

| | | |
|-----------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| IRM institut du risk management | Rapport de projet ERM | Promotion 2021 |
| | | |

Rapport de projet présenté devant un Jury de Soutenance

Expert ERM

Expert(e) Management des Risques Financiers et Assurantiels

Le 18 novembre 2021

Par : Ali GOUMAR et Mehdi BOUEDDINE

Titre : Application d'une approche ERM pour l'agrégation des risques au sein du modèle interne partiel en assurance non-vie

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1an 2 ans)

La durée de confidentialité expire aux 31 décembre N+1 (1 an) ou N+2 (2 ans)

Les stagiaires s'engagent à ce que les données de l'Entreprise présentées dans le cadre des travaux de la formation (rapport de projet & présentation) respectent les règles relatives à la protection des données à caractère personnel conformément aux dispositions de la Loi informatiques et Liberté n°78-17 du 6 janvier 1978 modifiée par la Loi du 6 août 2004 ainsi que par la loi n° 2018-493 du 20 juin 2018 (RGPD)

Membres présents du jury :

Par ma signature j'autorise la publication sur un site de diffusion de documents actuariels du rapport de projet
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

| |
|--|
| Nom : GOUMAR |
| Prénom : Ali |
| Signature du stagiaire  |

Si binôme :

| |
|--|
| Nom : BOUEDDINE |
| Prénom : Mehdi |
| Signature du stagiaire  |

SOMMAIRE

| | |
|---|-----------|
| INTRODUCTION | 1 |
| 1 DIAGNOSTIC DE L'EXISTANT OPERATIONNEL ET STRATEGIQUE DU GROUPE | 2 |
| 1.1 NOTRE PERIMETRE D'ETUDE DANS LA STRUCTURE D'AGREGATION DES SCR | 2 |
| 1.1.1 Gouvernance et Risques majeurs au sein de Groupama | 2 |
| 1.1.2 Utilisation d'un Modèle Interne Partiel (MIP) | 2 |
| 1.1.3 Risques de Souscription Non-Vie : Modèle Interne Partiel (MIP) vs Formule Standard (FS) | 2 |
| 1.2 APPROCHE ACTUELLE : UTILISATION DES CORRELATIONS DE LA FORMULE STANDARD POUR L'AGREGATION DES RISQUES DE SOUSCRIPTION NON-VIE | 4 |
| 1.3 AVIS D'OPERATIONNELS ET D'EXPERTS EXTERNES | 5 |
| 1.4 SYNTHÈSE DU DIAGNOSTIC | 6 |
| 2 AGREGATION DES RISQUES AVEC UNE APPROCHE ERM | 6 |
| 2.1 APPRECIATION DE LA DEPENDANCE ENTRE LES RISQUES NON-VIE | 7 |
| 2.1.1 Mesures statistiques : Tau de Kendall, Rho de Spearman et Coefficients de dépendance de queue | 7 |
| 2.1.2 Approche par scénario / Jugement d'expert | 8 |
| 2.2 METHODOLOGIES ALTERNATIVES D'AGREGATION DES RISQUES | 8 |
| 2.2.1 Modélisation de la structure de dépendance par la décomposition de Cholesky | 8 |
| 2.2.2 L'utilisation des Copules | 9 |
| 3 ETUDE DE CAS : MISE EN ŒUVRE POUR LE RISQUE DE SOUSCRIPTION NON-VIE | 11 |
| 3.1 MESURES DE LA DEPENDANCE ENTRE LES RISQUES DE PRIME ET RESERVE | 12 |
| 3.2 AGREGATION PAR LA DECOMPOSITION DE CHOLESKY | 12 |
| 3.3 AGREGATION PAR LES COPULES | 14 |
| 3.3.1 Approche par la Copule Gaussienne | 14 |
| 3.3.2 Approche par la Copule de Clayton Inversée | 16 |
| 3.3.3 Validation de l'agrégation par une Copule | 18 |
| 4 SYNTHÈSE ET COMMUNICATION | 19 |
| CONCLUSION | 20 |
| BIBLIOGRAPHIE | 21 |
| TABLE DES FIGURES | 22 |
| ANNEXES | 23 |
| ANNEXE 1 : Présentation de l'entreprise | 23 |
| ANNEXE 2 : Matrice de corrélation inter-LoB de la Formule Standard | 23 |
| ANNEXE 3 : COSO et CERA New Syllabus 2019 | 24 |
| ANNEXE 4 : Définition des mesures de risques VaR, TVaR et CTE | 25 |
| ANNEXE 5 : Copules | 25 |
| ANNEXE 6 : Généralisation de l'agrégation multi-LoB : Application de Cholesky | 26 |
| ANNEXE 7 : Généralisation de l'agrégation multi-LoB : Application d'une Copule | 26 |

| | | |
|-----------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| IRM institut du risk management | Rapport de projet ERM | Promotion 2021 |
| | | |

ANNEXE 8 : Corrélations obtenues par les copules au niveau de chaque LoB entre les risques de prime et réserve 27

ANNEXE 9 : Matrices de corrélations inter-LoB obtenues par les copules..... 27

ANNEXE 10 : Coefficients de dépendance de queues inférieurs et supérieurs à partir des simulations avec les copules 28

ANNEXE 11 : Exemple de contrôle de l'implémentation des copules 28

ANNEXE 12 : Exemple de test de stabilité du modèle 29

ANNEXE 13 : Analyse des impacts de la structure de dépendance aux différents quantiles inférieurs à 99,5% 29

ANNEXE 14 : Résultats **préliminaires** sur les copules hiérarchiques 29

| | | |
|-----------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| IRM institut du risk management | Rapport de projet ERM | Promotion 2021 |
| | | |

INTRODUCTION

Maintenir un portefeuille diversifié permet à l'assureur de limiter la volatilité à laquelle il s'expose dans la conduite de son activité. C'est afin de refléter ce principe fondamental de la gestion des risques que la Formule Standard de la Directive Solvabilité 2 prévoit une agrégation des modules de risques résultant en un besoin de capital réglementaire (« SCR : Solvency Capital Requirement ») global inférieur à la simple addition des SCR par lignes d'activité (LoB). Pour déterminer ce gain de diversification, elle s'appuie actuellement sur des matrices de coefficients de corrélation linéaire entre modules de risques. Ces derniers ont été déterminés d'une manière statistique, puis réajustés après négociations entre les superviseurs et les acteurs du marché de l'Union Européenne.

L'approche retenue dans le cadre de la Formule Standard est majoritairement reprise dans les modèles internes développés par certains assureurs pour l'évaluation de leur SCR, et ce notamment sur le choix des coefficients de corrélation. Toutefois, cette démarche présente certaines limites qui peuvent remettre en cause l'adéquation de la modélisation au profil de risque de l'assureur. Pour ces raisons, les méthodologies utilisables en matière d'agrégation des risques font présentement l'objet d'une revue par l'EIOPA et les autorités locales (l'ACPR en France). Ceci suscite l'intérêt des assureurs et de la communauté actuarielle pour tester d'autres alternatives. Dans le cadre de l'évolution du modèle interne partiel du Groupe Groupama, l'ACPR a d'ailleurs demandé la justification des méthodes liant la structure de la dépendance et l'agrégation des risques. C'est dans le cadre de ces travaux que s'inscrit notre mémoire, qui portera principalement sur l'analyse de la dépendance au sein des risques de Souscription Non-Vie, pour les risques de Réserve et de Prime, des différentes lignes d'activité (LoB) du modèle interne partiel.

Notre problématique consiste tout d'abord à identifier et étudier les avantages et inconvénients de différentes démarches d'agrégation des risques. Puis à communiquer de façon claire et pédagogique aux instances de gouvernance sur l'analyse des gains de diversification obtenus, en répondant à la question suivante : quels sont les indicateurs de risque (KRI) les plus adaptés pour effectuer le suivi des dépendances entre les risques au sein du Groupe ?

Dans un premier temps, un état des lieux des travaux opérationnels et des processus stratégiques sera mis en exergue afin de présenter l'approche actuelle de l'agrégation des risques au sein du Groupe. La synthèse de ce diagnostic permettra la mise en évidence des limites et des axes d'amélioration. Ensuite, des solutions seront proposées dans un cadre de réflexion ERM, ce qui permettra d'identifier, de mesurer et d'étudier les dépendances entre les risques. Dans ce rapport, un focus sera donné sur :

- L'appréciation de la dépendance entre risques à l'aide de mesures statistiques (tels que le Tau de Kendall ou le Rho de Spearman), et une analyse qualitative à l'aide de jugement d'expert.
- Des méthodologies d'agrégation des risques alternatives à celle utilisée par la Formule Standard, telles que l'utilisation de copules, ou la décomposition de Cholesky.

La troisième partie du rapport constitue une étude de cas sur les principales LoB du risque de Souscription Non-Vie de l'entité Gan Assurances. Nous commencerons par mesurer la dépendance entre les risques de Réserve et de Prime, puis comparerons les résultats issus des méthodologies alternatives d'agrégation avec l'approche Formule Standard par LoB et toutes LoB. Cette dernière indiquera la complexité de la modélisation de la dépendance entre plusieurs risques.

Enfin, nous examinerons l'importance de la communication au sujet de l'agrégation à l'attention de différents publics, en présentant une sélection d'indicateurs de risque (KRI) adaptés pour le pilotage, avant de préciser la méthode alternative retenue pour une mise en place opérationnelle dans notre modèle interne partiel.

| | | |
|-----------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| IRM institut du risk management | Rapport de projet ERM | Promotion 2021 |
| | | |

1 DIAGNOSTIC DE L'EXISTANT OPERATIONNEL ET STRATEGIQUE DU GROUPE

Après une présentation de la gouvernance de la gestion des risques actuelle de l'entreprise, l'agrégation des risques pour le calcul du capital économique sera décrite en se focalisant sur le risque de Souscription Non-vie.

Des entretiens ont été effectués avec différents opérationnels de l'entreprise et des experts externes afin de recueillir leurs avis notamment sur l'aspect de la présentation des résultats et la communication sur l'appréciation de la dépendance. Des axes d'amélioration ont été mis en exergue. Enfin, nous concluons avec une synthèse des principaux constats de ce diagnostic.

1.1 NOTRE PERIMETRE D'ETUDE DANS LA STRUCTURE D'AGREGATION DES SCR

1.1.1 Gouvernance et Risques majeurs au sein de Groupama

Groupama dispose d'un système de gestion des risques dont les principes structurants répondent aux exigences de Solvabilité 2. La stratégie de gestion des risques, définie en cohérence avec la stratégie du Groupe, repose sur le maintien d'un profil de risque équilibré, fondé notamment sur :

- la diversification de ses risques entre les métiers d'assurance,
- la diversification des zones géographiques des risques assurés,
- un portefeuille d'activité composé de risques sur lesquels le Groupe dispose de compétences et d'expériences solides,
- des pratiques prudentes de souscription et de gestion du portefeuille, ainsi que de provisionnement,
- un dispositif de limites de risques à l'actif avec des limites primaires (sur les principales classes d'actifs) et secondaires (au sein de chaque classe d'actifs),
- un dispositif d'atténuation des risques d'assurance via des programmes de réassurance externe pour notamment les risques à fort aléa,
- un dispositif d'atténuation des risques financiers au sein des entités pour réduire notamment les expositions au risque actions et change via des couvertures financières,
- l'utilisation de techniques d'atténuation des risques opérationnels (dispositif de contrôle permanent, solutions de secours / plans de continuité d'activité, sécurités physiques et informatiques..).

Au passif pour les activités IARD, en complément du dispositif de réassurance, le risque propre à chacune des lignes métier est intégré en définissant, dans le cadre de la planification stratégique et opérationnelle, un ratio de sinistres à cotisations (S/C) cible par ligne métier. Ce ratio prend en compte un niveau minimal de rentabilité des capitaux réglementaires (SCR technique en vision modèle interne Groupe) nécessaire au métier.

1.1.2 Utilisation d'un Modèle Interne Partiel (MIP)

Groupama a choisi d'utiliser un modèle interne pour mieux appréhender son profil de risques et assurer une cohérence avec sa stratégie de gouvernance des risques. Cette utilisation est justifiée par une exposition sur des métiers spécifiques comme l'assurance construction, et en particulier l'assurance agricole, métier historique du Groupe. Ce modèle permet également de mieux rendre compte de l'impact de la protection offerte par la réassurance, notamment non proportionnelle souscrite par le biais de traités multi-cédantes mettant en commun les expositions des Caisses Régionales.

La diversification entre les risques est prise en compte dans le modèle interne actuel mais reste perfectible. En effet, depuis l'homologation initiale, Groupama a concentré ses efforts sur les modèles des risques prime, réserve et catastrophe et dans une moindre mesure sur la dépendance entre les risques. Ce mémoire ERM s'inscrit dans le cadre des travaux d'amélioration de la modélisation, et plus précisément sur la structure de dépendance appliquée dans le modèle interne.

1.1.3 Risques de Souscription Non-Vie : Modèle Interne Partiel (MIP) vs Formule Standard (FS)

La Formule Standard de Solvabilité 2 est définie sous une approche modulaire pour le traitement et l'agrégation des risques. Cette agrégation est basée sur des matrices de coefficients de corrélation linéaire pour le calcul du SCR :

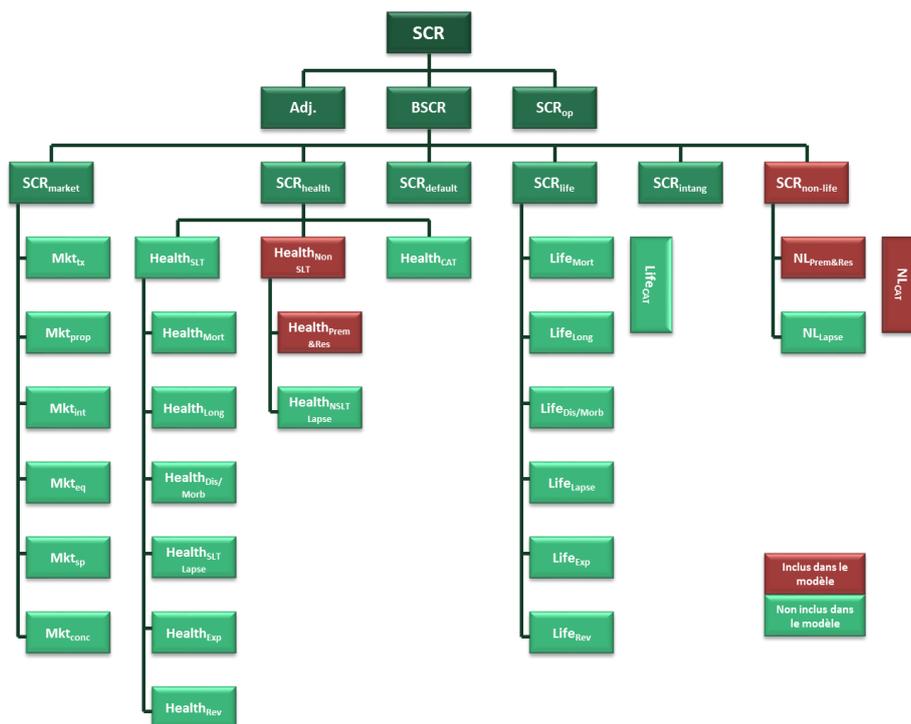


Figure 1 - Approches Formule Standard et Modèle interne partiel sous Solvabilité 2 (Source EIOPA)

Comme présenté dans la figure ci-dessus, le risque de **Souscription Non-Vie** se compose des risques suivants : le risque de prime (Premium Risk), le risque de réserve (Reserve Risk), le risque catastrophe (CAT Risk), risque de cessation (Lapse Risk). Dans le cadre de ce rapport, le risque de cessation ne sera pas étudié ; les travaux porteront sur les risques de prime, catastrophe et réserve, qui sont définis comme suit par la Directive Solvabilité 2 :

- le *risque de prime* représente l'incertitude relative à l'évaluation du résultat technique, hors boni-mali sur les provisions. Ce dernier est défini comme la différence entre la prime prévisionnelle et la somme de la sinistralité et des frais futurs.
- le *risque de réserve* correspond à l'incertitude sur l'estimation des provisions pour sinistres à payer à horizon d'un an.
- le *risque de catastrophe* englobe les risques de hausse exceptionnelle de la sinistralité liée à un événement catastrophique

Au sein de son modèle interne partiel, en accord avec les textes règlementaires, Groupama projette la variation de situation nette (SN) à un an et retient le quantile 99,5% de la distribution de cette variation (niveau de perte bicentenaire) pour définir le SCR :

$$SCR = -VaR_{0,5\%}(SN_1 * Facteur_{Actu} - SN_0)$$

Graphiquement, ce calcul de SCR comme Value at Risk peut être illustré de la façon suivante :

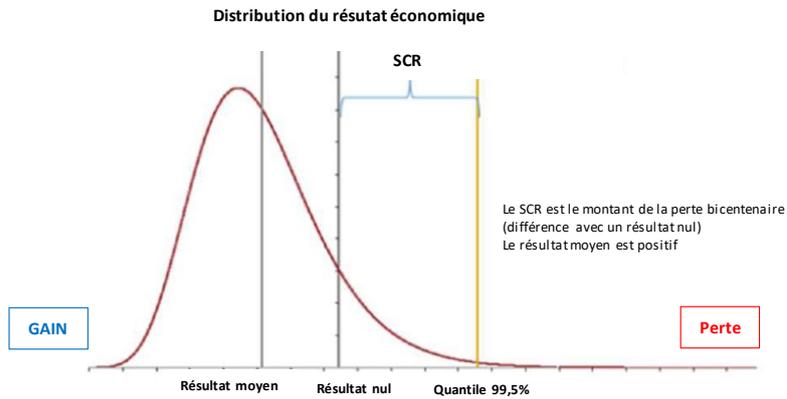


Figure 2 - Représentation du SCR selon la distribution du résultat économique

La VaR est devenue l’outil de référence pour mesurer le risque de perte à un certain seuil. Cette mesure respecte plusieurs propriétés élémentaires d’une mesure de risque ; sa définition est fournie en Annexe 4.

1.2 APPROCHE ACTUELLE : UTILISATION DES CORRELATIONS DE LA FORMULE STANDARD POUR L’AGREGATION DES RISQUES DE SOUSCRIPTION NON-VIE

Le SCR du modèle interne repose sur une approche modulaire. Le SCR de Souscription Non-vie (et Santé non Similaire à la Vie) résulte de l’agrégation :

- du besoin de capital à 99,5% relatif au risque de prime (incluant le risque catastrophe) par Lob S2 i, noté \widetilde{SCR}_{pr}^i
- du besoin de capital à 99,5% relatif au risque de réserve par Lob S2 i, noté SCR_{res}^i

Le SCR modèle interne est calculé au global sur l’ensemble du périmètre non-vie et santé, par un processus d’agrégations successives, d’abord entre risque de prime et de réserve pour chaque ligne métier, puis entre lignes métiers, avant de prendre en compte le résultat moyen pour obtenir le SCR total de Souscription Non-Vie, tel qu’illustré ci-dessous :

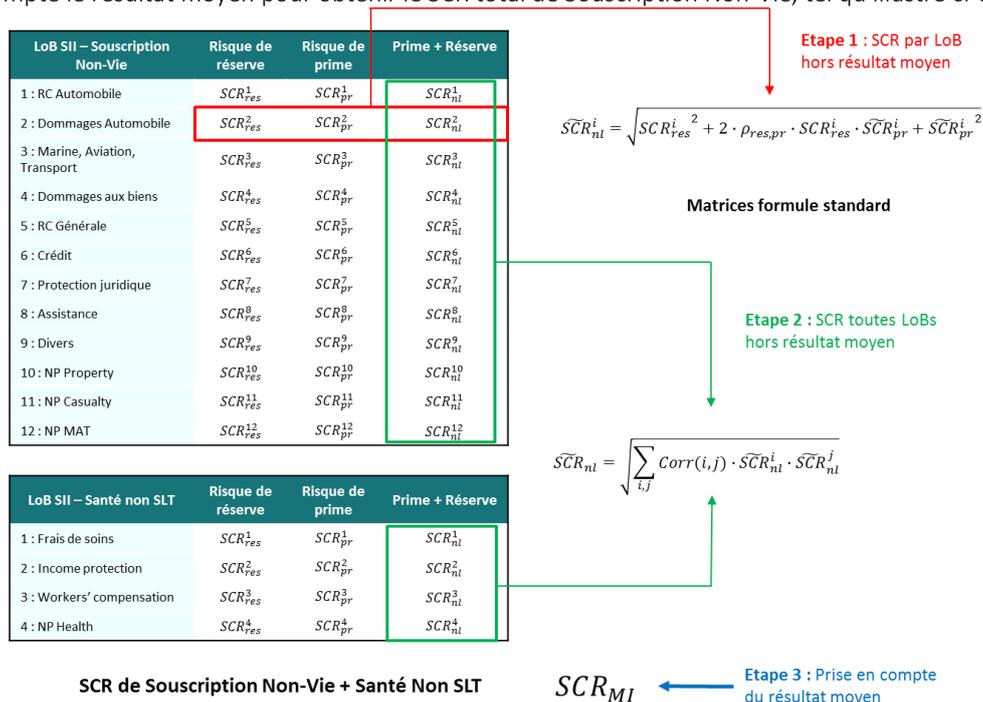


Figure 3 - Processus d’agrégation pour le calcul du SCR de Souscription Non-Vie (MIP)

| | | |
|-----------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| IRM institut du risk management | Rapport de projet ERM | Promotion 2021 |
| | | |

La corrélation retenue pour l'agrégation du risque de Prime et du risque de Réserve est celle proposée par la Formule Standard (50%). La matrice de corrélation inter-LoB retenue pour l'agrégation inter-LoB est celle issue de la Formule Standard (présentée en Annexe 2).

1.3 AVIS D'OPERATIONNELS ET D'EXPERTS EXTERNES

Des entretiens ont été réalisés avec des directeurs internes (CRO, Directeur Actuariat, Directeur Financier, etc.) et des experts externes. Nous les remercions pour leurs contributions constructives et pédagogiques. Les échanges se sont basés sur 4 questions principales dont les réponses, dont la synthèse est présentée ci-après, nous ont permis de piloter nos travaux :

Q1 : Quelles sont les mesures de dépendance pratiquées par le marché pour l'étude des corrélations entre les risques dans un cadre d'agrégation pour le calcul du capital économique ?

« Les corrélations en assurance restent encore aujourd'hui des paramètres d'entrée compliqués à estimer. Ils sont généralement basés sur des études quantitatives, complétées par des dires d'experts. Le coefficient de corrélation linéaire demeure la mesure la plus connue, mais d'autres mesures plus adaptées comme le Tau de Kendall ou le Rho de Spearman peuvent être utilisées par de nombreux acteurs du marché.

La finalité recherchée est de veiller à l'aspect de prudence lorsque les données sont jugées insuffisantes pour calibrer d'une manière robuste les corrélations entre les risques propres de son portefeuille. »

Q2 : Quelles sont les méthodes d'agrégation des risques utilisées en pratique ?

« Actuellement, l'approche modulaire proposée par la Formule Standard de Solvabilité 2 est la plus pratiquée par le marché. Cependant, d'autres méthodes d'agrégation existent telles que des approches simulatoires par réordonnement (exemple : les copules). En assurance, au sein de modèles internes, la copule gaussienne est la structure de dépendance privilégiée. Certains réassureurs sont allés plus loin en utilisant des copules archimédiennes qui sont très utiles pour l'étude de la corrélation aux extrêmes. »

Q3 : Comment adapter la communication à un auditoire varié (spécialistes modèle, métiers, instances dirigeantes) ? Quels sont les indicateurs de risque (KRIs) les plus utilisés dans les instances décisionnelles ou différents comités en lien avec la gestion des risques ?

« Face à un public varié, il faut avoir une démarche simple. Par exemple présenter des graphiques avec une lecture directe et des indicateurs d'une manière indépendante, c'est-à-dire les montants de SCR avec une approche stand-alone et le gain de diversification lié à l'agrégation. Pour fournir des exemples, il faut rester sur deux risques au maximum et éviter de présenter des formules mathématiques complexes.

L'élément principal pour le top management est de lui montrer comment développer son business tout en restant sur un SCR prudent et le moins coûteux possible. Il faut surtout utiliser des indicateurs de risque que le top management maîtrise (exemple : le ratio S2) ».

Q4 : Sachant que l'outil principal pour l'appréciation des risques au sein des entreprises est la cartographie des risques, comment illustrer le risque de dépendance entre les risques au travers de cette dernière ? Le cas échéant, comment présenter cet impact autrement ?

« Aujourd'hui, il est encore très difficile d'expliquer la dépendance au-delà de deux risques. Le top management sera plutôt intéressé par des sujets liés à l'allocation du SCR (avec la gestion de la diversification) et non de sa modélisation avec les corrélations utilisées. »

En conclusion, les réponses apportées indiquent que la dépendance entre les risques reste un sujet complexe à expliquer à un auditoire varié. Il faut donc présenter les résultats avec une démarche simple en montrant les indicateurs clés d'une manière indépendante. Les instances dirigeantes sont intéressées par le montant de SCR et le gain de diversification obtenus d'une part, mais également par son allocation et la gestion opérationnelle de la diversification d'autre part.

| | | |
|-----------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| IRM institut du risk management | Rapport de projet ERM | Promotion 2021 |
| | | |

1.4 SYNTHÈSE DU DIAGNOSTIC

L'approche d'agrégation des risques basée sur la Formule Standard actuellement mise en œuvre dans le modèle interne partiel de l'entreprise a l'avantage d'être simple à appliquer. Cependant, elle ne se révèle pas suffisante pour modéliser une éventuelle dépendance entre les risques, notamment dans le traitement des extrêmes. Elle commence à présenter des limites pour répondre efficacement aux exigences réglementaires et aux attentes du superviseur afin d'éviter une sous-estimation du SCR global.

- **Limite de l'utilisation d'une corrélation linéaire**

La mesure statistique la plus connue et très utilisée par le marché pour traiter une corrélation est le **coefficient de corrélation de Pearson**, également appelé coefficient de corrélation linéaire classique. Ses avantages tiennent à son interprétation simple et à la facilité avec laquelle il peut être communiqué à tout public.

Le coefficient de corrélation linéaire n'est toutefois pas adapté pour mesurer les dépendances entre les variables lorsque **leur relation est non linéaire** et que les distributions de ces variables sont de type log-normales ou Pareto par exemple, assez usuelles dans les modèles assurantiels de coût.

- **Justification de la pertinence de l'utilisation des coefficients de corrélation FS dans le périmètre MIP**

L'utilisation des coefficients de corrélations de la Formule Standard pour l'agrégation des risques dans le modèle interne partiel doit être justifiée et argumentée. Le superviseur attend également que l'organisme présente des travaux internes sur la mesure de la dépendance et sa modélisation.

Aujourd'hui, pour modéliser un risque individuellement, des méthodologies spécifiques et avancées sont mises en œuvre dans notre modèle interne. En revanche, la modélisation de la dépendance entre deux risques ou plusieurs risques est encore perfectible et reste basée sur des méthodes proches de la Formule Standard. Il est ainsi encore assez difficile d'utiliser des coefficients de corrélations propres à l'entreprise à la place de ceux de la Formule Standard.

- **Différence des métriques dans l'agrégation entre la FS et le MIP**

La métrique retenue dans le modèle interne de Groupama est la VaR dans l'agrégation des risques. Au sein de ce modèle, Groupama la transforme en « quantile – moyenne » afin d'utiliser l'approche de la Formule Standard qui agrège des SCR avec une hypothèse de log-normalité de la distribution des pertes à horizon 1 an.

- **Absence de distribution de pertes prévisionnelles complète (article 228 du Règlement Délégué)**

La méthode actuelle ne permet pas de construire une distribution complète de pertes prévisionnelles comme attendu dans l'article 228 du règlement délégué. Cela constitue une limite lorsque nous sommes dans un modèle interne, en particulier pour des utilisations autres que le capital économique au quantile 99,5%.

2 AGREGATION DES RISQUES AVEC UNE APPROCHE ERM

Apparue au début des années 2000, l'Entreprise Risk Management (ERM) est mentionnée par la littérature comme une méthodologie de management destinée à aider les entreprises à mieux gérer les risques. Depuis la crise financière de 2008, l'ERM est en pleine revue afin de l'améliorer. Plusieurs intervenants du marché (CAS, COSO, ISO 31000, Associations des actuaires, etc.) lui ont attribué différentes définitions qui la considèrent comme une démarche structurée et standardisée de gestion des risques ayant pour but de création de valeur pour l'actionnaire et d'être un avantage concurrentiel pour l'entreprise. Elle peut s'appliquer dans différentes branches d'activité.

La CERA Global Association a défini un syllabus normé (dernière version datant de 2019) qui permet d'appliquer une démarche ERM et notamment répondre à la définition fournie par le COSO que nous avons jugé la plus appropriée pour nos travaux. Ce syllabus est composé de plusieurs modules (voir Annexe 3).

Le COSO définit une relation directe entre les objectifs (stratégiques, financiers et de conformité) que cherche à atteindre une organisation et les éléments du dispositif ERM qui représentent ce qui est nécessaire à leur réalisation. Ces éléments sont les suivants :

- Définition des objectifs
- Identification des évènements
- Évaluation des risques
- Traitement des risques
- Activités de contrôle
- Information et Communication
- Pilotage

Groupama a initié une démarche globale ERM en incluant ce que nous présentons dans ce rapport. En effet, afin de répondre à notre problématique, nous nous focaliserons sur le module « D : Modélisation des risques et agrégation des risques » du syllabus CERA. Il fournit différents outils et indicateurs quantitatifs ou qualitatifs permettant d'identifier, d'évaluer et de traiter la dépendance. De plus, ces nouveaux outils permettront de proposer des axes d'amélioration aux limites rencontrées dans le diagnostic actuel vu précédemment.

Dans le cadre de notre mise en pratique pour le risque de Souscription Non-Vie, nous allons d'abord présenter les deux méthodologies retenues pour apprécier la dépendance entre les risques : l'une quantitative à l'aide de mesures statistiques et l'autre qualitative avec une approche par avis d'expert. Enfin, nous décrivons les modélisations alternatives d'agrégation des risques choisies : la décomposition de Cholesky et l'utilisation des copules.

2.1 APPRECIATION DE LA DEPENDANCE ENTRE LES RISQUES NON-VIE

L'appréciation de la dépendance entre les risques s'effectue de différentes manières, qu'elles soient quantitatives ou qualitatives. Nous allons donc présenter par la suite deux méthodologies différentes (applicables dans notre cas à l'étude de risques non-vie) : l'une basée sur des mesures statistiques, l'autre sur une approche par scénarios ayant recours à un jugement d'expert. L'objectif final est de donner un avis sur la dépendance cohérent vis-à-vis des risques de l'entreprise.

2.1.1 Mesures statistiques : Tau de Kendall, Rho de Spearman et Coefficients de dépendance de queue

La notion de mesure de la corrélation a été introduite précédemment avec la définition du coefficient de corrélation linéaire de Pearson. D'autres mesures statistiques connues présentent l'avantage de ne pas dépendre d'une dépendance linéaire entre les variables aléatoires.

Dans ce rapport, il a été choisi de présenter trois mesures très appréciées par les acteurs du marché : le Tau de Kendall, le Rho de Spearman intéressant pour l'étude de distributions non linéaires, et les coefficients de dépendance de queue pour le traitement des extrêmes.

De plus, les mesures du Tau de Kendall et Rho de Spearman induisent une notion de concordance. Elles donnent une mesure de la corrélation entre les rangs des observations, à la différence du coefficient de corrélation linéaire qui lui apprécie la corrélation entre les valeurs des observations. Tout d'abord, définissons la notion de concordance qui sera utile pour les définitions du Tau de Kendall et le Rho de Spearman.

✓ Mesure de concordance :

Définition : Soit X et Y deux variables aléatoires et soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux réalisations du vecteur aléatoire continu (X, Y) , alors (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont dites concordantes $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$ et discordantes $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$.

✓ Tau de Kendall :

Définition : Soit (X, Y) un couple de vecteurs aléatoires et (X', Y') une copie de (X, Y) , c'est-à-dire un couple de vecteurs en tout point identique à (X, Y) , le taux de Kendall τ s'écrit alors :

$$\tau(X, Y) = Pr\{(X - X')(Y - Y') > 0\} - Pr\{(X - X')(Y - Y') < 0\}$$

| | | |
|-----------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| IRM institut du risk management | Rapport de projet ERM | Promotion 2021 |
| | | |

Le Tau de Kendall est la différence entre la probabilité de concordance et celle de discordance.

✓ **Rho de Spearman :**

Définition : Soit (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux couples de vecteurs aléatoires copies d'un vecteur aléatoire (X, Y) , alors le rho de Spearman ρ_s est égal à :

$$\rho_s(X, Y) = 3[Pr\{(X - X_1)(Y - Y_2) > 0\} - Pr\{(X - X_1)(Y - Y_2) < 0\}]$$

Il s'écrit aussi en fonction du coefficient ρ de corrélation linéaire de Pearson :

$$\rho_s(X, Y) = \rho(F_X(X), F_Y(Y))$$

Où F_X et F_Y sont les fonctions de répartition respectives de X et Y.

✓ **Coefficients de dépendance de queue (inférieure et supérieure) :**

Contrairement au Tau de Kendall et au Rho de Spearman mesurant la dépendance sur l'ensemble de la distribution, les coefficients de dépendance de queue sont des mesures locales. L'étude de la dépendance au niveau des queues de distribution est très intéressante pour analyser la survenance simultanée de valeurs extrêmes.

Définition : Le coefficient de dépendance de queue inférieure de deux variables aléatoires continues X et Y ayant pour fonction de distribution respectives F_X et F_Y , est défini par la limite (si elle existe) :

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} P(X \leq F_X^{-1}(u) | Y \leq F_Y^{-1}(u))$$

Et le coefficient de dépendance de queue supérieure est le suivant :

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} P(X > F_X^{-1}(u) | Y > F_Y^{-1}(u))$$

2.1.2 Approche par scénario / Jugement d'expert

La méthodologie d'approche par scénario dans le traitement de l'agrégation des risques pour le calcul du besoin de capital économique est une alternative intéressante lorsque les mesures quantitatives ou les études basées sur l'historique ne permettent pas d'apporter une réponse satisfaisante. Elle repose sur différentes définitions, notamment sur des scénarios définis par jugement d'expert.

Nous allons illustrer le constat précédent avec la présentation d'un exemple d'étude de la corrélation entre les risques de prime et de réserve pour deux LoB significatives (MOTOR et FIRE) dans la partie 3. L'objectif est de comparer une corrélation définie selon une étude statistique des données observées par rapport à la corrélation de 50% fournie par la Formule Standard.

2.2 METHODOLOGIES ALTERNATIVES D'AGREGATION DES RISQUES

L'approche ERM fournit différentes méthodologies pour l'étude de la structure de dépendance et d'agrégation des risques. Celles-ci représentent des alternatives intéressantes à l'approche modulaire de la Formule Standard.

La décomposition de Cholesky et les copules, qui sont décrites ci-après, font partie de ces alternatives. Elles seront utilisées dans notre étude de cas pour le risque de Souscription Non-vie.

2.2.1 Modélisation de la structure de dépendance par la décomposition de Cholesky

La première méthodologie alternative d'agrégation des risques de souscription Non-Vie proposée pour obtenir le SCR est l'utilisation de la décomposition de Cholesky. Cette dernière est à l'image de ce qui est pratiqué pour l'agrégation des risques financiers, notamment dans les générateurs de scénarios économiques. Cette méthode est décrite ci-après :

| | | |
|-----------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| IRM institut du risk management | Rapport de projet ERM | Promotion 2021 |
| | | |

Notons $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vecteur de deux variables aléatoires centrées réduites et indépendantes.
 La matrice de covariance de X est égale à $E(XX^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

L'objectif est de transformer le vecteur X en vecteur Z de sorte que

$$E(Z) = \begin{pmatrix} E(Z_1) \\ E(Z_2) \end{pmatrix} = M$$

$$V(Z) = \begin{pmatrix} \sigma(Z_1)^2 & \rho\sigma(Z_1)\sigma(Z_2) \\ \rho\sigma(Z_1)\sigma(Z_2) & \sigma(Z_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(Z_1)^2 & \text{COV}(Z_1, Z_2) \\ \text{COV}(Z_1, Z_2) & \sigma(Z_2)^2 \end{pmatrix} = C$$

Ainsi les variables Z_1 et Z_2 auraient respectivement une espérance égale à $E(Z_1)$ et $E(Z_2)$, et un écart-type égal à $\sigma(Z_1)$ et $\sigma(Z_2)$, connus, et corrélées avec une matrice de corrélation cible : $C = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$

Supposons que nous pouvons décomposer $C : C = LL^T$. Avec L une matrice triangulaire inférieure.
 Si nous calculons la matrice de covariance de $Z = LX + M$, nous avons :

$$E(Z) = E(LX) + E(M) = L \times 0 + M = M$$

$$V(Z) = E((Z-M)(Z-M)^T) = E(LX(LX)^T) = E(LXX^TL^T) = LE(XX^T)L^T = LIL^T = LL^T = C$$

En multipliant X par L nous obtenons deux variables Z_1 et Z_2 avec les variances et corrélations souhaitées. En ajoutant le vecteur M nous avons les espérances souhaitées.
 D'après le théorème de factorisation de Cholesky, cette matrice L existe pour une matrice symétrique définie positive, et donc applicable sur notre matrice de variance-covariance C .

Cet exemple est bien sûr extensible à un vecteur X de taille supérieure à 2.

L'application de la méthode de Cholesky s'appuie sur une hypothèse en lien avec les lois des variables indépendantes initiales : elles sont supposées être normalement distribuées.

2.2.2 L'utilisation des Copules

Les copules sont devenues l'instrument privilégié pour la représentation de structure de dépendance. Il sera présenté ici différentes copules faisant parties des deux familles suivantes :

- ✓ Les copules elliptiques
- ✓ Les copules archimédiennes

Les copules Gaussienne et de Student sont les copules elliptiques les plus connues. Leur avantage est qu'elles sont facilement interprétables et explicables à différents publics. Leur inconvénient majeur est qu'elles ne permettent pas de représenter une dépendance avec une distribution asymétrique, contrairement aux copules archimédiennes.

Nous allons donc tout d'abord définir la notion de copule, puis présenter la copule gaussienne et enfin quelques copules archimédiennes.

- **Définition d'une copule**

Définition : une copule C de dimension $n \geq 2$ se définit par la fonction de répartition
 $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n \rightarrow P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n)$
 d'un vecteur aléatoire (U_1, \dots, U_n) dont les lois marginales sont uniformes sur $[0, 1]$
 (ie $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $\forall u_i \in [0, 1] P(U_i \leq u_i) = u_i$)

Théorème de Sklar [1959] : Si F est une distribution de dimension n dont les lois marginales (F_1, \dots, F_n) sont continues alors il existe une copule C unique telle que :

$$F(x_1, \dots, x_n) = C[F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)]$$

Le théorème de Sklar permet la construction d'une copule, il sera très utile pour la partie pratique.

Dans la littérature, il est démontré que le Tau de Kendall, le Rho de Spearman et les coefficients de dépendance de queue inférieure et supérieure peuvent être définis selon une copule. Ainsi, ils offrent donc un avantage pour mesurer la corrélation entre deux variables aléatoires. Ce lien est détaillé en Annexe 5.

Remarque : Nous montrons facilement que le coefficient de dépendance de queue inférieure (resp. supérieure) de C est le coefficient de dépendance de queue supérieure (resp. inférieure) de \tilde{C} qui est *la copule de survie* de C (voir définition en Annexe 5). **Autrement dit, à partir d'une copule donnée, il est possible de créer une autre copule présentant une structure de dépendance de queue inversée.**

- **Copule Gaussienne :**

Définition : Soit R une matrice symétrique définie positive $Diag(R) = (1, \dots, 1)$ et Φ_R la fonction de répartition de la loi normale multivariée ayant R comme matrice de corrélation. La copule normale ou copule gaussienne est définie par :

$$C_R(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$$

Où Φ^{-1} désigne l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite Φ .

En dimension 2, elle s'écrit :

$$c(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{(\Phi^{-1}(u))^2 r^2 - 2r\Phi^{-1}(u)\Phi^{-1}(v) + (\Phi^{-1}(v))^2 r^2}{2(1-r^2)}\right)$$

Le Tau de Kendall et le Rho de Spearman se définissent de la manière suivant dans le cas d'une copule Gaussienne :

Théorème : Soit (X_1, \dots, X_n) un vecteur aléatoire d'une copule Gaussienne C alors pour tout i et j dans $\{1, \dots, n\}$, le Tau de Kendall et le Rho de Spearman sont donnés par :

$$\tau_{X_i, X_j} = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{ij}$$

$$\rho_{S_{ij}} = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho_{ij}}{2}$$

Avec ρ_{ij} est le coefficient de corrélation linéaire entre X_i et X_j

Ci-dessous une représentation graphique d'une copule gaussienne à 2 dimensions (avec ρ le coefficient de corrélation) :

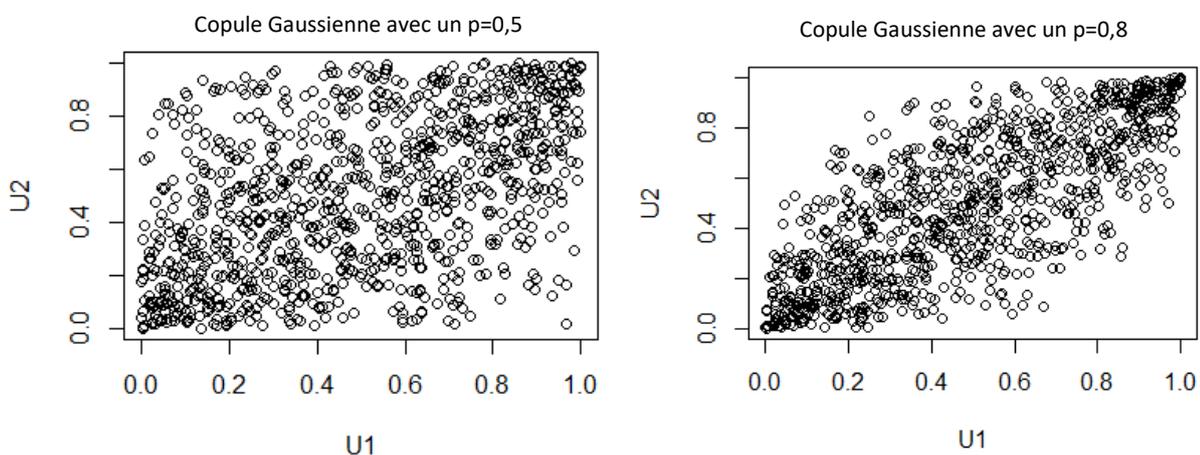


Figure 4 - Copules Gaussiennes à 2 dimensions

- **Copules archimédiennes :**

Les copules archimédiennes permettent de traiter des structures de dépendance non symétrique. Elles s’appliquent à des distributions dites asymétriques où les coefficients de queue inférieure et de queue supérieure diffèrent.

Définition : Une copule est dite Archimédienne si elle s’écrit sous la forme :

$$C^A(u_1, \dots, u_d) = \begin{cases} \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_d)) & \text{si } \sum_{n=1}^d \phi(u_n) \leq \phi(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour un générateur ϕ donné.

Soit $\phi : [0,1] \rightarrow R^+$, continue et strictement décroissante telle que : $\phi(1) = 0$. Une telle fonction ϕ est appelée générateur. C’est un générateur strict lorsque $\phi(0) = +\infty$.

La fonction pseudo-inverse de ϕ peut être définie comme suit :

$$\phi^{[-1]}(z) = \begin{cases} \phi^{-1}(z) & \text{si } 0 \leq z \leq \phi(0) \\ 0 & \text{si } \phi(0) \leq z \leq +\infty \end{cases}$$

Les copules archimédiennes les plus connues sont : Gumbel, Clayton et Frank.

Pour notre étude des quantiles élevés de pertes prévisionnelles, nous allons inverser la Copule de Clayton. Ci-dessous une représentation graphique de la copule de Clayton Inversée en deux dimensions (avec ρ le coefficient de corrélation) :

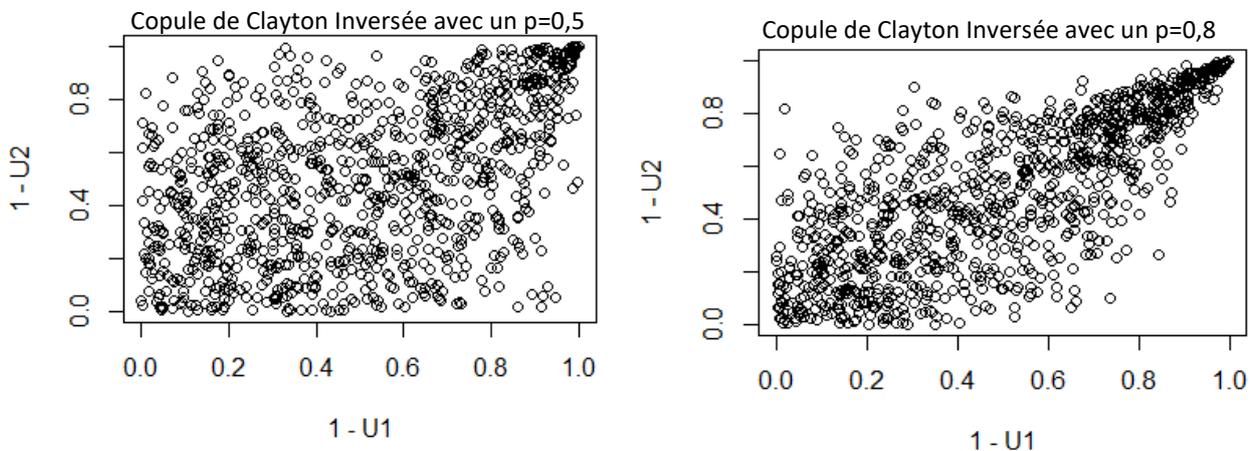


Figure 5 - Copules de Clayton Inversée à 2 dimensions

3 ETUDE DE CAS : MISE EN ŒUVRE POUR LE RISQUE DE SOUSCRIPTION NON-VIE

Le périmètre de notre étude concernera principalement l’analyse de la dépendance au sein des risques de Souscription Non-Vie (et Santé non similaire à la Vie) en commençant à la maille des risques de Réserve et de Prime au sein des lignes d’activité (LoB) du modèle interne partiel. L’application pratique explicitée ci-après a été réalisée pour le périmètre consolidé Groupe et celui de l’entité GAN.

Nous allons présenter ci-après les résultats relatifs à l’entité GAN (**par souci de confidentialité, les chiffres ont été ajustés pour cette étude**).

Nous allons tester ci-dessous trois modélisations de l’agrégation des risques et les comparer à l’approche de la Formule Standard entre le risque de Prime et le risque de Réserve :

- la méthode par la factorisation de Cholesky

- la Copule Gaussienne
- la Copule de Clayton Inversée

3.1 MESURES DE LA DEPENDANCE ENTRE LES RISQUES DE PRIME ET RESERVE

Dans cette première partie, l'objectif est de comparer une corrélation définie selon une étude statistique des données observées par rapport à la corrélation de 50% fournie par la Formule Standard.

La mesure de la dépendance entre les risques de prime et de réserve a été réalisée par LoB sur le périmètre du modèle interne partiel. Nous allons présenter les résultats obtenus sur les LoB MOTOR & FIRE de l'entité GAN sur des données brutes de réassurance et nettes de recours arrêtées au 31 décembre 2020.

Nous proposons une série de 6 indicateurs différents possibles pour l'étude de la corrélation entre les risques de Prime et Réserve :

| Méthode | Indicateur Risque de réserve | Indicateur Risque de prime |
|---------|--|---|
| 1 | $\frac{\text{Boni Mali}}{\text{BE}} = \text{Déviation BE sur un an}$ | Variation S/P année n+1 |
| 2 | | Déviati o n S/P sur un an par rapport : <ul style="list-style-type: none"> • Moyenne simple des S/P ($\leq n$) • Moyenne pondérée par les primes ($\leq n$) |
| 3 | | Déviati o n charge ultime sur un an par rapport à <ul style="list-style-type: none"> • Moyenne simple des ultimes ($\leq n$) • Moyenne pondérée par les primes ($\leq n$) |
| 4 | | |
| 5 | | Variation S(n + 1)/P ($\leq n$) |
| 6 | | |

Figure 6 – Indicateurs des risques de Prime et de Réserve

Les coefficients de corrélation de Pearson, Rho de Spearman et Tau de Kendall sont calculés sur les données d'étude selon chacune de ces six méthodes et sont détaillés ci-dessous :

| Segment | Corrélation | Méthode 1 | Méthode 2 | Méthode 3 | Méthode 4 | Méthode 5 | Méthode 6 |
|---------|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| MOTOR | Pearson | -23% | -43% | -24% | -44% | -21% | -44% |
| | Spearman | -26% | -44% | -29% | -44% | -29% | -44% |
| | Kendall | -16% | -28% | -20% | -30% | -18% | -28% |
| FIRE | Pearson | 13% | 10% | 17% | 24% | 34% | 22% |
| | Spearman | 24% | 9% | 20% | 26% | 49% | 31% |
| | Kendall | 18% | 5% | 14% | 16% | 33% | 18% |

Figure 7 - Résultats des mesures de dépendance entre les risques de Prime et Réserve des LoBs MOTOR et FIRE (MIP)

Pour les deux branches, le coefficient de corrélation de 50% de la Formule Standard reste supérieur à la valeur maximale des 6 méthodes sous fond jaune dans le tableau ci-dessus. Nous avons obtenu les mêmes constats sur toutes les LoBs.

Notre choix final, basé sur une notion de prudence est de garder les corrélations de la Formule standard pour l'agrégation entre les risques de prime et de réserve dans le modèle interne partiel. D'autres scénarios peuvent être étudiés dans un cadre similaire. Par exemple, il aurait également été intéressant de recueillir une hypothèse de corrélation issue d'un avis d'une direction métier et de la comparer à celle de la Formule standard.

3.2 AGREGATION PAR LA DECOMPOSITION DE CHOLESKY

À l'aide de son modèle interne, l'entité GAN dispose, pour chacune des LoBs, des deux éléments ci-après :

- 200 000 simulations de résultat technique courant y compris primes futures
- Un BE S2 de réserves net, et la volatilité associée

Le processus d'agrégation entre les risques de réserve et de prime au sein d'une LoB à l'aide de la méthode de décomposition de Cholesky est récapitulé dans le schéma suivant (numéroté par étape) :

- ⇒ **Etape 1** : Simulations indépendantes des distributions des risque de prime et de réserve
- ⇒ **Etape 2** : Factorisation de Cholesky de la matrice Variance/Covariance (issue de la matrice de corrélation de la Formule Standard)
- ⇒ **Etape 3** : Calculs des distributions corrélées des risque de prime et de réserve
- ⇒ **Etape 4** : Construction de la distribution jointe des risques de prime et de réserve et déduction du quantile 99,5% (SCR)

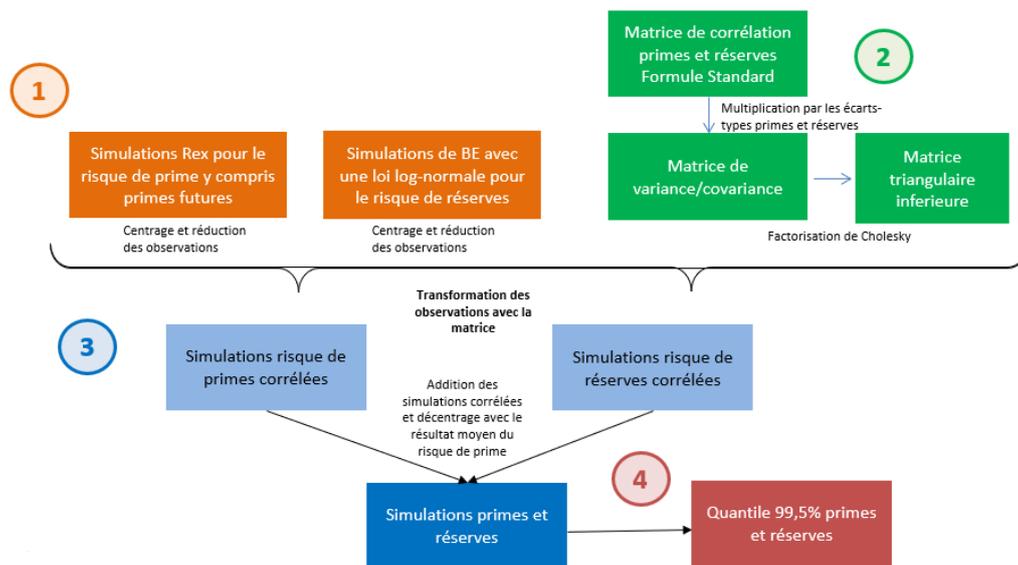


Figure 8 - Processus d'agrégation par Cholesky entre les risques de Prime et Réserve au sein d'une LoB

Les simulations issues de ce processus pour chacune des LoBs sont utilisées en input du processus d'agrégation inter-LoB par la méthode de Cholesky. Cette dernière est une application de la méthodologie à un vecteur de taille égale au nombre de LoBs modélisées dans le MIP de GAN. Le processus d'agrégation multi-LoB est présenté en Annexe 6.

Ci-dessous les résultats obtenus avec l'approche de Cholesky par LoB et toutes LoBs :

| LoB | AGREGATION FORMULE STANDARD | | DECOMPOSITION CHOLESKY | | ECART (en %) | |
|--------------------|-----------------------------|----------------|------------------------|----------------|--------------|----------------|
| | Moyenne | Quantile 99,5% | Moyenne | Quantile 99,5% | Moyenne | Quantile 99,5% |
| MEDICAL | 15,2 | -3,6 | 15,2 | -3,3 | 0,0% | -9,3% |
| IP | 4,4 | -5,9 | 4,4 | -6,3 | 0,1% | 6,8% |
| WORKERS | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0% | 0,0% |
| MTPL | -36,9 | -130,1 | -36,9 | -130,5 | 0,1% | 0,3% |
| MOTOR | 21,6 | -41,2 | 21,6 | -40,0 | 0,0% | -3,0% |
| MARINE | 0,2 | -1,3 | 0,2 | -1,3 | 0,3% | -1,1% |
| FIRE | -51,9 | -162,5 | -51,9 | -160,1 | 0,0% | -1,5% |
| GTPL | -8,8 | -132,1 | -8,9 | -132,2 | 1,2% | 0,0% |
| CREDIT | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0% | 0,0% |
| LEGAL_EXP | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0% | 0,0% |
| ASSISTANCE | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0% | 0,0% |
| MISCELLANEOUS | 0,4 | -5,0 | 0,4 | -4,9 | -0,7% | -2,0% |
| TOUTES LOBS | -55,7 | -338,5 | -55,9 | -342,4 | 0,4% | 1,2% |

Figure 9 - Résultats de l'agrégation via la décomposition de Cholesky par LoB et toutes LoBs agrégées (MIP)

| | | |
|-----------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| IRM institut du risk management | Rapport de projet ERM | Promotion 2021 |
| | | |

L'agrégation par la décomposition de Cholesky fournit un SCR plus élevé que celui de la Formule Standard. Au global, l'écart de SCR est faible (+1,2%).

Au niveau des LoBs, les écarts sont faibles (moins de 3%) sauf pour les LoBs MEDICAL et IP. Les LoBs les plus consommatrices de capital disposent d'un SCR légèrement plus élevé avec la nouvelle approche par rapport à la Formule Standard sauf pour la Lob FIRE (-1,5%).

L'hypothèse requise de normalité sur les variables indépendantes initiales pour l'application de la méthode de Cholesky présente un inconvénient dans notre cas. En effet, la distribution du risque de réserve est une loi log-normale et nous n'avons pas validé la normalité de la loi du risque de prime (pour certaines LoBs, une loi log-normale est aussi retenue).

3.3 AGREGATION PAR LES COPULES

3.3.1 Approche par la Copule Gaussienne

Pour simuler les réalisations de deux variables aléatoires X et Y liées par une copule gaussienne et suivant des marginales spécifiques :

- Nous simulons les réalisations de deux variables uniformes liées par la même copule gaussienne : U_1 et U_2
- Nous associons à chaque couple de simulation (U_1, U_2) les quantiles des variables X et Y correspondant :

$$(X, Y) = (F_X^{-1}(u_1), F_Y^{-1}(u_2))$$

Avec F_X et F_Y les fonctions de répartition respectives des variables X et Y.

Dans notre cas, nos deux variables, pour une LoB donnée, sont :

- P (résultat technique y compris primes futures) pour le risque de prime
- R (variation du BE de réserves) pour le risque de réserve

F_P est définie par les 200 000 simulations issues du modèle interne. C'est une distribution empirique.

F_R est la fonction de répartition d'une loi log normale centrée et de paramètre de volatilité issu du modèle interne.

En prenant les quantiles de P associés aux simulations de U_1 nous obtenons P' . Avant de faire la même chose pour R, nous devons nous assurer que nous corrélons des variables équivalentes. P' est un résultat technique, qui est un gain pour GAN quand il est positif. A l'inverse R est une variation de BE de réserve. Une variation positive (à la hausse) est une perte pour GAN. Pour corrélérer des pertes avec des pertes et des gains avec des gains, nous allons agréger l'opposé de la variable P avec la variable R.

Nous avons alors :

- $P' = F_P^{-1}(U_1)$
- $R' = F_R^{-1}(U_2)$

La distribution prime et réserve est alors $PR = P' + R'$ et le SCR est son quantile 99,5%.

Le processus d'agrégation des risques de Prime et de Réserve au sein d'une LoB à l'aide d'une copule est récapitulé dans le schéma suivant (numéroté par étape) :

- ⇒ **Etape 1** : Simulations indépendantes des distributions du risque de prime et de réserve
- ⇒ **Etape 2** : Simulation d'une copule bivariee à l'aide de la matrice de corrélation de la Formule Standard
- ⇒ **Etape 3** : Calcul des distributions corrélées du risque de prime et de réserve grâce aux fonctions de répartition inverse marginales
- ⇒ **Etape 4** : Construction de la distribution jointe des risques de prime et de réserve et déduction du quantile 99,5% (SCR)

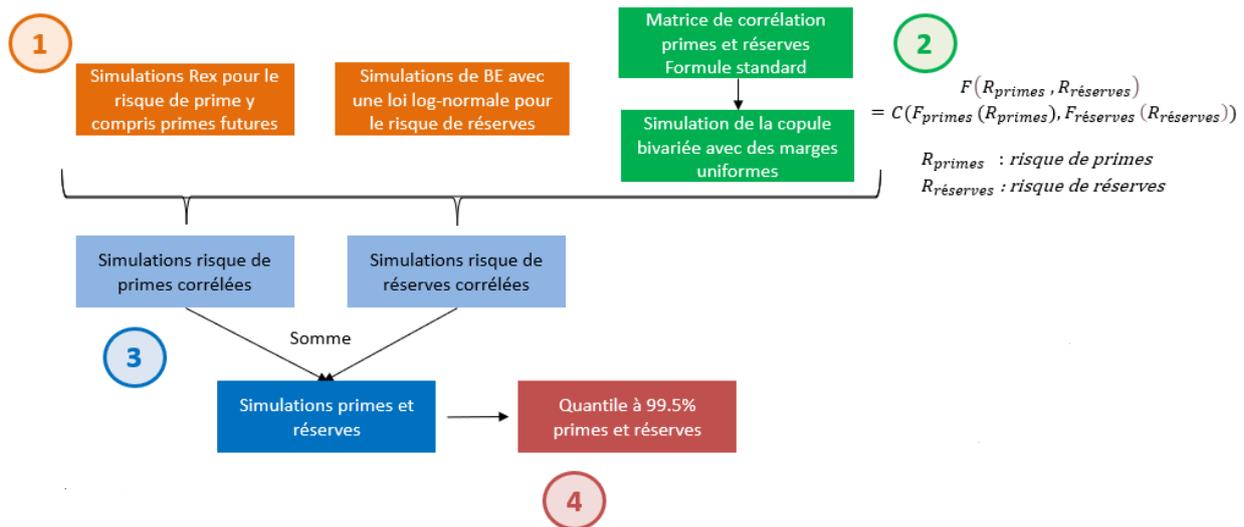


Figure 10 - Processus d'agrégation par une copule entre les risques de Prime et Réserve au sein d'une LoB

L'agrégation multi-LoB se fait de la même manière, avec une copule gaussienne multivariée, paramétrée par les coefficients de corrélation inter-LoBs de la Formule Standard. Les variables Prime et Réserve par LoB sont définies par leurs fonctions de répartition empiriques PR_{LoB} obtenues grâce à la première agrégation.

Soit n le nombre de LoBs, nous simulons 200 000 réalisations des variables (U_1, U_2, \dots, U_n) et nous calculons pour chaque LoB i , le vecteur :

$$(PR)_i' = F_{PR_i}^{-1}(U_{LoBi})$$

La distribution empirique primes et réserves toute LoB est alors :

$$PR_{ttesLoBs} = \sum_{i \in LoB} (PR)_i'$$

Le SCR de Souscription Non-Vie est alors égal au quantile 99,5% de $PR_{ttesLoBs}$.

Le processus d'agrégation multi-LoBs à l'aide d'une copule est récapitulé en Annexe 7.

Ci-dessous les résultats obtenus pour l'entité GAN :

| LoB | AGREGATION FORMULE STANDARD | | COPULE GAUSSIENNE | | ECART (en %) | |
|--------------------|-----------------------------|----------------|-------------------|----------------|--------------|----------------|
| | Moyenne | Quantile 99,5% | Moyenne | Quantile 99,5% | Moyenne | Quantile 99,5% |
| MEDICAL | 15,2 | -3,6 | 15,2 | -3,5 | 0,0% | -2,8% |
| IP | 4,4 | -5,9 | 4,4 | -5,6 | 0,0% | -4,5% |
| WORKERS | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0% | 0,0% |
| MTPL | -36,9 | -130,1 | -36,9 | -129,8 | 0,0% | -0,2% |
| MOTOR | 21,6 | -41,2 | 21,6 | -40,7 | 0,0% | -1,3% |
| MARINE | 0,2 | -1,3 | 0,2 | -1,2 | 0,0% | -4,9% |
| FIRE | -51,9 | -162,5 | -51,9 | -161,2 | 0,0% | -0,8% |
| GTPL | -8,8 | -132,1 | -8,8 | -131,4 | 0,0% | -0,6% |
| CREDIT | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0% | 0,0% |
| LEGAL_EXP | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0% | 0,0% |
| ASSISTANCE | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0% | 0,0% |
| MISCELLANEOUS | 0,4 | -5,0 | 0,4 | -5,0 | 0,0% | -0,5% |
| TOUTES LOBS | -55,7 | -338,5 | -55,7 | -337,5 | 0,0% | -0,3% |

Figure 11 - Résultats de l'agrégation via la Copule Gaussienne par LoB et toutes LoBs agrégées (MIP)

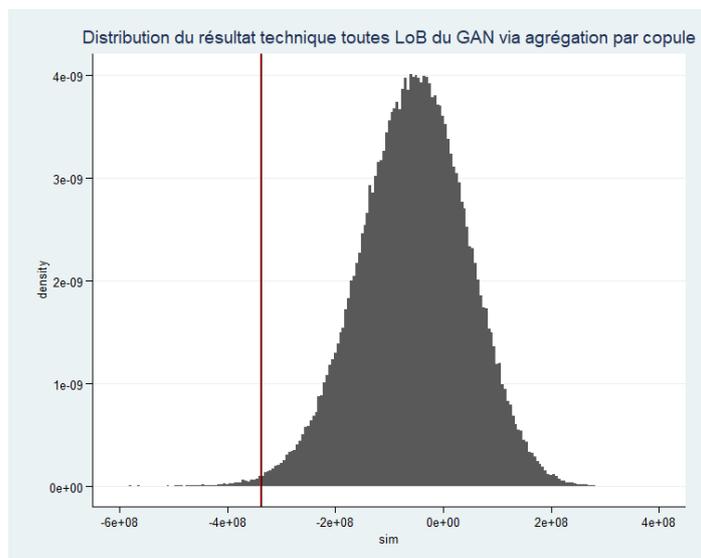


Figure 12 - Distribution du résultat technique toutes LoB de l'entité GAN à l'aide de l'agrégation par copule

Au global, l'écart de SCR est très faible (-0,3%) entre les deux approches. Le SCR global obtenu par la copule gaussienne (337,5 M€) est inférieur à celui de la Formule Standard (338,5 M€).

Par ligne d'activité, les écarts sont faibles (moins de 5%), notamment pour les lignes d'activité les plus consommatrices de capital : MTP, FIRE et GTPL (moins de 1%). Les LoB qui disposent des écarts les plus élevés sont celles avec peu de volume de SCR : MEDICAL, IP et MARINE.

3.3.2 Approche par la Copule de Clayton Inversée

La copule de Clayton est une copule de la famille archimédienne. Elle permet d'introduire une dépendance plus forte aux valeurs extrêmes faibles. Nous pouvons appliquer la dépendance sur les valeurs extrêmes hautes en utilisant une copule de Clayton inversée. Il suffit d'appliquer la même méthodologie que pour la copule gaussienne mais en remplaçant les variables U par $1-U$:

- $P' = F_P^{-1}(1 - U_1)$
- $R' = F_R^{-1}(1 - U_2)$

Une autre particularité dans l'application de cette copule est son paramétrage. Contrairement à la copule Gaussienne que nous paramétrons avec les coefficients de corrélation de la Formule Standard, la copule de Clayton n'a qu'un paramètre α qui n'est pas le coefficient de corrélation de Pearson. Il existe tout de même une relation entre ce paramètre et le tau de Kendall qui permet de revenir au coefficient de corrélation de la Formule Standard (50% entre prime et réserve).

$$\tau_K = \frac{\alpha}{\alpha + 2}$$

$$\rho = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau_K\right)$$

Avec τ_K le tau de Kendall et ρ le coefficient de corrélation de Pearson.

Nous avons alors

$$\alpha = \frac{2 \times \arcsin(\rho)}{\pi\left(1 - \frac{2 \times \arcsin(\rho)}{\pi}\right)}$$

Cette formule s'applique bien pour le risque de prime et réserve car il suffit de faire le lien entre le paramètre de la copule et le coefficient de corrélation Formule Standard entre prime et réserve.

Néanmoins, ce n'est pas le cas pour l'agrégation inter-LoB. En effet, la copule de Clayton n'a qu'un seul paramètre même pour le cas multivarié. Il faut alors trouver le paramètre α équivalent à l'intégralité de la matrice de corrélation inter-LoB Formule Standard. Nous avons alors recours à la méthodologie détaillée ci-dessous :

En multi-LoBs, le but est de simuler un vecteur de variables aléatoires (U_1, U_2, \dots, U_n) dont les lois marginales sont des lois uniformes et dont la structure de dépendance est modélisée par une copule C de Clayton.

Nous rappelons que la copule de Clayton de dimension n est la fonction définie par :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi_{\theta}^{-1}(\varphi_{\theta}(u_1), \dots, \varphi_{\theta}(u_n))$$

Avec :

$$\text{Le générateur de Clayton : } \varphi_{\theta} = \frac{(t^{-\theta} - 1)}{\theta}, \theta > 0$$

Afin d'estimer le paramètre θ , nous allons utiliser la méthode des moments en suivant les étapes ci-dessous :

1. A partir des corrélations entre LoBs utilisées en Formule Standard, nous calculons le Tau de Kendall pour chaque $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$:

$$\tau_{ij} = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin}(\rho_{ij})$$

Avec :

τ_{ij} : Tau de Kendall entre la LoB i et la LoB j

ρ_{ij} : Coefficient de corrélation entre la LoB i et la LoB j

2. Nous pouvons estimer θ en résolvant l'équation suivante :

$$\hat{\tau} = \tau(\hat{\theta}) \text{ i.e. } \hat{\theta} = \tau^{-1}(\hat{\tau})$$

$$\hat{\tau} : \text{Le Tau de Kendall moyen : } \hat{\tau} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{\tau_{ij}}{\frac{n(n+2)}{2}}$$

Dans le cas multivarié, nous travaillons avec le Tau de Kendall moyen en utilisant les τ_{ij} calculés à l'aide des corrélations Formule Standard. Le Tau de Kendall τ s'exprime en fonction du paramètre de Clayton θ .

Cas multidimensionnel :

$$\tau(\theta) = \frac{2^n}{2^n - 1} \frac{q(\theta, n, 1)}{q(\theta, n, 2)} - \frac{1}{2^n - 1} \text{ avec } q(\theta, n, m) = \prod_{i=0}^{n-1} (m + i\theta)$$

Le tableau suivant présente les résultats obtenus sur l'entité GAN par LoB et toutes LoBs :

| LoB | AGREGATION FORMULE STANDARD | | COPULE CLAYTON INVERSEE | | ECART (en %) | |
|--------------------|-----------------------------|----------------|-------------------------|----------------|--------------|----------------|
| | Moyenne | Quantile 99,5% | Moyenne | Quantile 99,5% | Moyenne | Quantile 99,5% |
| MEDICAL | 15,2 | -3,6 | 15,2 | -5,0 | 0,0% | 39,3% |
| IP | 4,4 | -5,9 | 4,4 | -6,7 | 0,0% | 13,2% |
| WORKERS | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0% | 0,0% |
| MTPL | -36,9 | -130,1 | -36,9 | -139,7 | 0,0% | 7,4% |
| MOTOR | 21,6 | -41,2 | 21,6 | -45,3 | 0,0% | 9,9% |
| MARINE | 0,2 | -1,3 | 0,2 | -1,4 | 0,0% | 12,2% |
| FIRE | -51,9 | -162,5 | -51,9 | -168,5 | 0,0% | 3,7% |
| GTPL | -8,8 | -132,1 | -8,8 | -140,8 | 0,0% | 6,6% |
| CREDIT | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0% | 0,0% |
| LEGAL_EXP | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0% | 0,0% |
| ASSISTANCE | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0% | 0,0% |
| MISCELLANEOUS | 0,4 | -5,0 | 0,4 | -5,7 | 0,0% | 12,7% |
| TOUTES LOBS | -55,7 | -338,5 | -55,7 | -459,9 | 0,0% | 35,9% |

Figure 13 - Résultats de l'agrégation via la Copule de Clayton Inversée par LoB et toutes LoBs agrégées (MIP)

Par rapport aux autres approches, la copule de Clayton inversée fournit des écarts significatifs et plus élevés par LoB et au global (+35,9%).

Le montant élevé de SCR obtenu par l'application de la copule de Clayton Inversée s'explique par la génération de corrélations assez fortes aux deux niveaux d'agrégation :

- ✓ 1er niveau : pour chaque LoB, la corrélation moyenne est supérieure à 50% entre les risques de Prime et de Réserve
- ✓ 2ème niveau : la matrice de corrélation inter-LoB générée indique des coefficients de corrélations supérieurs à ceux de la Formule Standard (cf Annexe 9).

3.3.3 Validation de l'agrégation par une Copule

Afin de valider les copules utilisées et leurs implémentations, des analyses complémentaires ont été réalisées et sont résumées par le schéma suivant :

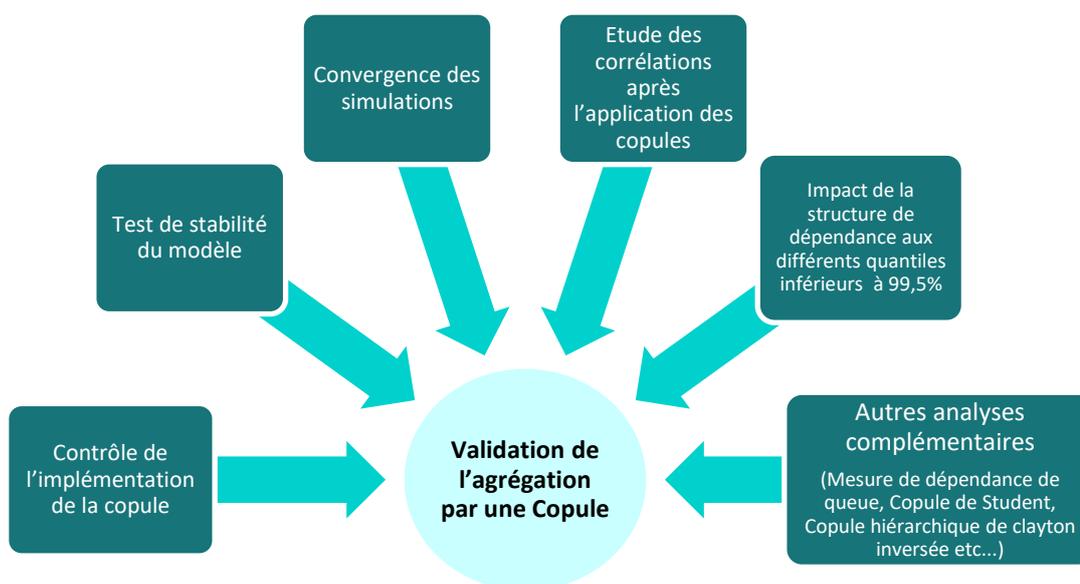


Figure 14 - Analyses complémentaires pour la validation de l'agrégation par une copule

Nous allons décrire les principales analyses réalisées dont les résultats chiffrés sont en annexes :

✓ **Etude des corrélations après l'application des copules par LoB (Annexe 8) :**

Les corrélations obtenues après l'application de la Copule Gaussienne sont très proches de la corrélation de 50% utilisée dans l'approche de la Formule standard pour chaque LoB. Les Lobs les plus consommatrices de capital (MTPL, FIRE et GTPL) disposent de coefficient au-dessus de 50%.

La Copule de Clayton génère des corrélations supérieures à 50% avec des différences significatives par LoB. Cela engendre donc un SCR plus élevé que l'approche par la Formule Standard.

✓ **Contrôle de l'implémentation des Copules (Annexe 11) :**

Le réordonnancement généré pour l'utilisation de la copule n'introduit pas de biais important sur les distributions marginales : **les lois marginales sont quasiment inchangées**, notamment pour la Copule Gaussienne.

✓ **Vérification de Stabilité du modèle (Annexe 12) :**

Nous vérifions la sensibilité à la graine aléatoire pour la génération des copules. L'utilisation de la Copule Gaussienne présente des résultats stables. La Copule de Clayton inversée indique des résultats sensibles au changement de la graine aléatoire.

Au vu de ces analyses, nous constatons que la Copule de Clayton inversée ne fournit pas des résultats satisfaisants et présente des impacts très importants qui ne sont pas obligatoirement justifiés par un réel risque. En revanche, l'application de la Copule Gaussienne présente des résultats satisfaisants : les corrélations obtenues après son application sont très proches à celles introduites en entrée et les impacts de variation du SCR sont plus faibles par LoB et au global.

4 SYNTHÈSE ET COMMUNICATION

À l'issue de ces travaux de mise en œuvre et d'analyse des approches d'agrégation testées, la présentation et la communication aux instances dirigeantes constitue une étape importante pour leur permettre de prendre les décisions adaptées afin de piloter au mieux les risques de l'entreprise. Le bon choix des indicateurs clés est déterminant pour avoir une approche simple et compréhensible adaptée aux différentes parties prenantes.

Ainsi, pour synthétiser nos travaux sur l'agrégation du Risque de Souscription Non-vie, nous proposons les trois indicateurs suivants :

1. Le montant de SCR : le quantile 99,5% toutes LOBS sur le périmètre MIP
2. L'écart par rapport à l'approche Formule Standard
3. Le gain de diversification

Le tableau suivant présente les résultats des trois indicateurs par méthode d'agrégation :

| Risque Souscription Non-Vie (MIP) | AGREGATION FORMULE STANDARD | DECOMPOSITION CHOLESKY | COPULE GAUSSIENNE | COPULE CLAYTON INVERSEE |
|---|-----------------------------|------------------------|-------------------|-------------------------|
| Quantile 99,5% toutes LOBS (M€) | 338,5 | 342,4 | 337,5 | 459,9 |
| Ecart par rapport à l'agrégation FS (%) | - | 1,2% | -0,3% | 35,9% |
| Gain de diversification (%) | 36,5% | 35,7% | 36,6% | 13,7% |

Figure 15 - Indicateurs de risque (KRI) choisis pour la communication sur l'agrégation des risques de Souscription Non-Vie (MIP)

Une illustration graphique du gain de diversification obtenu selon la méthode d'agrégation permet également une lecture directe et claire des résultats obtenus :

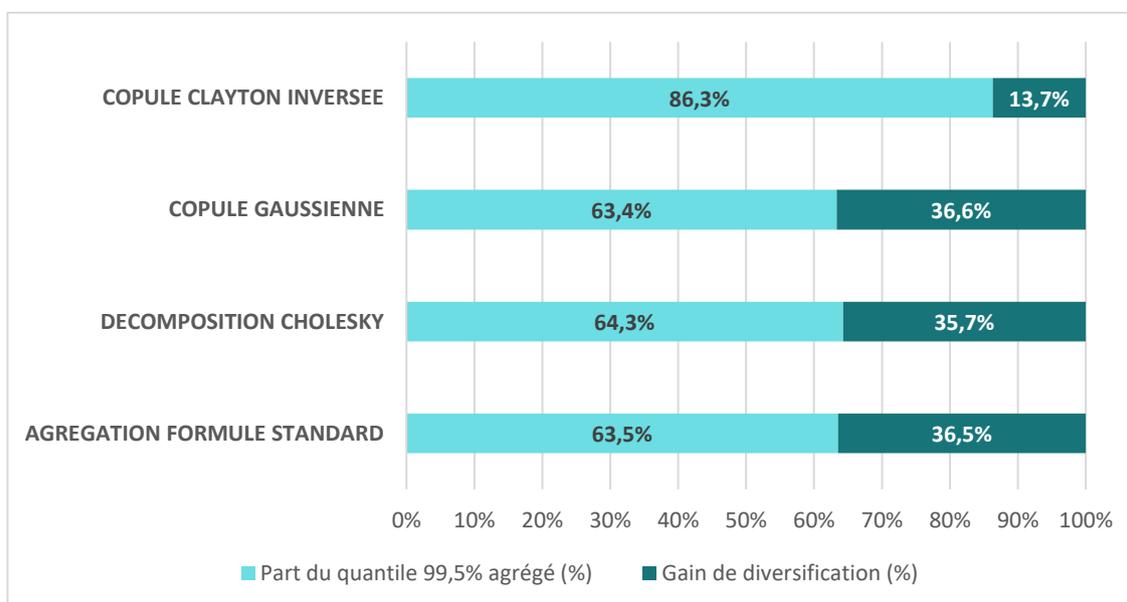


Figure 16 - Représentation du gain de diversification par méthode d'agrégation sur le Risque de Souscription Non-Vie (MIP)

Pour chaque LoB, des écarts de SCR faibles et des gains de diversifications proches sont constatés entre la Copule Gaussienne et l'agrégation avec la méthode Formule Standard.

La Copule Gaussienne permet d'avoir une modélisation plus appropriée dans le cadre d'un modèle interne que celle par la Formule standard. L'avantage de son utilisation est qu'elle fournit une distribution de pertes complète telle qu'exigée par la réglementation.

| | | |
|-----------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| IRM institut du risk management | Rapport de projet ERM | Promotion 2021 |
| | | |

CONCLUSION

Les travaux menés dans le cadre de ce mémoire ERM mettent en évidence l'importance de la mesure et du choix de la structure de dépendance et leurs impacts non négligeables sur le capital économique dans le cadre d'un modèle interne non-vie. L'appréciation de la dépendance, sa mesure et le calibrage des copules restent toutefois délicats à mettre en œuvre au sein de l'entreprise, en raison de la courte profondeur d'historique et de l'indisponibilité des données élémentaires aux différentes mailles d'agrégation du modèle.

La méthode de Cholesky, malgré son utilisation courante en finance de marché, présente une limite due à l'hypothèse de normalité des variables aléatoires à corrélérer et elle peut générer une déformation des lois marginales.

Le choix des copules pour la modélisation de la structure de dépendance est la méthode la plus appropriée. Néanmoins la sélection de la copule la plus adéquate parmi l'ensemble des variétés disponibles (elliptiques, archimédiennes, etc.) n'est pas évidente, et exige d'arbitrer un dilemme entre trois axes : caractère approprié du modèle, robustesse du calibrage et intelligibilité des résultats. Au-delà de la dépendance et de sa modélisation, l'utilisation des copules facilite également l'allocation du capital économique aux différentes mailles du modèle. La méthode d'Euler préconisée par l'EIOPA peut être ainsi mise en œuvre.

Suite aux travaux menés, nous préconisons d'utiliser une copule gaussienne basée sur les coefficients de corrélation de la Formule Standard pour la prochaine version du modèle interne partiel étudié. Cette recommandation est motivée par la non-sous-estimation du capital économique par rapport à l'approche actuelle et par une modélisation plus appropriée qui permet de mieux matérialiser la dépendance entre les risques. Les travaux réalisés ont également permis d'alimenter aussi nos échanges sur l'allocation des gains de diversification avec l'autorité de contrôle.

Les autres copules matérialisant plus de dépendance aux queues peuvent être utilisées dans un cadre ORSA comme des stress-tests sur les dépendances extrêmes. En effet, utiliser des copules plus conservatrices dépend aussi de la stratégie de l'entreprise en termes d'exposition au risque et de la gestion des couts du capital. La vision d'agrégation des risques peut différer entre un assureur et un réassureur.

La communication sur la dépendance au sein des instances dirigeantes reste un exercice difficile, qui exige de simplifier et de synthétiser les résultats obtenus. Au-delà du détail des travaux, c'est la sélection des KRIs (montant du SCR et gain de diversification) qui permet une transmission efficace des éléments clés permettant la prise en compte des résultats du modèle dans les décisions des instances.

| | | |
|-----------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| IRM institut du risk management | Rapport de projet ERM | Promotion 2021 |
| | | |

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Sébastien BONHOMME, Barthélémy DELAFONTAINE, Thomas DELOR, Quentin GUIBERT, David MARIUZZA, Rémy SAUZET, *Cours des Copules Gaussienne et de Student*, ISFA, 2008
- [2] CADOUX & LOISEAU, *Copules et Dépendances : Application pratique à la détermination du besoin en Fonds Propres d'un assureur non-vie*, Bulletin Français d'Actuariat, 2004
- [3] CERA New Syllabus 2014
- [4] Site officiel du COSO <https://www.coso.org/>
- [5] Alexia CURTAUD, Vendelin ELOUNDOU, Pierre MONTESINO & Christophe PASCAL, *Copules Archimédiennes ERM*, 2016
- [6] GROUPAMA, *Corpus méthodologiques du modèle interne*, 2016
- [7] GROUPAMA, *Etude des corrélations entre les risques de primes et de réserve pour GAN Assurances au 31/12/2020*, 2021
- [8] Stéphane LOISEL, *Cours Formation ERM*, 2021
- [9] Fadhila LOUNAS, *Modélisation de la dépendance par les copules et applications*, 2011
- [10] Etienne MARCEAU, *Introduction à l'actuariat : Mesures de risque*, Université Laval Québec, 2010
- [11] Catherine PIGEON, *Cours Formation ERM*, 2021

TABLE DES FIGURES

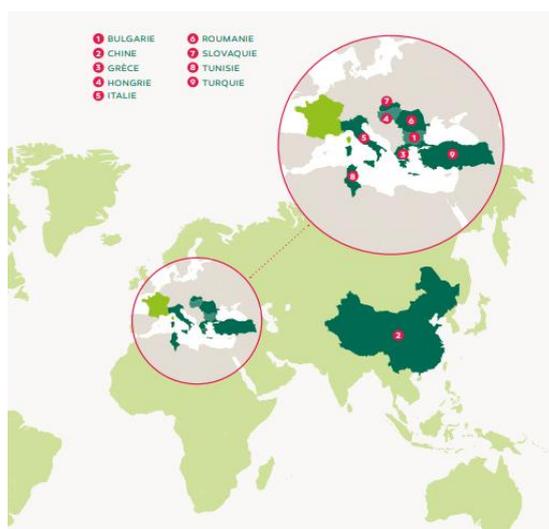
| | |
|--|----|
| Figure 1 - Approches Formule Standard et Modèle interne partiel sous Solvabilité 2 (Source EIOPA)..... | 3 |
| Figure 2 - Représentation du SCR selon la distribution du résultat économique | 4 |
| Figure 3 - Processus d'agrégation pour le calcul du SCR de Souscription Non-Vie (MIP) | 4 |
| Figure 4 - Copules Gaussiennes à 2 dimensions | 10 |
| Figure 5 - Copules de Clayton Inversée à 2 dimensions | 11 |
| Figure 6 – Indicateurs des risques de Prime et de Réserve | 12 |
| Figure 7 - Résultats des mesures de dépendance entre les risques de Prime et Réserve des LoBs MOTOR et FIRE (MIP) .. | 12 |
| Figure 8 - Processus d'agrégation par Cholesky entre les risques de Prime et Réserve au sein d'une LoB | 13 |
| Figure 9 - Résultats de l'agrégation via la décomposition de Cholesky par LoB et toutes LoBs agrégées (MIP) | 13 |
| Figure 10 - Processus d'agrégation par une copule entre les risques de Prime et Réserve au sein d'une LoB | 15 |
| Figure 11 - Résultats de l'agrégation via la Copule Gaussienne par LoB et toutes LoBs agrégées (MIP) | 15 |
| Figure 12 - Distribution du résultat technique toutes LoB de l'entité GAN à l'aide de l'agrégation par copule..... | 16 |
| Figure 13 - Résultats de l'agrégation via la Copule de Clayton Inversée par LoB et toutes LoBs agrégées (MIP) | 17 |
| Figure 14 - Analyses complémentaires pour la validation de l'agrégation par une copule | 18 |
| Figure 15 - Indicateurs de risque (KRI) choisis pour la communication sur l'agrégation des risques de Souscription Non-Vie (MIP) | 19 |
| Figure 16 - Représentation du gain de diversification par méthode d'agrégation sur le Risque de Souscription Non-Vie (MIP) | 19 |

ANNEXES

ANNEXE 1 : Présentation de l'entreprise

Le Groupe Groupama est constitué de deux périmètres :

- ✓ le périmètre combiné qui comprend l'intégralité des entités du groupe et les caisses régionales pour 100 % de leurs activités ;
- ✓ le périmètre consolidé dont Groupama Assurances Mutuelles est société mère. Son activité comprend, en plus de l'activité des filiales, environ 35 % de l'activité des caisses régionales, activité captée par le mécanisme de réassurance interne.



14,4 Mds€
de chiffre d'affaires

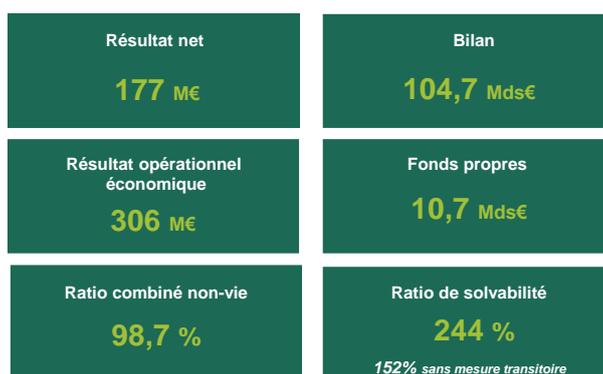
11,5 millions
de sociétaires
et clients

31 000
collaborateurs

UN GROUPE PRÉSENT
DANS TOUS LES TERRITOIRES
EN FRANCE ET DANS **10 PAYS**
EN EUROPE, AFRIQUE ET ASIE

Positionnement du Groupe Groupama au 31/12/2020

Le groupe Groupama représente 11,5 millions de sociétaires et clients pour un chiffre d'affaires 14,4 Mds€. Il est un des leaders en France et il est le premier assureur en assurance agricole, santé individuelle (hors mutuelles 45) et collectivités publiques. Les résultats financiers au 31/12/2020 sont solides :



Situation financière du Groupe Groupama au 31/12/2020

ANNEXE 2 : Matrice de corrélation inter-LoB de la Formule Standard

La matrice de corrélation inter-LoB retenue pour l'agrégation inter-LoB est celle issue de la Formule Standard :

Matrice de corrélation non stressée

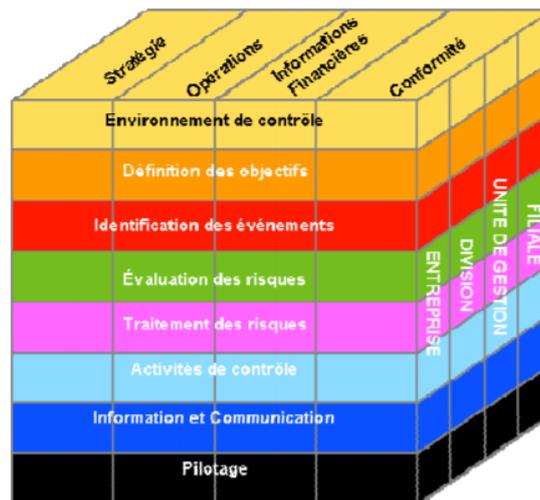
| | Medical expenses | Income protection | Workers' compensation | Motor vehicle liability | Motor, other classes | Marine, aviation, transport | Fire and other property | Third-party liability | Credit and suretyship | Legal expenses | Assistance | Miscellaneous | NP Health | NP Casualty | NP MAT | NP Property |
|-----------------------------|------------------|-------------------|-----------------------|-------------------------|----------------------|-----------------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|------------|---------------|-----------|-------------|--------|-------------|
| Medical expenses | 100% | 50% | 50% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 50% | 0% | 0% | 0% |
| Income protection | 50% | 100% | 50% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 50% | 0% | 0% | 0% |
| Workers' compensation | 50% | 50% | 100% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 50% | 0% | 0% | 0% |
| Motor vehicle liability | 0% | 0% | 0% | 100% | 50% | 50% | 25% | 50% | 25% | 50% | 25% | 50% | 0% | 25% | 25% | 25% |
| Motor, other classes | 0% | 0% | 0% | 50% | 100% | 25% | 25% | 25% | 25% | 50% | 50% | 50% | 0% | 25% | 25% | 25% |
| Marine, aviation, transport | 0% | 0% | 0% | 50% | 25% | 100% | 25% | 25% | 25% | 25% | 50% | 50% | 0% | 25% | 50% | 25% |
| Fire and other property | 0% | 0% | 0% | 25% | 25% | 25% | 100% | 25% | 25% | 25% | 50% | 50% | 0% | 25% | 50% | 50% |
| Third-party liability | 0% | 0% | 0% | 50% | 25% | 25% | 25% | 100% | 50% | 50% | 25% | 50% | 0% | 50% | 25% | 25% |
| Credit and suretyship | 0% | 0% | 0% | 25% | 25% | 25% | 25% | 50% | 100% | 50% | 25% | 50% | 0% | 50% | 25% | 25% |
| Legal expenses | 0% | 0% | 0% | 50% | 50% | 25% | 25% | 50% | 50% | 100% | 25% | 50% | 0% | 50% | 25% | 25% |
| Assistance | 0% | 0% | 0% | 25% | 50% | 50% | 50% | 25% | 25% | 25% | 100% | 50% | 0% | 25% | 25% | 50% |
| Miscellaneous | 0% | 0% | 0% | 50% | 50% | 50% | 50% | 50% | 50% | 50% | 100% | 100% | 0% | 25% | 50% | 25% |
| NP Health | 50% | 50% | 50% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 100% | 0% | 0% | 0% |
| NP Casualty | 0% | 0% | 0% | 25% | 25% | 25% | 25% | 50% | 50% | 50% | 25% | 25% | 0% | 100% | 25% | 25% |
| NP MAT | 0% | 0% | 0% | 25% | 25% | 50% | 50% | 25% | 25% | 25% | 25% | 50% | 0% | 25% | 100% | 25% |
| NP Property | 0% | 0% | 0% | 25% | 25% | 25% | 50% | 25% | 25% | 25% | 50% | 25% | 0% | 25% | 25% | 100% |

Matrice de corrélation inter-LoB de la Formule Standard

ANNEXE 3 : COSO et CERA New Syllabus 2019

Définition du COSO: « L'ERM correspond à la culture, aux capacités et aux pratiques intégrées à la définition de la stratégie et à son exécution, sur lesquelles les organisations s'appuient pour gérer les risques dans la création, la préservation et la réalisation de valeur. »

Le COSO définit une relation directe entre les objectifs que cherche à atteindre une organisation et les éléments du dispositif ERM qui représentent ce qui est nécessaire à leur réalisation. Cette relation est représentée par le cube suivant :



Représentation d'un dispositif ERM par le COSO

La CERA Global Association a défini un corps syllabus normé (datant de 2019) qui permet d'appliquer une démarche ERM et notamment répondre à la définition fournie par le COSO. Ce corps syllabus se compose des modules suivants :

- A : Concept et cadre ERM
- B : Processus ERM
- C : Catégories de risques et identification

| | | |
|-----------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| IRM institut du risk management | Rapport de projet ERM | Promotion 2021 |
| | | |

- D : Modélisation des risques et agrégation des risques
- E : Mesures de risque
- F : Outils et techniques de gestion des risques
- G : Capital économique

ANNEXE 4 : Définition des mesures de risques VaR, TVaR et CTE

On rappelle brièvement ici les définitions de mesures de risque connus très utilisés par le marché qui sont : *la VaR, la TVaR et la CTE*.

On considère une variable aléatoire X définie sur un support A dont la fonction de répartition est F_X avec une inverse notée par F_X^{-1} . Les mesures *VaR, TVaR et CTE* sont définies par :

$$VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa)$$

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \int_\kappa^1 VaR_u(X) du$$

$$CTE_\kappa(X) = E[X|X > VaR_\kappa(X)]$$

Remarque : Si la variable aléatoire X est continue alors : $CTE_\kappa(X) = TVaR_\kappa(X)$

Pour rappel, une mesure de risque doit pouvoir vérifier un certain nombre de propriétés élémentaires : invariance en translation, homogénéité, sous-additive, etc. Ces mesures ci-dessus disposent bien de ces propriétés comme l'indique bien de nombreux articles scientifiques sur ce sujet.

ANNEXE 5 : Copules

➤ Densité d'une copule

Définition : La densité c d'une copule C , si elle existe, est définie comme suit :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C}{\partial u_1 \dots \partial u_n}(u_1, \dots, u_n)$$

➤ Copule de survie

Définition : Soit $\tilde{C}(u_1, \dots, u_n)$ la fonction définie par $\tilde{C}(u_1, \dots, u_n) = \bar{C}(1 - u_1, \dots, 1 - u_n)$ où $\bar{C}(u_1, \dots, u_n) = Pr[U_1 > u_1, \dots, U_n > u_n]$. Alors $\tilde{C}(u_1, \dots, u_n)$ est appelé copule de survie (survival copula) de la copule C .

➤ Copule elliptique

Définition : on dit qu'un vecteur X suit une loi elliptique si et seulement s'il peut se mettre sous la forme suivante :

$$X = \mu + RA'U$$

Avec :

- A est une matrice (n, k) vérifiant $AA' = Z$, où Z est une matrice (n, n) symétrique, définie positive de rang k .
- U est un vecteur aléatoire suivant une loi uniforme sur la sphère unité
- R est un vecteur aléatoire positif indépendant de U
- μ est un vecteur constant

➤ Lien entre une copule et les Tau de Kendall, Rho de Spearman et coefficients de dépendance de queue

Théorème : Soit (X, Y) un couple de variable aléatoires continues de copule C alors

$$\tau(X, Y) = 4 \iint C(u, v) dC(u, v) - 1$$

ce qui peut s'écrire s'encore

$$\tau(X, Y) = 4E(C(U, V)) - 1, \text{ avec } U, V \sim U(0,1)$$

et

$$\rho_s(X, Y) = 12 \iint uv dC(u, v) - 3 = 12 \iint C(u, v) dudv - 3$$

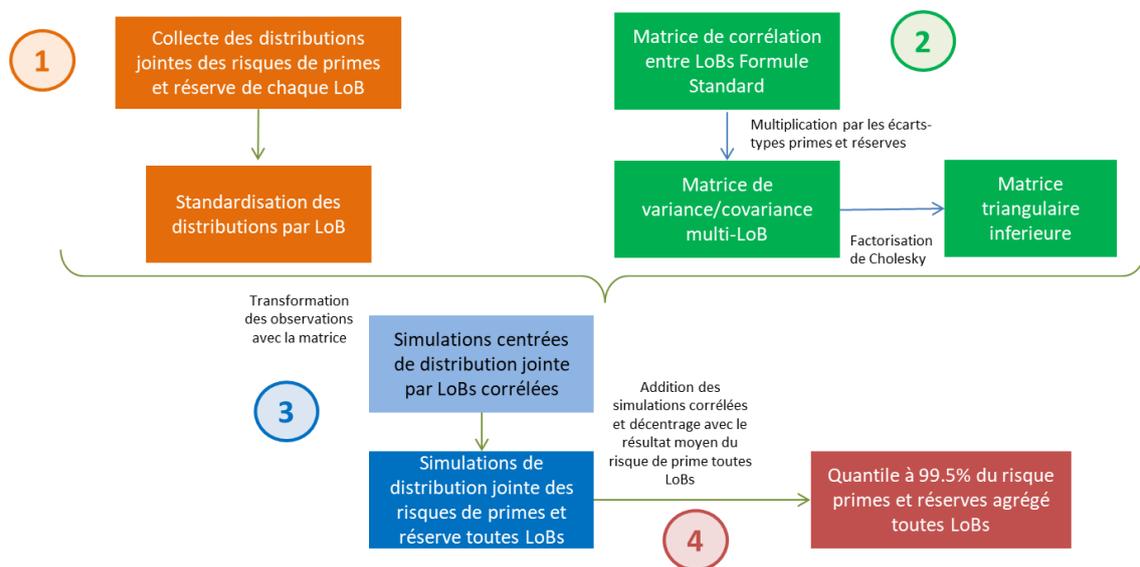
Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires de la copule C , alors on a :

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \text{ et } \lambda_U(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1-2u+C(u, u)}{1-u}$$

ANNEXE 6 : Généralisation de l'agrégation multi-LoB : Application de Cholesky

Le processus d'agrégation du SCR prime et réserve toutes LoB à l'aide de la méthode de décomposition de Cholesky est récapitulé dans le schéma suivant (numéroté par étape) :

- **Etape 1 :** Collecte des distributions jointes des risques de primes et réserve de chaque LoB (agrégation réalisée dans l'étape précédente)
- **Etape 2 :** Factorisation de Cholesky de la matrice Variance/Covariance (issue de la matrice de corrélation de la Formule Standard)
- **Etape 3 :** Calcul des distributions corrélées du risque de prime et réserve et addition toutes LoB
- **Etape 4 :** Construction de la distribution jointe des risques de primes et réserve et déduction du quantile 99,5% toutes LoBs

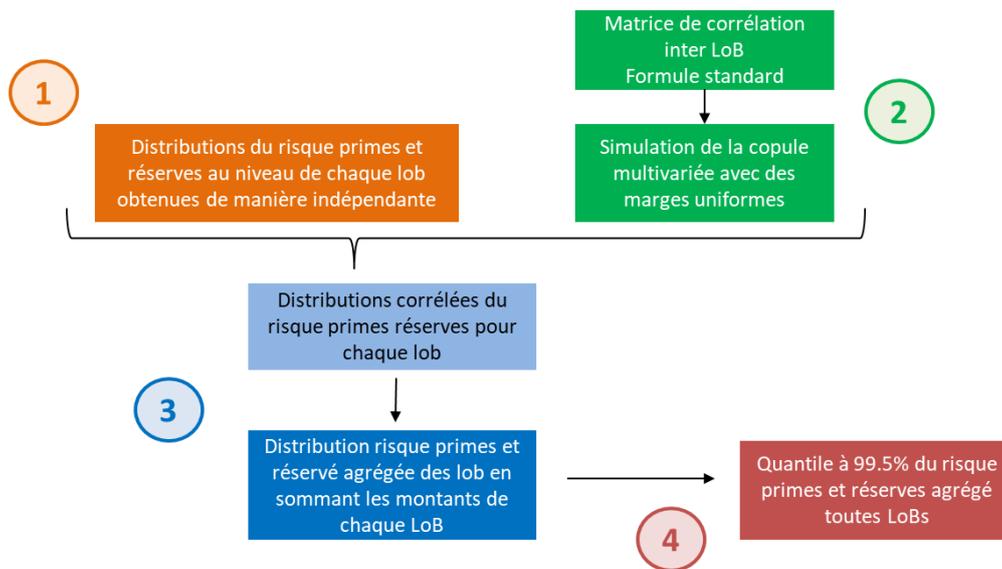


Processus d'agrégation multi-LoB par Cholesky pour le calcul du SCR de Souscription Non-Vie (MIP)

ANNEXE 7 : Généralisation de l'agrégation multi-LoB : Application d'une Copule

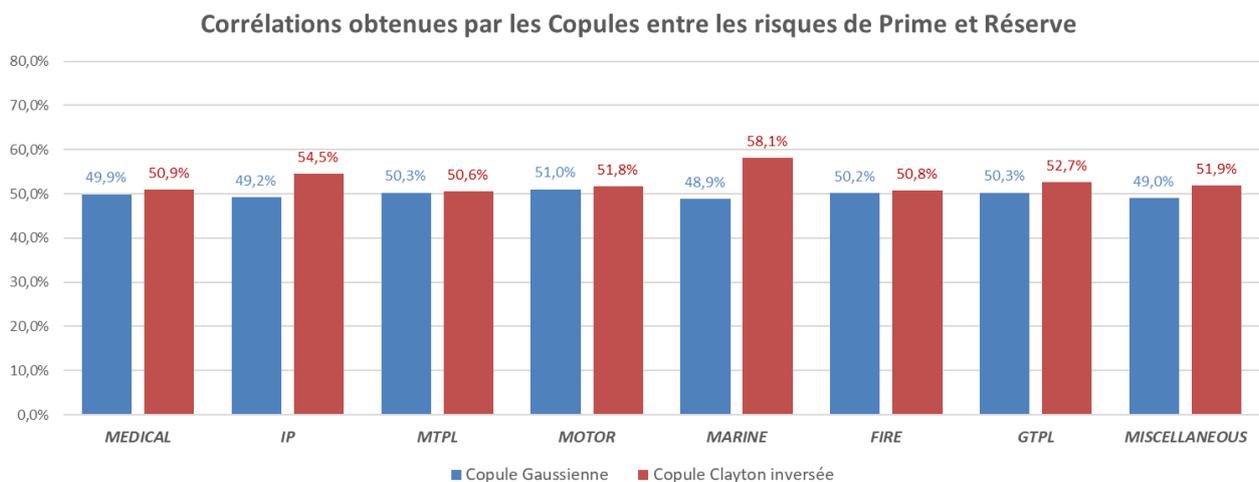
Le processus d'agrégation du SCR prime et réserve toutes LoB à l'aide d'une copule est récapitulé dans le schéma suivant (numéroté par étape) :

- **Etape 1 :** Simulations indépendantes des distributions du risque de prime et réserve pour chacune des LoB
- **Etape 2 :** Simulation de la copule multivariée paramétrée par les coefficients de corrélation inter-LoBs de la Formule Standard
- **Etape 3 :** Calcul des distributions corrélées du risque de prime et réserve par LoB et addition toutes LoBs
- **Etape 4 :** Calcul du quantile 99,5% sur la distribution jointe des risques de prime et réserve toutes LoBs



Processus d'agrégation multi-LoB par une copule pour le calcul du SCR de Souscription Non-Vie (MIP)

ANNEXE 8 : Corrélations obtenues par les copules au niveau de chaque LoB entre les risques de prime et réserve



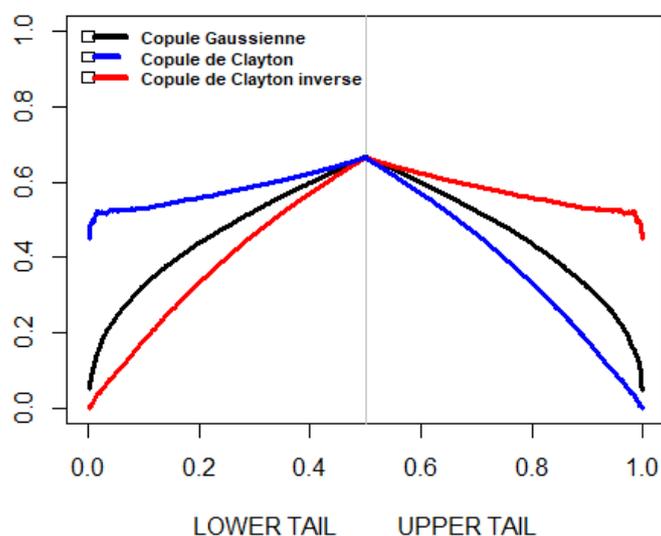
ANNEXE 9 : Matrices de corrélations inter-LoB obtenues par les copules

| GAUSSIENNE | 01_MEDICAL | 02_IP | 04_MTPL | 05_MOTOR | 06_MARINE | 07_FIRE | 08_GTPL | 12_MISCELLANEOUS |
|------------------|------------|-------|---------|----------|-----------|---------|---------|------------------|
| 01_MEDICAL | 100% | 48% | 1% | 3% | 0% | 0% | 0% | 1% |
| 02_IP | 48% | 100% | 0% | 2% | -1% | -1% | -1% | 0% |
| 04_MTPL | 1% | 0% | 100% | 51% | 51% | 25% | 51% | 51% |
| 05_MOTOR | 3% | 2% | 51% | 100% | 25% | 25% | 27% | 51% |
| 06_MARINE | 0% | -1% | 51% | 25% | 100% | 23% | 25% | 49% |
| 07_FIRE | 0% | -1% | 25% | 25% | 23% | 100% | 25% | 48% |
| 08_GTPL | 0% | -1% | 51% | 27% | 25% | 25% | 100% | 50% |
| 12_MISCELLANEOUS | 1% | 0% | 51% | 51% | 49% | 48% | 50% | 100% |

| CLAYTON INVERSEE | 01_MEDICAL | 02_IP | 04_MTPL | 05_MOTOR | 06_MARINE | 07_FIRE | 08_GTPL | 12_MISCELLANEOUS |
|------------------|------------|-------|---------|----------|-----------|---------|---------|------------------|
| 01_MEDICAL | 100% | 45% | 43% | 43% | 45% | 42% | 43% | 43% |
| 02_IP | 45% | 100% | 46% | 45% | 49% | 46% | 45% | 46% |
| 04_MTPL | 43% | 46% | 100% | 44% | 46% | 43% | 44% | 44% |
| 05_MOTOR | 43% | 45% | 44% | 100% | 46% | 43% | 43% | 43% |
| 06_MARINE | 45% | 49% | 46% | 46% | 100% | 46% | 46% | 46% |
| 07_FIRE | 42% | 46% | 43% | 43% | 46% | 100% | 43% | 43% |
| 08_GTPL | 43% | 45% | 44% | 43% | 46% | 43% | 100% | 43% |
| 12_MISCELLANEOUS | 43% | 46% | 44% | 43% | 46% | 43% | 43% | 100% |

ANNEXE 10 : Coefficients de dépendance de queues inférieurs et supérieurs à partir des simulations avec les copules

Comparaison des copules



ANNEXE 11 : Exemple de contrôle de l'implémentation des copules

Nous avons vérifié l'impact de la copule sur les quantiles des distributions marginales des risques de prime et réserve par LoB comme indiqué dans les tableaux suivants :

| COPULE GAUSSIENNE (en M€) | | MEDICAL | IP | MTPL | MOTOR | MARINE | FIRE | GTPL | MISCELLANEOUS |
|---------------------------|-----------------------------|--------------|--------------|--------------|-------------|-------------|-------------|--------------|---------------|
| RISQUE DE PRIME | Quantile 99,5% AVANT COPULE | -0,5 | -3,5 | -90,5 | -33,5 | -0,6 | -143,5 | -45,9 | -2,4 |
| | Quantile 99,5% APRES COPULE | -0,5 | -3,5 | -91,0 | -33,9 | -0,6 | -143,8 | -46,0 | -2,4 |
| | ECART ABSOLU | 0,00 | -0,05 | 0,50 | 0,39 | 0,00 | 0,25 | 0,04 | 0,00 |
| RISQUE DE RESERVE | Quantile 99,5% AVANT COPULE | 5,1 | 3,7 | 54,0 | 13,3 | 0,9 | 31,2 | 100,5 | 3,5 |
| | Quantile 99,5% APRES COPULE | 5,1 | 3,7 | 54,2 | 13,3 | 0,9 | 30,9 | 100,7 | 3,5 |
| | ECART ABSOLU | -0,01 | 0,01 | -0,15 | 0,02 | 0,00 | 0,29 | -0,19 | 0,01 |

| COPULE CLAYTON INVERSEE (en M€) | | MEDICAL | IP | MTPL | MOTOR | MARINE | FIRE | GTPL | MISCELLANEOUS |
|---------------------------------|-----------------------------|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|--------------|--------------|---------------|
| RISQUE DE PRIME | Quantile 99,5% AVANT COPULE | -0,5 | -3,5 | -90,5 | -33,5 | -0,6 | -143,5 | -45,9 | -2,4 |
| | Quantile 99,5% APRES COPULE | -0,5 | -3,5 | -90,7 | -33,6 | -0,6 | -141,6 | -45,5 | -2,4 |
| | ECART ABSOLU | 0,03 | -0,08 | 0,18 | 0,09 | 0,00 | -1,90 | -0,45 | 0,01 |
| RISQUE DE RESERVE | Quantile 99,5% AVANT COPULE | 5,1 | 3,7 | 54,0 | 13,3 | 0,9 | 31,2 | 100,5 | 3,5 |
| | Quantile 99,5% APRES COPULE | 5,1 | 3,7 | 53,7 | 13,3 | 0,9 | 31,1 | 99,4 | 3,5 |
| | ECART ABSOLU | 0,02 | 0,02 | 0,30 | -0,04 | 0,00 | 0,12 | 1,10 | -0,01 |

ANNEXE 12 : Exemple de test de stabilité du modèle

Nous avons vérifié la sensibilité à la graine aléatoire pour la génération des copules. Le tableau suivant indique, pour chaque copule utilisée, le quantile 99,5% des risques prime et réserve au sein de chaque LoB selon des graines aléatoires différentes :

| Quantile 99,5% Prime et Réserve avec COPULE GAUSSIENNE (en M€) | MEDICAL | IP | MTPL | MOTOR | MARINE | FIRE | GTPL | MISCELLANEOUS | TOTAL |
|--|---------|------|--------|-------|--------|--------|--------|---------------|--------|
| seed 1 | -3,5 | -5,6 | -129,8 | -40,7 | -1,2 | -161,2 | -131,4 | -5,0 | -337,5 |
| seed 2 | -3,4 | -5,8 | -129,1 | -40,6 | -1,2 | -162,2 | -131,2 | -5,0 | -339,8 |
| seed 3 | -3,5 | -5,7 | -128,8 | -40,4 | -1,2 | -161,6 | -131,7 | -5,0 | -337,5 |
| seed 4 | -3,5 | -5,7 | -130,0 | -41,4 | -1,2 | -162,5 | -131,2 | -5,0 | -338,5 |

| Quantile 99,5% Prime et Réserve avec COPULE CLAYTON INVERSEE (en M€) | MEDICAL | IP | MTPL | MOTOR | MARINE | FIRE | GTPL | MISCELLANEOUS | TOTAL |
|--|---------|------|--------|-------|--------|--------|--------|---------------|--------|
| seed 1 | -5,0 | -6,7 | -139,7 | -45,3 | -1,4 | -168,5 | -140,8 | -5,7 | -459,9 |
| seed 2 | -5,1 | -6,9 | -139,8 | -44,3 | -1,4 | -171,2 | -140,6 | -5,7 | -461,4 |
| seed 3 | -4,9 | -6,8 | -140,1 | -44,2 | -1,4 | -171,6 | -143,0 | -5,6 | -466,3 |
| seed 4 | -5,1 | -6,8 | -140,5 | -44,9 | -1,4 | -172,1 | -142,5 | -5,6 | -464,7 |

ANNEXE 13 : Analyse des impacts de la structure de dépendance aux différents quantiles inférieurs à 99,5%

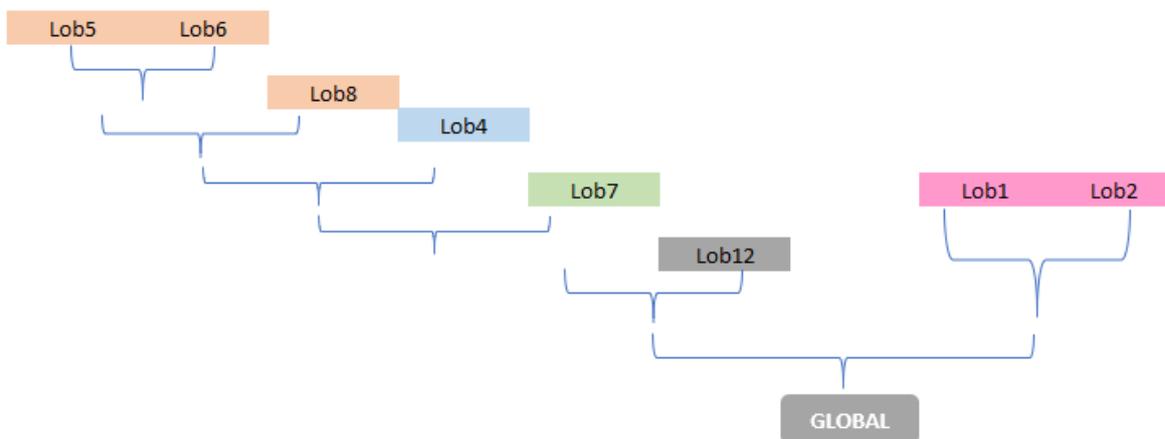
| Comparaison des quantiles | Copule Student (dl = 5) | Copule Gaussienne |
|---------------------------|-------------------------|-------------------|
| Quantile 1/200 | -365,7 | -337,5 |
| Quantile 1/100 | -319,55 | -305,16 |
| Quantile 1/50 | -276,85 | -271,74 |
| Quantile 1/20 | -222,83 | -225,06 |
| Quantile 1/10 | -179,67 | -185,52 |

- Les quantiles à des périodes de retour élevées sont plus élevés en valeur absolue pour des copules de type Student et Clayton.
- Les quantiles à des périodes de retour plus modérés sont plus élevés en valeur absolue pour des copules de type Gaussiennes.
- La prudence n'est pas la même à tous les quantiles et peut changer de sens suivant la copule choisie

ANNEXE 14 : Résultats préliminaires sur les copules hiérarchiques

| | 01_MEDICAL | 02_IP | 04_MTPL | 05_MOTOR | 06_MARINE | 07_FIRE | 08_GTPL | 12_MISCELLANEOUS |
|------------------|------------|-------|---------|----------|-----------|---------|---------|------------------|
| 01_MEDICAL | 100% | 50% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| 02_IP | 50% | 100% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| 04_MTPL | 0% | 0% | 100% | 50% | 50% | 25% | 50% | 50% |
| 05_MOTOR | 0% | 0% | 50% | 100% | 25% | 25% | 25% | 50% |
| 06_MARINE | 0% | 0% | 50% | 25% | 100% | 25% | 25% | 50% |
| 07_FIRE | 0% | 0% | 25% | 25% | 25% | 100% | 25% | 50% |
| 08_GTPL | 0% | 0% | 50% | 25% | 25% | 25% | 100% | 50% |
| 12_MISCELLANEOUS | 0% | 0% | 50% | 50% | 50% | 50% | 50% | 100% |

Regroupement par niveau de corrélations communes



Copule hiérarchique par la Formule Standard

| | Indicateur | Global | L1+L2 | L5+L6 | L5+L6+L8 | L5+L6+L8+L4 | L5+L6+L8+L4+L7 | L5+L6+L8+L4+L7+L12 |
|-------------------|----------------|--------|--------|--------|----------|-------------|----------------|--------------------|
| Copule Gaussienne | Moyenne | 56,04 | -19,61 | -21,75 | -13,05 | 23,81 | 75,96 | 75,77 |
| | Quantile 0,995 | 327,70 | 5,20 | 41,35 | 148,40 | 244,26 | 347,78 | 349,93 |
| Copule Clayton | Moyenne | 55,66 | -19,58 | -21,77 | -12,91 | 23,98 | 75,54 | 75,00 |
| | Quantile 0,995 | 314,68 | 5,27 | 45,16 | 149,86 | 236,37 | 333,92 | 332,77 |
| Ecart | Moyenne | 1% | 0% | 0% | 1% | -1% | 1% | 1% |
| | Quantile 0,995 | 4% | -1% | -8% | -1% | 3% | 4% | 5% |

Copule hiérarchique par la somme des distributions

| | Indicateur | Global | L1+L2 | L4+L5 | L6+L7 | L8+L12 | L1+L2+L4+L5 | L6+L7+L8+L12 |
|-------------------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-------------|--------------|
| Copule Gaussienne | Moyenne | 55,69 | -19,61 | 15,41 | 51,77 | 8,39 | -4,05 | 59,98 |
| | Quantile 0,995 | 333,91 | 5,31 | 151,06 | 162,67 | 135,14 | 133,45 | 249,25 |
| Copule Clayton | Moyenne | 55,99 | -19,59 | 15,48 | 51,72 | 8,51 | -4,33 | 60,09 |
| | Quantile 0,995 | 319,55 | 3,57 | 141,48 | 162,71 | 133,95 | 133,19 | 241,35 |
| Ecart | Moyenne | -1% | 0% | 0% | 0% | -1% | -6% | 0% |
| | Quantile 0,995 | 4% | 49% | 7% | 0% | 1% | 0% | 3% |