs historiques selon l'intégration ou non de la clause de stabilisation

Dans les deux situations, il y a un pic pour la sixième année dans la profondeur d'historique. Cette donnée correspond à un sinistre exceptionnel dont la valeur est beaucoup plus élevée que ce que nous pouvons observer par ailleurs sur la ligne de business associée à cette entité. Sans surprise, la clause de stabilisation améliore le résultat historique puisque l'inflation est désormais répartie entre cédante et réassureur : les montants à charge du réassureur en sont diminués.

Implémenter la clause de stabilisation a toutefois pu se faire en s'appuyant sur un traitement des sinistres préalable. Ce dernier a nécessité des choix, que ce soit en terme d'inflation ou encore de considération des sinistres. Nous étudions à présent les conséquences de ces décisions.

### 3.10.2 Sensibilité au choix de l'indice de mise en As-If

Nous avons vu dans le deuxième chapitre l'importance d'employer un indice d'inflation cohérent pour la mise en As-If des sinistres puisque les résultats peuvent fortement varier selon lequel est considéré. Nous comparons ici en figure 67 les indicateurs obtenus avec le choix de l'indice des salaires et ceux découlant de l'indice du coût de la santé.

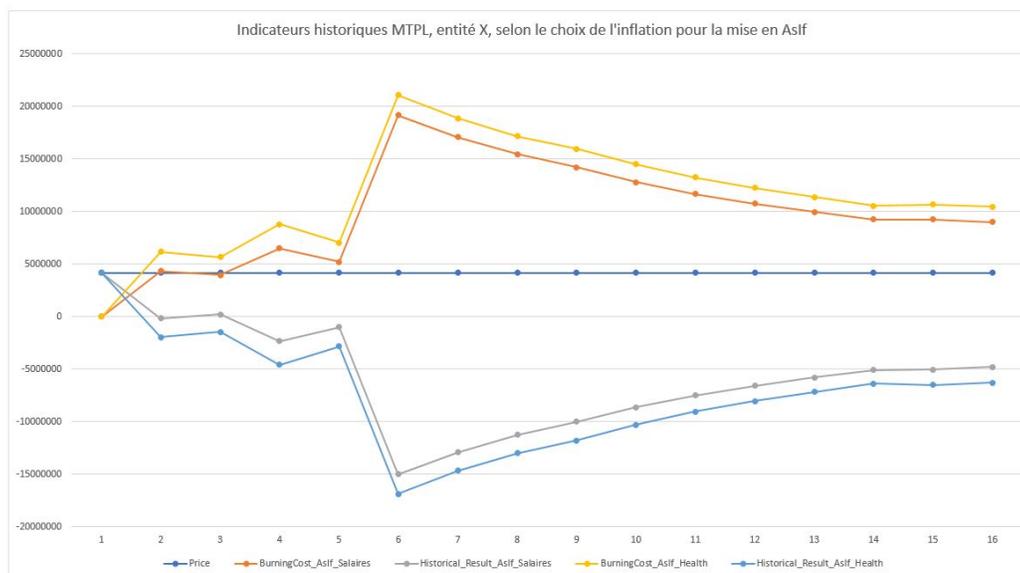


Figure 67: Indicateurs historiques selon l'indice d'inflation considéré pour la mise en As-If

L'impact de ce choix est fort : la différence finale est ici de 1,4M sur le résultat historique en prenant en compte l'ensemble de l'historique à disposition. La charge de sinistralité est plus importante avec l'indice du coût de la santé, ce qui est cohérent car nous avons vu plus tôt qu'il augmente plus rapidement que l'indice d'inflation des salaires dans le temps.

Cependant, l'inflation ne joue pas seulement un rôle sur la mise en As-If : un choix est aussi fait dans les traités au moment de définir l'indice à utiliser dans la clause de stabilisation. Regardons quelle est la sensibilité au choix de cet indice.

### 3.10.3 Effet du choix de l'indice dans la clause de stabilisation sur les indicateurs

L'indice de mise en As-If des sinistres est désormais fixé en prenant celui des salaires. Nous regardons alors dans la figure 68 les résultats en faisant varier l'indice de la clause de stabilisation : l'indice du traité (salaires), celui du coût de la santé, et enfin sans inflation.

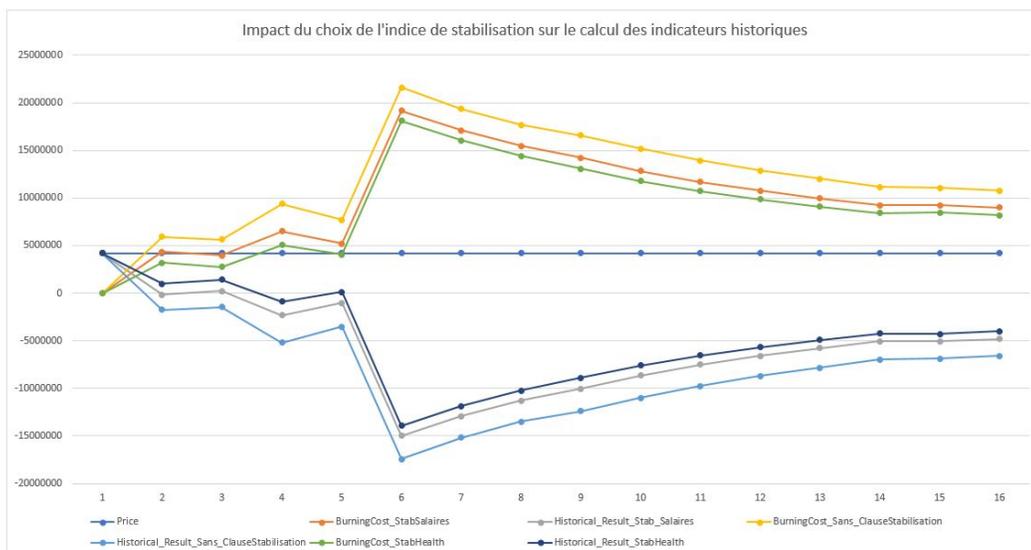


Figure 68: Indicateurs historiques selon l'indice d'inflation considéré dans la clause de stabilisation

Nous remarquons que l'application de l'indice du coût de la santé diminue la charge de sinistralité. Ceci est dû au fait que cet indice augmente plus rapidement que celui des salaires : le seuil de la clause est plus vite atteint, et les montants d'inflation sont répartis plus tôt entre cédante et réassureur, le résultat historique augmente.

Un autre paramètre est précisé dans la clause de stabilisation, il s'agit du seuil au-delà duquel l'augmentation d'inflation est considérée trop forte et entraîne l'application de la clause. Regardons à présent l'influence de ce seuil.

### 3.10.4 Effet du choix du seuil dans la clause de stabilisation sur les indicateurs

Le seuil utilisé dans les graphes ci-dessus pour l'application de la clause de stabilisation était 20%. Nous fixons à présent les indices d'inflation en considérant l'indice des salaires pour la clause et la mise en As-If. Nous faisons varier les seuils d'application de la clause de 0% à 40% avec un pas de 5. Le résultat historique est alors affiché en figure 69 sur 16 ans avec chacun de ces seuils.

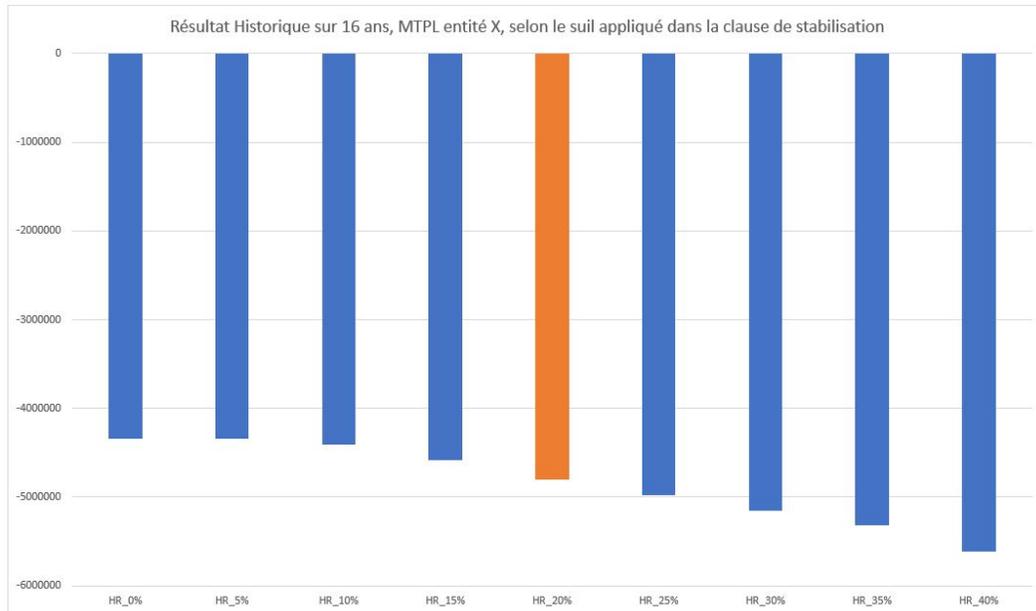


Figure 69: Sensibilité au seuil de la clause de stabilisation

Plus le seuil est bas, plus le résultat historique est haut. Inversement, le Burning Cost diminue quand le seuil est abaissé. Ceci s'explique car un seuil bas implique une répartition rapide dans le temps des effets d'inflation entre cédante et réassureur. Un seuil plus haut nécessitera du temps pour être atteint, et donc le réassureur est seul à être impacté par l'inflation sur une durée plus longue : sa charge augmente et le résultat historique diminue.

Nous avons vu les conséquences du choix du seuil dans la clause de stabilisation. Cette valeur n'est pas anodine et a un réel impact au moment où elle est introduite dans le traité. Au moment d'aborder le traitement des sinistres dans ce chapitre 3, un autre seuil a également été défini : le seuil de transmission des sinistres par l'entité. Cette donnée se retrouve à deux niveaux, dans la caractérisation des IBNyR et dans le calcul des coefficients de développement pour projeter les sinistres à l'ultime. Nous allons donc voir les conséquences de ces deux aspects.

### 3.10.5 Poids des IBNyR dans les résultats finaux

Nous reprenons les indicateurs historiques selon la profondeur d'historique avec le choix de l'indice des salaires pour la mise en As-If et la clause de stabilisation. Cette dernière s'applique toujours avec un seuil de 20%. La mesure d'exposition s'applique alors sur les récupérations. Les résultats sont donc affichés en figure 70 avec et sans l'intégration des IBNyR dans le calcul de cette mesure d'exposition.

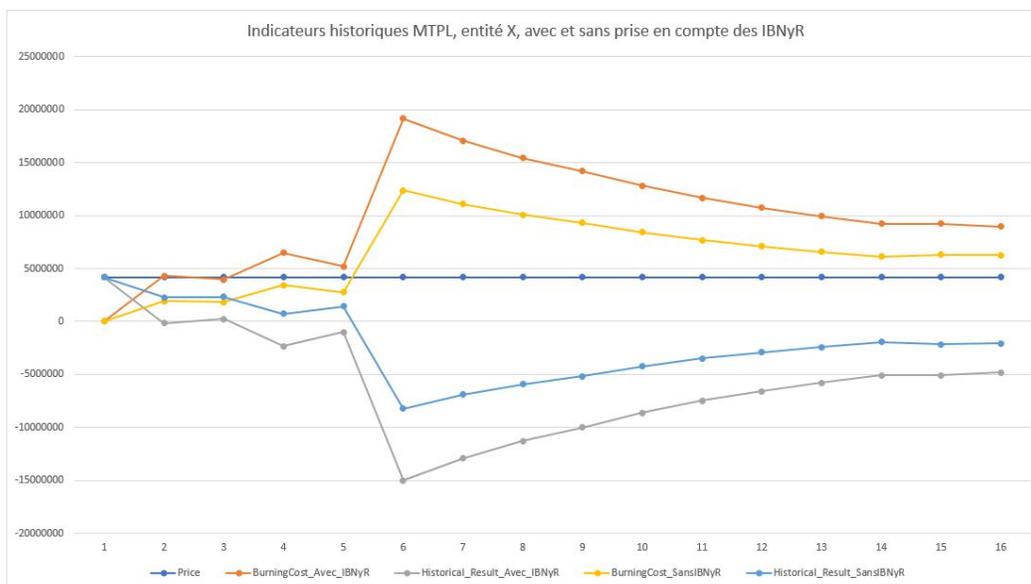


Figure 70: Effet des IBNyR sur le calcul des indicateurs historiques

Nous avons un facteur proche de 1,5 entre les résultats finaux selon l'approche choisie. Cette considération a donc un impact très important dans cet exemple. Il s'agit en effet d'une entité pour laquelle le nombre d'IBNyR peut être très important, y compris pour des années de développement anciennes.

Jusqu'à présent, les résultats étaient affichés avec prise en compte des IBNyR, ceci correspondant à une approche plus prudente et justifiée du fait de l'évolution du montant des sinistres dans les premières années. Nous allons continuer ainsi, et faire désormais varier le montant de ce seuil pour observer les conséquences sur la tarification.

### 3.10.6 Choix du seuil d'exclusion des sinistres pour la méthode de développement et IBNyR : conséquences sur les indicateurs

Le seuil choisi permet non seulement de définir les sinistres contribuant au calcul des coefficients de passage dans la méthode de développement, mais aussi de catégoriser les IBNyR. Cette dualité présente deux aspects tendant vers des directions opposées : nous pouvons supposer qu'un seuil bas implique une prise en compte de sinistres se développant plus fortement, et donc des coefficients de passages plus élevés, mais il y a alors moins d'IBNyR et donc une mesure d'exposition moins impactante. Le raisonnement inverse s'applique si le seuil est haut. Nous faisons donc varier ce seuil pour des valeurs comprises entre 0,75M et 4M, et le résultat est affiché en figure 71.

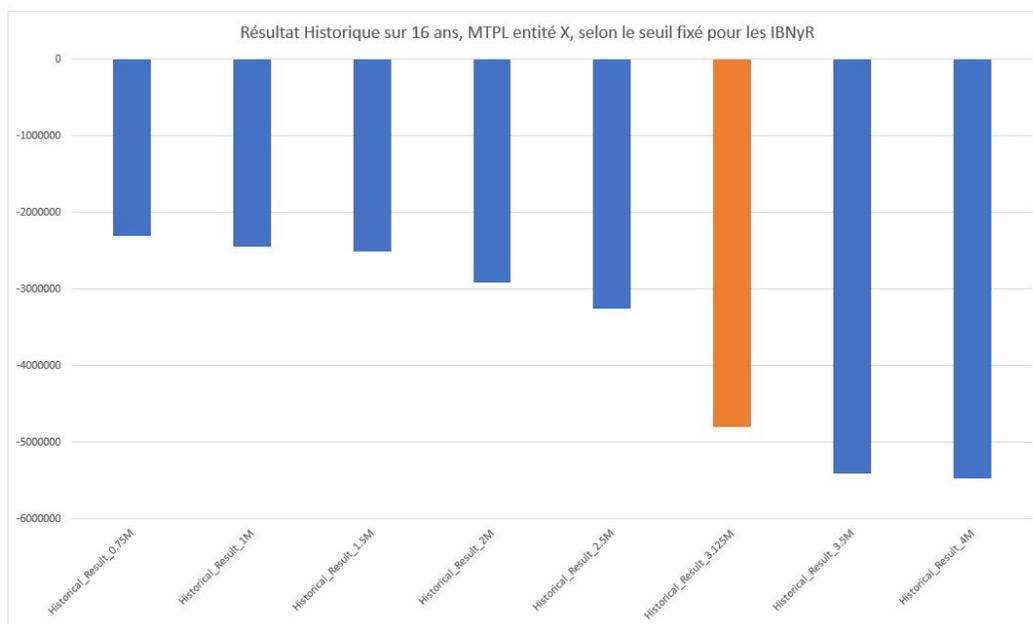


Figure 71: Effet du seuil d'exclusion de sinistres sur le calcul du résultat historique

Nous observons une évolution du résultat à la baisse en augmentant le seuil, mais assez faible jusqu'à 2,5M. Un palier plus important est atteint pour la valeur de 3,125M correspondant à la moitié de la rétention. Les valeurs semblent se stabiliser par la suite.

Cette tendance est à surveiller car nous voyons bien que le résultat historique peut varier du simple au double si le seuil est de 2M ou 4M. La valeur de 3,125M qui est non seulement la moitié de la rétention du traité, mais aussi le seuil de transmission des données sinistres par l'entité, semble être prudente. En effet, elle respecte la nature de l'échange de données, et se rapproche des valeurs obtenues avec des seuils plus élevés, qui eux excluent trop de données pour déterminer une méthode de développement précise et cohérente.

Ce seuil n'est pas le seul élément intégré à la méthode de calcul des coefficients de développement des sinistres. Or, nous avons vu que cette partie représente un élément important du traitement des sinistres. C'est pourquoi nous allons regarder plus précisément l'impact des coefficients de développement sur le calcul des indicateurs.

### 3.11 Sensibilité aux coefficients de développement

Les effets d'un certain nombre de paramètres sur les indicateurs historiques calculés ont été étudiés : clause de stabilisation, inflations, IBNyR, seuils fixés. Si ces éléments sont très importants, il en est de même des facteurs de développement des sinistres. Les indicateurs historiques obtenus sont donc regardés en faisant varier les coefficients acquis au cours du processus de développement des sinistres.

### 3.11.1 Méthodologie

Ce chapitre consacré au Long-Tail a été l'occasion de comparer plusieurs méthodes de développement des sinistres, de regarder leur impact aussi bien sur le montant des sinistres que sur les données de réassurance. Finalement, nous avons fixé une méthode permettant d'avoir les montants ultimes et d'appliquer la tarification.

Pour analyser la sensibilité du résultat historique aux facteurs de développement, nous observons alors les résultats obtenus en effectuant un grand nombre de simulations. Concrètement, le processus va se présenter comme expliqué ci-dessous.

- Approximation de la distribution des coefficients de développement individuels des sinistres par des lois de sévérité.
- Choix de la loi la plus adaptée à partir des graphes QQ-Plot
- Pour chaque sinistre, calcul aléatoire de 5600 coefficients cumulés et 5600 coefficients non-cumulés pour chaque année de développement à partir de la loi choisie
- Développement des sinistres à partir de ces nouveaux coefficients, application de la clause de stabilisation et tarification
- Représentation graphique de la distribution des 5600 résultats historiques calculés

Voyons plus précisément la mise en place de chacune des trois premières étapes : les résultats pourront ensuite être mis en forme.

#### 3.11.1.1 Approximation de la distribution avec des lois de sévérité

Nous reprenons les triangles de développement des sinistres et nous regardons les coefficients de passage individuels des sinistres d'une année à la suivante. Un vecteur contenant l'ensemble des coefficients de développement de la première année à la seconde est ensuite déterminé. Nous approximons alors la distribution de ces valeurs avec trois fonctions : Gamma, Weibull et Log-Normale.

Nous devons alors déterminer les paramètres de ces lois à partir du vecteur des coefficients. Pour cela la commande `fitdist` du package `fitdistrplus` sur R est utilisée.

Les graphes QQ-Plot associés sont présentés en Annexe n°5.

Nous procédons de même pour le passage de la deuxième année de développement à la troisième, ainsi que de la troisième à la quatrième. Toutefois, l'hypothèse est émise que cette démarche n'est pas nécessaire pour les années suivantes : celles-ci sont moins exposées à de grosses variations dans les coefficients individuels. Nous leur affectons donc le coefficient de type Chain-Ladder fourni par la méthode de développement choisie. Ainsi, aucune variation forte n'est créée sur les années stables et nous nous intéressons réellement aux années

présentant la plus grande incertitude.

Nous décidons de conserver la loi Log-Normale pour chaque série de coefficients.

### 3.11.1.2 Calcul aléatoire des coefficients de développement

Nous avons choisi la loi de sévérité pour les trois premiers coefficients de développement. Des simulations de ces valeurs sont donc effectuées pour obtenir pour chaque sinistre trois vecteurs contenant chacun 5600 valeurs obtenues à partir de la loi de sévérité. Pour cela les fonctions `rweibull`, `rlnorm` et `rgamma` sur R ont été utilisées.

Pour les autres années de développement, nous avons aussi des vecteurs contenant 5600 valeurs par sinistres mais celles-ci sont identiques au sein d'un même vecteur : il s'agit du coefficient de la méthode de type Chain-Ladder choisie.

Nous appliquons donc ces coefficients aux sinistres constituant l'historique, en conservant les règles d'application des coefficients vues dans les autres parties de ce chapitre. La tarification historique est ensuite effectuée grâce à ces sinistres développés, et ce 5600 fois : avec chacune des séries de coefficients simulés. Nous notons à chaque fois le résultat historique calculé, ce qui donne 5600 valeurs qui vont être représentées graphiquement. Ainsi, nous verrons la distribution des résultats historiques et celle-ci sera comparée à la valeur obtenue par la méthode de développement fixée.

Avoir des séries de coefficients différentes pour chaque sinistre a un intérêt car nous pouvons imaginer qu'en situation réelle, tous les sinistres ne vont pas se développer exactement de la même manière. Une part d'aléatoire est présente, et regarder un grand nombre de valeurs permet de visualiser l'étendue des résultats obtenus sur un grand nombre de configurations.

### 3.11.2 Résultats

Nous affichons à présent figure 72 la distribution des résultats historiques obtenus en introduisant un caractère aléatoire aux coefficients de développement. Dans les calculs mis en place, la clause de stabilisation est bien intégrée, et nous choisissons de regarder les résultats sans impact des IBNyR dans la mesure d'exposition. Cette décision est prise car nous voulons ici nous rendre compte de l'effet des coefficients de développement, et l'insertion des IBNyR apporterait alors un effet supplémentaire avec des conséquences sur les résultats historiques.

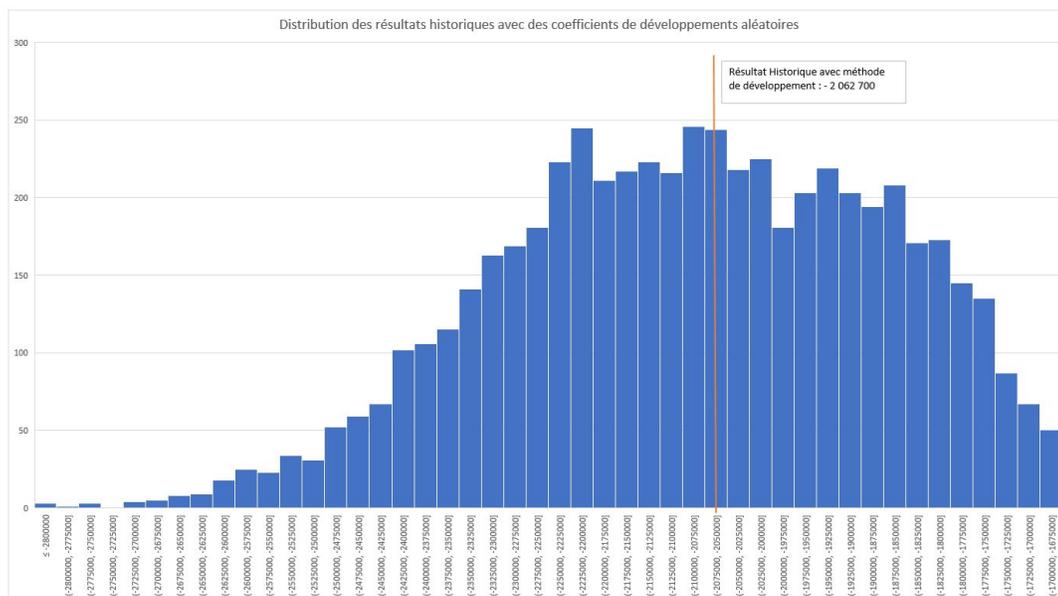


Figure 72: Distribution des résultats historiques

La forme de la distribution s'approche d'une gaussienne avec une grande variabilité des résultats, allant de -2,930M à -1,698M. La valeur moyenne est -2,09M, contre une valeur de -2,06M avec la méthode de développement se basant sur la moyenne des coefficients de développement individuels. Cette proximité est bien cohérente et conforte le résultat obtenu avec la méthode de développement choisie. L'écart-type est de 0,212M ce qui montre bien une dispersion importante et une sensibilité aux coefficients de développement.

Désormais, le résultat historique peut également être situé dans un intervalle, par exemple en sélectionnant uniquement la plage de valeurs centrales : nous excluons 5% des données en raisonnant avec les centiles et en ne conservant pas les résultats extrêmes. L'intervalle [-2,516M ; -1,731M] est donc obtenu. Cet intervalle est ainsi plus resserré qu'une simple considération du minimum et du maximum. Il reste toutefois peu précis mais il permet d'avoir un bon retour sur la volatilité possible du fait des développements : cette donnée peut prendre un sens au moment des décisions de souscription.

### 3.11.3 Critique de la méthode

Affecter des coefficients de développement différents selon les sinistres de façon aléatoire permet de bien prendre en compte la problématique des sinistres qui n'ont pas forcément tous le même développement. La méthode de développement conservée dans ce mémoire se base sur une moyenne, et la distribution observée justifie bien ce choix réalisé. De plus, ce point de vue stochastique apporte un complément utile en défiant l'approche fixée pour mieux comprendre les limites du résultat.

Toutefois, une notion n'a pas été prise en considération : la dépendance entre les années

de développement. En effet, nous avons dû supposer que les années de développement étaient indépendantes au moment d'introduire le caractère aléatoire étant donné que chaque liste de coefficients est déterminée indépendamment des autres. Pourtant, nous pourrions penser qu'un développement important sur plusieurs années a peu de chances d'être suivi à nouveau par un développement extrême par exemple. Une piste pourrait être l'étude de la dépendance entre ces années de développement, en introduisant des copules, et ainsi intégrer ce facteur de précision dans le calcul des coefficients.

# Conclusion

L'objet de ce mémoire était la mise en place d'une méthode de tarification des branches longues avec l'intégration de la clause de stabilisation dans le calcul des indicateurs historiques. Cette démarche s'inscrit dans une volonté de gagner en précision dans l'analyse historique, tout en construisant une méthodologie de développement des sinistres adaptée. Cette approche a alors nécessité une réflexion à plusieurs niveaux.

Le déploiement de ce travail a tout d'abord requis une compréhension exhaustive et complète des mécanismes en jeu. L'étude précise des lignes de business en Short-Tail permettait ainsi d'appréhender les difficultés propres aux structures des traités de réassurance, tout en mettant en valeur les cas particuliers entraînant des besoins supplémentaires dans une automatisation. Cette première étape sur des risques au développement supposé court isolait ainsi des problématiques distinctes sans biais éventuel d'hypothèses sur l'évolution des sinistres. Cette partie était également constituée d'une étude détaillée des indices d'inflation, permettant de sélectionner les données les plus cohérentes avec les lignes de business considérées. En effet, il est essentiel d'identifier les risques associés à une branche, ainsi que les grandeurs économiques ayant le plus de sens du point de vue de leur indemnisation. Les indices étudiés ont des comportements complètement différents les uns des autres : un mauvais choix peut donc avoir des conséquences fortes. C'est seulement une fois cette structure posée qu'il a été possible de se concentrer sur la complexité du Long-Tail.

Dans le cadre des branches longues, une mise en As-If seule n'est pas suffisante pour exploiter les sinistres dans le calcul des indicateurs historiques. Le développement de chaque sinistre à l'ultime est indispensable pour anticiper l'évolution de sa charge dans le temps. Plusieurs possibilités sont envisageables, mettant en jeu des processus techniques comme la théorie de la crédibilité ou la théorie des valeurs extrêmes. De plus, la méthode conservée doit prendre en compte la nature des données utilisées, mais aussi les subtilités de la transmission de ces dernières. En effet, seuls les sinistres dont le coût est au-dessus d'un certain seuil sont connus du réassureur. La confrontation des différentes approches a alors permis de faire un choix tout en ayant une vision claire de l'impact en termes de montants.

Ayant fixé ces éléments, deux axes ont été étudiés pour gagner en précision sur les résultats : les IBNyR qui sont intégrés dans la mesure d'exposition, et la clause de stabilisation qui peut être considérée avec la méthode de développement déterminée.

Les IBNyR interviennent dans l'étude car ils correspondent en grande partie ici aux

sinistres dont les montants sont en dessous du seuil de transmission d'information des entités. En les estimant, on peut alors les inclure à la mesure d'exposition qu'on affecte aux récupérations. On introduit ici une notion de prudence puisque l'hypothèse est forte : on suppose que les IBNyR engendreront des récupérations supplémentaires pour les années de survenance où il y en a déjà. Cependant, la portée de ce paramètre est très dépendante de l'apparition d'un sinistre extrême : l'année de survenance concernée aurait une sinistralité non seulement exceptionnelle, mais les récupérations seront encore amplifiées par le facteur des IBNyR. C'est pourquoi la question de leur inclusion peut se poser. Il faudrait déterminer l'existence d'évènements atypiques avant d'intégrer cette mesure.

Alors que les IBNyR constituent une composante de prudence, la clause de stabilisation permet de conformer la tarification aux conditions du traité. Cette clause étant un élément du lien entre l'assureur et le réassureur, il s'agit donc de prévoir son impact sur le coût final des sinistres, et par conséquent sur le montant final des récupérations. L'introduction de ce paramètre a des répercussions sur toutes les étapes du développement des sinistres : il était bien crucial de détailler chaque niveau. De plus, les effets de la clause de stabilisation dépendent directement de l'inflation. On peut donc penser que l'incidence peut être d'autant plus importante en situation de crise mettant en jeu une inflation significative comme on peut le voir avec les répercussions de la crise sanitaire. L'analyse conduite sur la sensibilité des résultats aux paramètres de cette clause prend alors son sens en donnant une représentation des conséquences de cette implémentation dans les calculs menés.

On a vu que beaucoup d'éléments interviennent et peuvent avoir un impact. Une piste d'approfondissement pourrait alors être l'application de l'ensemble de cette approche au cas du Short-Tail. On peut s'attendre à des effets beaucoup moins marqués du fait de la nature de la branche, mais il serait tout de même intéressant de voir si un impact éventuel existerait.

# Annexes

## Annexe 1: Preuve, pondération choisie diminue le coefficient de Chain-Ladder

Nous allons calculer la différence entre l'estimateur de Chain-Ladder et celui avec la pondération choisie pour en comprendre les effets.

$$\widehat{\lambda}_j - \widehat{\lambda}_j^{pond} = \frac{\sum_{i=1}^{nbSinistre} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{nbSinistre} C_{i,j}} - \frac{\sum_{i=1}^{nbSinistre} C_{i,j+1} * 1_{jugExpert}}{\sum_{i=1}^{nbSinistre} C_{i,j} * 1_{jugExpert}}$$

La première partie est décomposée en séparant avec deux indicatrices qui prennent en compte l'ensemble des cas sans doublons. Par la suite, les abréviations suivantes seront utilisées : jE pour jugement d'expert et NjE pour non jugement d'expert. Il s'agit alors des deux événements possibles : soit le sinistre entre dans le cadre validé par le jugement d'expert, soit il ne respecte pas la condition requise.

$$\widehat{\lambda}_j - \widehat{\lambda}_j^{pond} = \frac{\sum_{i=1}^{nbSinistre} (C_{i,j+1} * 1_{jE} + C_{i,j+1} * 1_{NjE})}{\sum_{i=1}^{nbSinistre} (C_{i,j} * 1_{jE} + C_{i,j} * 1_{NjE})} - \frac{\sum_{i=1}^{nbSinistre} C_{i,j+1} * 1_{jE}}{\sum_{i=1}^{nbSinistre} C_{i,j} * 1_{jE}}$$

Nous avons une formule de type :  $\frac{c+d}{a+b} - \frac{c}{a}$ , que nous allons chercher à mettre sur un seul dénominateur.

$$\frac{ac+ad-ac-bc}{a(a+b)} = \frac{ad-bc}{a(a+b)}$$

En se servant de ce résultat, nous avons donc directement le résultat en posant  $n$  égal à nbSinistre :

$$\widehat{\lambda}_j - \widehat{\lambda}_j^{pond} = \frac{(\sum_{i=1}^n C_{i,j} * 1_{jE}) * (\sum_{i=1}^n C_{i,j+1} * 1_{NjE}) - (\sum_{i=1}^n C_{i,j} * 1_{NjE}) * (\sum_{i=1}^n C_{i,j+1} * 1_{jE})}{(\sum_{i=1}^n C_{i,j} * 1_{jE}) * (\sum_{i=1}^n C_{i,j})}$$

Soit  $\Psi$  le dénominateur de cette expression. Nous émettons l'hypothèse qu'il n'y a aucun montant de sinistre négatif dans les données, ce qui est normal étant donné le rôle du réassureur. Nous supposons également qu'il existe au moins un sinistre au coût non-nul. Du fait de l'existence de seuils pour que la cédante transmette les données d'un sinistre au réassureur, cela revient à supposer l'existence d'au moins un sinistre dans la base utilisée. Nous avons alors  $\Psi > 0$

Nous avons indiqué qu'on se place dans le cadre d'un jugement d'expert de type  $1_{C_{i,j+1} < k C_{i,j}}$

avec  $k$  entier naturel par exemple compris entre 2 et 10.

Alors nous obtenons de ceci

- $\sum_{i=1}^{nbSinistre} C_{i,j+1} * 1_{jE} < k * \sum_{i=1}^{nbSinistre} C_{i,j} * 1_{jE}$
- $\sum_{i=1}^{nbSinistre} C_{i,j+1} * 1_{NjE} \geq k * \sum_{i=1}^{nbSinistre} C_{i,j} * 1_{NjE}$

En injectant ces formules dans l'expression de la différence des coefficients, nous trouvons qu'il existe  $\xi > 0$  tel que :

$$\widehat{\lambda}_j - \widehat{\lambda}_j^{pond} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n C_{i,j+1} * 1_{jE}) * (\sum_{i=1}^n C_{i,j+1} * 1_{NjE})}{k - \xi} - \frac{(\sum_{i=1}^n C_{i,j+1} * 1_{NjE}) * (\sum_{i=1}^n C_{i,j+1} * 1_{jE})}{\Psi k}$$

Nous posons alors  $a = (\sum_{i=1}^n C_{i,j+1} * 1_{jE}) * (\sum_{i=1}^n C_{i,j+1} * 1_{NjE})$  et donc :

$$\widehat{\lambda}_j - \widehat{\lambda}_j^{pond} \geq \frac{\frac{a}{k - \xi} - \frac{a}{k}}{\Psi} \geq \frac{\frac{ka - (k - \xi)a}{k}}{\Psi} \geq \frac{\xi * a}{\Psi} > 0$$

Nous avons donc avec un tel type de jugement d'expert  $\widehat{\lambda}_j > \widehat{\lambda}_j^{pond}$ .

## Annexe 2: Preuve, fonction moyenne des excès GPD affine au dessus du seuil

Nous avons noté  $G_{\epsilon, \sigma(u)}$  la fonction de répartition de la loi GPD. La fonction de densité associée à cette loi de probabilité est alors :

$$f_{\epsilon, \sigma(u)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma(u)} * (1 + \epsilon * \frac{y-u}{\sigma(u)})^{-1-\frac{1}{\epsilon}} & \text{si } \epsilon \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma(u)} * \exp(\frac{-(y-u)}{\sigma(u)}) & \text{si } \epsilon = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Nous supposons désormais  $0 < \epsilon < 1$ , et alors pour  $v > u$  :

$$e(v) = \frac{\int_v^{+\infty} (y - v) * \frac{1}{\sigma(u)} * (1 + \epsilon * \frac{y - u}{\sigma(u)})^{-1-\frac{1}{\epsilon}} dy}{\int_v^{+\infty} \frac{1}{\sigma(u)} * (1 + \epsilon * \frac{y - u}{\sigma(u)})^{-1-\frac{1}{\epsilon}} dy}$$

Nous allons effectuer un changement de variable en posant :

$x = 1 + \epsilon * \frac{y-u}{\sigma(u)}$ , c'est-à-dire  $\frac{x-1}{\epsilon} * \sigma(u) + u = y$ . Nous avons également  $\frac{dx}{\epsilon} = \frac{dy}{\sigma(u)}$ .

$$e(v) = \frac{\int_{1+\frac{\epsilon(v-u)}{\sigma(u)}}^{+\infty} (\frac{\sigma(u) * x}{\epsilon} + u - \frac{\sigma(u)}{\epsilon} - v) * \frac{1}{\epsilon} * x^{-1-\frac{1}{\epsilon}} dx}{\int_{1+\frac{\epsilon(v-u)}{\sigma(u)}}^{+\infty} \frac{1}{\epsilon} * x^{-1-\frac{1}{\epsilon}} dx}$$

En posant  $Inf = 1 + \frac{\epsilon*(v-u)}{\sigma(u)}$ , nous obtenons ainsi :

$$e(v) = \frac{\frac{\sigma(u)}{\epsilon} \int_{Inf}^{+\infty} x^{-\frac{1}{\epsilon}} dx}{\int_{Inf}^{+\infty} x^{-1-\frac{1}{\epsilon}} dx} + u - v - \frac{\sigma(u)}{\epsilon}$$

Il s'agit à présent de calculer les deux intégrales :

$$e(v) = \frac{\frac{\sigma(u)}{\epsilon} * [\frac{x^{1-\frac{1}{\epsilon}}}{1-\frac{1}{\epsilon}}]_{Inf}^{+\infty}}{[\frac{x^{-\frac{1}{\epsilon}}}{-\frac{1}{\epsilon}}]_{Inf}^{+\infty}} + u - \frac{\sigma(u)}{\epsilon} - v; \text{ et nous avons supposé } 0 < \epsilon < 1 \text{ donc :}$$

$$e(v) = \frac{\sigma(u)}{\epsilon} * \frac{\frac{1}{\epsilon} * Inf^{1-\frac{1}{\epsilon}}}{(\frac{1}{\epsilon}-1) * Inf^{-\frac{1}{\epsilon}}} + u - \frac{\sigma(u)}{\epsilon} - v; \text{ qui peut \^etre simplifi\^e :}$$

$$e(v) = \frac{\sigma(u)}{\epsilon^2} * \frac{Inf^{1-\frac{1}{\epsilon}}}{\frac{1-\epsilon}{\epsilon} * Inf^{-\frac{1}{\epsilon}}} + u - \frac{\sigma(u)}{\epsilon} - v = \frac{\sigma(u)}{\epsilon} * \frac{Inf}{1-\epsilon} + u - \frac{\sigma(u)}{\epsilon} - v$$

Et en reprenant la valeur de  $v$ , nous avons :

$e(v) = \frac{\sigma(u)}{\epsilon*(1-\epsilon)} * (1 + \frac{\epsilon*(v-u)}{\sigma(u)}) + u - \frac{\sigma(u)}{\epsilon} - v$  et il faut mettre tous les \^el\^ements sur le m\^eme d\^enominateur.

$$e(v) = \frac{\sigma(u) + \epsilon*v - \epsilon*u + \epsilon*(1-\epsilon)*u - \epsilon*(1-\epsilon)*v - \sigma(u)*(1-\epsilon)}{\epsilon*(1-\epsilon)}$$

$$e(v) = \frac{\sigma(u) + \epsilon*v - \epsilon*u + \epsilon*u - \epsilon^2*u - \epsilon*v + \epsilon^2*v - \sigma(u) + \sigma(u)*\epsilon}{\epsilon*(1-\epsilon)}$$

$$e(v) = \frac{\epsilon*(v-u)}{1-\epsilon} + \frac{\sigma(u)}{1-\epsilon}$$

Donc  $e(v)$  s'écrit bien de la forme  $e(v) = av + b$  : nous avons une fonction affine.

### Annexe 3: Pertinence de l'indicateur de crédibilité

Nous regardons tout d'abord s'il est sans biais.

$$E[\widehat{X}_C] = E[z * \widehat{X}_A + (1-z) * \widehat{X}_B] \tag{3.26}$$

$$= Z * E[\widehat{X}_A] + (1-z) * E[\widehat{X}_B] \tag{3.27}$$

$$= Z * E[X] + (1-z) * E[X] \tag{3.28}$$

$$= E[X] \tag{3.29}$$

L'estimateur est bien sans biais.

Nous allons alors comparer la qualité de ces estimateurs pour voir s'il est bien adapté de conserver celui que l'on cherche à construire.

Pour cela, nous introduisons la notion de résidus en notant  $\epsilon = X - \widehat{X}$

Alors  $E[\epsilon_A] = E[X - \widehat{X}_A] = E[X] - E[\widehat{X}_A] = 0$ , et nous retrouvons de même  $E[\epsilon_B]=0$  et  $E[\epsilon_C]=0$

Etudions à présent la variance de ces résidus.

$$V[\epsilon_C] = V[X - \widehat{X}_C] \quad (3.30)$$

$$= V[X - z * \widehat{X}_A - (1 - z) * \widehat{X}_B] \quad (3.31)$$

$$= z^2 V[X - \widehat{X}_A] + (1 - z)^2 V[X - \widehat{X}_B] + 2z(1 - z) Cov[X - \widehat{X}_A; X - \widehat{X}_B] \quad (3.32)$$

$$= z^2 V[\epsilon_A] + (1 - z)^2 V[\epsilon_B] + 2z(1 - z) Cov[\epsilon_A; \epsilon_B] \quad (3.33)$$

$$= z^2 (V[\epsilon_A] + V[\epsilon_B] - Cov[\epsilon_A; \epsilon_B]) + 2z (Cov[\epsilon_A; \epsilon_B] - V[\epsilon_B]) + V[\epsilon_B] \quad (3.34)$$

Nous avons désormais un polynôme du second degré en  $z$  qui peut facilement être dérivé afin de trouver le minimum.

Nous cherchons  $\frac{dV[\epsilon_C]}{dz} = 0$  :

$$\frac{dV[\epsilon_C]}{dz} = 2z(V[\epsilon_A] + V[\epsilon_B] - 2Cov(\epsilon_A, \epsilon_B)) + 2(Cov(\epsilon_A, \epsilon_B) - V[\epsilon_B]) = 0$$

$$\text{Donc } z = \frac{V[\epsilon_B] - Cov(\epsilon_A, \epsilon_B)}{V[\epsilon_A] + V[\epsilon_B] - 2Cov(\epsilon_A, \epsilon_B)} = \frac{V[\epsilon_B] - Cov(\epsilon_A, \epsilon_B)}{V[\epsilon_A - \epsilon_B]}$$

Nous posons  $z^* = \frac{V[\epsilon_B] - Cov(\epsilon_A, \epsilon_B)}{V[\epsilon_A - \epsilon_B]}$  et la dérivée seconde de la variance du résidu est calculée pour vérifier le signe de la dérivée.

$$\frac{d^2 V[\epsilon_C]}{dz^2} = 2(V[\epsilon_A] + V[\epsilon_B] - 2Cov(\epsilon_A, \epsilon_B)) = 2V[\epsilon_A - \epsilon_B] > 0$$

La dérivée s'annule donc bien en un minimum de la fonction entre 0 et 1.  $\widehat{X}_C$  a donc un résidu toujours inférieur ou égal à celui de  $\widehat{X}_A$  et  $\widehat{X}_B$  donc  $\widehat{X}_C$  est un estimateur au moins aussi bon que les deux autres.

# Annexe 4: Tables

Table de réassurance

Program	LoB	Layer	SubLayer	Entity	Peril	Priority	Limit	Rei_Number1	Rei_Number2	Rei_Number3	PRec1	PRec2	PRec3	AAD	SubAAD	AAL	SubAAL	Price	PoolCession	Currency	ThresholdCeded	ThresholdStab
MTPL_X	MTPL	1		1	X	All	6E+06 1E+14	99999		0	0	0	0	0	0	1E+12	1E+12	4187500	0	EUR	3125000	0,2

Cadence de paiement

Cadence	MTPL_X
1	0
2	0.03
3	0.08
4	0.11
5	0.16
6	0.23
7	0.3
8	0.33
9	0.39
10	0.43
11	0.46
12	0.51
13	0.53
14	0.55
15	0.56
16	0.64
17	0.67
18	0.7
19	0.74
20	0.77
21	0.79
22	0.82
23	0.85
24	0.87
25	0.9
26	0.92
27	0.94
28	0.96
29	0.98
30	1

Inflation économique

IndiceEco	MTPL_X
2000	100
2001	103,797
2002	107,595
2003	108,861
2004	112,658
2005	115,19
2006	117,722
2007	118,987
2008	124,051
2009	125,316
2010	127,848
2011	130,38
2012	134,177
2013	136,709
2014	137,975
2015	137,975
2016	139,241
2017	141,772
2018	145,57
2019	149,367
2020	150,633

Inflation économique projetée

IndiceEco	MTPL_X
2021	151,899
2022	156,962
2023	159,494
2024	162,025
2025	164,557
2026	167,089
2027	169,62
2028	172,152
2029	174,684
2030	177,215
2031	179,747
2032	182,278
2033	184,81
2034	187,342
2035	189,873
2036	192,405
2037	194,937
2038	197,468
2039	200
2040	202,532
2041	205,063
2042	207,595
2043	210,127
2044	212,658
2045	215,19
2046	217,722
2047	220,253
2048	222,785
2049	225,316
2050	227,848

Mesure d'exposition

MesureEspo	MTPL_X
2000	1,74435E+14
2001	1,7087E+14
2002	1,47722E+14
2003	1,49808E+14
2004	1,39609E+14
2005	1,45767E+14
2006	1,43444E+14
2007	1,46707E+14
2008	1,4E+14
2009	1,33914E+14
2010	1,19319E+14
2011	1,16307E+14
2012	1,13911E+14
2013	1,02424E+14
2014	1,11073E+14
2015	1,13499E+14
2016	1,70387E+14
2017	1,70963E+14
2018	1,76531E+14
2019	1,74758E+14
2020	1,62003E+14
2021	1,55618E+14

Figure 73: Inputs pour les calculs historiques, MTPL entité X

# Annexe 5: QQ-Plot loi de sévérité

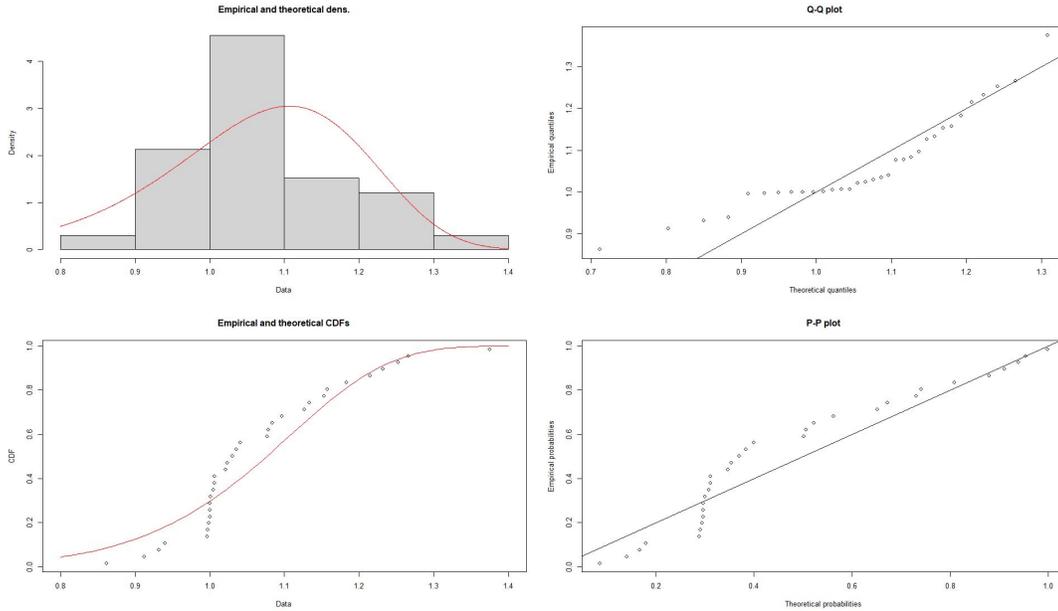


Figure 74: Loi de sévérité Weibull

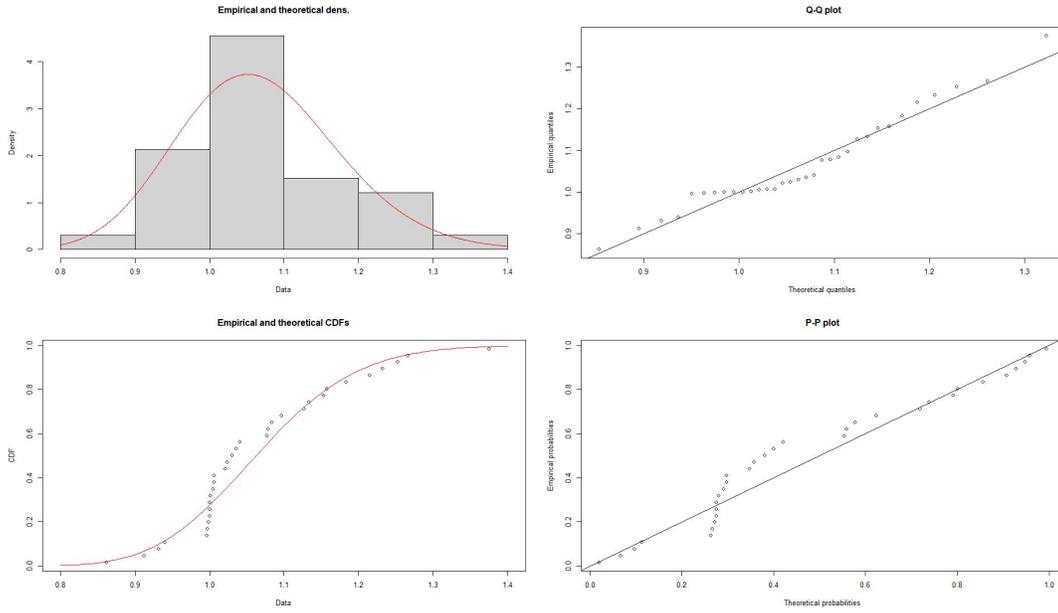


Figure 75: Loi de sévérité Log-Normale

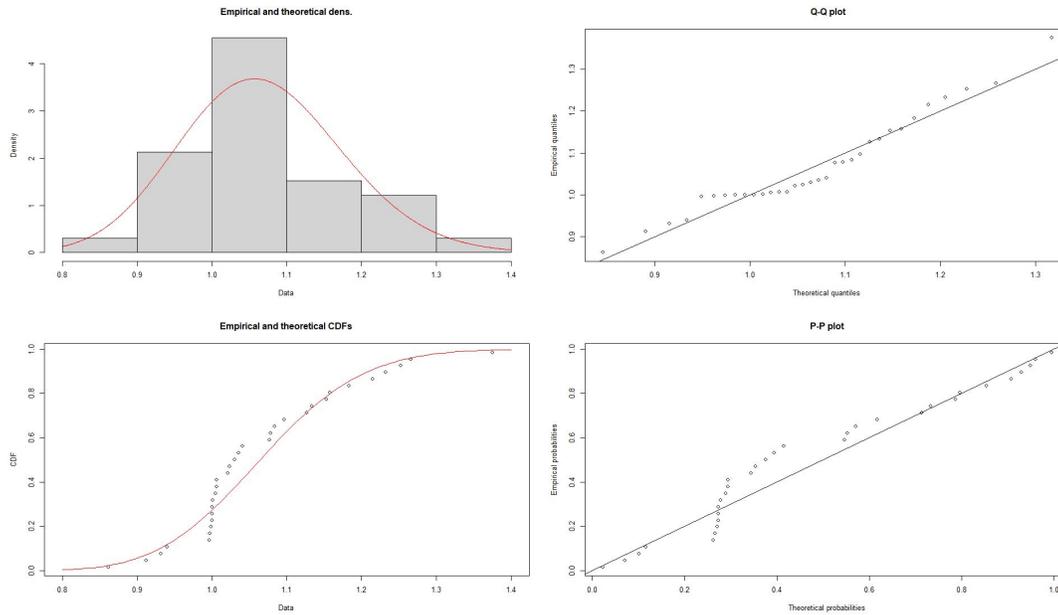


Figure 76: Loi de sévérité Gamma

# Bibliographie

- [1] Pierre LACOSTE. *Réassurance*. Cours à l'ISUP (M2 Actuariat), 2020-2021.
- [2] Fédération Française de L'ASSURANCE. *La responsabilité civile du particulier et son assurance*. URL : <https://www.ffa-assurance.fr/infos-assures/la-responsabilite-civile-du-particulier-et-son-assurance>.
- [3] Anne BONTOUX. *Les rentes en assurance et en réassurance non-vie : ce qu'il faut savoir*. Technical publishing : Swiss Re, 2007.
- [4] AGRE-ANALYTICS&PRICING. *Reinsurance Atypical CAT Man Made Training*. Internal formation, 2020.
- [5] OECD (2021). *Average wages (indicator)*. URL : doi : %2010.1787/cc3e1387-en%20(Accessed%20on%2002%20August%202021).
- [6] International Monetary FUND. *International Financial Statistics*. 2021. URL : <https://data.imf.org/?sk=4c514d48-b6ba-49ed-8ab9-52b0c1a0179b>.
- [7] EUROSTAT. *Construction cost (or producer prices), new residential buildings - annual data*. 2021. URL : [https://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=sts\\_copi\\_a&lang=en](https://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=sts_copi_a&lang=en).
- [8] OECD (2021). *Health spending (indicator)*. URL : doi : %2010.1787/8643de7e-en%20(Accessed%20on%2002%20August%202021).
- [9] Nations UNIES. *Problèmes de réassurance dans les pays en voie de développement*. Chapitre VI Coopération régionale et sous-régionale A-Objectifs de la coopération régionale : UNCTAD, 1973.
- [10] ACTUARIEL. *Pourquoi la santé coûte-t-elle toujours plus cher ?* Institut des actuaires, 2018. URL : <https://www.institutdesactuaires.com/magazine/article/pourquoi-la-sante-coute-t-elle-toujours-plus-cher/2555>.
- [11] OECD (2021). *Road accidents (indicator)*. URL : doi : %2010.1787/2fe1b899-en%20(Accessed%20on%2002%20August%202021).
- [12] Thomas MACK. *Distribution-free calculation of the standard error of Chain-Ladder reserve estimates*. vol. 23 : Muniche Re, ASTIN BULLETIN, 1993.
- [13] Thomas MACK. *The standard error of chain ladder reserve estimates : recursive calculation and inclusion of a tail factor*. vol. 2 : ASTIN BULLETIN, 1999.
- [14] Marie KRATZ. *Extreme Value Theory*. Cours à l'ISUP (M2 actuariat), 2020-2021.

- [15] Pascal Lezaud MYRIAM CHARRAS-GARRIDO. *Extreme Value Analysis : an Introduction*. 154 (2), pp 66-97. fhal-00917995f : Journal de la Societe Française de Statistique, Societe Française de Statistique et Societe Mathematique de France, 2013.
- [16] Jonathan El METHNI. *Contributions à l'estimation de quantiles extrêmes. Applications à des données environnementales*. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Grenoble, 2013.
- [17] Olivier WINTENBERGER. *Théorie de la crédibilité*. ISUP 2, Université Paris VI, 2013-2014.
- [18] H. BÜHLMANN et A. GISLER. *A Course in Credibility Theory and its Applications*. Universitext, Springer Verlag, 2005.
- [19] J.R.SANCHEZ et J.L.VILAR. *Bayesian and credibility estimation for the Chain Ladder Reserving Method*. Instituto de Actuarios Españoles, 2011. URL : <https://www.actuarios.org/bayesian-and-credibility-estimation-for-the-chain-ladder-reserving-method/>.
- [20] Gisler A. et Wüthrich M. *Credibility for the Chain Ladder Reserving Method*. ASTIN Bulletin, 38(2), 565-600. doi :10.1017/S0515036100015294, 2008.