

Mémoire présenté le : 10/07/2025

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuares**

Par : Robin DI FAZIO

Titre Optimisation de l'allocation d'actifs au sein d'un PER en fonction des
profils de risque des assurés.

Confidentialité : ☒ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présents du jury de l'Institut des
Actuares*

signature

Entreprise : Gedeon

J. ARTHUR
V. RUOL
B. YON

Membres présents du jury de l'ISFA
P. THEROND

Nom :

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : SIRI Alexandre

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels** (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Remerciements

J'aimerais profiter de cette occasion pour remercier toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire. Leurs soutiens, conseils et encouragements ont été essentiels dans l'accomplissement de ce travail de recherche.

Tout d'abord, je tiens à remercier mon tuteur académique, Frédéric PLANCHET pour son encadrement et sa disponibilité. Ses conseils et remarques ont grandement enrichi ce travail et m'ont permis d'avancer dans la bonne direction.

Mes remerciements vont également à mes enseignants et encadrants universitaires, qui m'ont fourni les outils et les connaissances nécessaires pour mener à bien cette étude.

Résumé

En France, le système de retraite repose sur trois piliers : le régime de la Sécurité sociale, les régimes complémentaires et les régimes supplémentaires. Le Plan d'Épargne Retraite (PER) s'inscrit dans cette dernière catégorie et permet aux assurés de se constituer une épargne en vue de leur retraite, avec des règles spécifiques en matière de gestion et de fiscalité. Dans le cadre du PER Obligatoire (PERO) étudié, les adhérents ne disposent pas de la possibilité de choisir une grille d'investissement en fonction de leur profil de risque.

À partir de ce constat, ce mémoire a pour objectif de développer une méthodologie rigoureuse permettant d'élaborer des grilles d'allocation d'actifs alignées sur les profils de risque des assurés. L'objectif est de doter le courtier d'assurance des outils nécessaires pour analyser, comparer et, le cas échéant, challenger les grilles proposées par les assureurs.

Ce travail est structuré en quatre parties. La première partie présente le fonctionnement de la retraite supplémentaire en France, en expliquant son rôle et ses spécificités par rapport aux autres régimes. La deuxième partie s'intéresse à la réglementation encadrant les grilles d'allocation d'actifs, ainsi qu'à une étude détaillée des grilles présentes dans le PERO étudié. La troisième partie s'attache à la projection des fonds d'investissement, en modélisant leur évolution dans le temps afin d'évaluer leur performance potentielle sur une carrière complète. Enfin, la quatrième et dernière partie est consacrée à la création des grilles de désensibilisation adaptées aux différents profils de risque, en s'appuyant sur des modèles d'optimisation d'allocations d'actifs.

Mots clés : PER, projection, performance, taux de remplacement, grille de gestion pilotée, optimisation d'allocation d'actifs.

Abstract

In France, the retirement system is based on three pillars: the Social Security system, complementary schemes and supplementary schemes. The *Plan d'Epargne Retraite* (PER) falls into the latter category, enabling policyholders to build up savings for their retirement, with specific management and tax rules. In the case of the *PER Obligatoire* (PERO) studied, members do not have the option of choosing an investment grid according to their risk profile.

Based on this observation, the aim of this dissertation is to develop a methodological approach for creating asset allocation grids aligned with policyholders' risk profiles. The aim is to provide the Gedeon insurance broker with the tools needed to challenge the grids proposed by insurers.

This work is structured in four parts. The first part presents how supplementary pension schemes work in France, explaining their role and their specific features compared with other schemes. The second part looks at the regulations governing asset allocation grids, with a detailed study of the grids present in the PERO studied. The third part focuses on the projection of investment funds, modelling their evolution over time in order to assess their potential performance over a full career. Finally, the fourth and last part is devoted to the creation of desensitization grids adapted to different risk profiles, based on asset allocation optimization models.

Keywords: Personal retirement plan, projection, performance, replacement rate, life-cycle investment strategy, asset allocation optimization.

Note de synthèse

Ce mémoire vise à développer des grilles de désensibilisation adaptées aux profils de risque des assurés au sein du PERO Gedeon et à analyser leur impact sur la rente disponible à la retraite.

Projection des fonds d'investissement

Dans un premier temps, il a été nécessaire de projeter l'ensemble des fonds d'investissement sur une période de 43 ans avec une périodicité trimestrielle. Cette approche trimestrielle permet de suivre l'évolution de l'épargne, l'investissement des cotisations obligatoires et la réalisation des arbitrages successifs avec précision.

Pour les fonds actions, la projection repose sur le modèle de Black-Scholes et la méthode de réduction de la variance par variables antithétiques. Le modèle de Black-Scholes a été calibré à l'aide des estimateurs empiriques pour chaque fonds. La méthode de Monte Carlo comme l'illustre la *Figure 1 : Convergence de l'estimation de Monte Carlo pour l'actif IE000E66LX20* a été utilisée afin d'assurer la convergence des simulations et de garantir une modélisation robuste des rendements futurs.

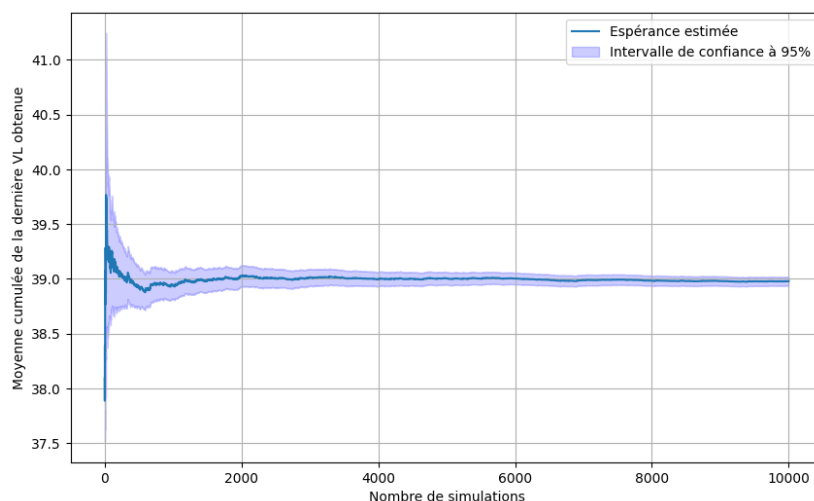


Figure 1 : Convergence de l'estimation de Monte Carlo pour l'actif IE000E66LX20

Les fonds obligataires ont été projetés à l'aide du modèle de Nelson-Siegel, paramétré sur les courbes de taux sans risque de l'EIOPA des quatre dernières années. Cette approche a permis d'obtenir une courbe de taux projetée et d'en déduire l'évolution des fonds obligataires en fonction de la maturité des taux zéro-coupons les composant.

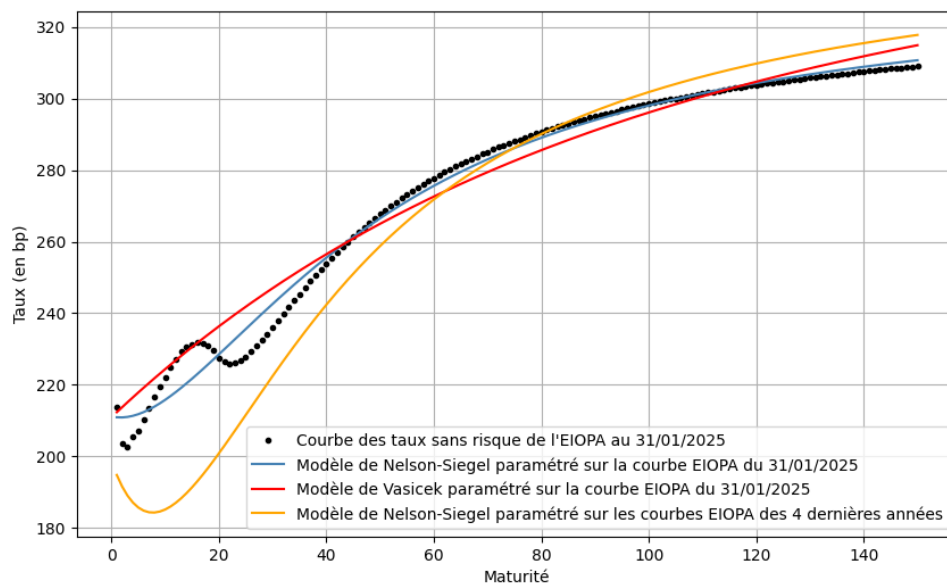


Figure 2 : Ajustements et projection des taux zéros-coupons

Pour les fonds mixtes, la partie actions et obligataire a été traitée de manière distincte lorsque cela était possible. Pour les fonds contenant des produits dérivés (ex. : exposition à l'or en USD), la projection a été réalisée via le modèle de Black-Scholes.

Enfin, le fonds sans risque a été projeté par capitalisation en utilisant un taux de rendement moyen calculé sur les quatre dernières années.

Reconstitution de l'épargne d'un assuré

Une fois les fonds projetés, l'évolution de l'épargne d'un assuré type a été simulée tout au long de sa carrière. Ce travail a permis d'observer l'impact des contributions régulières et des arbitrages successifs sur la constitution du capital retraite.

Certaines hypothèses ont été faites afin de créer le cas d'étude. Pour cela, nous considérons que l'adhérent partira à taux plein, c'est-à-dire sans décote ni surcote sur sa pension. Cette hypothèse implique que la durée de cotisation requise pour obtenir une pension complète est atteinte, ce qui correspond actuellement à 43 années de travail conformément aux dernières réformes. Ainsi, nous supposons que l'adhérent effectue une carrière complète sans interruption significative.

	Hypothèse
Date de naissance	01/01/2002
Date de début de carrière	01/01/2025
Salaire de début de carrière	38 000 €
Augmentation annuelle du salaire	2,50 %
Durée de la carrière	43 ans

Tableau 1 : Hypothèses de carrières

En ce qui concerne notre cas d'étude, le taux de remplacement issu de la retraite de base et de la retraite complémentaire s'établit à 49 %. Cependant, en intégrant la

rente qu'il pourra percevoir en liquidant le capital accumulé sur son PER obligatoire, ce taux de remplacement s'élève à 52 %.

Le tableau ci-dessous regroupe les différentes valeurs obtenues.

	Valeur
Salaire de fin de carrière	109 877,76 €
Rente CNAV + AA annuelle	54 015,95 €
CC PERO	110 425,13 €
a_x	31,56
Rente PERO annuelle	3 498,86 €

Tableau 2 : Résultats de la projection

Optimisation des allocations d'actifs

Dans un dernier temps, deux profils de risque ont été définis avec des vues symétriques autour de la grille de référence, considérée comme le portefeuille neutre. L'approche de Black & Litterman a été employée pour déterminer les rendements à posteriori des vues de marché. Ces rendements ont ensuite été intégrés dans un problème d'optimisation moyenne-variance de Markowitz.

Afin de garantir des grilles de désensibilisation réalistes, plusieurs contraintes ont été ajoutées :

- Une diminution progressive de la variance du portefeuille jusqu'à atteindre 0 l'année de départ en retraite.
- Deux coefficients de diversification visant à éviter une concentration excessive sur un seul actif. Un premier coefficient a été introduit pour homogénéiser la répartition par type d'actif (actions, obligations, fonds monétaires, fonds mixtes). Un second coefficient a été appliqué à l'intérieur de chaque type d'actif pour limiter l'exposition à un seul fonds.

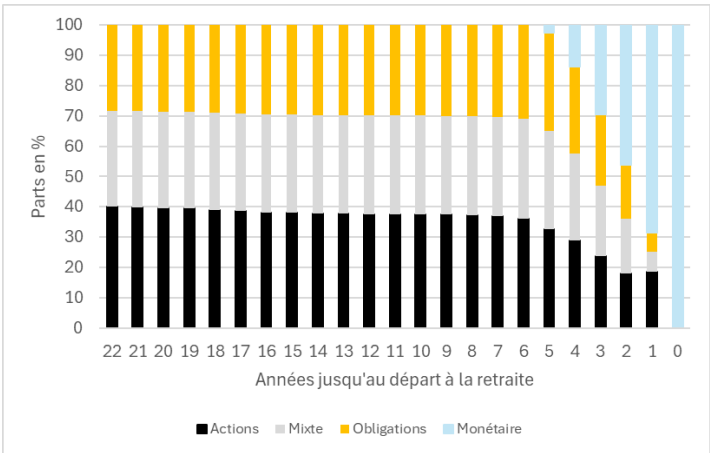
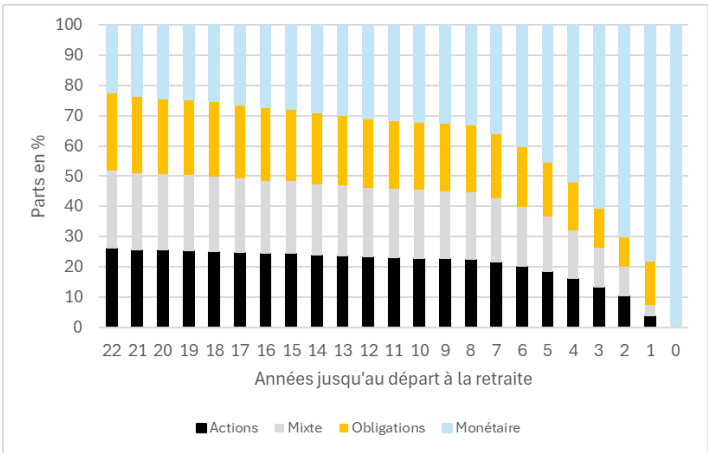


Figure 3 : Grilles d'allocations prudente (à gauche) et dynamique (à droite) générées

Conclusion et analyse des résultats

Les résultats montrent que la grille prudente surperforme les deux autres grilles d'allocations générées, un fait contre-intuitif.

	Grille prudente	Grille équilibrée	Grille dynamique
Capital Constitutif	119 029,17 €	110 425,13 €	116 738,70 €
Rente annuelle PERO	3 771,48 €	3 498,86 €	3 698,91 €

Tableau 3 : Capital constitutif et rente lors du départ en retraite suivant la grille choisie

La grille dite « prudente » surperforme les deux autres grilles d’allocations et ce résultat peut s'expliquer par plusieurs facteurs. En effet, la grille prudente consacre une part significative de son allocation au fonds euros, qui demeure le principal moteur de la performance élevée de cette stratégie.

De plus, cette différence de performance entre la grille prudente et dynamique peut s'expliquer par la période historique utilisée pour paramétrer les modèles. En effet, les quatre années sélectionnées incluent des événements marquants tels que la crise du Covid-19 et la remontée des taux. Cela a entraîné une baisse des rendements empiriques des fonds risqués, tandis que les obligations et fonds monétaires ont affiché des rendements plus attractifs.

Par ailleurs, l'analyse des ratios de Sharpe a confirmé la difficulté des fonds actions à surperformer l'actif sans risque sur la période étudiée. Ces observations mettent en évidence l'importance de la période de calibration dans l'évaluation des performances des stratégies d'investissement et soulignent l'intérêt de diversifier les sources de données historiques pour obtenir des grilles plus robustes sur le long terme.

Cependant, on constate que l’objectif principal est atteint : la grille prudente affiche une volatilité nettement plus faible, tandis que la grille dynamique présente une volatilité plus élevée, traduisant ainsi leur niveau de risque respectif. La grille équilibrée, quant à elle, se positionne entre ces deux extrêmes. Par ailleurs, il apparaît que la part allouée aux fonds euros dans la grille prudente est particulièrement importante, ce qui s'explique par l'historique des données sélectionnées et par un rendement du fonds euros particulièrement attractif.

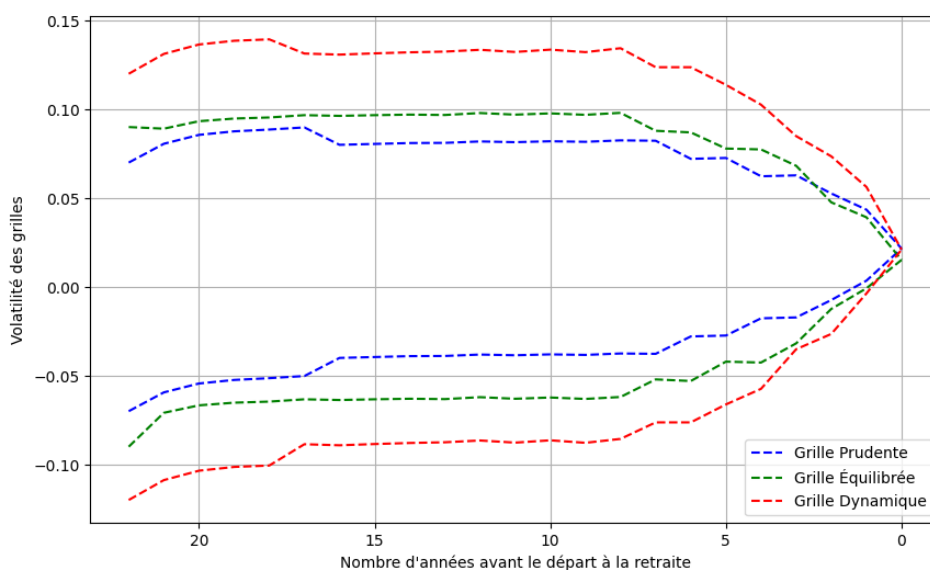


Figure 4 : Volatilité des grilles d'allocations en fonction du nombre d'années avant le départ à la retraite

Limites et perspectives

Les résultats obtenus sont fortement dépendants de l'historique des données utilisées pour paramétrer les modèles ainsi que des vues des assurés. Afin de limiter cet effet, une étude complémentaire pourrait intégrer des données sur une période plus longue ou utiliser des techniques de stress-test pour évaluer la robustesse des allocations en conditions de marché extrêmes.

De plus, l'utilisation d'autres modèles d'évaluation des rendements attendus pourrait affiner l'optimisation des portefeuilles. Enfin, une analyse comportementale des assurés pourrait être intégrée pour ajuster les grilles en fonction des biais et préférences des investisseurs.

Synthesis report

The aim of this dissertation is to develop desensitisation grids adapted to the risk profiles of policyholders within the Gedeon PERO and to analyse their impact on retirement income.

Investment fund projections

Initially, it was necessary to project all the investment funds over a 43-year period with quarterly values. This approach makes it possible to track changes in savings, investment of compulsory contributions and successive arbitrages.

For equity funds, the projection is based on the Black-Scholes model and the variance reduction method using antithetic variables. The Black-Scholes model was calibrated using empirical estimators for each fund. The Monte Carlo method as illustrated in the figure below was used to ensure convergence of the simulations and to guarantee a robust modelling of future returns.

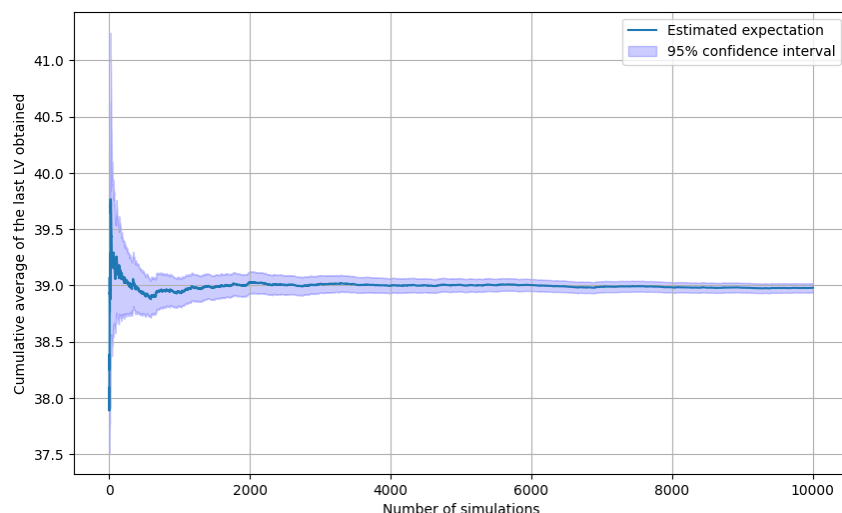


Figure 5 : Convergence of the Monte Carlo estimate for asset IE000E66LX20

The bond funds were projected using the Nelson-Siegel model, parameterised on the basis of the EIOPA risk-free rate curves for the last four years. This approach was used to obtain a projected yield curve and to deduce the evolution of bond funds as a function of the maturity of the zero-coupon rates of which they are composed.

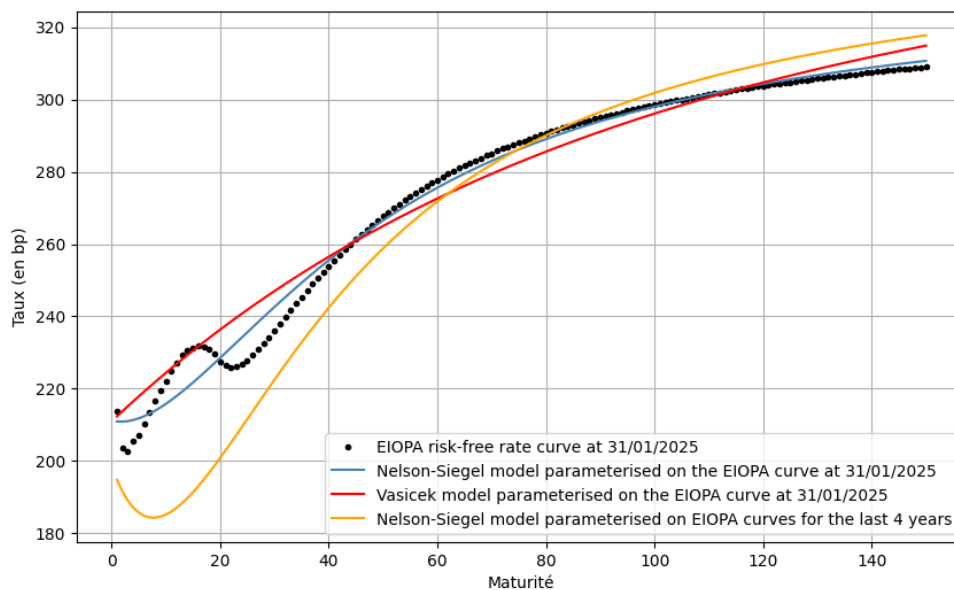


Figure 6 : Zero-coupon rate adjustments and projections

For mixed funds, the equity and bond components have been treated separately where possible. For funds containing derivatives (e.g. exposure to gold in USD), the projection was made using the Black-Scholes model.

Finally, the risk-free fund has been projected by capitalisation using an average rate of return calculated over the last four years.

Restoring a policyholder's savings

Once the funds had been projected, the savings of a typical insured person were simulated throughout their career. This work made it possible to observe the impact of regular contributions and successive arbitrages on the constitution of retirement capital.

Certain assumptions have been made in order to create the case study. For example, we assume that the member will retire at the full rate, i.e. without any reduction or increase in his pension. This assumption implies that the required contribution period to obtain a full pension has been reached, which currently corresponds to 43 years of work in accordance with the latest reforms. We therefore assume that the member has completed a full career without any significant interruption.

	Hypothesis
Birth date	01/01/2002
Career start date	01/01/2025
Starting salary	38 000 €
Annual salary increase	2,50 %
Career length	43 years

Tableau 4 : Career assumptions

In our case study, the replacement rate from the basic pension and the supplementary pension is 49%. However, if we include the annuity that he will be able to

receive by liquidating the capital accumulated in his compulsory PER, this replacement rate rises to 52%.

The table below shows the different values obtained.

	Value
Ending salary	109 877,76 €
annual retirement pension	54 015,95 €
CC PERO	110 425,13 €
a_x	31,56
annual retirement pension PERO	3 498,86 €

Tableau 5 : Résultats de la projection

Optimising asset allocation

Thirdly, two risk profiles were defined with symmetrical views around the reference grid, considered as the neutral portfolio. The Black & Litterman approach was used to determine the posteriori returns of the market views. These returns were then integrated into a Markowitz mean-variance optimisation problem.

In order to guarantee realistic desensitisation grids, several constraints have been added :

- A gradual reduction in the variance of the portfolio until it reaches 0 in the year of retirement.
- Two diversification coefficients designed to avoid excessive concentration on a single asset. A first coefficient has been introduced to homogenise the distribution by asset type (equities, bonds, money market funds, mixed funds). A second coefficient has been applied within each asset type to limit exposure to a single fund.

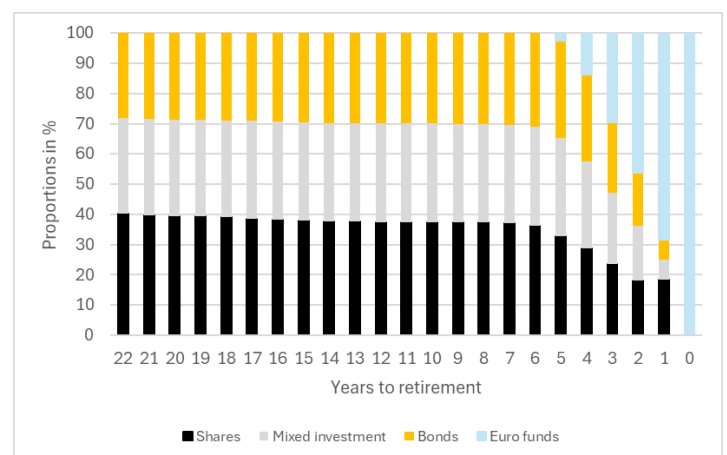
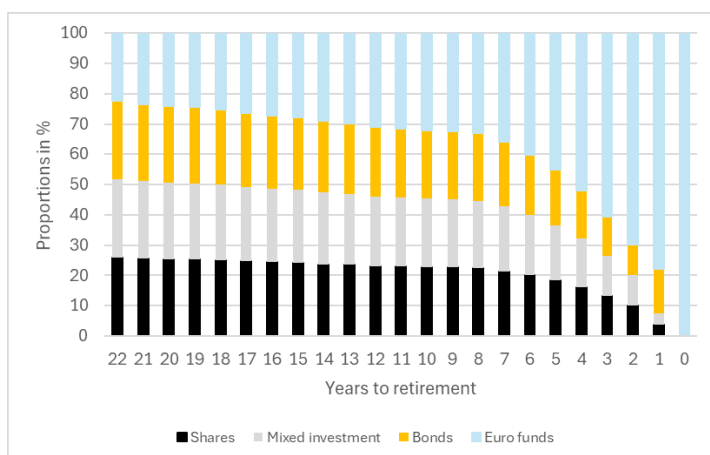


Figure 7 : Prudent (left) and risky (right) allocation grids generated

Conclusion

The results show that the cautious grid outperformed the other grids, a counter-intuitive fact.

	Cautious Grid	Neutral Grid	Risky Grid
Savings	119 029,17 €	110 425,13 €	116 738,70 €
annual retirement pension PERO	3 771,48 €	3 498,86 €	3 698,91 €

Tableau 6 : Constituent capital and annuity on retirement according to the chosen grid

The so-called “conservative” grid outperforms the other two allocation grids and this result could be explained by several factors. Indeed, the prudent grid devotes a significant part of its allocation to the euro fund, which remains the main driver of this strategy’s high performance.

In addition, this performance difference between the conservative and dynamic grids can be explained by the historical period used to parameterize the models. Indeed, the selected four years include significant events such as the COVID-19 crisis and the rise in rates. This has led to lower empirical returns for risky funds, while bonds and money market funds have shown more attractive returns.

In addition, the analysis of the Sharpe ratios confirmed the difficulty of equity funds to outperform risk-free assets over the period studied. These observations highlight the importance of the calibration period in assessing the performance of investment strategies and underline the value of diversifying historical data sources to obtain more robust grids over the long term.

However, the main objective is achieved: the conservative grid shows a significantly lower volatility while the dynamic grid has a higher volatility, reflecting their respective risk level. The balanced grid, on the other hand, is positioned between these two extremes. Moreover, it appears that the share allocated to euro funds in the prudent grid is particularly important, which is explained by the history of the selected data and by a particularly attractive return on the euro fund.

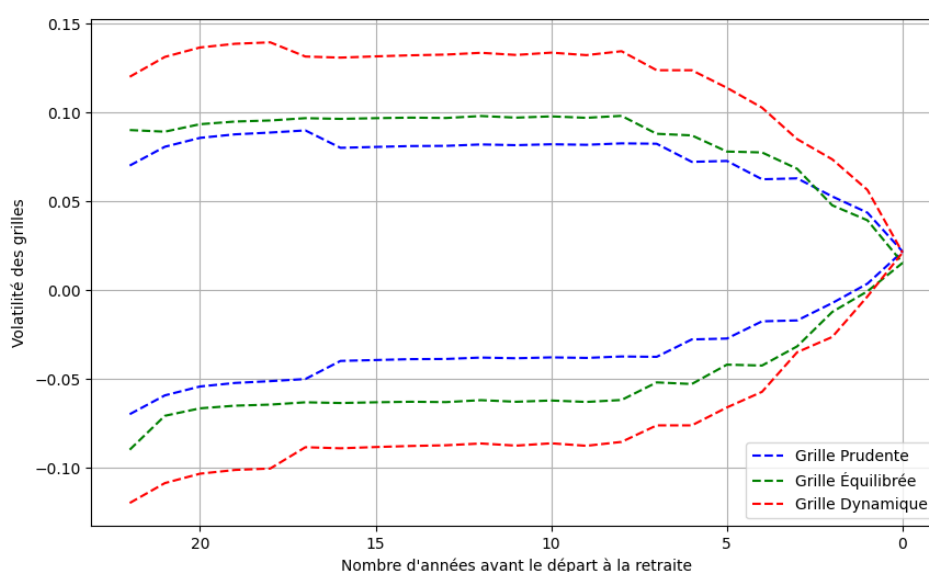


Figure 8 : Volatility of benefit schedules based on the number of years before retirement

Limits and outlook

The results obtained are highly dependent on the history of the data used to parameterise the models and the point of views used. To limit this effect, a complementary study could incorporate data over a longer period or use stress-testing techniques to assess the robustness of allocations in extreme market conditions.

In addition, the use of other models for evaluating expected returns could refine the optimisation of portfolios. Finally, a behavioural analysis of policyholders could be integrated to adjust the grids according to the biases and preferences of investors.

SOMMAIRE

1. Introduction	1
2. La retraite supplémentaire en france	3
2.1. Le système de retraite français	3
2.1.1 Les enjeux actuels du système de retraite	3
2.1.2 La retraite de base	3
2.1.3 La retraite complémentaire	4
2.1.4 La retraite supplémentaire	4
2.2. Focus sur le PER obligatoire	5
2.2.1 La loi Pacte	5
2.2.2 La réforme des retraites de 2023	6
2.2.3 Les différentes sources d'alimentation du PERO	7
2.2.4 La fiscalité du PERO	7
3. Réglementation et étude des grilles d'allocation d'actifs	10
3.1. Réglementation des grilles d'allocations d'actifs	10
3.1.1 Présentation des grilles d'allocations d'actifs	10
3.1.2 Présentation du SRI	11
3.2. La loi industrie verte	14
3.2.1 Contexte législatif et nouvelles obligations	14
3.2.2 Impact sur les grilles de gestion pilotée	14
3.3. Etude des grilles d'allocation au sein du PERO étudié	15
3.3.1 Analyse des fonds d'investissements	15
3.3.2 Reconstruction des VL à partir du Benchmark	18
3.3.3 Variation des VL des différentes grilles proposées	22
3.3.4 Choix de l'indicateur de performance	23
3.3.5 Volatilité des grilles d'allocation	24
4. Projection des fonds d'investissements au sein d'un PERO	26
4.1. Projection à long terme	26
4.1.1 Projection du fonds euros	26

4.1.2	Projection des fonds obligataires	26
4.1.3	Projection des fonds actions	34
4.1.4	Projection des fonds mixtes	39
4.1.5	Matrice de corrélation de Cholesky	39
4.2.	Application à la grille Gedeon	40
4.2.1	Prise en compte des frais	40
4.2.2	Premiers résultats	41
4.2.3	Phase de restitution	44
4.3.	Sensibilités	48
4.3.1	Sensibilité des projections	49
4.3.2	Sensibilité des paramètres en phase de constitution	49
4.3.3	Sensibilité des paramètres en phase de restitution	50
5.	Creation des grilles de désensibilisation par profil de risque	52
5.1.	La désensibilisation comme gestion du risque à long terme	52
5.1.1	Calibration des chocs à appliquer	52
5.1.2	Application à la grille Gedeon	53
5.2.	Création des grilles de désensibilisation par profil de risque	55
5.2.1	Estimation du taux de rentabilité attendue à partir du MEDAF	55
5.2.2	Le modèle de Black-Litterman pour intégrer le profil de risque de l'assuré	59
5.2.3	Création des grilles de désensibilisation à partir du modèle de Markowitz	64
5.3.	Application à la grille Gedeon	67
5.3.1	Premiers résultats	67
5.3.2	Intégration d'un coefficient de diversification suivant le type d'actif	70
5.3.3	Impact du choix de la grille d'allocation	72
5.3.4	Sensibilité des grilles à un choc financier	73
5.3.5	Limites et pistes d'amélioration	74
6.	Conclusion	76
7.	Bibliographie	78
8.	Liste des figures	80
9.	Liste des tableaux	81
10.	Annexes	83

1. INTRODUCTION

Le système de retraite Français repose sur une architecture en trois piliers : la retraite de base, gérée par la Sécurité sociale, les régimes complémentaires obligatoires et la retraite supplémentaire. Ce dernier pilier, bien que facultatif, joue un rôle croissant dans la préparation financière des assurés à leur cessation d'activité. Parmi les dispositifs de retraite supplémentaire, le Plan d'Épargne Retraite (PER), introduit par la loi Pacte en 2019, vise à harmoniser les différents produits d'épargne retraite et à offrir aux assurés un cadre plus flexible et performant. Au sein du PER, le PER Obligatoire (PERO) se distingue par son caractère collectif et l'absence de choix d'allocation laissé aux adhérents, qui doivent se conformer aux grilles de gestion prédéfinies.

Dans ce contexte, l'optimisation de l'allocation des actifs au sein de la gestion pilotée constitue un enjeu crucial. Actuellement, les grilles d'investissement proposées dans le PERO étudié ne tiennent pas compte du profil de risque des assurés. Or, dans une perspective de gestion efficiente du patrimoine retraite, il est essentiel de proposer des allocations d'actifs adaptées aux préférences et à l'horizon de placement des adhérents. Cela nécessite une analyse approfondie des grilles existantes, des contraintes réglementaires et des performances des fonds sous-jacents. Par ailleurs, la modélisation des rendements futurs des actifs est indispensable pour évaluer l'efficacité des stratégies d'allocation et ajuster les allocations en conséquence.

Ce mémoire a pour objectif de proposer une démarche méthodologique permettant de construire des grilles de désensibilisation cohérentes avec les profils de risque des assurés, tout en dotant Gedeon d'outils d'analyse permettant de challenger les grilles d'allocation d'actifs proposées par les assureurs. Pour ce faire, nous nous appuyons sur des modèles financiers reconnus, tels que le MEDAF (Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers) et le modèle de Black-Litterman, afin de déterminer des allocations optimales tenant compte de la tolérance au risque de chaque adhérent. L'approche retenue vise à concilier la recherche de performance avec une désensibilisation progressive du portefeuille, en adéquation avec l'horizon de départ à la retraite.

Le mémoire a pour objectif de proposer une méthodologie permettant de construire des grilles de désensibilisation adaptées aux profils de risque des assurés. Pour cela, nous nous appuyons sur des modèles financiers éprouvés, tels que le MEDAF (Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers) et le modèle de Black-Litterman, afin de déterminer des allocations optimales en fonction du risque toléré par l'adhérent. L'approche adoptée vise à concilier la performance attendue du portefeuille avec une réduction progressive du risque à mesure que l'assuré se rapproche de l'âge de la retraite.

La première partie de ce mémoire s'attache à présenter le cadre général de la retraite supplémentaire en France, en mettant en lumière son rôle et ses spécificités par rapport aux autres régimes. La deuxième partie traite de la réglementation encadrant les

grilles d'allocation d'actifs, ainsi que d'une analyse détaillée des grilles actuellement en place dans le PERO étudié. La troisième partie se concentre sur la projection des fonds d'investissement, en modélisant leur évolution afin d'évaluer leur performance et leur impact sur une carrière complète. Enfin, la quatrième partie propose une méthodologie de création des grilles de désensibilisation adaptées aux profils de risque, en s'appuyant sur des modèles d'optimisation d'allocations d'actifs.

À travers cette étude, nous viserons à approfondir la personnalisation de l'épargne retraite en proposant des grilles d'investissement thématiques, adaptées aux convictions et aux niveaux de risque des assurés.

2. LA RETRAITE SUPPLEMENTAIRE EN FRANCE

2.1. Le système de retraite français

2.1.1 Les enjeux actuels du système de retraite

La retraite devient un sujet de plus en plus important pour la population française, marquée par deux tendances majeures. Tout d'abord, l'âge de départ à la retraite ne cesse de reculer à la suite d'une succession de réformes. Cette évolution suscite des préoccupations significatives parmi les citoyens qui constatent une prolongation de leur vie active. De plus, la pension à la retraite s'avère souvent insuffisante pour maintenir un niveau de vie équivalent à celui de la période d'activité, créant ainsi une incertitude financière pour les futurs retraités.

Malgré ces inquiétudes grandissantes, la préparation effective de la retraite reste souvent négligée par de nombreux Français. Ce domaine nécessite une vision à long terme, ce qui ne motive pas toujours les citoyens à investir pleinement dans cette perspective.

2.1.2 La retraite de base

Actuellement, le système de retraite Français peut être divisé en trois catégories : la retraite de base et la retraite complémentaire qui fonctionnent selon le principe de la répartition, et la retraite supplémentaire fonctionnant par capitalisation.

La retraite de base occupe une place fondamentale dans le système de retraite français mais ne suffit pas à elle seule à garantir un niveau de vie adéquat pour les retraités. En effet, son montant ne peut dépasser 50% du salaire annuel moyen calculé sur les dernières années travaillées.

Dès qu'une personne commence à travailler en France, elle cotise obligatoirement pour sa retraite de base. Elle est gérée par la sécurité sociale, qui se divise en trois catégories de régimes : le régime général, le régime agricole et les régimes spéciaux. Au total, en comptant l'ensemble des régimes spéciaux, il existe aujourd'hui 42 régimes de retraite auxquels on peut cotiser durant notre parcours professionnel. En effet, suivant ses choix de carrière, une personne peut cotiser pour plusieurs régimes de retraite.

Le fonctionnement par répartition de la retraite de base permet une redistribution presque instantanée des ressources du régime aux allocataires. Toutefois, la redistribution étant immédiate, le régime ne possède peu voire pas de réserve, et ne peut pas faire face à ses engagements futurs sans la collecte des cotisations futures.

2.1.3 La retraite complémentaire

La retraite complémentaire tout comme la retraite de base est à cotisation obligatoire et fonctionne par répartition afin d'assurer une solidarité intergénérationnelle et interprofessionnelle. En effet, les cotisations de l'assuré vont être transformées en points et être cumulées.

Avec l'accord du 30 octobre 2015 promulguant la fusion de l'Agirc (Association générale des institutions de retraite complémentaire des cadres) et de l'Arrco (Association de régime de retraite complémentaire des salariés) au 1er janvier 2019, un unique acteur s'occupe dorénavant de la retraite complémentaire et coordonne les 12 caisses de retraite complémentaire.

L'Agirc-Arrco est un régime en point, qui à la différence du régime de base, permet aux cotisants d'acquérir des droits à la retraite au-delà du plafond de la sécurité sociale (PSS) dans la limite de 8 PSS. Toutefois, aucune limite d'années de cotisations n'est fixée. La fusion a notamment permis une uniformisation des tranches et des taux de cotisations. En effet, depuis 2019, les salariés cadres et non-cadres cotisent au même taux, et toutes les cotisations sont divisées en deux tranches qui dépendent du revenu de l'individu, ce qui n'était pas le cas avant pour les salariés cadres.

2.1.4 La retraite supplémentaire

La retraite supplémentaire constitue le troisième et dernier pilier de la retraite en France, et permet aux Français d'épargner et d'investir pour préparer au mieux leur retraite grâce à des produits d'épargne à long terme. On y distingue deux grandes catégories, les contrats à cotisations définies et les contrats à prestations définies.

Les premiers dont l'engagement ne porte que sur les versements peuvent être souscrits à titre individuel, professionnel ou collectif. L'entreprise ayant un engagement annuel de financement, aucune garantie sur le montant du capital à la liquidation n'est donnée. Au départ à la retraite, la sortie en rente est obligatoire pour le salarié.

Parmi les contrats à cotisations définies, on peut identifier deux des plus connus : le Plan Épargne Retraite Individuel (PER Individuel) et la Caisse nationale de prévoyance de la fonction publique (Préfon). Le PER Individuel remplace, entre autres, le Plan d'Épargne Retraite Populaire (PERP), les contrats "Madelin" et les contrats de type "Article 83" du Code Général des Impôts (CGI). Quant à la Préfon, elle représente un produit d'épargne exclusivement réservé aux fonctionnaires.

Pour les seconds, l'entreprise s'engage à l'avance sur un montant minimal de prestation qu'elle devra verser à une catégorie objective de salarié. Les contrats à prestations définies dits contrats de type "Article 39" du CGI sont partagés en deux types de régimes.

Les régimes différentiels viennent apporter au bénéficiaire la différence entre le niveau de retraite garanti par la retraite supplémentaire et les droits acquis dans les autres régimes. Ce type de régime est souvent réservé pour les cadres supérieurs.

Les régimes additifs donnent à l'assuré un montant de rente qui est indépendant des droits acquis dans les autres régimes.

2.2. Focus sur le PER obligatoire

2.2.1 La loi Pacte

La loi n° 2019-486, baptisée "loi PACTE" (Plan d'Actions pour la Croissance et la Transformation des Entreprises), a été promulguée le 23 mai 2019 après une censure partielle du Conseil constitutionnel et plus de 1 an et demi de débats. Entrée en vigueur le 1er octobre 2019, cette loi se compose de 221 articles et vise à dynamiser et simplifier le tissu économique français.

En ce qui concerne l'épargne-retraite, la loi PACTE prévoit la mise en place du Plan d'Épargne Retraite (PER), une innovation destinée à uniformiser et redynamiser la retraite supplémentaire. Ce dispositif accompagnera les épargnants tout au long de leur parcours professionnel, même en cas de changement d'employeur ou de métier, offrant ainsi une meilleure portabilité et une plus grande flexibilité que les anciens produits d'épargne-retraite tels que les contrats "Article 83", le PERP, le Madelin ou encore le PERCO.

L'objectif de cette plus grande flexibilité est de susciter un regain d'attrait pour la retraite parmi la population française. Par exemple, l'assuré a la possibilité de racheter sous certaines conditions son épargne avant son départ à la retraite rendant ainsi la retraite supplémentaire plus flexible. On parle de sortie anticipée. En cas d'achat d'une maison principale, il peut uniquement récupérer l'épargne issue des versements volontaires et de l'épargne salariale. La fiscalité appliquée est alors la même que lors d'une sortie en capital.

En cas d'accidents de la vie, il peut racheter la totalité de son épargne y compris celle du compartiment 3. Les versements des trois compartiments sont alors exonérés d'IR et l'ensemble des plus-values est soumis à 17,2% de prélèvements sociaux.

La *Figure 9 : Panorama de la retraite supplémentaire après la loi Pacte* Tableau 7 : Les différentes sources d'alimentation du PERO met en évidence la correspondance entre les anciens et nouveaux produits de retraite. Enfin avec la gestion pilotée "à horizon", les nouveaux PER promettent de meilleurs rendements.

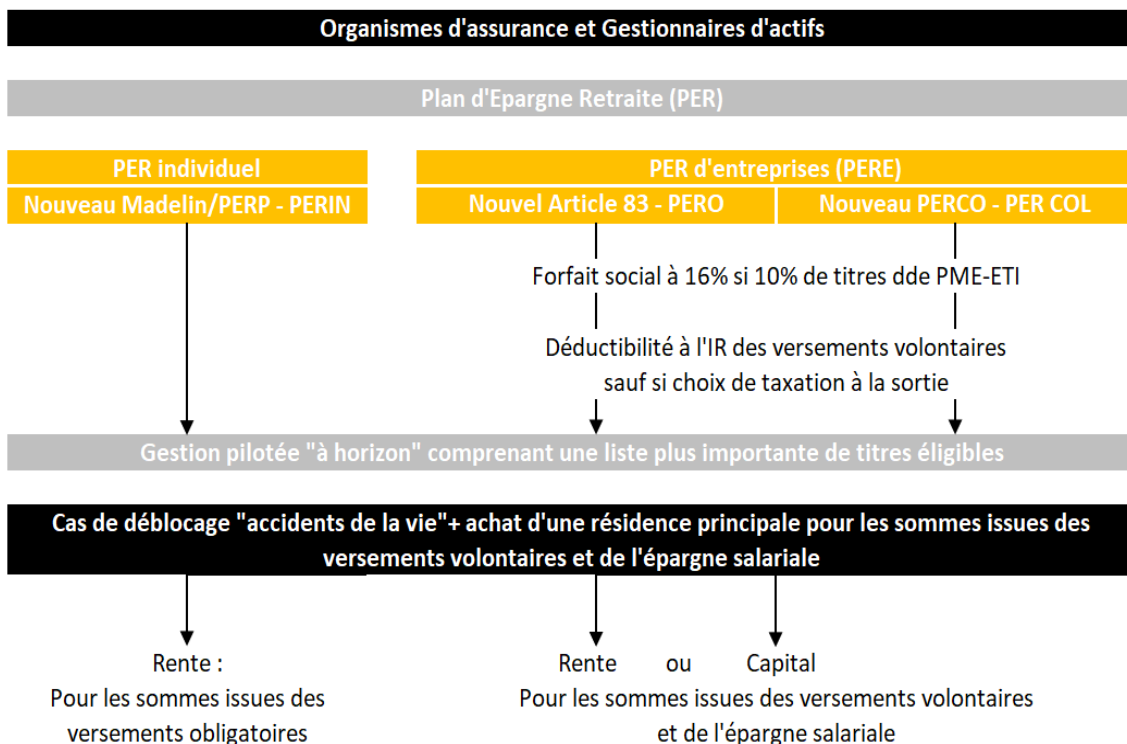


Figure 9 : Panorama de la retraite supplémentaire après la loi Pacte

De plus, la loi PACTE encourage l'épargne salariale en supprimant le forfait social sur l'intéressement et la participation pour les entreprises de moins de 250 salariés. Elle vise ainsi à renforcer la participation des salariés aux résultats et aux performances de leur entreprise.

Une autre innovation notable de la réforme concerne les contrats anciennement désignés par l'article 39, qui autorisaient les entreprises à épargner en vue du règlement des indemnités de départ en retraite. Ces contrats sont maintenant remplacés par des régimes à droits définitivement acquis, instaurant ainsi une approche plus stable et transparente pour les employés.

2.2.2 La réforme des retraites de 2023

La réforme des retraites, initiée par la Loi du 14 avril 2023 de Financement Rectificative de la Sécurité Sociale pour 2023, suscite des inquiétudes croissantes parmi les Français concernant leurs avenir et leurs retraites. Malgré le mécontentement exprimé par une grande partie de la population à l'égard de cette réforme, aucune variation n'a été constatée quant au montant des encours en retraite supplémentaire. Ainsi, bien que préoccupés, les Français semblent adopter une attitude passive à l'égard de leur futur.

Présentons les principales modifications apportées par cette réforme :

- Évolution de l'âge légal de 62 à 64 ans et de la durée d'assurance de 42 à 43 ans pour bénéficier d'une pension à taux plein.
- Revalorisation de la retraite minimale.

- Facilitation des départs anticipés.
- Fermeture des régimes spéciaux pour les nouveaux entrants.
- Introduction de nouveaux droits familiaux.
- Valorisation de l'activité et facilitation des départs à taux plein.
- Amélioration des transitions activité-retraite.
- Prévention de l'usure professionnelle.

2.2.3 Les différentes sources d'alimentation du PERO

Le PERO est composé de trois compartiments permettant de différencier l'origine des fonds :

- Le compartiment 1 est alimenté par les versements volontaires des assurés.
- Le compartiment 2 est financé par l'épargne salariale comprenant la participation, l'intéressement, l'abondement, et les jours de repos issus du compte épargne-temps (CET).
- Le compartiment 3 reçoit les versements obligatoires comprenant les cotisations des employeurs et des salariés.

	Par le salarié	Par l'employeur
Compartiment 1	Versements volontaires	
Compartiment 2	Participation Intéressement Droits inscrit sur un CET En l'absence de CET, jours de repos non pris (10 jours max / an)	
Compartiment 3	Versements obligatoires (max 50% du montant total de cotisation)	Versements obligatoires (min 50% du montant total de cotisation)

Tableau 7 : Les différentes sources d'alimentation du PERO

La création de trois compartiments permet, d'une part de recevoir les versements directement liés au contrat, et d'autre part de répartir les fonds résultant de la transformation d'anciens dispositifs en PER ou de leur regroupement avec d'autres PER.

2.2.4 La fiscalité du PERO

La fiscalité à l'entrée

La fiscalité à l'entrée du PERO est spécifique à chaque compartiment. L'employeur à travers les cotisations obligatoires participe uniquement à la création de l'épargne du compartiment 3. Les versements sont alors soumis à 9,7% de charges sociales : 0,5% de CSG et 9,2% de CRDS.

Le salarié contrairement à l'employeur peut réaliser des versements dans les trois compartiments.

Pour les versements volontaires correspondant au compartiment 1, le contribuable a le choix de déduire ou non des impôts la somme de ses versements réalisés sur l'année

de ses différents contrats de retraite supplémentaire. Par défaut, les versements sont déduits des impôts. Cependant, pour les salariés, les sommes déduites sont limitées entre le maximum de 10% du Plafond Annuel de la Sécurité Sociale¹ (PASS) et le minimum de 10% des revenus de l'année N-1 nets de cotisations sociales et de frais professionnels et 8 PASS de l'année N-1.

La déduction des versements de l'assiette imposable est souvent avantageuse pour les contribuables fortement imposés.

Si le salarié choisit de ne pas déduire ses versements des impôts alors il est soumis à l'impôt sur le revenu (IR), lui donnant alors droit à des avantages fiscaux à la sortie. Les personnes payant très peu d'impôts voir pas du tout peuvent réaliser des économies en payant l'IR à l'entrée.

Les versements issus de l'épargne salariale et finançant le compartiment 2 sont totalement exonérés d'IR mais sont soumis à 9,7% de charges sociales : 0,5% de CSG et 9,2% de CRDS.

Finalement les cotisations obligatoires sont entièrement exonérées d'IR dans la limite du minimum entre 8 PASS et 8% de la rémunération annuelle brute. La déduction des sommes versées de l'IR se fait directement sur le salaire brut imposable. De plus, les versements correspondant au troisième compartiment sont aussi soumis à 9,7% de charges sociales : 0,5% de CSG et 9,2% de CRDS.

La fiscalité à la sortie

Lors du déblocage de leur PERO, les salariés ont le choix de liquider leur épargne sous forme de capital ou de rente.

En cas de sortie en capital, les versements volontaires déduits de l'IR à l'entrée y sont maintenant soumis sans abattement de 10%. En revanche, les versements soumis à l'IR à l'entrée en sont exonérés. En ce qui concerne les plus-values, les prélèvements sociaux sont de 17,2% et le contribuable a ensuite le choix entre 12,8% de Prélèvement Forfaitaire Unique (PFU) ou de payer l'IR.

Dans certaines situations, les plus-values peuvent être dispensées du PFU.

Seules les plus-values de l'épargne salariale sont taxées à hauteur de 17,2% pour les prélèvements sociaux.

Les cotisations obligatoires sont soumises à l'IR sans abattement de 10% et les plus-values sont soumises à 17,2% de prélèvements sociaux et 12,8% de PFU ou d'IR. Comme pour les plus-values du compartiment 1, le choix entre le PFU et l'IR est laissé au contribuable, et sous certaines conditions celles-ci peuvent être dispensées de PFU.

En cas de sortie en rente, la fiscalité appliquée diffère de la sortie en capital. En effet, celle-ci est basée sur le régime des rentes viagères à titre gratuit et onéreuse. Le premier correspond à une rente versée sans aucune contrepartie et dont le montant pour

l'année 2023 doit être compris entre 422€ et 4 123€. Le second régime comprend les rentes versées en contrepartie du versement d'un capital.

Les versements issus des compartiments 1 qui ont été déduits de l'assiette imposable à l'entrée sont soumis au régime des rentes viagères à titre gratuit i.e à l'IR après 10% d'abattement puis à 17,2% de prélèvements sociaux sur une fraction de la rente (cf. *Tableau 8 : Part imposable en fonction de l'âge au premier arrérage*).

Les versements soumis à l'imposition à l'entrée suivent la fiscalité du régime des rentes viagères à titre onéreux i.e qu'ils sont soumis à l'IR et à 17,2% de prélèvement sociaux seulement sur une fraction de la rente qui dépend de l'âge au premier arrérage (cf. *Tableau 8 : Part imposable en fonction de l'âge au premier arrérage*).

Age au premier arrérage	Part imposable
Moins de 50 ans	70%
De 50 à 59 ans	50%
De 60 à 69 ans	40%
Plus de 69 ans	30%

Tableau 8 : Part imposable en fonction de l'âge au premier arrérage

Les versements facultatifs sont eux aussi soumis au régime des rentes viagères à titre onéreux et suivent donc la même fiscalité que les versements volontaires qui n'ont pas été déduits de l'assiette imposable à l'entrée.

Les cotisations obligatoires comme le compartiment 1 font partie des rentes viagères à titre gratuit et sont alors soumis à l'IR après un abattement de 10% ainsi qu'à 10,10% de prélèvements sociaux.

En résumé, la fiscalité du PERO représente un incitatif de la part de l'État pour encourager les citoyens à constituer une retraite supplémentaire.

3. REGLEMENTATION ET ETUDE DES GRILLES

D'ALLOCATION D'ACTIFS

3.1. Réglementation des grilles d'allocations d'actifs

Au sein d'un PER, deux modes de gestion sont proposés aux adhérents : la gestion libre et la gestion pilotée. La gestion libre permet à l'épargnant de déterminer lui-même la répartition de son portefeuille entre différentes classes d'actifs, selon ses préférences et son appétence pour le risque. Elle offre une grande flexibilité mais requiert des connaissances financières solides, ainsi qu'un suivi régulier des marchés pour ajuster les allocations en fonction des opportunités et des conditions économiques. À l'inverse, la gestion pilotée s'appuie sur une stratégie préétablie, définie à partir d'une grille d'allocation d'actifs. Celle-ci est généralement construite en fonction de l'horizon de placement et du profil de risque de l'épargnant, afin d'optimiser l'équilibre entre performance et maîtrise du risque.

3.1.1 Présentation des grilles d'allocations d'actifs

Définition

Une grille d'allocation d'actifs est une structure déterministe ou stochastique définissant les proportions optimales d'investissement entre différentes classes d'actifs (actions, obligations, fonds euros, etc.) en fonction de paramètres tels que :

- *Horizon de placement* : Nombre d'années restantes avant l'échéance, souvent lié à l'âge prévisionnel de départ à la retraite.
- *Profil de risque* : Niveau d'aversion ou de tolérance au risque de l'adhérent (Prudent, Équilibré, Dynamique).

La grille d'allocation repose sur des principes de diversification et d'optimisation, avec des hypothèses sur les rendements futurs, les corrélations entre actifs et les cycles économiques. Elle vise à gérer de manière proactive le risque intertemporel en ajustant la proportion des actifs risqués (ex. actions) et sécurisés (ex. fonds euros) pour réduire la volatilité et protéger le capital à mesure que l'adhérent se rapproche de son départ à la retraite.

Des grilles adaptées aux convictions des assurées

Au sein d'un PER, les assurés ont souvent le choix parmi plusieurs types de grilles d'allocation d'actifs, adaptées à leurs préférences et à leurs objectifs. Dans notre cas d'étude, le PERO étudié propose quatre types de grilles :

- *La grille Environnement*, axée sur la transition écologique et les actifs liés aux énergies renouvelables ;

- *La grille ISR*, qui intègre des critères environnementaux, sociaux et de gouvernance (ESG) ;
- *La grille Tech*, spécialisée dans les secteurs innovants à forte croissance ;
- Et enfin, *la grille Gedeon*, qui combine ces différentes approches pour offrir une solution équilibrée et diversifiée.

La gestion à horizon

La construction de l'ensemble des grilles d'allocation d'actifs intègre une gestion dite « à horizon », imposée par le législateur, qui consiste à ajuster progressivement la prise de risque en fonction du nombre d'années restantes avant la date de départ à la retraite. Concrètement, cette approche vise à réduire l'exposition aux actifs risqués, tels que les actions, au profit d'actifs plus stables comme les obligations ou les fonds en euros, à mesure que l'épargnant se rapproche de l'âge de départ. En diminuant ainsi la volatilité du portefeuille, cette stratégie permet de sécuriser les investissements tout en maintenant une trajectoire de performance adaptée à un horizon de placement long. Elle constitue un avantage majeur pour les épargnants novices en leur offrant une solution d'investissement structurée et optimisée.

Objectif du mémoire

Actuellement, dans le cadre du PERO étudié, les assurés ne disposent pas de la possibilité d'adapter la grille d'allocation en fonction de leurs préférences en matière de risque. Ce mémoire a pour objectif de concevoir, pour l'ensemble des grilles proposées aux assurés, des grilles spécifiques correspondant à différents profils de risque (prudent, équilibré et dynamique).

3.1.2 Présentation du SRI

PRIPs : Packaged Retail and Insurance-based Investment Products

Entrée en application en janvier 2018, la réglementation européenne PRIPs (Packaged Retail and Insurance-based Investment Products) a été mise en place dans le but d'améliorer la transparence des produits d'investissement et d'uniformiser l'information précontractuelle des produits financiers. Cette initiative vise à garantir que les épargnants disposent des informations nécessaires pour comprendre et comparer facilement les différents produits financiers proposés sur le marché. Les produits concernés par cette réglementation couvrent un très large éventail, incluant non seulement les produits d'assurance, mais aussi une multitude d'instruments financiers destinés aux particuliers. Dans ce cadre, l'obligation de fournir une clé de lecture claire, notamment à travers la présentation des notes, permet de donner aux investisseurs une vue d'ensemble des risques et des rendements associés à ces produits.

Cette transparence accrue, favorisée par la réglementation, a conduit à la mise en place du Document d'Informations Clés (DIC), devenu obligatoire pour tous les produits couverts par PRIIPs, garantissant ainsi une meilleure protection des investisseurs.

DIC : Document d'informations clés

(*Autorité des marchés financiers, 2023*) décrit le DIC comme un document harmonisé au niveau européen qui présente de manière claire et concise les informations essentielles sur un produit d'investissement, sa nature et ses caractéristiques principales. Contrairement à un document publicitaire, le DIC est conçu pour être compris par l'investisseur, offrant une vision transparente des risques, des coûts ainsi que des gains et pertes potentiels associés au placement envisagé. Sa présentation standardisée permet également de faciliter la comparaison entre différents produits d'investissement.

Depuis le 1er janvier 2023, le DIC a remplacé l'ancien DICI (Document d'Information Clé pour l'Investisseur) pour tous les placements collectifs, renforçant ainsi la standardisation de l'information.

SRI : Synthetic Risk Indicator

Le SRI (Synthetic Risk Indicator) est un outil de mesure qui permet d'évaluer le risque d'un produit d'investissement. Le SRI est une catégorisation de la volatilité allant de 1 pour les actifs les moins risqués à 7 pour les actifs les plus risqués. Cette note de risque permet aux investisseurs de mieux comprendre le niveau de risque global d'un fonds d'investissement.

Il est essentiel de ne pas confondre la note de risque et le niveau de risque, bien qu'ils soient étroitement liés. La note de risque est attribuée à chaque fonds d'investissement et mesure le risque inhérent à ce fonds grâce au SRI. En revanche, le niveau de risque d'un investisseur est une mesure plus globale qui correspond à la tolérance au risque de l'individu. Ce niveau est calculé en pondérant les notes de risque des différents fonds qui composent son portefeuille en fonction des montants investis. Par conséquent, le niveau de risque reflète la combinaison des risques des fonds dans un portefeuille et peut différer de la note de risque individuelle de chaque fonds.

Le SRI intègre dans son calcul une mesure du risque de crédit ainsi qu'une mesure du risque de marché.

Mesure du risque de marché

La mesure du risque de marché repose sur le calcul de la Value-at-Risk (VaR) à 97,5 %, déterminée à partir des performances logarithmiques du fonds sur une période de cinq ans. Cette évaluation doit être actualisée régulièrement, et la valeur communiquée au public correspond à celle la plus fréquemment observée au cours des quatre derniers mois. La VaR représente la perte maximale estimée pouvant survenir, avec une probabilité donnée, sur un horizon temporel prédéfini.

Mathématiquement, elle s'exprime de la manière suivante : si X est une variable aléatoire représentant les pertes, on définit, pour $\alpha \in]0,1[$, la VaR de niveau de risque α associé à X comme le quantile :

$$VaR_{\alpha}(X) = F_X^{-1}(1 - \alpha)$$

Le tableau ci-dessous représente la classe de risque associée à chaque volatilité équivalente à la $VaR_{97,5\%}$:

Volatilité	Mesure du risque de marché
$x < 0,50 \%$	1
$0,50 \% \leq x < 5,00 \%$	2
$5,00 \% \leq x < 12,00 \%$	3
$12,00 \% \leq x < 20,00 \%$	4
$20,00 \% \leq x < 30,00 \%$	5
$30,00 \% \leq x < 80,00 \%$	6
$80,00 \% \leq x$	7

Tableau 9 : Les intervalles de volatilité correspondants aux différentes mesures du risque de marché

Mesure du risque de crédit

Dans le cadre de l'évaluation du risque de crédit, la méthodologie repose sur les notations attribuées par des agences de notation agréées aux émetteurs de crédits. Le risque de crédit est ainsi défini comme une mesure de la VaR, calculée à partir de plusieurs paramètres clés. Parmi ces derniers figurent la distribution des gains et pertes associée au portefeuille, un niveau de confiance fixé à 99,90 %, ainsi qu'un horizon temporel de capital et de liquidité d'un an, avec un plancher minimal de trois mois pour l'horizon de liquidité.

Le calcul du risque de crédit intègre également divers facteurs de risque essentiels. Ces facteurs incluent notamment les migrations des notations de crédit et les défauts éventuels, les variations des spreads de crédit et les taux de recouvrement. Cette approche permet de refléter de manière exhaustive les risques inhérents à la détention de produits de crédit, offrant ainsi une vision précise de l'exposition globale et des pertes potentielles en cas de défaillance ou de variation des conditions de marché.

Pour le calcul du SRI, le risque de crédit est évalué sur une échelle allant de 1 à 6.

Conclusion

Pour déterminer le SRI d'un fonds d'investissement, il convient de combiner les notes attribuées respectivement au risque de marché et au risque de crédit, en utilisant la matrice d'association suivante :

Mesure du risque de marché							
Mesure du risque de crédit	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1	2	3	4	5	6	7
3	3	3	3	4	5	6	7
4	5	5	5	5	5	6	7
5	5	5	5	5	5	6	7
6	6	6	6	6	6	6	7

Tableau 10 : Matrice de calcul du SRI à partir de la mesure du risque de marché et de la mesure du risque de crédit

3.2. La loi industrie verte

3.2.1 Contexte législatif et nouvelles obligations

Comme spécifié dans (legifrance, 2024) l'arrêté du 1er juillet 2024, qui modifie celui du 7 août 2019, et dans la loi relative à l'industrie verte du 24 octobre 2023, de nouvelles règles impactent directement la structuration des grilles de gestion pilotée au sein des PER. Ces évolutions, qui sont entrées en vigueur pour les nouveaux contrats dès le 24 octobre 2024, introduisent une obligation d'intégrer une proportion croissante d'actifs non cotés dans les profils de gestion pilotée. Pour les PER obligatoires et collectifs, ces nouvelles obligations seront applicables à compter du 30 juin 2026.

Ces dispositions législatives visent à rediriger une partie de l'épargne retraite vers des actifs non cotés, comme les fonds ELTIF, FCPR, FIP ou encore FPCI, afin de renforcer le financement de l'économie réelle et des petites et moyennes entreprises (PME). En alignant les stratégies d'investissement des épargnants sur des objectifs de soutien à l'industrie verte, ces réformes participent au développement durable tout en diversifiant les portefeuilles d'épargne.

3.2.2 Impact sur les grilles de gestion pilotée

Chaque profil de gestion pilotée (prudent, équilibré, dynamique et offensif) doit désormais allouer une part minimale à des actifs non cotés. Ces proportions sont progressives et dépendent de l'horizon de placement. Par exemple, pour un profil dynamique, l'exposition aux actifs non cotés atteint 12 % de l'encours pour une échéance supérieure à 20 ans et diminue à 5 % à partir de 5 ans avant la liquidation envisagée. Une grille supplémentaire dite offensive a également été introduite, reprenant les caractéristiques de la grille dynamique, mais avec une allocation encore plus marquée en actifs non cotés (15 % à 20 ans de l'échéance) et une exposition réduite aux actifs à faible risque (30 % à 5 ans de l'échéance).

3.3. Etude des grilles d'allocation au sein du PERO étudié

3.3.1 Analyse des fonds d'investissements

Comme spécifié précédemment, le PERO étudié propose quatre grilles distinctes en gestion pilotée pour les assurés : la grille Gedeon, la grille Tech, la grille ISR et la grille Environnement. Ces grilles sont composées à partir d'une base de 11 fonds en unités de compte et d'un fonds en euros.

L'analyse préliminaire de ces grilles a pour objectif de mieux comprendre la structure de ces fonds, leurs dynamiques de performance et leur volatilité afin de proposer une approche optimisée d'allocation d'actifs. Cette étude est nécessaire pour comprendre comment ces fonds se comportent sur une période prolongée et comment ils réagissent aux ajustements périodiques des grilles d'investissement en fonction de l'horizon de retraite.

Le fonds euros

Le fonds en euros est un placement presque sans risque pour l'assuré, car c'est l'assureur qui porte intégralement le risque financier. Les pertes éventuelles ne peuvent pas être répercutées sur l'assuré, le seul risque étant la défaillance de l'assureur.

Pour prévenir ce type de sinistre, l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) impose des règles strictes aux assureurs afin de garantir leur solidité. En cas de difficultés persistantes, l'ACPR intervient pour organiser une reprise des contrats par d'autres opérateurs du marché. De plus, depuis 1999, chaque souscripteur bénéficie d'une garantie de 70 000 € par compagnie, tous contrats confondus.

Cependant, dans un environnement de taux d'intérêt bas, les assureurs rencontrent des difficultés à générer des rendements attractifs sans prendre de risque, ce qui a conduit à une érosion progressive des performances. Les anciennes obligations, autrefois rémunératrices à 5-6 %, ont été remplacées par des titres moins rentables.

L'actif général des fonds en euros offre plusieurs garanties et options financières, conçues pour protéger l'assuré. Parmi celles-ci, la garantie en capital, qui assure que la performance cumulée du placement ne peut jamais être négative, quel que soit le contexte économique. L'effet cliquet garantit que les rendements acquis chaque année sont définitivement verrouillés, renforçant ainsi la sécurité du fonds. De plus, la liquidité du fonds est garantie à tout moment, permettant des rachats sans contrainte. Un autre mécanisme important est le recyclage de la Provision pour Participation aux Excédents (PPE) tous les huit ans, une réserve qui permet de lisser les rendements annuels. Cette provision, appartenant aux assurés, doit obligatoirement leur être reversée sous huit ans, renforçant ainsi la stabilité des fonds en euros.

Le fonds euros disponible au sein des différentes grilles, nommé "Fonds euros Retraite Collective Axa", voit sa composition détaillée dans la *Figure 10 : Composition du fonds euros*.

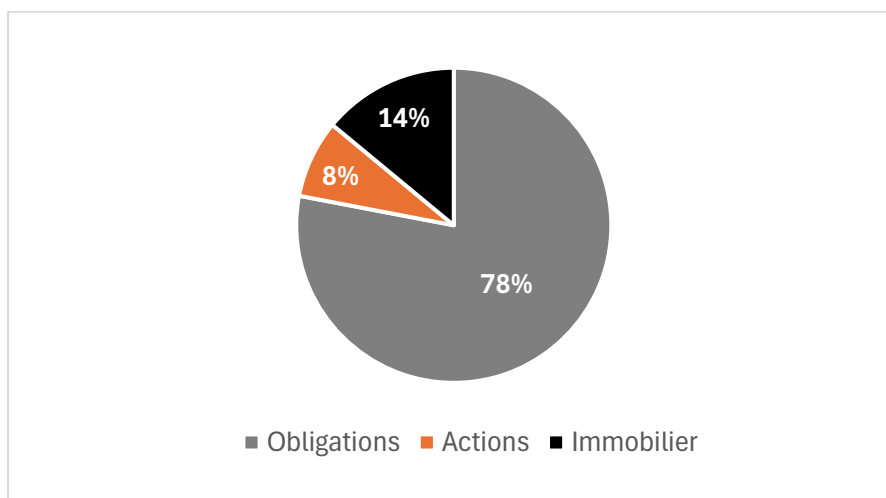


Figure 10 : Composition du fonds euros

La composition d'un fonds en euros ressemble fortement à celle d'un fonds obligataire, avec une majorité d'actifs investis dans des obligations, assurant une certaine stabilité. Ce lien avec le marché obligataire explique les rendements prévisibles et relativement faibles du fonds.

La Figure 11 : Rendement annuel du fonds euros depuis 2015 illustre l'effet de la PPE, qui permet de lisser les rendements annuels du fonds en euros. Ce mécanisme préserve la régularité des performances, en compensant les années de moindre rendement par les excédents accumulés dans les années plus favorables.

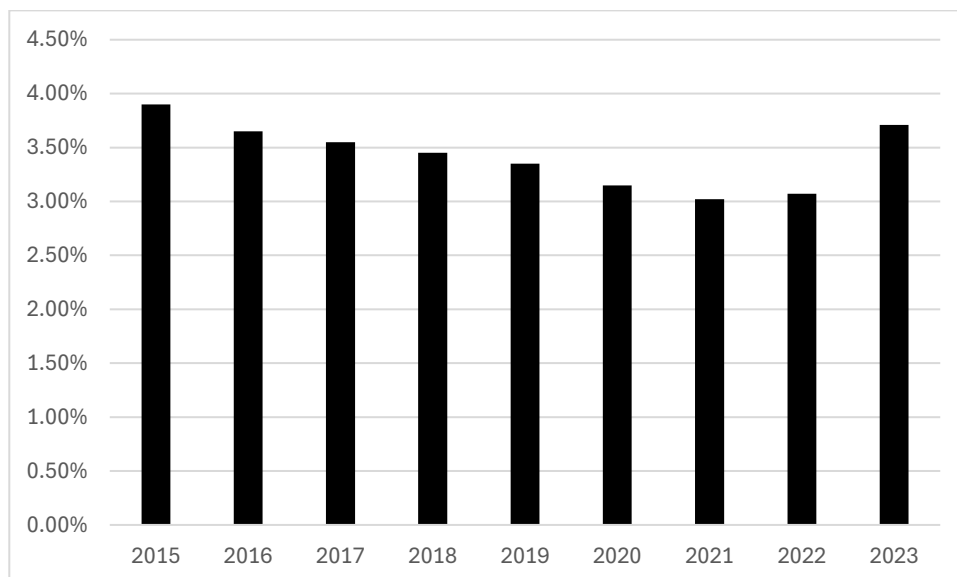


Figure 11 : Rendement annuel du fonds euros depuis 2015

Les fonds en unités de compte

Les fonds composant les grilles sont variés, couvrant des classes d'actifs allant des actions aux obligations. Voici une présentation des informations clés pour chacun de ces fonds, incluant l'ISIN, la classification, la date de création, et l'indice SRI.

ISIN	Classification du fonds	Date de création	SRI	Mise à jour de la VL
LU0171310443	Fonds actions	03/03/1995	5	Journalier
LU0389655811	Fonds actions	23/01/2009	4	Journalier
LU2080768091	Fonds mixtes	15/06/2020	3	Journalier
IE000E66LX20	Fonds actions	13/10/2022	4	Journalier
FR0011637164	Fonds actions	31/01/2014	4	Journalier
LU0465917044	Fonds mixtes	08/03/2013	4	Journalier
LU1557118921	Fonds actions	28/02/2017	4	Journalier
LU1280195881	Fonds obligations	05/11/2015	3	Journalier
LU0164100710	Fonds obligations	06/10/1999	2	Journalier
FR0014001H77	Fonds mixtes	21/12/2009	3	Journalier
FR0014001FD5	Fonds mixtes	31/07/1989	3	Journalier

Tableau 11 : Informations générales des fonds constituant les différentes grilles

La composition des fonds mixtes se distingue par une diversification équilibrée, intégrant des actions, des obligations, des fonds monétaires, des fonds mixtes ainsi que des instruments liés à l'évolution du cours de l'or en dollars américains.

Nous allons examiner l'évolution des valeurs liquidatives des fonds afin d'analyser leur comportement face aux variations de marché.

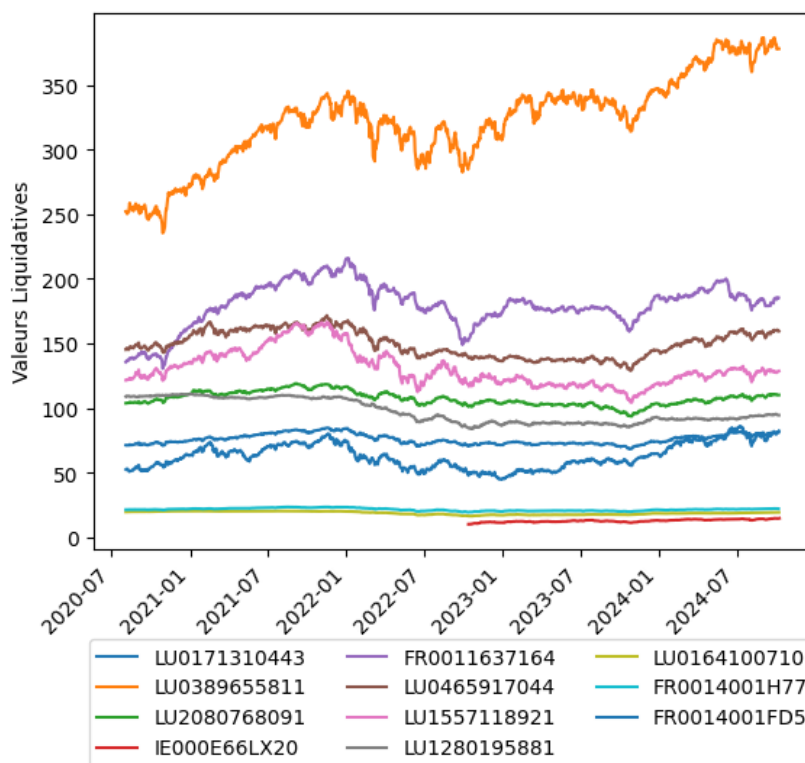


Figure 12 : Variation des VL des différents fonds d'investissement depuis août 2020

Les fonds sélectionnés pour cette étude présentent des dynamiques de performance différentes en fonction de leur composition et de leur exposition aux marchés financiers. Depuis le 1er août 2020, nous observons une variation significative de la valeur liquidative des différents fonds, reflétant les fluctuations des marchés actions, obligations et autres classes d'actifs.

Cette période inclut des événements majeurs comme les fluctuations dues à la pandémie de COVID-19 en 2020, suivies par la reprise économique en 2021, ainsi que les incertitudes macroéconomiques de 2022. Ces événements ont eu des répercussions diverses sur les fonds, en fonction de leur stratégie et de leur sensibilité au risque.

3.3.2 Reconstruction des VL à partir du Benchmark

Le fonds d'investissement IE000E66LX20 étudié étant trop récent pour disposer d'un historique suffisant sur la temporalité souhaitée, nous allons reconstruire sa valeur liquidative passée en nous appuyant sur son benchmark.

Un benchmark est un indice de référence, souvent composé d'un panier d'actifs représentatif, utilisé pour évaluer les performances d'un fonds d'investissement. Il sert de base de comparaison et reflète les conditions du marché ou les stratégies d'investissement auxquelles le fonds cherche à se conformer ou à dépasser.

Reconstruction par régression affine

La première méthode consiste à reconstruire les valeurs liquidatives en appliquant un coefficient de proportionnalité au benchmark. Cette approche, bien que simple, s'avère fiable dans notre contexte, car elle permet de capturer efficacement les variations du fonds en se basant sur la performance de son indice de référence.

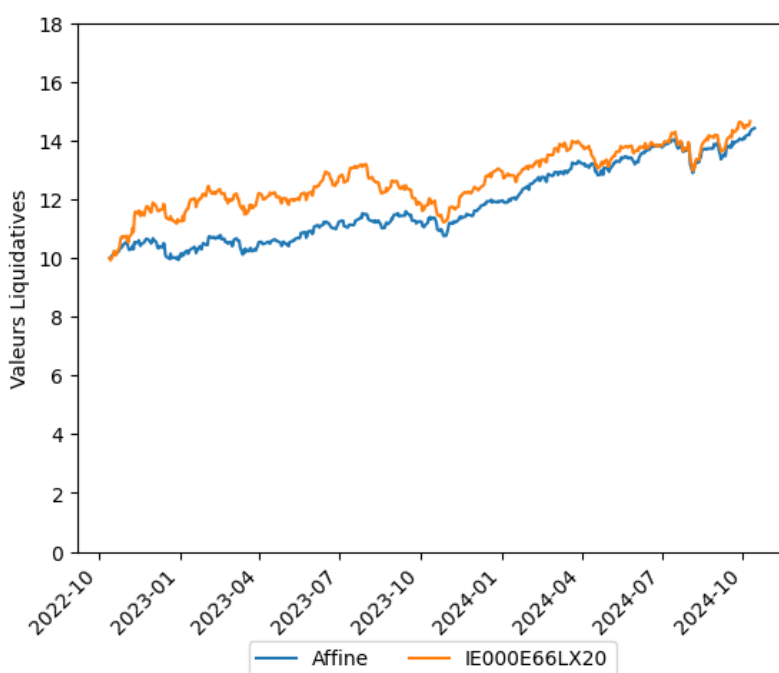


Figure 13 : Reconstruction par régression affine des VL à partir du benchmark

Empiriquement, la reconstruction des valeurs liquidatives du fonds à partir des performances de son benchmark semble bien correspondre aux valeurs liquidatives réelles du fonds étudié. Pour valider cette observation, nous allons mesurer le tracking error entre les deux, afin d'évaluer la précision de la reconstruction.

Le tracking error mesure la volatilité de l'écart entre la performance d'un fonds indiciel et celle de son indice de référence. Elle quantifie la dispersion de la différence entre les rendements du fonds et de l'indice, ajustée des frais de gestion. Un faible tracking error indique que le fonds suit de manière stable et régulière son indice, alors qu'un tracking error élevé révèle une plus grande variabilité dans les écarts de performance, même si la performance moyenne peut être similaire. En résumé, plus la tracking error est faible, plus la stratégie du fonds est cohérente avec celle de l'indice. Un tracking error inférieur à 5% est généralement considéré comme acceptable, et en dessous de 1%, il est jugé très précis.

Dans cette étude, nous adopterons la méthode de reconstruction des valeurs liquidatives tant que la tracking error demeure inférieure à 5%, seuil au-delà duquel l'écart entre la performance du fonds et celle de son indice de référence serait considéré comme excessif. Si nécessaire, des approches plus avancées, telles que l'utilisation de modèles de séries temporelles, pourraient être envisagées afin d'améliorer la précision des résultats obtenus. Le calcul de la tracking error sera effectué sur la période couvrant d'octobre 2022 à octobre 2024, période durant laquelle les données réelles du fonds cible sont disponibles. Cette période nous permettra d'évaluer la qualité de la reconstruction en prenant en compte la plus longue série de données disponible.

	IE000E66LX20
Tracking error	3,16%

Tableau 12 : Tracking error obtenu par régression affine

Reconstruction à partir d'un modèle linéaire généralisé

Les modèles linéaires généralisés constituent une extension des modèles de régression linéaire permettant de modéliser des relations entre une variable réponse et des variables explicatives en supposant que la variable réponse suit une distribution appartenant à la famille exponentielle (Gaussienne, Gamma, Poisson, etc.). Contrairement à une simple régression linéaire, le GLM introduit une fonction de lien qui relie l'espérance de la variable réponse à une combinaison linéaire des prédicteurs, offrant ainsi une flexibilité accrue dans la modélisation des phénomènes financiers. Dans notre cas, l'objectif est d'estimer la VL d'un fonds à partir de la VL d'un benchmark en ajustant un GLM selon différentes distributions.

Formellement,

$$E(Y|X) = g^{-1}(X\beta)$$

Avec :

- X une variable aléatoire réelle.

- Y la variable réponse de X .
- g la fonction lien qui est monotone différentiable.
- $X\beta$ le prédicteur linéaire.

Afin d'évaluer la robustesse des estimations obtenues et d'estimer l'incertitude sur les paramètres du modèle, nous avons appliqué la méthode du Bootstrap. Cette technique repose sur le rééchantillonnage aléatoire avec remise des observations afin de générer plusieurs jeux de données artificiels à partir desquels les paramètres du modèle sont recalculés. En répétant cette procédure un grand nombre de fois (ici 1 000 itérations), il est possible d'obtenir une distribution empirique des paramètres estimés et ainsi de quantifier leur variabilité.

Toutefois, dans notre cas, les résultats du Bootstrap sont quasi identiques à ceux obtenus avec l'ajustement classique du GLM. Cette stabilité s'explique par plusieurs facteurs. Premièrement, la relation entre la VL du fonds et celle du benchmark semble fortement linéaire et peu sujette à la variabilité aléatoire, ce qui réduit l'impact du rééchantillonnage. Deuxièmement, le modèle est très simple et ne comporte qu'une seule variable explicative, limitant la possibilité de variabilité entre les itérations. Enfin, la faible dispersion des coefficients issus du Bootstrap (écart-type faible) confirme que la relation estimée est peu sensible aux fluctuations des données.

Trois distributions issues de la famille exponentielle ont été testées pour modéliser la relation entre les valeurs liquidatives du fonds et celles du benchmark : la distribution Gaussienne, Gamma et Poisson. L'estimation des paramètres a été réalisée en ajustant un modèle linéaire généralisé pour chaque distribution, en utilisant la méthode des moindres carrés pour minimiser l'erreur quadratique moyenne (RMSE). Après comparaison des performances, la distribution Gaussienne s'est avérée être la plus adaptée, offrant les meilleures prévisions avec un RMSE minimal.

	RMSE
Gaussienne	0,397722
Gamma	0,403654
Poisson	0,400192

Tableau 13 : RMSE du GLM suivant la distribution choisie.

Les paramètres du modèle ont été estimés par la méthode du bootstrap, permettant d'évaluer leur robustesse et leur variabilité. Pour la distribution Gaussienne, les coefficients obtenus sont $4,5744 \pm 0,1669$ pour l'ordonnée à l'origine et $0,09967 \pm 0,00191$ pour la pente. Cette approche confirme la stabilité des paramètres estimés.

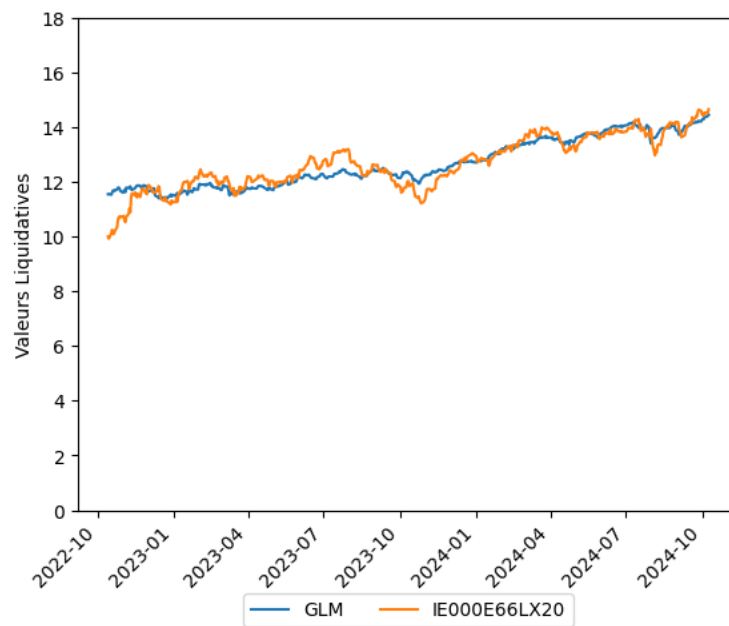


Figure 14 : Reconstruction par GLM avec une distribution gaussienne des VL à partir du benchmark

Ci-dessous, le tracking error obtenu à partir du GLM avec une distribution Gaussienne.

	IE000E66LX20
Tracking error	2,23%

Tableau 14 : Tracking error obtenu par GLM

Conclusion

En conclusion, nous retenons l'approche GLM, qui présente un tracking error plus faible que l'approche affine, indiquant une meilleure adéquation aux données observées. Cependant, en retraçant la construction sur une période de huit ans, nous constatons que les deux méthodes génèrent des écarts significatifs.

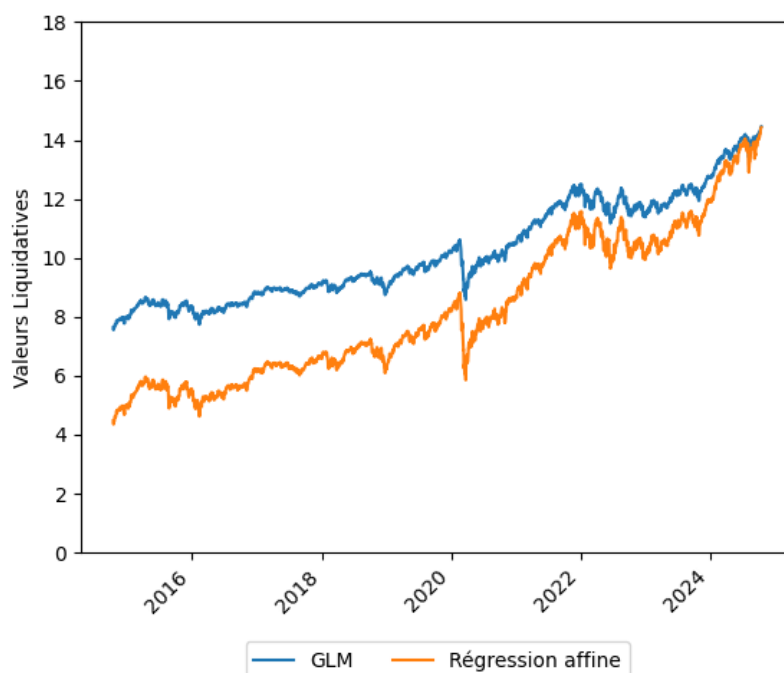


Figure 15 : Comparaison des VL obtenues par régression affine et par GLM (distribution gaussienne)

3.3.3 Variation des VL des différentes grilles proposées

La Figure 16 : Variation des VL pour les différentes grilles proposées illustre l'évolution des valeurs liquidatives des quatre grilles d'investissement proposées. Bien que chaque grille présente une allocation spécifique, elles partagent plusieurs fonds communs, ce qui induit des dynamiques similaires dans leurs variations.

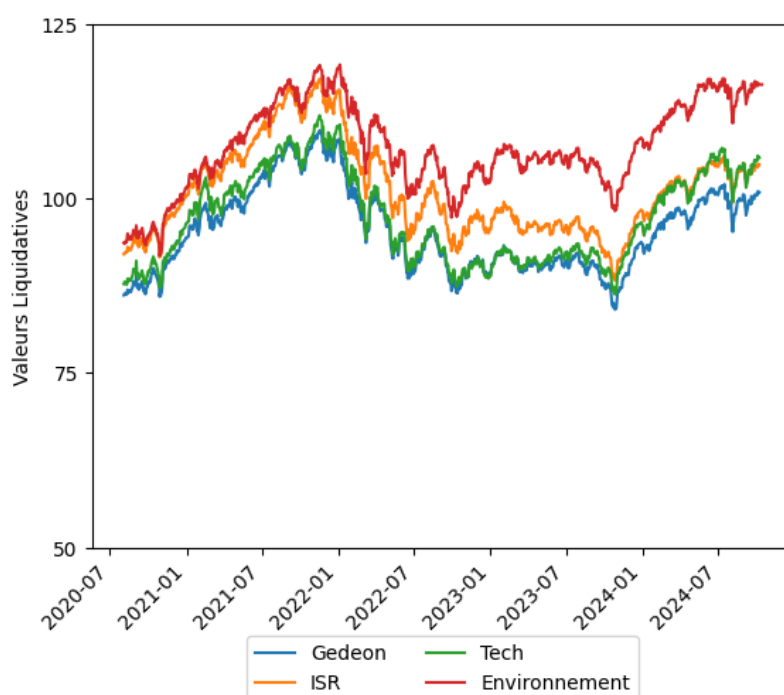


Figure 16 : Variation des VL pour les différentes grilles proposées

Dans un premier temps, nous concentrons notre analyse sur la répartition initiale de la grille, c'est-à-dire pour l'ensemble des adhérents ayant un horizon de retraite supérieur à 22 ans. De plus, dans la suite de l'étude, afin de simplifier l'analyse, nous nous concentrerons exclusivement sur la grille Gedeon.

3.3.4 Choix de l'indicateur de performance

Dans la suite de ce mémoire, nous allons choisir une indicatrice de performance permettant d'évaluer l'évolution des différentes grilles d'investissement. Deux méthodes seront comparées : la performance cumulée et la performance de Dietz. Cette analyse est particulièrement pertinente dans le cadre d'un PERO, où des cotisations obligatoires sont versées trimestriellement. La question centrale réside dans la manière d'intégrer ces versements récurrents dans le calcul de la performance, afin d'obtenir une mesure fidèle de la rentabilité du portefeuille.

Performance cumulée

La performance cumulée repose sur le ratio entre la valeur liquidative finale et la valeur liquidative initiale du portefeuille. Elle se calcule selon la formule suivante :

$$P_{cumulée} = \frac{VL_T}{VL_0} - 1$$

Où VL_T représente la VL à la date T et VL_0 celle à l'origine de l'analyse. Cette approche a l'avantage d'être simple et directement interprétable, mais elle ne prend pas en compte les éventuels apports de capitaux effectués en cours de période, ce qui peut biaiser l'évaluation de la performance.

Performance de Dietz modifiée

La méthode de Dietz modifiée est une approche couramment utilisée pour mesurer les rendements. Elle permet d'obtenir une évaluation précise de la performance d'un investissement en intégrant l'impact des flux financiers à différentes dates.

Pour mieux comprendre cette notion, prenons l'exemple suivant : deux fonds générant un même gain, l'un en une semaine et l'autre en un an, n'affichent pas la même performance.

Il est donc essentiel d'intégrer la dimension temporelle dans le calcul de la performance d'un portefeuille. Dans le cadre du PERO étudié, si l'on cherche à évaluer la performance juste après un versement, il faut tenir compte du fait que ce dernier n'a pas encore eu d'effet sur la valorisation du portefeuille.

Ainsi, la performance de Dietz modifiée se définit par la formule suivante :

$$P_{Dietz} = \frac{E_T - \sum_{i=0}^T C_i}{\sum_{i=0}^T C_i * t_i}$$

Où :

- E_T représente l'épargne à la date T.

- $(C_i)_{0 \leq i \leq T}$ représente la cotisation versée en i .
- $(t_i)_{0 \leq i \leq T}$ représente la durée d'investissement de la cotisation versée en i sur la durée d'investissement depuis le début de l'analyse.

Conclusion

Comme expliqué précédemment, la performance de Dietz modifiée intègre une notion temporelle en tenant compte des dates des flux financiers, ce qui la rend plus adaptée à notre analyse. Pour comparer les deux méthodes, nous supposons que l'employeur verse trimestriellement 250 € de cotisation obligatoire sur le PERO de l'adhérent.

	$P_{cumulée}$	P_{Dietz}
2020	12,11 %	13,51 %
2021	-12,23 %	-13,71 %
2022	-2,02 %	-3,44 %
2023	7,07 %	12,04%

Tableau 15 : Performance cumulée et performance de Dietz modifiée de 2020 à 2023 pour la grille Gedeon

En 2020, les marchés ont été fortement impactés par la crise du COVID-19, mais ont rapidement rebondi grâce aux mesures de soutien économique, comme les politiques monétaires et fiscales accommodantes mises en place par les banques centrales expliquant ainsi la performance élevée obtenue. En 2021, la reprise a été marquée par des incertitudes persistantes, notamment liées aux variants du virus, aux pénuries mondiales et à l'augmentation des coûts de production, ce qui a entraîné une correction des marchés. En 2022, les hausses des taux d'intérêt pour lutter contre l'inflation ont affecté les actifs financiers, provoquant une volatilité accrue, alors que les investisseurs redoutaient une récession économique. En 2023, une certaine stabilisation a été observée grâce à la détente des pressions inflationnistes et à la résilience des marchés, soutenus par la reprise économique et les résultats solides des entreprises.

3.3.5 Volatilité des grilles d'allocation

La volatilité historique est une mesure de la dispersion des rendements d'un actif financier autour de sa moyenne, généralement exprimée sous forme d'écart-type. Elle permet d'évaluer l'ampleur des fluctuations d'un investissement sur une période donnée et constitue un indicateur clé du risque associé à une allocation d'actifs. Dans le cadre de l'étude des grilles d'allocation du PERO, la volatilité joue un rôle central pour analyser la stabilité des différentes stratégies d'investissement en fonction du temps restant avant la retraite. Une allocation plus risquée, souvent associée à une volatilité élevée, peut être pertinente pour les jeunes adhérents qui disposent d'un horizon d'investissement long, leur permettant de lisser les variations de marché. À l'inverse, à l'approche de la retraite, une baisse progressive de la volatilité est recherchée afin de sécuriser l'épargne accumulée et limiter les pertes potentielles en cas de choc de marché.

L'Autorité des marchés financiers (AMF) impose l'utilisation des cotations disponibles le vendredi pour le calcul des volatilités des unités de compte. À partir de ces valeurs de clôture hebdomadaires, il est possible de déterminer les volatilités hebdomadaires, qui servent ensuite à évaluer le risque des différentes allocations d'actifs. Cette approche permet d'assurer une cohérence dans les calculs et d'uniformiser les comparaisons entre les fonds, tout en tenant compte des fluctuations réelles du marché sur une base régulière.

Afin de garantir la cohérence tout au long de l'étude, la volatilité sera calculée à partir de la performance hebdomadaire de Dietz qu'on annualisera par la suite.

$$\sigma_{Dietz} = \sqrt{52} * \sqrt{\sum_{i=1}^{52} (\mu - \mu_i)^2}$$

Où :

- $(\mu_i)_{1 \leq i \leq 52}$ sont les performances hebdomadaires.
- $\mu = \frac{1}{52} \sum_{i=1}^{52} \mu_i$ est la moyenne des performances hebdomadaires sur un an.

Nous appliquons désormais la formule de l'AMF afin de calculer la volatilité sur la grille Gedeon.

	σ_{Dietz}
2020	9,10 %
2021	13,82 %
2022	11,80 %
2023	14,11 %

Tableau 16 : Volatilité de Dietz modifiée de 2020 à 2023 pour la grille Gedeon

Après avoir analysé la performance et la volatilité de la grille d'allocation Gedeon, nous allons dans la partie suivante projeter l'évolution des fonds sur l'ensemble de la carrière d'un assuré, afin d'évaluer l'impact des choix d'investissement sur le long terme.

4. PROJECTION DES FONDS D'INVESTISSEMENTS AU SEIN D'UN PERO

4.1. Projection à long terme

L'objectif à présent est de projeter les fonds d'investissement sélectionnés afin de simuler la performance et la volatilité des différentes grilles proposées sur l'ensemble d'une carrière.

Dans cette partie, nous allons projeter l'évolution des fonds d'investissement en calibrant nos modèles sur les données journalières issues des marchés financiers. Toutefois, afin de refléter fidèlement la gestion d'un PERO, les projections seront effectuées sur une base trimestrielle. Ce choix est essentiel, car il permet d'intégrer à chaque trimestre les cotisations obligatoires versées par l'employeur au nom de l'employé, ainsi que d'effectuer les arbitrages nécessaires en fonction de l'évolution des grilles d'allocation définies.

4.1.1 Projection du fonds euros

Nous choisissons d'appliquer un taux constant de 3,2375 % pour toutes les années futures bien que ce taux ne reflète pas exactement la réalité du marché. Le taux sélectionné correspond au taux moyen annuel sur les 4 dernières années du fonds euros proposé sur la grille Gedeon.

Comme mentionné précédemment, le fait de choisir un taux constant peut s'expliquer en partie par la PPE qui contribue à stabiliser le rendement des fonds en euros, renforçant ainsi cette constance.

4.1.2 Projection des fonds obligataires

Cette section vise à modéliser l'évolution des valeurs liquidatives des fonds obligataires accessibles aux assurés du PERO.

Ajustement à partir d'un modèle paramétrique : le modèle de Nelson-Siegel

Dans un premier temps, notre objectif est d'ajuster avec précision le modèle de Nelson-Siegel à un ensemble de courbes de taux sans risque. À cette fin, nous exploitons les courbes des taux sans risque publiée par l'EIOPA sur les dernières années.

Le modèle de Nelson-Siegel est une approche paramétrique de référence pour ajuster la courbe des taux et en capturer la dynamique à différentes maturités. Il repose sur trois facteurs de forme et un facteur d'échelle. Ce modèle offre ainsi une flexibilité intéressante pour lisser la courbe des taux tout en limitant le risque de surajustement.

Dans ce modèle, en adoptant les notations de (Roncalli, 1998), le taux à terme instantané s'exprime comme suit :

$$f_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 e^{-\frac{\tau}{\tau_1}} + \mu_3 \frac{\tau}{\tau_1} e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}$$

Avec :

- le paramètre d'échelle τ_1 est supposé constant dans le temps et égale à 2 ans pour l'ensemble des projections.
- μ_1 correspond à l'asymptote des taux forward qu'on peut assimiler au taux long terme $l(t)$.
- $\mu_1 + \mu_2$ est la limite de la courbe des taux forward lorsque $\tau \rightarrow 0$, qui vaut r_0 qui est le taux court instantané.
- μ_3 correspond à la convexité $c(t)$ de la courbe des taux.

De nombreuses études ont démontré que les trois facteurs du modèle de Nelson-Siegel capturent l'essentiel de la dynamique de la courbe des taux. En particulier, (Litterman & Scheinkman, 1991) ont mis en évidence que ces trois composantes expliquaient 96% des variations observées dans la structure par terme des taux d'intérêt. Plus largement, il est admis que ces facteurs restituent plus de 95% de la variance de la courbe des taux, soulignant ainsi la pertinence et l'efficacité du modèle pour représenter les formes classiques des courbes de taux rencontrées sur les marchés financiers.

Un aspect important du modèle de Nelson-Siegel est le choix du paramètre τ_1 , qui contrôle la vitesse de décroissance de l'effet de la convexité sur la courbe des taux. En fixant τ_1 et en le considérant comme indépendant du temps, on évite les instabilités numériques pouvant apparaître lors des projections à long terme.

En effet, le modèle utilise des termes de la forme exponentielles qui influencent fortement la dynamique des taux. Si τ_1 variait de manière trop importante au fil du temps, il pourrait provoquer des comportements non réalistes et une explosion des projections, notamment lorsque les taux d'intérêt sont projetés sur des horizons très longs.

Pour rappel, le taux zéro-coupon vaut :

$$R_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_t(u) du$$

Dès lors, il est possible d'exprimer le taux zéro-coupon en fonction des paramètres introduits précédemment selon la formule suivante :

$$R_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}}{\frac{\tau}{\tau_1}} + \mu_3 \left(\frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}}{\frac{\tau}{\tau_1}} - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}} \right)$$

Pour alléger la lecture, nous posons :

$$\varphi(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$$

$$\psi(x) = \varphi(x) - e^{-x}$$

Nous reprenons l'équation de Nelson-Siegel dans laquelle nous faisons réapparaître les facteurs de détermination des taux zéros-coupons. Ce qui nous donne la formule suivante :

$$R_t(\tau) = r_0(t)\varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + l(t)\left(1 - \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right) + c(t)\psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$$

L'estimation des paramètres $(\mu_i)_{1 \leq i \leq 3}$ est réalisée par la méthode des moindres carrés, en minimisant l'écart entre la courbe des taux obtenue via le modèle de Nelson-Siegel et la courbe des taux sans risque fournie par l'EIOPA différentes dates. Cette approche permet ainsi d'obtenir des valeurs initiales estimées pour les paramètres r_0 , c et l

Nous devons maintenant estimer le taux court terme, le taux long terme et le paramètre de convexité à chaque instant t afin de pouvoir utiliser la formule de Nelson-Siegel et obtenir la courbe des taux zéro-coupons à un instant donné. Pour cela, nous supposons que ces trois paramètres évoluent de manière indépendante. Une modélisation classique sous probabilité historique repose sur l'utilisation de trois processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

$$dr_0(t) = \mu_r(r_\infty - r_t)dt + \sigma_r dW_r(t)$$

$$dl(t) = \mu_l(l_\infty - l_t)dt + \sigma_l dW_l(t)$$

$$dc(t) = \mu_c(c_\infty - c_t)dt + \sigma_c dW_c(t)$$

Discretisation exacte

Lemme d'Itô : Si $f(x, t)$ est une fonction de classe C^2 , alors la formule d'Itô s'écrit :

$$df(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)\sigma^2 dt$$

La simulation d'un processus d'Itô peut être réalisée de manière exacte, sans introduire d'erreur de discrétisation, à condition que ce processus possède une solution de discrétisation explicite. En particulier, si une variable x suit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck tel que :

$$dx(t) = \mu(x_\infty - x)dt + \sigma dW_t$$

Alors, celui-ci est solution de l'équation différentielle donnée par la relation ci-dessous.

$$x_t = x_0 e^{-\mu t} + x_\infty (1 - e^{-\mu t}) + \sigma e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} dW_s$$

De plus, les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien conduisent à la discrétisation exacte suivante (Planchet & Thérond, 2005) :

$$x_{t+\delta} = x_t e^{-\mu\delta} + x_\infty (1 - e^{-\mu\delta}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\mu\delta}}{2\mu}} \varepsilon$$

Avec :

- δ le pas de la discrétisation,
- ε une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

Preuve : Posons $f(x, t) = e^{\mu t} x_t$ qui est une fonction C^2 . En appliquant le lemme d'Itô, on obtient :

$$df(x, t) = \mu e^{\mu t} x_t dt + e^{\mu t} dx_t$$

On remplace dx_t :

$$df(x, t) = \mu e^{\mu t} x_\infty dt + e^{\mu t} \sigma dW_t$$

On intègre :

$$\begin{aligned} f(x, t) - f(0, t) &= \int_0^t \mu e^{\mu s} x_\infty ds + \int_0^t e^{\mu s} \sigma dW_s \\ \Leftrightarrow x_t &= x_0 e^{-\mu t} + x_\infty (1 - e^{-\mu t}) + \sigma e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} dW_s \end{aligned}$$

Remarque : Si x_0 est gaussien alors :

$$x_t | x_s \sim \mathcal{N} \left(x_s e^{-\mu(t-s)} + x_\infty (1 - e^{-\mu(t-s)}), \frac{\sigma^2}{2\mu} * (1 - e^{-2\mu(t-s)}) \right)$$

Calibration sur la probabilité historique par maximum de vraisemblance

Les différents processus peuvent être calibrés sous la probabilité historique en utilisant soit la méthode des moindres carrés ordinaires, soit celle du maximum de vraisemblance. Dans la suite de notre étude, nous retiendrons les estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance, permettant ainsi une estimation plus rigoureuse des paramètres du modèle. L'objectif est ici de déterminer le vecteur $\theta = (\mu, x_\infty, \sigma)$.

La preuve est présentée en annexe [*Preuve : Calibration par maximum de vraisemblance*].

Densité d'une loi normale : Soit x une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 , alors x admet pour fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$x_{t+1}|x_t$ est :

$$f_{\theta}(x_{t+1}|x_t) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_{t+1}-a_t)^2}{2b^2}}$$

Avec :

- $a_t = x_s e^{-\mu(t-s)} + x_{\infty}(1 - e^{-\mu(t-s)})$
- $b^2 = \frac{\sigma^2}{2\mu} * (1 - e^{-2\mu(t-s)})$

Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ des observations de x_t , nous pouvons écrire la vraisemblance de l'échantillon :

$$L(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=0}^{n-1} f_{\theta}(x_{k+1}|x_k)$$

Remarque : Nous supposons disposer d'un historique de $n + 1$ observations sur la courbe des taux sans risque de l'EIOPA, pour lesquelles les coefficients $(\mu_{i,t})_{1 \leq i \leq 3 \text{ et } 0 \leq t \leq n}$ ont été déterminés. Ainsi, les observations $(x_t)_{0 \leq t \leq n}$ des trois processus d'Ornstein-Uhlenbeck défini précédemment seront respectivement :

- $x_t = \mu_{1,t} + \mu_{2,t}$ assimilable au taux court terme,
- $x_t = \mu_{1,t}$ assimilable au taux long terme,
- $x_t = \mu_{3,t}$ assimilable à la convexité.

En remplaçant et passant au logarithme de la vraisemblance, nous obtenons :

$$\ln(L(x_0, x_1, \dots, x_n)) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n * \ln(b) - \frac{1}{2b^2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - a_k)^2$$

De plus, le maximum de vraisemblance est atteint lorsque les dérivées partielles s'annulent i.e :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L(x_0, x_1, \dots, x_n))}{\partial x_{\infty}} &\propto \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k e^{-\mu(t-s)} - x_{\infty} * (1 - e^{-\mu(t-s)})) = 0 \\ \frac{\partial \ln(L(x_0, x_1, \dots, x_n))}{\partial \mu} &\propto \sum_{k=0}^{n-1} ((x_{k+1} - x_{\infty})(x_k - x_{\infty}) - e^{-\mu(t-s)}(x_k - x_{\infty})^2) = 0 \\ \frac{\partial \ln(L(x_0, x_1, \dots, x_n))}{\partial b} &= \frac{n}{b} - \frac{1}{b^3} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_{\infty} - e^{-\mu(t-s)} * (x_k - x_{\infty}))^2 = 0 \end{aligned}$$

En simplifiant et en insérant les notations suivantes :

- $S_x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i$
- $S_y = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}$
- $S_{xx} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2$
- $S_{xy} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i * x_{i+1}$

- $S_{yy} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}^2$

Nous constatons dans ces résolutions que les solutions sont interdépendantes. Toutefois, x_∞ et μ sont indépendants de b . Par conséquent, la connaissance de x_∞ ou μ permet de déduire la valeur de l'autre, ce qui nous conduit ensuite à déterminer b .

$$x_\infty = \frac{S_y - e^{-\mu(t-s)} S_x}{n(1 - e^{-\mu(t-s)})}$$

$$\mu = -\frac{1}{t-s} \ln \left(\frac{S_{xy} - x_\infty S_x - x_\infty S_y + n x_\infty^2}{S_{xx} - 2x_\infty S_x + n x_\infty^2} \right)$$

On se retrouve alors avec un système à deux équations et deux inconnus. Finalement, les estimateurs du maximum de vraisemblance sont :

$$\hat{x}_\infty = \frac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{n(S_{xx} - S_{xy}) - (S_x^2 - S_x S_y)}$$

$$\hat{\mu} = -\frac{1}{t-s} \ln \left(\frac{S_{xy} - \hat{x}_\infty S_x - \hat{x}_\infty S_y + n \hat{x}_\infty^2}{S_{xx} - 2\hat{x}_\infty S_x + n \hat{x}_\infty^2} \right)$$

$$\hat{b}^2 = \frac{2\lambda}{n(1 - e^{-2\hat{\mu}(t-s)})} * A$$

Avec :

- $A = [S_{yy} - 2e^{-\mu(t-s)} S_{xy} + e^{-2\mu(t-s)} S_{xx} - 2x_\infty(1 - e^{-\mu(t-s)})(S_y - e^{-\mu(t-s)} S_x) + n x_\infty^2 (1 - e^{-\mu(t-s)})^2]$

En ajustant le modèle de Nelson-Siegel à la courbe des taux sans risque, nous avons pu estimer les trois facteurs de forme initiaux. L'estimation par maximum de vraisemblance nous permet ensuite de déterminer les dynamiques associées à ces facteurs. Une fois ces valeurs initiales et dynamiques obtenues, nous pouvons, à chaque instant t , simuler les évolutions de r_0 , c et l en utilisant la discrétisation exacte d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Enfin, il ne reste plus qu'à réinjecter ces valeurs dans la formule de Nelson-Siegel afin d'obtenir les courbes de taux projetées.

Composition et valeurs liquidatives des fonds obligataires

Afin d'obtenir une courbe moyenne projetée des taux zéro-coupons, nous réutilisons la formule de Nelson-Siegel, en remplaçant les paramètres par leurs espérances. Cette approche permet de capturer l'évolution anticipée de la structure des taux en intégrant les dynamiques des trois facteurs principaux. Le prix de remboursement d'une obligation zéro-coupon dont le prix d'émission est de 1 est rappelé ci-dessous :

$$P(T) = e^{R(T)*T}$$

En théorie, il serait nécessaire d'apporter quelques ajustements afin d'assurer une meilleure adéquation avec la réalité des marchés financiers. Pour chaque fonds obligataire, nous identifierons l'ensemble des composantes qui le constituent, en faisant

l'hypothèse que leur répartition reste stable dans le temps. Concernant les obligations d'État, considérées comme sans risque, leur prix pourra être directement calculé à partir des courbes de taux projetées. En revanche, pour les obligations risquées, nous tiendrons compte de leurs notations de crédit et appliquerons un coefficient d'ajustement permettant de convertir le prix d'un zéro-coupon sans risque en un zéro-coupon risqué. De plus, les obligations détenues au sein des fonds obligataires présentent des maturités variées, rendant nécessaire une moyenne pondérée des prix des différentes obligations pour obtenir une valorisation représentative du fonds.

Pour obtenir les différentes valeurs liquidatives au cours du temps, nous utiliserons la formule suivante :

$$VL_t = VL_0 \sum_{k=0}^n \omega_k * P_t^k$$

Avec :

- n représente le nombre d'obligations composant le fonds obligataire.
- ω_k est le poids de l'obligation k au sein du fonds obligataire.
- $P_t^k = e^{R(t)*t}$ est le prix de remboursement de l'obligation k à l'instant t .

En pratique, les grilles ne comportant que deux fonds obligataires, majoritairement composés d'emprunts d'État, nous retiendrons directement la maturité moyenne de ces emprunts pour projeter l'obligation concernée. Le tableau ci-dessous synthétise la composition ainsi que la maturité moyenne des deux fonds obligataires présents dans les grilles du PERO.

ISIN	Composition	Maturité moyenne
LU0164100710	Emprunts d'Etat	9,30
LU1280195881	Emprunts d'Etat	8,10

Tableau 17 : Composition des fonds obligataires au sein du PERO

Résultats

La Figure 17 : Ajustements et projection des taux zéros-coupons illustre l'ajustement de la courbe des taux sans risque de l'EIOPA au 31/01/2025 à l'aide des modèles de Nelson-Siegel et de Vasicek. On observe que le modèle de Nelson-Siegel parvient à reproduire la courbe des taux avec une bien meilleure précision. Grâce à sa structure à plusieurs facteurs, il capture efficacement les irrégularités, notamment le léger creux fréquemment observé sur la courbe des taux. En revanche, le modèle de Vasicek, plus rigide, coupe la courbe en trois points distincts sans parvenir à en restituer fidèlement la dynamique. Enfin, la courbe des taux retenue pour la projection des fonds obligataires a été paramétrée en s'appuyant sur les courbes EIOPA des quatre dernières années. On remarque que sa forme globale reste très proche de celle obtenue en ne considérant que la courbe du 31/01/2025, confirmant ainsi la cohérence de l'approche adoptée.

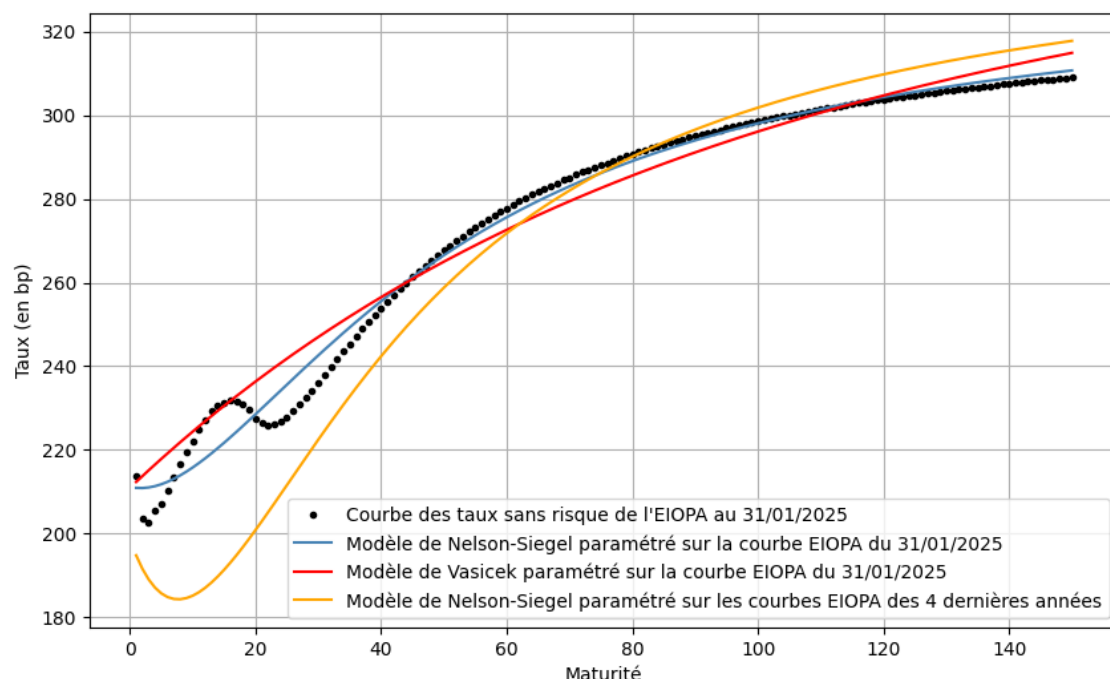


Figure 17 : Ajustements et projection des taux zéros-coupons

Rappel : Le modèle de Vasicek est un modèle stochastique couramment utilisé en finance pour décrire l'évolution des taux d'intérêt. Il repose sur un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, qui est un processus de retour à la moyenne, permettant ainsi de capturer la dynamique des taux courts de manière réaliste. L'équation différentielle stochastique qui le régit s'écrit sous la forme :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Où r_t représente le taux d'intérêt à l'instant t , a est la vitesse de retour à la moyenne, b est le niveau de long terme vers lequel le taux converge, σ est la volatilité et W_t un mouvement brownien standard. Ce modèle est particulièrement utile pour la valorisation des obligations et des produits dérivés de taux, car il permet de générer des courbes de taux cohérentes avec les dynamiques observées sur les marchés financiers.

Avantages et limites

Le modèle de Nelson-Siegel est largement utilisé pour l'ajustement et la modélisation des courbes de taux zéro-coupon en raison de sa simplicité et de sa capacité à capturer les formes classiques des courbes de taux (croissante, inversée, plate ou en cloche). Son principal atout réside dans son interprétation intuitive à travers trois paramètres :

- Le taux court terme, qui capture le niveau initial des taux d'intérêt,
- Le taux long terme, qui reflète les anticipations des taux sur des horizons éloignés,
- La convexité, qui permet de modéliser la pente et l'inflexion de la courbe des taux.

Cependant, le modèle présente certaines limites, notamment en période de stress de marché sur les taux d'intérêt. Lors d'une crise financière ou d'un choc brutal sur les taux, la courbe des taux peut adopter des configurations plus complexes, comme des formes

en W ou en S , que le modèle de Nelson-Siegel peine à reproduire. Pour pallier ces insuffisances, plusieurs extensions du modèle ont été développées, comme les modèles de Nelson-Siegel-Svensson ou Nelson-Siegel dynamique, qui introduisent des paramètres supplémentaires pour mieux ajuster les déformations de la courbe des taux.

Un autre inconvénient majeur du modèle de Nelson-Siegel est qu'il ne garantit pas l'absence d'opportunité d'arbitrage. En effet, la courbe des taux qu'il génère n'est pas nécessairement cohérente avec les principes d'arbitrage utilisés dans les modèles financiers plus rigoureux. Toutefois, en modélisant les paramètres du modèle (taux court terme, taux long terme et convexité) comme des processus stochastiques, il est possible de s'assurer que la structure des taux respecte les contraintes d'arbitrage, comme expliqué par (Turo, Ungar, & Huang, 2009). Cette approche permet de mieux capturer la dynamique réelle des taux et d'assurer une meilleure cohérence avec les modèles utilisés en finance quantitative.

4.1.3 Projection des fonds actions

Présentation du modèle de Black & Scholes

La modélisation de l'évolution des cours boursiers est un sujet largement étudié en finance, donnant lieu à une abondante littérature et à de nombreux modèles. L'une des premières tentatives remonte à (Bachelier, 1900), qui, dans sa thèse de doctorat, propose d'utiliser un processus stochastique basé sur une loi normale pour représenter l'évolution du prix d'un actif financier. Cependant, le modèle de référence en la matière reste celui de (Black & Scholes, 1973). Ce modèle repose sur l'hypothèse que les prix des actifs suivent un mouvement brownien géométrique, ce qui permet aux auteurs de dériver une formule explicite pour le prix des options européennes ainsi que les stratégies optimales de couverture associées.

Il considère que l'évolution du prix d'un actif $(S_t)_{t \geq 0}$ qui est un mouvement brownien géométrique, suit l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu * dt + \sigma * dB_t$$

Où,

- S_t est le prix de l'actif à l'instant t ,
- B est un mouvement brownien monde réel,
- μ est le rendement instantané de S ,
- σ est la volatilité de S .

Ce modèle est fondé sur des hypothèses spécifiques concernant la modélisation des marchés financiers et les principes d'arbitrage suivants :

- Il n'existe pas d'opportunités d'arbitrages,
- Les actifs sont divisibles à l'infini,
- Le marché est liquide i.e qu'il est possible à chaque instant t d'acheter ou de vendre un actif,

- On autorise les ventes à découverts,
- Les échanges ont lieu sans coût de transaction
- On autorise les emprunts et les prêts à l'infini pour tous les agents au même taux constant r , qui est représenté par l'actif sans risque du marché,
- Le marché fonctionne en continu,
- Il n'y a pas de versement de dividendes.

Cette équation possède la solution explicite suivante, déterminée à partir de la formule d'Itô.

$$S_t = S_0 * \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) * t + \sigma * B_t \right\}$$

Remarque : Comme pour le processus de Ornstein-Uhlenbeck, nous utiliserons la discrétisation exacte plutôt que la discrétisation d'Euler afin de projeter nos fonds d'investissement, garantissant ainsi une meilleure précision des simulations.

Variables antithétiques : Dans le cadre de la simulation de Monte-Carlo appliquée au modèle de Black-Scholes, l'utilisation des variables antithétiques est une technique de réduction de variance visant à améliorer la précision des estimations pour un même nombre de simulations. Concrètement, au lieu de générer une seule trajectoire pour le mouvement brownien géométrique à partir d'une variable aléatoire normale X , on génère également sa valeur opposée $-X$. Cela permet d'exploiter la symétrie de la distribution normale pour limiter les écarts dus au hasard et obtenir une convergence plus rapide des résultats. L'intérêt de cette approche réside dans sa capacité à diminuer la dispersion des estimations, ce qui améliore la robustesse des calculs sans nécessiter un nombre plus élevé de simulations, réduisant ainsi le coût computationnel.

Dans la suite de l'étude, nous comparerons la vitesse de convergence obtenue avec la méthode de Black-Scholes classique et celle intégrant les variables antithétiques, afin de retenir l'approche la plus efficace.

Estimation des paramètres

Nous partons de l'équation de Black, dérivée à partir de la formule d'Itô, afin de déterminer les estimateurs empiriques.

$$S_t = S_0 * \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) * t + \sigma * B_t \right\}$$

On en déduit alors :

$$E \left(\ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) \right) = E \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) * t + \sigma * B_t \right)$$

Pour rappel, $E(B_t) = 0$ et $Var(B_t) = t$, ainsi :

$$E \left(\ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) * t$$

$$\text{Var}\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right) = \sigma^2 * t$$

D'où découle la formule des estimateurs empiriques :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\ln \frac{S_i}{S_{i-1}} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\ln \frac{S_j}{S_{j-1}} \right) \right)^2$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{S_i}{S_{i-1}} + \frac{\hat{\sigma}}{2}$$

Convergence et résultats

Pour déterminer le nombre optimal de simulations, nous devons trouver un équilibre entre la stabilité des résultats et un temps de calcul raisonnable, notamment en raison des projections sur 43 ans et des calculs ultérieurs qui en découleront. L'approche retenue consiste à observer à partir de combien de simulations la moyenne des valeurs liquidatives du fonds le plus volatil cesse d'évoluer de manière significative. Cette démarche empirique permettra d'évaluer la convergence du modèle.

Remarque : Une autre approche aurait pu consister à fixer a priori un seuil de précision, en déterminant le nombre minimal de simulations garantissant une estimation de la valeur cible avec une marge d'erreur de $\pm 5\%$ dans un intervalle de confiance bilatérale de 10 %.

Nous allons tracer l'évolution de la moyenne des dernières valeurs liquidatives obtenues en fonction du nombre de simulations, en comparant la méthode classique de Black & Scholes et celle utilisant les variables antithétiques. Cette analyse empirique nous permettra d'évaluer la vitesse de convergence des deux approches et de retenir la plus efficace pour la suite de notre étude.

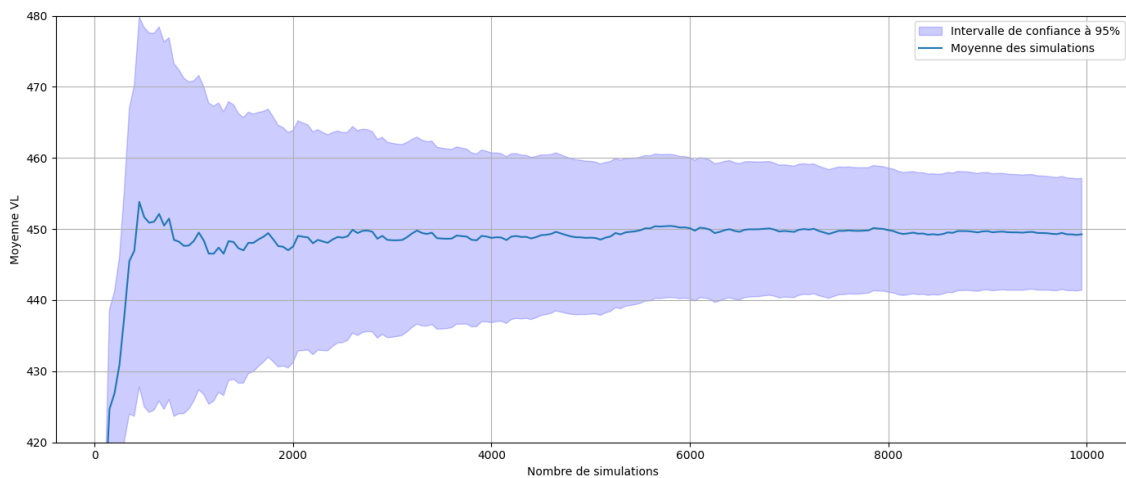


Figure 18 : Convergence de l'estimation de Monte Carlo pour l'actif FR0011637164 à partir de Black & Scholes

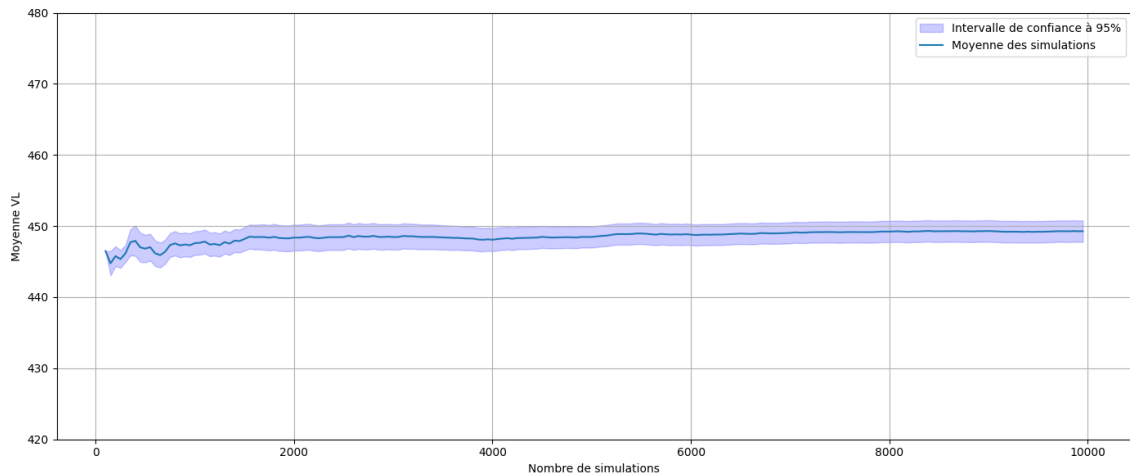


Figure 19 : Convergence de l'estimation de Monte Carlo pour l'actif FR0011637164 à partir de la méthode des variables antithétiques (Black & Scholes)

En comparant les deux graphiques obtenus, il apparaît empiriquement que la méthode des variables antithétiques permet une convergence plus rapide et plus stable par rapport à la méthode classique de Black & Scholes. Voici ci-dessous la dernière valeur liquidative moyenne obtenue ainsi que la volatilité calculée pour les deux méthodes utilisées.

	Espérance	Variance
Black & Scholes	449,27	16,09
Méthode des variables antithétiques	449,28	0,60

Tableau 18 : Comparaison des résultats obtenus à partir de Black & Scholes et de la méthode des variables antithétiques (Black & Scholes)

La volatilité obtenue avec la méthode des variables antithétiques est inférieure à celle issue de la méthode classique, ce qui se traduit par un intervalle de confiance plus réduit et donc des projections plus précises. Ce résultat confirme nos observations empiriques précédentes, justifiant ainsi le choix de conserver la méthode des variables antithétiques pour la suite de l'étude.

Nous affichons le graphique de convergence d'un seul actif, afin d'illustrer le comportement du modèle.

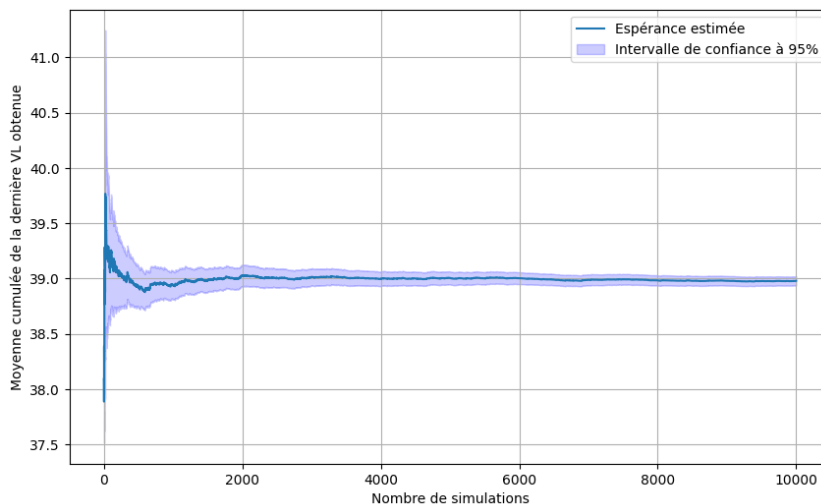


Figure 20 : Convergence de l'estimation de Monte Carlo pour l'actif IE000E66LX20

Avantages et inconvénients du modèle

Le modèle de Black & Scholes présente plusieurs avantages qui en font un outil largement utilisé en finance. Il repose sur une formulation mathématique rigoureuse qui permet d'estimer le prix des actifs en tenant compte des principaux paramètres influençant leur évolution. Son principal atout réside dans sa simplicité et sa facilité de mise en œuvre, avec des temps de calcul réduits, ce qui le rend particulièrement adapté aux simulations à grande échelle. De plus, sa flexibilité lui permet d'être appliqué non seulement aux options, mais aussi à d'autres instruments financiers comme les obligations et certains produits dérivés, facilitant ainsi son adoption par les acteurs des marchés financiers.

Cependant, le modèle présente aussi des limites importantes. Il repose sur des hypothèses simplificatrices, notamment l'absence d'opportunités d'arbitrage, l'efficience des marchés et la constance des rendements et de la volatilité, qui ne reflètent pas fidèlement la réalité des marchés financiers. De plus, il ne prend en compte que le prix de l'actif sous-jacent, ignorant ainsi des facteurs essentiels tels que les dividendes, les variations des taux d'intérêt ou encore les événements de marché imprévus. Enfin, la distribution log-normale des prix implique que le modèle est peu adapté aux scénarios extrêmes et peut sous-estimer les risques de fortes variations des actifs, limitant ainsi sa pertinence pour la gestion des risques en période de crise.

Pour pallier ces limites, plusieurs modèles alternatifs ont été développés. Le modèle de Heston introduit une volatilité stochastique, permettant de mieux refléter les variations observées sur les marchés financiers. Il repose sur un processus de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) pour modéliser l'évolution de la volatilité. Le modèle de Merton, quant à lui, enrichit la dynamique de Black & Scholes en ajoutant des sauts discontinus dans l'évolution du prix des actifs. Il utilise un processus de Poisson pour modéliser ces sauts, permettant ainsi de capturer des variations brutales des prix, comme celles engendrées par des annonces économiques majeures ou des crises financières.

4.1.4 Projection des fonds mixtes

Dans la suite de ce mémoire, la projection des fonds mixtes sera réalisée en appliquant un prorata basé sur la composition des actifs qui les constituent. Chaque composant sera ainsi projeté individuellement en fonction de sa pondération dans l'allocation globale du fonds, permettant ainsi de capturer la performance agrégée tout en tenant compte de la contribution spécifique de chaque classe d'actifs.

Soit α la proportion d'actions au sein du fonds mixte, β la proportion d'obligations et $1 - \alpha - \beta$ la proportion de monétaires. Alors on a :

$$VL_{mixte}(t) = \alpha * VL_{Black \& Scholes}(t) + \beta * VL_{Nelson-Siegel}(t) + (1 - \alpha - \beta) * VL_{euros}(t)$$

Une hypothèse clé sous-jacente à cette approche est la stabilité de la composition des fonds mixtes dans le temps. Bien que cette hypothèse puisse sembler restrictive, elle demeure pertinente dans la mesure où ces fonds sont conçus pour maintenir un niveau de risque cohérent sur le long terme. Toutefois, pour les fonds dont la composition est trop complexe, notamment ceux comprenant plusieurs dizaines d'actifs ou des éléments plus difficiles à modéliser, tels que l'évolution du prix de l'or en dollars américains, la projection sera directement effectuée sur la valeur liquidative du fonds à l'aide du modèle de Black & Scholes. L'estimation des paramètres suivra alors la même méthodologie que celle détaillée précédemment dans la partie consacrée à ce modèle.

4.1.5 Matrice de corrélation de Cholesky

Dans le cadre de la projection des fonds, il est essentiel de prendre en compte la dépendance entre les différents actifs afin d'obtenir des simulations réalistes. Pour cela, une matrice de corrélation des 11 fonds est d'abord construite, permettant de quantifier les relations linéaires entre eux. Une fois cette matrice obtenue, il est impératif de vérifier qu'elle est bien symétrique et définie positivement, condition nécessaire pour garantir la cohérence des simulations. Si cette propriété est respectée, la décomposition de Cholesky est alors appliquée. Celle-ci permet de transformer des variables normales indépendantes en variables normales corrélées, respectant la structure de dépendance des fonds observée historiquement. Cette approche assure que les simulations reflètent correctement les interactions entre les différentes classes d'actifs dans la projection des valeurs liquidatives.

Mouvements Browniens corrélés : Si $X \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ loi normale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, alors :

$$Z = AX + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

Pour tout $\mu \in \mathbb{R}^d$, pour A matrice telle que $A^T A = \Sigma$.

La factorisation de Cholesky permet ainsi d'obtenir $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ sous forme triangulaire inférieure.

Factorisation de Cholesky : Etant donné $\Sigma = (\sigma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ définie positive, on pose :

$$a_{1,1} = \sqrt{\sigma_{1,1}}$$

$$a_{i,j} = \frac{1}{a_{j,j}} (\sigma_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{i,k} a_{j,k}), \quad 1 \leq j \leq i \leq d$$

$$a_{i,i} = (\sigma_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k}^2), \quad 1 < i \leq d$$

Dans la suite, nous utiliserons donc $Z = AX$, représentant les lois normales corrélées, plutôt que X directement, afin de garantir que les simulations respectent la structure de dépendance entre les fonds.

4.2. Application à la grille Gedeon

4.2.1 Prise en compte des frais

Afin d'obtenir des projections aussi réalistes que possible, il est essentiel d'intégrer les différents frais prélevés tout au long de la vie du contrat d'un assuré. Ces frais peuvent être classés en deux grandes catégories.

La première catégorie concerne les frais directement prélevés par les fonds d'investissement. Ces frais, appelés frais de gestion, sont intégrés à la performance des unités de compte et viennent réduire mécaniquement la rentabilité affichée. Nous avons récupéré les frais appliqués pour chaque classe d'actifs et supposons, par simplification, qu'ils restent constants dans le temps, bien que dans la réalité, ces frais puissent évoluer selon les stratégies des gestionnaires de fonds.

La seconde catégorie regroupe les frais appliqués par l'assureur et le courtier. Parmi eux, nous distinguons :

- **Les frais de gestion** : ils sont prélevés chaque année par l'assureur sur l'encours total du contrat et rémunèrent la gestion administrative du produit.
- **Les frais sur encours** : en plus des frais de gestion, certains contrats appliquent des frais supplémentaires liés à la gestion des supports d'investissement. On distingue les frais sur encours euros des frais sur encours en unités de compte.
- **Les frais sur versements** : à chaque apport effectué par l'adhérent (cotisations obligatoires ou versements volontaires), un pourcentage du montant investi peut être prélevé.
- **Les frais de restitution** : ils sont appliqués lors du déblocage des fonds, que ce soit sous forme de rente ou de capital, et viennent réduire le montant perçu par l'assuré au moment de la retraite.

Pour estimer ces différents frais, nous avons retenu les valeurs moyennes observées sur l'ensemble des contrats disponibles au sein du portefeuille, afin d'obtenir une modélisation fidèle des coûts réellement supportés par un assuré tout au long de la durée de vie de son contrat.

Remarque : En plus des frais mentionnés précédemment, il existe également des frais d'arbitrage, qui peuvent inclure les frais liés aux arbitrages automatiques, aux arbitrages à la demande, aux changements de gestion financière ou encore aux modifications de profil au sein d'une gestion à horizon. Cependant, ces frais sont nuls pour l'ensemble des contrats du portefeuille étudié. Par conséquent, nous ne les prendrons pas en compte dans la suite de notre étude.

4.2.2 Premiers résultats

Performance et volatilité des fonds d'investissements

Le tableau ci-dessous présente les résultats obtenus, où la dernière valeur liquidative simulée correspond à la valeur liquidative projetée dans 43 ans.

Pour rappel, le ratio de Sharpe est un indicateur financier utilisé pour évaluer la performance ajustée au risque d'un investissement. Il mesure le rendement excédentaire d'un actif ou d'un portefeuille par rapport à un taux sans risque, ajusté en fonction de la volatilité de cet actif.

$$S = \frac{E(r) - r_f}{\sigma}$$

Avec :

- $E(r)$ représente l'espérance des rentabilités r de l'actif.
- r_f est le taux de placement sans risque.
- σ est l'écart-type des rentabilités r de l'actif.

	Dernière VL connue	Dernière VL projetée	Rendement annualisé	Ecart-Type des rendements	Ratio de Sharpe
LU0171310443	81,77	369,75	3,57%	0,06	0,12
LU0389655811	376,13	1219,99	2,77%	0,03	-0,03
LU2080768091	109,57	131,17	0,42%	0,00	-5,48
IE000E66LX20	14,42	38,85	2,33%	0,01	-0,51
FR0011637164	184,08	446,34	2,08%	0,01	-0,54
FR0014001FD5	78,85	197,31	2,16%	0,02	-0,32
LU0465917044	158,79	214,04	0,70%	0,01	-2,36
LU1557118921	127,94	169,20	0,65%	0,02	-1,08
LU1280195881	94,60	300,17	2,72%	0,02	-0,06
LU0164100710	19,28	62,50	2,77%	0,02	-0,03
FR0014001H77	21,61	54,10	2,16%	0,02	-0,35

Tableau 19 : Récapitulatif des projections réalisées sur l'ensemble du portefeuille

Plus le ratio de Sharpe est élevé, plus l'investissement est considéré comme performant en termes de compensation du risque pris. En effet, si le ratio de Sharpe est compris entre 0 et 1, cela indique que le rendement obtenu est supérieur à celui d'un

placement sans risque, mais reste insuffisant ; s'il est supérieur à 1, la performance est jugée bonne, car elle dépasse celle du taux du placement sans risque, justifiant ainsi la prise de risque ; en revanche, un ratio négatif signifie que la performance obtenue en prenant des risques est inférieure à celle d'un investissement sans risque.

Il est tout à fait normal que les ratios de Sharpe de presque l'ensemble du portefeuille soient négatifs. En effet, les projections ont été basées sur les quatre dernières années, une période marquée par la crise du COVID, qui a entraîné une baisse soudaine et significative des marchés financiers. Cette période difficile a eu un impact particulièrement marqué sur la performance des fonds mixtes, des fonds actions et des fonds obligataires, dont la rentabilité a été fortement réduite. De plus, nous avons observé une hausse rapide et importante des taux d'intérêt, ce qui a entraîné une augmentation de la rémunération des actifs sans risque. Dans ce contexte, il n'est donc pas surprenant que les actifs sans risque aient surperformé les actifs risqués durant ces quatre dernières années.

Estimation de la probabilité de perte sur une carrière complète

Pour évaluer la probabilité de perte d'un adhérent dans le cadre du PER, nous allons procéder à une analyse en plusieurs étapes en nous basant sur les simulations effectuées. La méthode retenue consiste à comptabiliser le nombre de scénarios dans lesquels une hypothèse H_0 est vérifiée, puis à le rapporter au nombre total de simulations réalisées.

Probabilité que la grille Gedeon perde de la valeur

Dans un premier temps, nous analysons la probabilité que la VL de l'allocation de l'adhérent à l'horizon de 43 ans soit inférieure à sa valeur initiale pour la grille Gedeon. On pose alors l'hypothèse H_0 suivante :

$$H_0 : VL_{initiale} \geq VL_{finale}$$

Une probabilité élevée d'une baisse de la VL peut indiquer un risque accru de perte pour l'adhérent. Toutefois, cette situation ne signifie pas nécessairement qu'il a perdu de l'argent. Si la courbe des VL suit une courbe en U, l'adhérent aura acquis des parts à un prix plus bas au fil du temps, ce qui peut compenser cette baisse temporaire.

	Grille Gedeon
P_{perte}	0,02 %

Tableau 20 : Probabilité que la grille Gedeon perde de la valeur entre le premier investissement et la liquidation

Prise en compte des cotisations

Comparer uniquement la VL initiale et finale ne reflète pas correctement la performance de l'investissement, car l'adhérent effectue des versements réguliers tout

au long de sa carrière. Nous élargissons donc l'analyse en prenant en compte l'ensemble des cotisations versées sur le contrat. On pose l'hypothèse H_0 suivante :

$$H_0 : \sum_{i=1}^{172} C_i \geq Epargne_{finale}$$

Avec :

- $(C_i)_{1 \leq i \leq 172}$ la cotisation versée au trimestre i .

Cette approche permet d'obtenir une vision plus fidèle du rendement réel de la grille Gedeon sur une période aussi longue.

	Grille Gedeon
P_{perte}	$< 10^{-4}$

Tableau 21 : Probabilité que la grille Gedeon perde de la valeur sur une carrière complète

Prise en compte de l'inflation

« L'inflation est la perte du pouvoir d'achat de la monnaie qui se traduit par une augmentation générale et durable des prix. Elle doit être distinguée de l'augmentation du coût de la vie. La perte de valeur de la monnaie est un phénomène qui frappe l'économie nationale dans son ensemble (ménages, entreprises, etc.) » (INSEE, 2021).

Pour évaluer le pouvoir d'achat à la retraite, nous ajustons les cotisations en fonction de l'inflation. L'objectif est de vérifier si l'épargne finale dépasse les cotisations actualisées à un taux d'inflation moyen, déterminé à partir des données historiques de l'INSEE. En utilisant les notations introduites précédemment, on pose l'hypothèse H_0 suivante :

$$H_0 : \sum_{i=1}^{172} C_i * (1 + \text{taux}_{inflation})^{\frac{172-i}{4}} \geq Epargne_{finale}$$

Ci-dessous, la probabilité de perte après 43 ans, en supposant une inflation annuelle de 1,6875 %.

	Grille Gedeon
P_{perte}	$< 10^{-4}$

Tableau 22 : Probabilité que la grille Gedeon perde de la valeur sur une carrière complète en prenant en compte l'inflation

Remarque 1 : L'inflation retenue est calculée à partir de l'indice des prix à la consommation (tabac inclus) publié chaque année par l'INSEE. Pour la suite, nous considérerons une inflation constante correspondant à la moyenne du taux observé depuis 2002.

Remarque 2 : Pour ne pas alourdir le code, seules 10 000 simulations ont été effectuées par fonds. Or, sur l'ensemble de ces simulations, la contrainte spécifiée n'a jamais été atteinte pour les deux dernières probabilités calculées.

4.2.3 Phase de restitution

Calcul de la pension CNAV

La pension de retraite de la Caisse Nationale d'Assurance Vieillesse (CNAV) repose sur une formule prenant en compte le salaire annuel moyen (SAM), le taux de liquidation et la durée d'assurance validée par l'assuré. La formule générale est la suivante :

$$Pension_{CNAV} = SAM * K * \frac{\text{Nombre de trimestre cotisé}}{\text{Nombre de trimestre taux plein}}$$

Où K correspond au taux après application de la décote ou surcote appliquer à l'assuré :

$$K = 50\% * 98,75\% \frac{\text{Nombre de trimestre cotisé} - \text{Nombre de trimestre taux plein}}{\text{Nombre de trimestre cotisé}}$$

La décote, contrairement à la surcote, est plafonnée à 20 trimestres, ce qui correspond à une diminution de la pension de retraite de 25%. Toutefois, il existe des exceptions, telles que pour les individus se trouvant en situation d'incapacité permanente d'au moins 50%.

Remarque 1 : La réforme Balladur des retraites de 1993, visant à réduire le déficit du système de retraite public, a progressivement étendu, à partir de janvier 1995, la période prise en compte pour le calcul du SAM. Avant cette réforme, le SAM était calculé sur les 10 meilleures années. Il est dorénavant calculé à partir des 25 meilleures années de revenus pour les assurés du régime général.

Remarque 2 : La pension CNAV peut également être complétée par une majoration en cas d'enfants à charge.

Calcul de la pension AGIRC-ARRCO

Le régime Agirc-Arrco fonctionne sur un principe de retraite complémentaire par points. La pension est calculée selon la formule suivante :

$$Pension_{AGIRC-ARRCO} = \text{Nombre de points acquis} * \text{Valeur de service du point}$$

L'assuré accumule des points tout au long de sa carrière en fonction de ses cotisations et du prix d'achat du point en vigueur chaque année. Au moment du départ à la retraite, le nombre total de points acquis est multiplié par la valeur de service du point pour obtenir le montant annuel de la pension complémentaire.

Le tableau A présente les différents taux de cotisations par tranche appliqués à l'Agirc-Arrco en phase de constitution.

Libellé cotisations	Taux de cotisations (Tranche 1)			Taux de cotisations (Tranche 2)		
	Salarial	Patronal	Total	Salarial	Patronal	Total
Retraite	3,15%	4,72%	7,87%	8,64%	12,95%	21,59%
CEG	0,86%	1,29%	2,15%	1,62%	1,08%	2,70%
CET	0,14%	0,21%	0,35%	0,14%	0,21%	0,35%

Tableau 23 : Taux de cotisations à l'AGIRC-ARRCO suivant la tranche de rémunération en phase de constitution

Les taux contractuels obligatoires des cotisations retraite sont définis par les partenaires sociaux et s'appliquent en fonction des tranches de rémunération. Parmi ces cotisations, la Contribution d'Équilibre Général (CEG) vise à compenser les charges financières engendrées par les départs à la retraite avant l'âge de 67 ans, en répartissant ce coût entre les actifs et les entreprises. En complément, la Contribution d'Équilibre Technique (CET) concerne uniquement les salariés dont le salaire dépasse le plafond de la Sécurité sociale, contribuant ainsi à l'équilibre du régime en tenant compte des rémunérations plus élevées.

Remarque : Tout comme pour la pension CNAV, la pension Agirc-Arrco peut être complétée par une majoration pour enfants à charge.

Calcul de la pension du PERO

Le PERO fonctionne sur un principe de capitalisation, où les cotisations versées par l'assuré et son employeur sont investies sur les marchés financiers tout au long de la carrière professionnelle. À l'âge de la retraite, l'épargne accumulée, appelée provision mathématique (PM), correspond à la somme des cotisations capitalisées avec les rendements générés.

Le principal avantage du PERO est qu'il permet d'obtenir immédiatement le capital constitutif au moment du départ à la retraite, contrairement aux régimes de retraite par répartition.

Une fois la provision mathématique déterminée, elle doit être transformée en une rente périodique versée à l'assuré jusqu'à son décès. Le montant de la rente brute dépend du coefficient actuariel $a_x^{(m)}$, qui traduit l'espérance de vie de la rente à l'âge de la liquidation de la retraite.

La rente annuelle brute R est obtenue par la formule suivante :

$$R = \frac{PM}{a_x^{(m)}}$$

Où $a_x^{(m)}$ est le coefficient de conversion d'une rente viagère payable m fois dans l'année à termes échus, défini comme :

$$a_x^{(m)} = \sum_{k=1}^{+\infty} {}_k p_x * v^k + \frac{m-1}{2m}$$

Avec :

- ${}_k p_x$: la probabilité de survie entre l'âge x et $x + k$.
- $v = \frac{1}{1+i}$ correspond au facteur d'actualisation pour un taux technique i .

Le taux technique est un paramètre clé dans le calcul des rentes viagères, car il représente un taux d'actualisation appliqué à l'épargne accumulée avant la conversion en rente. Il est défini réglementairement et encadré par l'article A-132-1 du Code des assurances. Son plafond est fixé à 60 % du Taux Moyen des Emprunts d'État (TME), calculé sur une base semestrielle. Pour les PER, il est légalement fixé à 0 %.

L'intérêt d'un taux technique non nul est de permettre à l'assuré de bénéficier d'une rente initialement plus élevée. En effet, un taux technique positif suppose que l'épargne continue de générer des intérêts futurs, ce qui réduit mécaniquement le coefficient de conversion en rente. Cependant, cela transfère un risque sur l'assureur, qui doit garantir cette rentabilité sur toute la durée du versement de la rente. Si les rendements réels sont inférieurs au taux technique promis, l'assureur doit compenser la différence en constituant des provisions supplémentaires.

Dans un contexte de taux bas, la loi Pacte a imposé un taux technique de 0 % sur les PER afin de supprimer cette contrainte pour les assureurs. Cela signifie que les rentes sont calculées sur la base du capital accumulé sans projection de rendement futur. Par conséquent, le montant de la rente initiale est plus faible que si un taux technique positif était appliqué, mais cela garantit une meilleure soutenabilité pour les assureurs.

Taux de remplacement

Le taux de remplacement est un indicateur intéressant pour l'assuré car il permet d'avoir une idée de l'évolution de son niveau de vie entre la vie active et la retraite. Il mesure la capacité du système de retraite à maintenir le niveau de vie d'un individu une fois qu'il a pris sa retraite. Un taux de remplacement élevé indique une capacité de maintien du niveau de vie important après la retraite, tandis qu'un taux de remplacement plus faible signale une diminution du niveau de vie. Son calcul se fait de la façon suivante :

$$\text{Taux de remplacement} = \frac{\text{Montant de la pension nette de retraite}}{\text{Salaire net de fin de carrière}}$$

Hypothèses de calcul

Afin d'estimer la rente perçue par un adhérent actif à son départ en retraite, plusieurs hypothèses ont été formulées pour simplifier les projections tout en restant cohérentes avec les mécanismes de calcul en vigueur.

Tout d'abord, nous supposons que le salaire de l'adhérent évolue de manière croissante et régulière tout au long de sa carrière. Bien que cette hypothèse soit simplificatrice et peu réaliste dans un contexte où les salaires peuvent être sujets à des

fluctuations (augmentations irrégulières, promotions, périodes d'inactivité, etc.), elle permet de faciliter la projection des droits à la retraite et de garantir une trajectoire prévisible des cotisations.

Ensuite, nous considérons que l'adhérent partira à taux plein, c'est-à-dire sans décote ni surcote sur sa pension. Cette hypothèse implique que la durée de cotisation requise pour obtenir une pension complète est atteinte, ce qui correspond actuellement à 43 années de travail conformément aux dernières réformes. Ainsi, nous supposons que l'adhérent effectue une carrière complète sans interruption significative.

	Hypothèse
Date de naissance	01/01/2002
Date de début de carrière	01/01/2025
Salaire de début de carrière	38 000 €
Augmentation annuelle du salaire	2,50 %
Durée de la carrière	43 ans

Tableau 24 : Hypothèses de carrières

Le Tableau 25 : *Hypothèses d'investissements* présente l'ensemble des paramètres retenus durant la phase de constitution. Par ailleurs, l'annexe « *Frais courants par fonds d'investissements* » fournit un détail des frais appliqués à chaque fonds d'investissement.

	Hypothèse
Frais sur prime	3,16 %
Frais sur encours euros	0,38 %
Frais sur encours UC	0,29 %
Périodicité des cotisations obligatoires	Trimestrielle
Périodicité des arbitrages	Trimestrielle

Tableau 25 : Hypothèses d'investissements

Par ailleurs, nous supposons que le PASS est revalorisé chaque année en fonction de l'inflation calculée précédemment à laquelle s'ajoute un ajustement de +0,50 %. Cette hypothèse permet de tenir compte des évolutions historiques du PASS, qui suit généralement une dynamique de croissance supérieure à l'inflation.

En ce qui concerne les régimes complémentaires, nous faisons l'hypothèse que le prix d'achat suit une évolution correspondant à l'inflation majorée de 0,25 % et que le prix de service du point reste stable en euros constant. Ces hypothèses illustrent le recul progressif du rôle de la retraite publique au fil du temps.

	Dernière valeur connue	Hypothèse
PASS	47 100 €	Inflation + 0,50 %
Prix d'achat du point AA	19,6321	Inflation + 0,25 %
Prix de service du point AA	1,4386	Inflation

Tableau 26 : Hypothèses de projection

Remarque : L'arrêté ECOT2426307 du 18 novembre 2024 introduit une évolution réglementaire majeure dans l'épargne retraite en imposant une table de mortalité unique pour les assureurs. Depuis le 23 novembre 2024, cette mesure remplace les tables différenciées selon le sexe pour le calcul des rentes viagères des contrats de retraite supplémentaire (Article 83, PER, Article 39 du CGI). Désormais, une table unique, appelée TGHF05, est utilisée. Elle est issue des anciennes tables genrées en intégrant une pondération de 60 % d'hommes et 40 % de femmes, représentative des portefeuilles des assureurs. Bien que cette table soit la référence, les organismes conservent une certaine flexibilité pour appliquer d'autres tables non genrées sous conditions spécifiques.

Dans la suite de ce mémoire, la table TGHF05 sera utilisée pour le calcul du coefficient a_x .

Résultats

Le taux de remplacement issu de la retraite de base et de la retraite complémentaire s'établit à 49 %. Cependant, en intégrant la rente qu'il pourra percevoir en liquidant le capital accumulé sur son PER obligatoire, ce taux de remplacement s'élève à 52 %.

Le tableau ci-dessous regroupe les différentes valeurs obtenues.

	Valeur
Salaire de fin de carrière	109 877,76 €
Rente CNAV + AA annuelle	54 015,95 €
CC PERO	110 425,13 €
a_x	31,56
Rente PERO annuelle	3 498,86 €

Tableau 27 : Résultats de la projection

Le PERO joue ici un rôle essentiel en complétant les pensions des régimes obligatoires, permettant ainsi d'augmenter le taux de remplacement de 49 % à 52 %. En convertissant l'épargne accumulée en rente viagère, il offre un revenu supplémentaire régulier à la retraite, réduisant ainsi l'écart avec le dernier salaire perçu. Cet avantage démontre l'importance d'une épargne retraite supplémentaire pour maintenir un niveau de vie satisfaisant après la cessation d'activité.

4.3. Sensibilités

L'analyse de sensibilités est une étape essentielle dans un mémoire, car elle permet d'évaluer l'impact des variations des paramètres sur les résultats obtenus. En testant différentes hypothèses, elle offre une meilleure compréhension de la robustesse des conclusions et permet d'identifier les éventuelles limites du modèle.

4.3.1 Sensibilité des projections

Les modèles utilisés pour projeter l'évolution des fonds d'investissement reposent sur des paramètres clés dont l'estimation est toujours un exercice délicat. Une mauvaise calibration peut entraîner des biais importants dans les résultats et altérer la pertinence des projections.

Les estimateurs empiriques utilisés au sein du modèle de Black & Scholes sont couramment utilisés en finance car ils reposent directement sur les propriétés statistiques des mouvements browniens. Toutefois, ils sont sensibles à la période d'échantillonnage et à la présence d'événements extrêmes (chocs de marché, crises, etc.). De plus, l'hypothèse de normalité des rendements logarithmiques est une approximation qui peut être mise en défaut par la présence de queues épaisses dans les distributions empiriques.

Les paramètres du modèle de Nelson-Siegel ont été calibrés par la méthode du maximum de vraisemblance, qui consiste à maximiser la probabilité d'observer les taux empiriques donnés les paramètres estimés. Cette méthode est particulièrement adaptée car elle permet une estimation cohérente des paramètres en prenant en compte l'ensemble des points observés sur la courbe des taux.

4.3.2 Sensibilité des paramètres en phase de constitution

En phase de constitution, plusieurs paramètres influencent directement le montant de la rente perçue à la retraite.

Tout d'abord, la régularité et la fréquence des versements obligatoires effectués par l'employeur jouent un rôle clé. Ces contributions peuvent évoluer en fonction des performances des marchés financiers et des politiques de l'entreprise. De plus, la périodicité des arbitrages réalisés au sein du PERO, notamment en période de volatilité accrue, peut affecter significativement la performance des investissements.

Un autre facteur essentiel est la durée pendant laquelle un assuré reste affilié à une entreprise proposant un PERO. Or, cette variable est difficile à estimer, car elle dépend des mobilités professionnelles et des stratégies d'épargne individuelle. Par ailleurs, l'évolution des salaires constitue un paramètre fondamental dans le calcul des droits acquis, mais reste incertaine, car elle est liée aux parcours professionnels et aux tendances économiques globales.

Afin d'évaluer l'impact de chaque hypothèse sur les résultats obtenus, nous les ferons varier indépendamment les unes des autres par rapport au scénario de base. En effet, une modification simultanée de plusieurs hypothèses compliquerait l'interprétation des résultats, rendant difficile l'identification précise de l'effet de chaque paramètre sur le modèle.

Ainsi, pour mesurer l'impact de ces facteurs sur la rente finale, nous nous focalisons sur ceux dont l'évolution peut être mieux estimée :

- La fréquence des primes versées.

- La fréquence des arbitrages.
- L'évolution du salaire.

	Hypothèse	CC PERO	Rente PERO annuelle
Scénario de base	/	110 425,13 €	3 498,86 €
Fréquence des primes versées	Semestrielle	110 695,04 €	3 507,41 €
Fréquence des primes versées	Annuelle	111 258,60 €	3 525,27 €
Fréquence des arbitrages	Semestrielle	110 442,48 €	3 499,41 €
Fréquence des arbitrages	Annuelle	110 481,87 €	3 500,66 €
Evolution du salaire	- 1,00 %	89 791,99 €	2 845,09 €
Evolution du salaire	+ 1,00 %	137 493,28 €	4 356,53 €

Tableau 28 : Sensibilité de la rente issue du PERO en phase de constitution

On constate que la rente annuelle du PERO est peu impactée par la périodicité des arbitrages et des versements obligatoires, avec un écart maximal de quelques dizaines d'euros, soit moins de 0,80 %. En revanche, l'évolution du salaire et donc des primes versées apparaît comme le facteur ayant l'influence la plus marquée sur la rente finale, entraînant une variation pouvant atteindre près de 20 %.

Afin de mieux appréhender l'impact de l'évolution du salaire sur la rente perçue à la retraite, il est pertinent de calculer le taux d'accroissement. Ce taux permet d'estimer l'effet proportionnel d'une variation salariale sur la rente finale.

	Variation de la rente
Evolution du salaire de 1%	745,80 €

Tableau 29 : Taux d'accroissement calculé à partir d'une variation de +/- 0,10 % du salaire

Ainsi, autour de notre scénario central, une augmentation de 1,00 % du salaire entraînera une hausse approximative de 745,80 € de la rente. Cette approche offre une vision claire et quantifiable de la sensibilité du modèle aux variations de rémunération tout au long de la phase de constitution.

Remarque : Dans notre modèle, nous prévoyons une augmentation des cotisations obligatoires proportionnelle au salaire. En effet, il est courant que ces cotisations soient déterminées comme un pourcentage du revenu, garantissant ainsi une contribution ajustée à l'évolution des salaires et assurant une certaine équité entre les cotisants.

4.3.3 Sensibilité des paramètres en phase de restitution

En phase de restitution, plusieurs paramètres jouent un rôle clé dans le calcul de la rente perçue par l'assuré.

L'un des éléments fondamentaux est le calcul du coefficient a_x utilisé pour convertir le capital en rente, souvent représenté par l'espérance de vie de la rente au moment du

départ à la retraite. Ce calcul repose sur le choix de la table de mortalité, qui peut évoluer avec les progrès médicaux et les tendances démographiques. Une sous-estimation de la longévité pourrait entraîner une surestimation des rentes initiales et des déséquilibres financiers sur le long terme ou inversement.

L'âge minimal de départ à la retraite est un autre paramètre déterminant. Avec la réforme des retraites de 2023, cet âge est passé de 62 à 64 ans pour un départ à taux plein. Or, en projetant des carrières sur plus de 40 ans, il est probable que cet âge minimal continue d'évoluer. Un report à 65 ans ou plus impacterait directement la durée de perception des rentes et, en conséquence, leur montant mensuel.

À l'instar de l'analyse de sensibilité menée lors de la phase de constitution, nous ferons varier les hypothèses une à une.

Pour analyser la sensibilité de la rente ainsi que du taux de remplacement à ces hypothèses, nous faisons varier les paramètres suivants :

- Le choix de la table de mortalité.
- La durée de cotisation pour partir à taux plein.

	Hypothèse	a_x	Rente PERO annuelle
Scénario de base	/	31,56	3 498,86 €
Table de mortalité	TGH05	30,06	3 673,49 €
Table de mortalité	TGF05	33,83	3 264,12 €
Durée de cotisation (taux plein)	42 ans	32,51	3 396,65 €
Durée de cotisation (taux plein)	44 ans	30,61	3 607,49 €

Tableau 30 : Sensibilité de la rente issue du PERO en phase de restitution

On observe que l'utilisation d'une table non genrée réduit le montant de la rente pour les hommes tout en l'augmentant pour les femmes. Ce résultat est attendu, car selon les tables générationnelles 2005, l'espérance de vie des femmes était supérieure à celle des hommes. Par ailleurs, la durée de cotisation influence également de manière significative le montant de la rente perçue à la retraite. En effet, dans notre exemple, ajouter ou retirer une année de cotisation produit des effets comparables à ceux observés lors du passage d'une table genrée à une table non genrée.

Remarque : Il est important de noter que les mécanismes de revalorisation influencent également le calcul du taux de remplacement des assurés, notamment à travers l'évolution du prix d'achat et de service des points Agirc-Arrco, ainsi que celle du PASS.

5. CREATION DES GRILLES DE DESENSIBILISATION PAR PROFIL DE RISQUE

5.1. La désensibilisation comme gestion du risque à long terme

La désensibilisation est un mécanisme essentiel de gestion du risque à long terme, permettant d'adapter progressivement l'allocation d'actifs pour sécuriser l'épargne de l'adhérent à l'approche de la retraite. Cette réallocation, effectuée de manière périodique (trimestrielle, semestrielle ou annuelle), vise à réduire l'exposition aux actifs risqués au fil du temps, conformément à la grille d'investissement définie. Plus l'adhérent se rapproche de son départ en retraite, plus son épargne est orientée vers des placements moins volatils, garantissant une transition progressive vers des supports sécurisés.

Ce mécanisme est particulièrement pertinent en cas de choc sur les marchés financiers, dont l'impact sur l'épargne dépendra du moment où il survient au cours de la carrière de l'adhérent. L'étude qui suit analysera ainsi les effets d'un tel choc en comparant les trajectoires d'épargne avec et sans désensibilisation, afin d'évaluer l'efficacité de cette stratégie dans la préservation du capital accumulé.

5.1.1 Calibration des chocs à appliquer

Pour garantir la cohérence de notre analyse, nous appliquerons un choc inspiré des événements historiques, en nous basant sur les données observées lors de la crise des subprimes. Cette crise, survenue en 2008, a entraîné une chute brutale des marchés financiers, illustrant l'impact potentiel de scénarios de stress sur une épargne de long terme. Afin de reproduire des conditions réalistes, nous avons recueilli les variations de marché constatées durant cette période et appliquerons ces chocs aux différentes classes d'actifs composant les grilles d'investissement.

La crise des subprimes

La crise des subprimes, qui a éclaté en 2007 aux États-Unis, est une crise financière majeure ayant eu des répercussions mondiales. Elle trouve son origine dans le marché immobilier américain, où les banques ont massivement accordé des prêts hypothécaires à des emprunteurs à risque (appelés *subprimes*), souvent peu solvables. Ces prêts, initialement attractifs avec des taux d'intérêt bas, ont vu leurs mensualités fortement augmenter lorsque les taux sont montés, rendant le remboursement difficile pour de nombreux ménages.

Les banques et institutions financières, cherchant à diversifier et réduire leur exposition au risque, ont titrisé ces prêts en les regroupant sous forme de produits

financiers complexes (*Collateralized Debt Obligations*, CDO) revendus à travers le monde. Ces titres, bien que basés sur des actifs risqués, étaient souvent mal évalués par les agences de notation et considérés comme sûrs. Lorsque les défauts de paiement se sont multipliés, la valeur de ces actifs s'est effondrée, entraînant d'énormes pertes pour les investisseurs et fragilisant le secteur bancaire.

Face à cette crise de liquidité, de nombreuses institutions financières se sont retrouvées en difficulté, certaines allant jusqu'à la faillite, comme Lehman Brothers en septembre 2008. La méfiance généralisée a conduit à une crise de confiance sur les marchés financiers, provoquant une chute brutale des bourses mondiales.

Les banques centrales et les gouvernements ont dû intervenir massivement pour stabiliser le système financier, mettant en place des plans de sauvetage, des rachats d'actifs et des baisses de taux directeurs afin de relancer l'économie. Cette crise a mis en lumière les risques liés à la dérégulation financière, la titrisation excessive et le manque de transparence dans l'évaluation des actifs, conduisant à des réformes pour renforcer la surveillance du secteur bancaire.

Calibration des chocs

La crise des subprimes de 2008 a entraîné une forte volatilité sur les marchés financiers, provoquant une chute spectaculaire des indices boursiers. À titre d'exemple, la Bourse de New York, représentée par le S&P 500, et la Bourse de Paris ont enregistré des baisses d'environ 60 % au plus fort de la crise. Afin de modéliser un scénario de stress réaliste dans notre étude, nous appliquerons un choc de 60 % sur l'ensemble des fonds actions.

Lors de la crise des subprimes, un mouvement massif de fuite vers la sécurité a conduit les investisseurs à privilégier les obligations d'État, perçues comme des actifs refuges. Cette forte demande a entraîné une hausse des prix des obligations et, par conséquent, une baisse significative de leurs rendements. Aux États-Unis, le rendement des emprunts d'État à 10 ans est ainsi passé d'environ 4 % en juin à 2,25 % en décembre 2008. Cette dynamique s'explique par les turbulences sur les marchés financiers et les inquiétudes croissantes concernant l'économie américaine, qui ont amplifié la crise du crédit et accentué les tensions sur le système bancaire.

Grâce à la garantie en capital assurée par l'assureur, les fonds en euros n'ont pas subi de choc immédiat lors de la crise des subprimes ; néanmoins, celle-ci a entraîné une baisse progressive de leurs rendements au cours des années suivantes.

5.1.2 Application à la grille Gedeon

Bien que la calibration des chocs fondée sur des données historiques soit une approche simpliste, elle permet néanmoins d'illustrer de manière claire le principe assurantiel des grilles de désensibilisation, reposant sur des arbitrages réguliers. De plus, afin de refléter au mieux la réalité, le choc a été réparti et lissé sur une année entière.

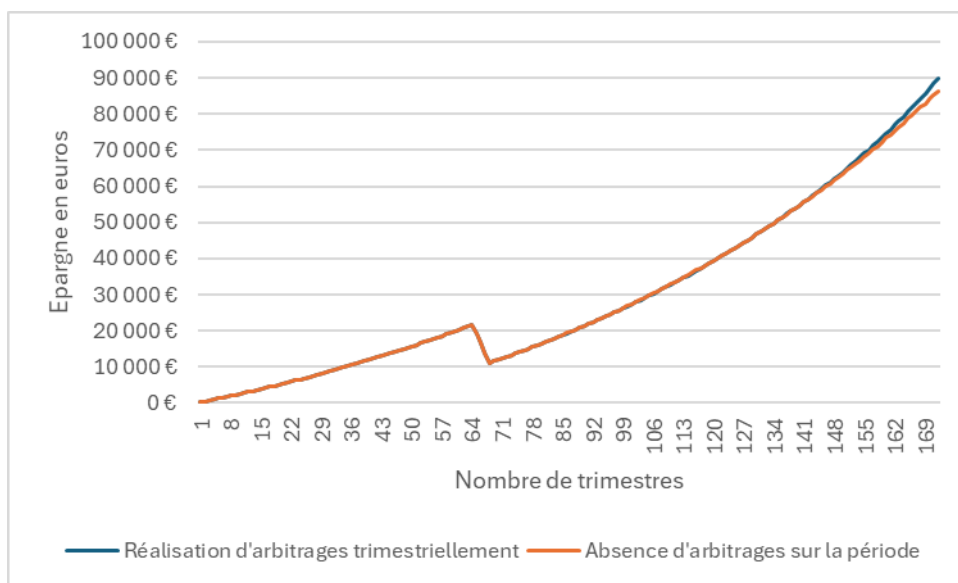


Figure 21 : Chocs réalisés à 27 ans du départ à la retraite

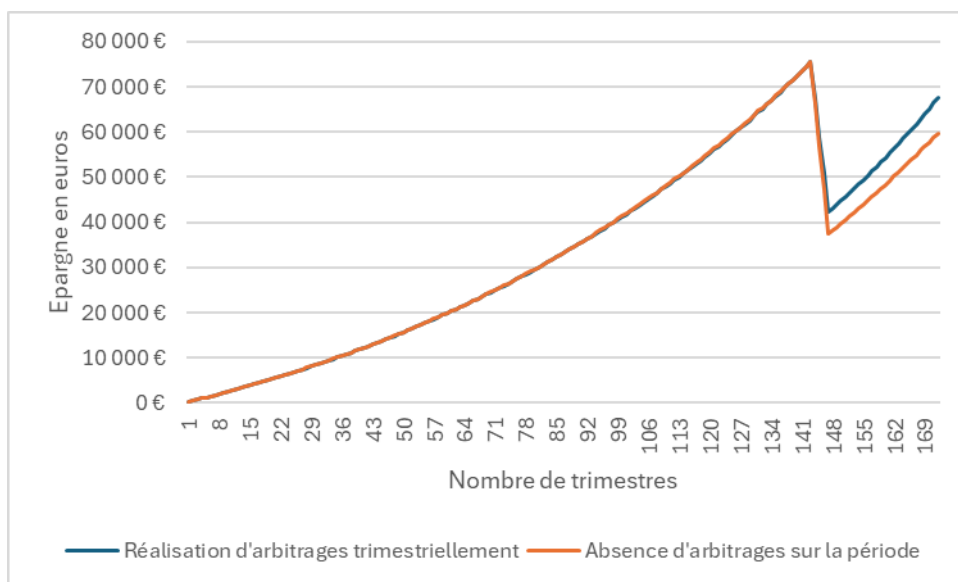


Figure 22 : Chocs réalisés à 7 ans du départ à la retraite

L'analyse des deux graphiques ci-dessus met en évidence l'intérêt de la désensibilisation à mesure que l'adhérent se rapproche de son départ à la retraite. En revanche, son impact reste limité lorsque le choc survient en début de carrière. En effet, la sécurisation des fonds ne débutant qu'au cours des 22 dernières années, les arbitrages réalisés auparavant ne suffisent pas à atténuer les chocs subis par les fonds d'investissement.

Lorsqu'un choc survient à 7 ans de la retraite, on observe dans notre cas une diminution du capital constitutif de 7 800 €, soit 12 %, entre un adhérent effectuant des arbitrages et un autre n'en réalisant pas.

5.2. Création des grilles de désensibilisation par profil de risque

Les fondements théoriques des modèles mathématiques utilisés dans cette étude sont issus de (Dorobantu, Gestion de portefeuille, 2021), enseignement que j'ai suivi lors de mon Master 1 à l'ISFA.

5.2.1 Estimation du taux de rentabilité attendue à partir du MEDAF

Dans la suite de cette section, nous utiliserons les notations suivantes. Soit M représentant le portefeuille de marché et P un portefeuille efficient :

- r_f : le taux sans risque disponible sur le marché,
- μ_P : le rendement du portefeuille P ,
- σ_P : l'écart-type du portefeuille P ,
- μ_M : le rendement du portefeuille de marché,
- σ_M : l'écart-type du portefeuille de marché.

Fondements théoriques

Le MEDAF repose sur deux hypothèses clés : d'une part, le principe de marché efficient, et d'autre part, l'idée que tous les investisseurs réagissent de manière identique et rationnelle aux informations disponibles.

Le concept de marché efficient repose sur l'idée que les prix des actifs intègrent en permanence l'ensemble des informations disponibles. Ainsi, toute nouvelle information est immédiatement reflétée dans les prix, rendant impossible toute opportunité d'arbitrage. Cette théorie, formalisée notamment par (Sharpe, 1964), implique que les investisseurs ne peuvent pas générer de rendements anormaux sur le long terme sans prendre de risques supplémentaires, car les écarts de valorisation sont rapidement corrigés par le marché.

De plus, l'ensemble des investisseurs sont soumis à deux risques distincts. En effet, les variations des prix des actifs peuvent être dues à deux types de facteurs : d'une part, des éléments qui influencent l'ensemble du marché, et d'autre part, des événements spécifiques à chaque entreprise. Le risque associé à un actif financier et porté par un investisseur se décompose en deux catégories :

- Le risque systématique, qui est le risque inhérent à l'ensemble du marché et ne peut être réduit par diversification. Il inclut des facteurs tels que l'inflation, les taux d'intérêt, ou encore les crises de système et de marché, et représente la prime de risque.
- Le risque spécifique, qui concerne uniquement le fonds d'investissement en question. Ce risque peut être atténué, voire éliminé, par la diversification du portefeuille.

Ces deux types de risques sont indépendants l'un de l'autre, ce qui permet de gérer le risque spécifique à travers la diversification, tandis que le risque systématique ne peut être évité.

Formule du MEDAF

Dans les années 1960, Sharpe, Lintner, Treynor et Mossin ont prolongé les travaux de Markowitz en développant le Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers (MEDAF). Ce modèle établit une relation linéaire entre la rentabilité espérée d'un actif et son risque systématique, mesuré par le bêta. Il repose sur les hypothèses suivantes :

- Le marché est parfait,
- Les investisseurs ont accès aux mêmes informations et opportunités d'investissement,
- Les investisseurs sont rationnels et évaluent les portefeuilles en terme d'espérance et de variance des rentabilités sur une période donnée,
- Les anticipations de rendement sont identiques.

Sous ces conditions, tous les investisseurs déterminent une même frontière efficiente et un portefeuille de marché unique, qui sert de référence pour la tarification des actifs financiers.

Proposition : Pour tout portefeuille efficient P on a :

$$\mu_P = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M} * \sigma_P \quad (1)$$

Remarque : L'ensemble des portefeuilles efficients ont le même ratio de Sharpe $\left(\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}\right)$, qui est égal à celui du portefeuille de marché.

La preuve est présentée en annexe [*Frais courants par fonds d'investissements*]

	Frais courants
LU0171310443	1,77 %
LU0389655811	1,74 %
LU2080768091	1,45 %
IE000E66LX20	0,53 %
FR0011637164	2,40 %
FR0014001FD5	2,13 %
LU0465917044	1,48%
LU1557118921	1,77 %
LU1280195881	0,94 %
LU0164100710	1,12 %
FR0014001H77	1,31 %

Tableau 37 : Frais courants par fonds d'investissements

Preuve : Les portefeuilles efficients ont le même ratio de Sharpe].

La rentabilité attendue d'un portefeuille efficient peut être décomposée en deux éléments : d'une part, le taux sans risque, qui représente la rémunération minimale d'un investissement sans exposition au risque de marché, et d'autre part, une prime de risque. Cette prime est déterminée par le produit de deux facteurs : le prix du risque, qui correspond au ratio de Sharpe, et la quantité de risque supportée, mesurée par l'écart-type du portefeuille. Ainsi, plus un investisseur accepte une volatilité élevée, plus il est en droit d'attendre une rentabilité supérieure en compensation du risque pris.

L'équation (1) s'applique uniquement aux portefeuilles efficients et ne peut pas être utilisée directement pour un fonds d'investissement pris isolément. Le MEDAF quant à lui, permet d'établir une relation entre le niveau de risque d'un actif et sa rentabilité espérée.

Proposition : Il existe λ tels que pour tout titre $i = 1, \dots, n$:

$$\mu_i = \lambda + \beta_i * (\mu_M - \lambda) \quad (2)$$

Avec :

- $\beta_i = \frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_M^2}$, où $\sigma_{i,m}$ est la covariance entre le rendement de l'actif et celui du marché.

La preuve est présentée en annexe [*Preuve : Formule du MEDAF standard*].

Proposition : La rentabilité espérée de tout titre $i = 1, \dots, n$ est égale à :

$$\mu_i = r_f + \beta_i * (\mu_M - r_f)$$

Avec :

- $\beta_i = \frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_M^2}$, où $\sigma_{i,m}$ est la covariance entre le rendement de l'actif et celui du marché.

La preuve est présentée en annexe [*Preuve : Formule du MEDAF et taux sans risque*].

Application à l'épargne retraite

Le MEDAF, initialement conçu pour évaluer la rentabilité et le risque des actifs financiers sur les marchés, peut être transposé au cadre de l'épargne retraite supplémentaire. Dans ce contexte, l'enjeu est d'adapter les concepts fondamentaux du modèle à une gestion dynamique de portefeuille, en tenant compte de l'évolution progressive de l'allocation d'actifs au fil du temps.

Dans sa formulation classique, le MEDAF repose sur l'existence d'un portefeuille de marché unique, considéré comme neutre, auquel se réfèrent les investisseurs pour évaluer la performance des actifs financiers. Dans le cadre de l'épargne retraite, nous remplaçons cette référence par la grille de désensibilisation existante, qui définit l'allocation d'actifs optimale en fonction de l'horizon de placement restant jusqu'à la retraite. À chaque instant t , la composition de cette grille joue ainsi le rôle du portefeuille de marché, impliquant qu'il existe autant de portefeuilles de marché que de dates t . Cette approche permet d'intégrer la logique d'ajustement progressif des investissements à mesure que l'adhérent approche de la retraite, en réduisant progressivement son exposition aux actifs risqués.

Par ailleurs, le taux sans risque, qui constitue un élément central du MEDAF, est ici représenté par le fonds en euros présent dans la grille étudiée. Ce fonds, par sa garantie en capital et sa stabilité, joue un rôle équivalent à celui des obligations d'État dans les applications traditionnelles du modèle.

Choix de l'indicateur de performance

La littérature scientifique propose plusieurs indicateurs de performance permettant d'évaluer la rentabilité d'un portefeuille en fonction de son risque. Parmi les plus courants, on retrouve le ratio de Sharpe, le ratio de Treynor et l'alpha de Jensen.

Le ratio de Sharpe est défini par la formule suivante :

$$S = \frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}$$

Il mesure le rendement du portefeuille excédant le taux sans risque par unité de risque total. Il permet de comparer des portefeuilles avec des niveaux de risque différents. Plus ce ratio est élevé, plus le portefeuille est considéré comme performant.

Le ratio de Treynor, quant à lui, est calculé ainsi :

$$T = \frac{\mu_P - r_f}{\beta_P}$$

Il évalue le rendement du portefeuille excédant le taux sans risque, mais cette fois en fonction du risque systémique. Les portefeuilles ayant le ratio de Treynor le plus élevé sont jugés plus performants.

Enfin, l'alpha de Jensen se calcule avec la formule suivante :

$$\alpha_P = \mu_P - \mu_f - \beta_P * (\mu_M - r_f)$$

Cet indicateur mesure le rendement d'un portefeuille qui ne peut être expliqué par le modèle du MEDAF, c'est-à-dire la performance excédentaire générée par la gestion active par rapport au rendement attendu en fonction du risque systémique. Un alpha positif indique une surperformance par rapport au marché.

Étant donné que le portefeuille étudié est bien diversifié, il est pertinent de privilégier une mesure de performance prenant en compte l'ensemble du risque encouru. De plus, l'employeur investissant une part significative de sa richesse, il est essentiel d'évaluer le rendement obtenu par rapport à la volatilité totale du portefeuille. Dans cette optique, nous retiendrons le ratio de Sharpe comme principal indicateur de performance.

Limites du modèle

Bien que le MEDAF constitue un outil fondamental en finance, il présente plusieurs limites. Tout d'abord, il repose sur l'hypothèse que le risque d'un actif est uniquement mesuré par son coefficient β , qui représente sa sensibilité aux variations du marché. Or, en réalité, le risque ne se résume pas à un seul facteur : d'autres éléments, tels que la liquidité, le risque de défaut ou encore les conditions macroéconomiques,

peuvent également impacter la rentabilité d'un actif. De plus, le bêta d'un titre financier n'est pas une constante figée dans le temps ; il peut évoluer en fonction des cycles économiques, des changements structurels de l'entreprise ou de l'environnement financier.

Par ailleurs, le MEDAF repose sur des hypothèses théoriques strictes, comme l'efficience des marchés et l'accès égalitaire à l'information pour tous les investisseurs. Or, dans la réalité, les marchés ne sont pas parfaitement efficients : les asymétries d'information, les anomalies de marché et le comportement irrationnel des investisseurs peuvent créer des écarts entre la rentabilité théorique et les performances observées. Enfin, le modèle suppose un marché en concurrence pure et parfaite, ce qui est rarement le cas dans la pratique, en raison de la présence d'acteurs dominants, de coûts de transaction et de diverses frictions de marché. Ces limites ont conduit au développement d'approches plus complexes, comme les modèles multifactoriels, afin d'améliorer la compréhension et la prévision des rendements financiers.

5.2.2 Le modèle de Black-Litterman pour intégrer le profil de risque de l'assuré

Les fondements théoriques des modèles mathématiques utilisés dans cette étude sont issus de (Dorobantu, Gestion de portefeuille, 2021), enseignement que j'ai suivi lors de mon Master 1 à l'ISFA.

Le modèle de Black-Litterman

Le modèle de Black-Litterman, développé en 1992 par Fischer Black et Robert Litterman et publié dans (Black & Litterman, Global Portfolio Optimization, 1992), a été conçu pour pallier certaines limites du modèle de Markowitz. Ce dernier, bien que fondateur dans la théorie moderne du portefeuille, impose aux investisseurs de formuler des anticipations précises sur les rendements de chaque actif, ce qui peut être difficile à mettre en œuvre dans la pratique.

Plutôt que de demander aux investisseurs d'estimer directement les rendements espérés pour l'ensemble des actifs, le modèle de Black-Litterman combine les informations issues de l'équilibre de marché, à travers la distribution implicite des rendements déduite de la capitalisation boursière, avec les anticipations subjectives des investisseurs sur certains actifs spécifiques. Cette approche permet ainsi d'obtenir des portefeuilles mieux diversifiés, plus robustes face aux erreurs d'estimation, et plus conformes aux intuitions des gestionnaires d'actifs.

Présentation du modèle

Au sein du modèle de Black-Litterman, les investisseurs émettent k vues sur les n actifs du marché. On obtient alors la relation suivante :

$$P\pi' = q + \varepsilon$$

Avec :

- ε qui suit une loi normale multivariée de moyenne le vecteur nulle de variance Ω ,
- Ω est une matrice diagonale représentant le degré d'incertitude associé aux vues exprimées dans q . Plus Ω est élevé, plus l'investisseur est incertain quant à ses prévision
- π' est le vecteur moyen des rendements espérés des actifs du marché.
- P est une matrice de taille $k * n$ représentant le poids associé à chaque vue.
- q est un vecteur k -dimensionnel représentant les anticipations de rendements selon les investisseurs.

Remarque : Le vecteur q étant déterministe, on déduit de l'équation précédente que $P\pi'$ suite une loi normale multivariée de moyenne q et de variance Ω .

Le modèle suppose que les rendements ajustés aux vues suivent:

$$\pi_{BL} = \pi | \pi' \sim \mathcal{N}_n(\pi', \tau\Sigma)$$

Avec :

- τ est un facteur d'échelle reflétant l'incertitude sur π .
- Σ est la matrice de variance-covariance.

En intégrant les vues des investisseurs dans le cadre bayésien, la formule mise à jour pour les rendements espérés devient :

$$\pi_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1} * [(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q]$$

Cette formule montre comment les nouvelles prévisions de rendement π_{BL} résultent d'un compromis entre les rendements de marché π et les vues des investisseurs q , pondérés par leurs niveaux de confiance respectifs (via $\tau\Sigma$ et Ω).

Une fois π_{BL} obtenu, on le réinjecte dans un problème d'optimisation de type moyenne-variance pour déterminer les poids optimaux du portefeuille Black-Litterman :

$$w_{BL} = (k\Sigma)^{-1}\pi_{BL}$$

Où k est un facteur d'ajustement lié à l'aversion au risque de l'investisseur.

Application à la grille Gedeon

Dans le cadre de l'épargne retraite supplémentaire, et plus particulièrement des grilles de gestion pilotées, nous exploitons le modèle de Black-Litterman pour affiner la répartition des actifs en fonction de l'horizon de placement des assurés.

Afin d'intégrer le modèle de Black-Litterman à cette problématique, nous considérons que la grille de désensibilisation Gedeon joue le rôle de portefeuille de marché neutre. Autrement dit, à chaque instant t , la composition de la grille pilotée est assimilée au portefeuille neutre. Cette approche permet ainsi de définir une multitude de portefeuilles de marché successifs, correspondant à différentes étapes de la vie de l'adhérent.

Voici les différentes étapes mises en œuvre pour adapter le modèle de Black-Litterman au cadre de l'épargne retraite.

Etape 1 : À chaque instant t , nous déterminons pour l'ensemble des actifs composant la grille Gedeon leur poids respectif ainsi que leur rentabilité trimestrielle attendue, en nous appuyant sur la méthodologie du MEDAF.

	Poids	Rentabilité attendue
FR0011637164	10 %	2,58%
FR0014001FD5	55 %	2,37%
LU0171310443	7,5 %	1,09%
LU1280195881	2 %	1,56%
LU1557118921	7,5 %	3,02%
LU2080768091	18 %	3,15%

Tableau 31 : Rentabilité attendue annualisée pour un adhérent averse au risque à 20 ans de son départ à la retraite

Etape 2 : Nous construisons la matrice P de manière à ce que le produit matriciel $P * \pi'$ reflète précisément les perspectives de rentabilité exprimées dans la matrice q . Cette dernière représente les anticipations de rendements en excès du taux sans risque. Afin de garantir l'homogénéité avec le cadre de modélisation adopté, les incertitudes liées aux vues, initialement formulées sur un horizon d'un an, sont converties en rentabilités espérées trimestrielles. Enfin, pour assurer la cohérence du modèle, les anticipations seront définies de manière opposée selon le profil de l'assuré : un investisseur avers au risque privilégiera des actifs moins volatils, tandis qu'un investisseur en quête de rendement adoptera une approche plus dynamique.

Afin de simplifier les projections, la matrice q sera établie en adoptant des vues absolues plutôt que relatives. Les anticipations porteront sur les grandes classes d'actifs plutôt que sur les fonds d'investissement pris individuellement. De manière analogue, la matrice P sera construite en attribuant des poids équivalents à l'ensemble des fonds appartenant à une même classe d'actifs. Par exemple, si plusieurs fonds actions sont présents dans la grille, chacun d'eux se verra attribuer un poids de $1/n$, où n est le nombre total de fonds actions, dans la vue portant sur cette classe d'actifs. Cette approche garantit une répartition équilibrée des anticipations et permet d'éviter une surpondération arbitraire d'un fonds par rapport aux autres au sein d'une même catégorie.

Remarque 1 : Une vue absolue en finance désignent des anticipations de rendement exprimées de manière directe et indépendante des autres actifs. Contrairement aux vues relatives, qui comparent la performance attendue de deux actifs entre eux (par exemple, "les actions européennes surperformeront les actions américaines de 2%"), une vue absolue fixe une estimation de rendement pour un actif ou une classe d'actifs sans référence à un autre.

La matrice q sera construite selon le raisonnement expliqué précédemment. Le tableau ci-dessous détaille la vue appliquée en fonction du type d'actif et du profil de l'assuré.

	Averse au risque	Appétent au risque
Actions	-1%	+1%
Obligations	+1%	-1%

Tableau 32 : Vue appliquée selon la classification du fonds d'investissement par profil de risque.

Pour les fonds mixtes, la répartition de la vue sera ajustée proportionnellement à la part d'actions et d'obligations, en accord avec le profil de risque de l'assuré.

La matrice $\Omega = (w_{i,j})_{1 \leq i,j \leq \text{nombre de vues}}$ représente le degré d'incertitude associé aux anticipations de rendement exprimées dans la matrice q . Dans notre cadre d'application, nous supposons une incertitude de $\pm 10\%$ sur l'ensemble des anticipations à un horizon d'un an. Toutefois, pour assurer la cohérence temporelle avec le modèle de Black-Litterman, il est nécessaire de convertir cette incertitude annuelle en une incertitude trimestrielle à partir de la formule suivante :

$$w_{i,i} = [0,1^2 + (1 + q_i)^{2*4}]^{1/4} - (1 + q_i)^2$$

En reprenant l'ordre des fonds présenté dans le *Tableau 31 : Rentabilité attendue annualisée pour un adhérent averse au risque à 20 ans de son départ à la retraite*, on obtient la matrice Ω suivante :

$$w_{1,1} = w_{3,3} = w_{5,5} = 0,00025$$

$$w_{2,2} = w_{6,6} = 0,00020$$

$$w_{4,4} = 0,00015$$

Remarque 2 : Puisque les vues sont supposées indépendantes les unes des autres, la matrice Ω est diagonale, ce qui implique que tous ses coefficients hors diagonale sont nuls.

Etape 3 : L'estimation du paramètre τ joue un rôle essentiel en pondérant la matrice de covariance des rendements d'équilibre du marché, influençant ainsi l'intégration des anticipations des investisseurs dans l'allocation optimale. Cependant, la littérature

souligne qu'il n'existe pas de méthode standardisée pour le calibrer précisément, ce qui rend son estimation délicate.

Selon (Allaj, 2013), τ reste l'un des paramètres les plus difficiles à estimer, car son interprétation n'est pas directement intuitive et dépend de choix méthodologiques spécifiques. Il propose une estimation basée sur des modèles économétriques combinant des approches en coupe transversale et en séries temporelles. De leur côté, (O'Toole, 2017) mettent en avant une approche liant τ au niveau de risque actif ciblé, ce qui permet une calibration pragmatique en fonction des objectifs de volatilité du portefeuille.

Face à ces incertitudes et en l'absence d'un consensus clair sur la valeur optimale de τ , nous retenons une valeur $\tau = 0,50$ pour la suite de l'étude. Ce choix permet d'obtenir un équilibre entre les rendements d'équilibre du marché et les anticipations spécifiques tout en assurant une robustesse des résultats.

Etape 4 : Nous avons ainsi identifié l'ensemble des paramètres nécessaires au calcul des espérances de rentabilité des actifs du portefeuille, ajustées a posteriori au taux sans risque.

En reprenant l'ordre des fonds présenté dans le *Tableau 31 : Rentabilité attendue annualisée pour un adhérent averse au risque à 20 ans de son départ à la retraite*, on obtient les espérances et la matrice de variance-covariance de rentabilité trimestrielle ajustées au taux sans risque a posteriori suivantes :

$$\pi_{BL} = (-0,36\% \quad 0,09\% \quad -0,78\% \quad 0,15\% \quad -0,15\% \quad 0,32\%)$$

$$\Sigma_{BL} = \begin{pmatrix} 10,52\% & 1,06\% & -0,98\% & 0,67\% & 1,93\% & 1,00\% \\ 1,06\% & 1,41\% & 2,01\% & 0,29\% & 1,69\% & 0,86\% \\ -0,98\% & 2,01\% & 12,99\% & 0,44\% & 2,98\% & 1,01\% \\ 0,67\% & 0,29\% & 0,44\% & 1,04\% & 0,21\% & 0,40\% \\ 1,93\% & 1,69\% & 2,98\% & 0,21\% & 4,70\% & 1,50\% \\ 1,00\% & 0,86\% & 1,01\% & 0,40\% & 1,50\% & 1,35\% \end{pmatrix}$$

Les rendements obtenus via le modèle de Black-Litterman présentent plusieurs éléments d'analyse intéressants et quelques points de vigilance.

Tout d'abord, on remarque que certaines espérances de rentabilité ajustées au taux sans risque sont négatives, notamment pour plusieurs fonds actions et mixtes. Cela peut être surprenant, car en théorie, sur le long terme, ces classes d'actifs sont censées offrir une prime de risque positive. Ce phénomène s'explique par l'historique utilisé pour calibrer le modèle. En effet, la période de référence inclut des chocs de marché importants, comme la crise du COVID-19 et la hausse des taux d'intérêt, cela peut avoir entraîné des performances relativement médiocres pour certaines classes d'actifs, biaisant ainsi les anticipations de rendement.

Ensuite, en observant la matrice de variance-covariance, on constate que les corrélations entre certains fonds sont relativement élevées, notamment entre les fonds actions et les fonds mixtes et justifie l'utilisation de la décomposition de Cholesky. De

plus, la volatilité des fonds obligataires semble relativement contenue, ce qui est cohérent avec leur nature.

5.2.3 Création des grilles de désensibilisation à partir du modèle de Markowitz

Les techniques modernes de gestion d'actifs reposent en grande partie sur les travaux de Harry Markowitz, développés en 1952 dans (Markowitz, 1952). Son approche, connue sous le nom de "théorie moderne du portefeuille", vise à répondre à une problématique fondamentale en finance : comment répartir au mieux un capital entre différents actifs afin d'optimiser le couple rendement-risque ?

L'apport majeur de Markowitz réside dans la mise en évidence de l'effet de diversification : en combinant plusieurs actifs au sein d'un même portefeuille, un investisseur peut réduire son risque global sans nécessairement sacrifier sa rentabilité espérée. Ce principe repose sur l'étude des corrélations entre actifs : plus celles-ci sont faibles, plus la diversification est efficace.

Les fondements théoriques des modèles mathématiques utilisés dans cette étude sont issus de (Dorobantu, Gestion de portefeuille, 2021), enseignement que j'ai suivi lors de mon Master 1 à l'ISFA.

Hypothèses du modèle

Considérons un marché composé de n actifs risqués notés $i = 1, \dots, n$. On note :

- R_i le rendement aléatoire du titre i sur la période et R le vecteur aléatoire des rendements des n actifs.
- $\mu_i = E(R_i)$ le rendement espéré du titre i sur la période et μ le vecteur aléatoire des rendements des n actifs.
- $\Sigma = \left(\text{cov}(R_i, R_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de variance-covariance des n actifs qui est symétrique et définie positive.
- w_i la proportion de richesse investie dans l'actif i et w le vecteur des poids $(w_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui représente le portefeuille de l'assuré. La proportion totale investie est égale à 1.

Optimisation d'allocation d'actifs : le modèle de Markowitz

Portefeuille optimal de Markowitz : Intéressons-nous au programme d'optimisation suivant, pour un rendement objectif μ_{obj} donné, la proportion optimale de chaque actif est celle minimisant la variance globale du portefeuille.

$$\begin{cases} \min_{w \in \mathbb{R}^n} & w' \Sigma w \\ \text{s. c.} & w' 1_{\mathbb{R}^n} = 1 \\ & w' \mu = \mu_{obj} \end{cases}$$

Le portefeuille optimal est alors :

$$w^* = \frac{B - \mu_{obj}A}{BC - A^2} \Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n} + \frac{\mu_{obj}C - A}{BC - A^2} \Sigma^{-1} \mu$$

Avec :

- $A = 1_{\mathbb{R}^n}' \Sigma^{-1} \mu$
- $B = \mu' \Sigma^{-1} \mu$
- $C = 1_{\mathbb{R}^n}' \Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n}$

La preuve est présentée en annexe [*Preuve : Portefeuille optimal de Markowitz*].

Introduction de l'actif sans risque : Introduisons maintenant un actif sans risque, le portefeuille optimal de Markowitz devient :

$$\begin{cases} \min_{w \in \mathbb{R}^n} & w' \Sigma w \\ \text{s. c.} & w' \mu + w_{n+1} r_f = \mu_{obj} \end{cases}$$

Avec :

- $w_{n+1} = 1 - w' 1_{\mathbb{R}^n}$ est la proportion investit dans l'actif sans risque.
- r_f représente le rendement de l'actif sans risque.

Le portefeuille optimal est alors :

$$w^* = \frac{\mu_{obj} - r_f}{(\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n})' \Sigma^{-1} (\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n})} \Sigma^{-1} (\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n})$$

La preuve est présentée en annexe [*Preuve : Portefeuille optimal de Markowitz en présence d'un actif sans risque*].

Remarque : le modèle de Markowitz peut attribuer des poids négatifs aux actifs, ce qui correspond à une vente à découvert. Toutefois, en ajoutant des contraintes, il est possible d'interdire cette pratique. Dans notre cas, nous imposerons cette restriction, car les adhérents à un PER n'ont pas le droit de vendre des actifs à découvert.

Application à l'épargne retraite supplémentaire

Le modèle de Markowitz est utilisé pour construire les grilles de désensibilisation adaptées au profil de risque des assurés d'un PER. L'objectif est d'optimiser l'allocation d'actifs de manière progressive, en réduisant l'exposition aux actifs risqués à mesure que l'assuré approche de la retraite. Pour cela, nous exploitons le modèle de Black-Litterman présenté précédemment afin d'obtenir les rendements à posteriori des taux d'intérêt.

La construction de la grille s'effectue sur un horizon de 22 ans, en cohérence avec la grille initialement définie. Ainsi, l'allocation d'actifs reste constante entre le début de carrière et le seuil des 22 ans avant la retraite, avant d'évoluer progressivement selon la stratégie de désensibilisation. Ce choix permet d'assurer une transition fluide et maîtrisée entre la phase de constitution et celle de sécurisation du capital, en alignant l'exposition aux risques financiers sur l'horizon de placement de l'assuré.

Afin d'adapter le modèle de Markowitz à la construction des grilles de désensibilisation, plusieurs contraintes spécifiques ont été introduites pour assurer une

transition progressive vers un portefeuille sans risque à mesure que l'assuré approche de la retraite.

Tout d'abord, un coefficient de diversification a été ajouté pour éviter une concentration excessive des allocations sur un seul actif. Ce coefficient pénalise les portefeuilles dont les poids s'éloignent trop d'une répartition cible définie comme l'allocation équilibrée entre les actifs disponibles dans la grille. Mathématiquement, cette contrainte se traduit par :

$$\text{coefficient de diversification} = \sum_{i=1}^n (w_i - w_{\text{cible}})^2$$

$$\text{Avec : } w_{\text{cible}} = \frac{1}{\text{Nb actifs au sein de la grille}}$$

A chaque instant t , la variance cible du portefeuille est progressivement et linéairement réduite afin d'aboutir, à terme, à une variance nulle, signifiant que l'ensemble des actifs seront progressivement arbitrés en faveur de l'actif sans risque, représenté par le fonds en euros. Cette transition garantit une sécurisation progressive du capital à l'approche de la retraite, en cohérence avec la logique de désensibilisation des portefeuilles d'épargne de long terme.

En complément, des contraintes classiques de Markowitz sont maintenues : la somme des poids alloués aux différents actifs doit toujours être égale à 1, garantissant ainsi une allocation totale du capital. De plus, on interdit la vente d'actifs à découvert.

L'objectif global reste de maximiser le rendement, en minimisant la fonction suivante :

$$\text{Min } [-r + \text{coefficient de diversification}]$$

où r est le rendement attendu du portefeuille.

Remarque : L'introduction d'un coefficient de diversification visant à limiter les allocations trop concentrées sur un seul actif peut sembler simpliste de premier abord. Pourtant, les travaux de (Windcliff & Boyle, 2003) ont mis en évidence les avantages notables de cette méthode en termes de robustesse et de résilience face à l'incertitude des marchés financiers.

En effet, ces auteurs montrent que bien que le portefeuille 1/n puisse être théoriquement sous-optimal lorsqu'on dispose d'une connaissance parfaite des paramètres économiques, cette hypothèse est rarement vérifiée en pratique. L'une des principales difficultés en gestion d'actifs réside dans l'estimation des paramètres, notamment les rendements espérés et les covariances entre actifs. Des erreurs d'estimation peuvent mener à des allocations excessivement risquées ou trop concentrées sur certaines classes d'actifs, augmentant ainsi le risque de pertes importantes en cas de choc de marché.

L'approche 1/n permet donc aux investisseurs, notamment ceux qui sont averses au risque, d'éviter des situations où des erreurs de modélisation ou des baisses brutales de marché entraîneraient des pertes disproportionnées. En répartissant le capital de manière plus homogène, cette méthode favorise une diversification naturelle, réduisant ainsi la dépendance aux erreurs d'estimation et rendant le portefeuille plus robuste face aux incertitudes économiques. C'est cette logique qui motive son intégration dans la construction des grilles de désensibilisation du modèle étudié.

5.3. Application à la grille Gedeon

5.3.1 Premiers résultats

Les grilles d'allocations obtenues pour les différents profils de risque mettent en évidence des différences marquées entre les adhérents prudents et ceux ayant une appétence pour le risque. La distinction la plus frappante réside dans l'intégration progressive du fonds en euros, qui intervient bien plus tôt pour les assurés averses au risque. En effet, dans la grille dédiée aux profils prudents, le fonds en euros commence à être intégré dès 14 ans avant la retraite, alors que pour les adhérents plus enclins à la prise de risque, cette transition ne s'opère qu'à partir de 9 ans avant la retraite. Cette divergence illustre l'importance de la sécurisation progressive de l'épargne pour les investisseurs prudents, qui cherchent à limiter leur exposition aux fluctuations des marchés financiers à mesure qu'ils approchent de la retraite. À l'inverse, les profils plus dynamiques conservent une exposition plus prolongée aux actifs risqués dans l'objectif d'optimiser leur rendement, au prix d'une volatilité accrue.

Années restantes	FR....164	FD....FD5	LU...443	LU....881	LU....921	LU....091	euros
22	9,9	14,6	33,6	8	20	13,9	0
21	11,2	14,6	31,9	8,1	20	14,2	0
20	12,1	14,7	30,2	8,4	20	14,6	0
19	13,6	14,7	28,1	8,6	20,1	14,9	0
18	14,9	14,7	25,9	9	20,1	15,4	0
17	16,4	14,8	23,4	9,5	20	15,9	0
16	17,9	14,9	20,4	10,2	20	16,6	0
15	18,6	15,2	17,4	11,3	20	17,5	0
14	18,1	14,7	16,4	11,2	19,5	17,4	2,7
13	17,3	14,1	15,7	10,9	18,9	17,2	5,9
12	17,3	13,6	13,9	10,6	18,6	17,1	8,9
11	18,1	12,9	11,2	10,3	18,2	17	12,3
10	23,8	11,1	0	10	16,2	16,4	22,5
9	22,4	10,2	0	9,5	15,7	16	26,2
8	21	9,3	0	8,8	15	15,6	30,3
7	19,5	8,2	0	8,1	14,2	15,2	34,8
6	18,1	6,9	0	7,4	13,3	14,6	39,7
5	16,3	5,5	0	6,2	12,5	14,2	45,3

4	14,9	3,5	0	4,6	11,1	13,4	52,5
3	0	4,8	0	2,1	20,4	16,5	56,2
2	0	0	0	0	17,9	14,7	67,4
1	0	0	0	0	12,1	11,7	76,2
0	0	0	0	0	0	0	100

Tableau 33 : Grille Gedeon des allocations en pourcentage adaptée au profil de risque prudent

Années restantes	FR....164	FD....FD5	LU...443	LU....881	LU....921	LU....091	euros
22	0,7	12	56,7	0	22,2	8,4	0
21	2,1	12	55	0	22,3	8,6	0
20	3,7	12	53,2	0	22,3	8,8	0
19	5,2	12	51,3	0	22,4	9,1	0
18	7	11,9	49,2	0	22,5	9,4	0
17	8,6	12	47	0	22,6	9,8	0
16	10,4	12	44,6	0,1	22,7	10,2	0
15	12,1	11,9	42	0,5	22,9	10,6	0
14	14	11,9	39,2	1	22,8	11,1	0
13	15,8	12	36,1	1,6	22,7	11,8	0
12	17,4	12,2	32,6	2,5	22,7	12,6	0
11	18,6	12,6	28,8	3,8	22,5	13,7	0
10	19	13,2	24,8	5,6	22,3	15,1	0
9	18,6	14	20,9	7,9	21,8	16,7	0,1
8	17,4	13,1	19,4	7	21	16,2	5,9
7	16,1	12,1	17,8	6	20,3	15,6	12,1
6	14,4	11	16,3	4,9	19,5	14,9	19
5	12,9	9,7	14,4	3,4	18,8	14,2	26,6
4	11,1	8,1	12,5	1,5	18	13,4	35,4
3	9,1	6	10,3	0	17,2	12,3	45,1
2	5,9	2,9	7,3	0	16,9	11,1	55,9
1	0	0	0,1	0	18,3	9,2	72,4
0	0	0	0	0	0	0	100

Tableau 34 : Grille Gedeon des allocations en pourcentage adaptée au profil de risque dynamique

Intéressons-nous maintenant, afin de mieux visualiser l'évolution des profils d'investissement, à la répartition des types d'actifs à mesure que l'on approche du départ à la retraite. L'objectif est d'observer comment la composition des grilles d'allocations évolue en fonction du temps et du niveau de risque associé à chaque profil.

Il est intéressant de constater que les différentes classes d'actifs réagissent globalement bien aux vues des investisseurs. Cependant, les fonds mixtes peuvent surprendre par leur comportement. En effet, leur allocation dépend en grande partie de la proportion d'obligations et d'actions qu'ils contiennent, ce qui explique leur présence jusqu'à un an avant le départ à la retraite. Une évolution pertinente pourrait être d'appliquer une vue spécifique aux fonds mixtes. Bien qu'ils intègrent une part d'obligations, leur exposition aux actions les rend plus volatils et donc susceptibles de connaître des variations significatives.

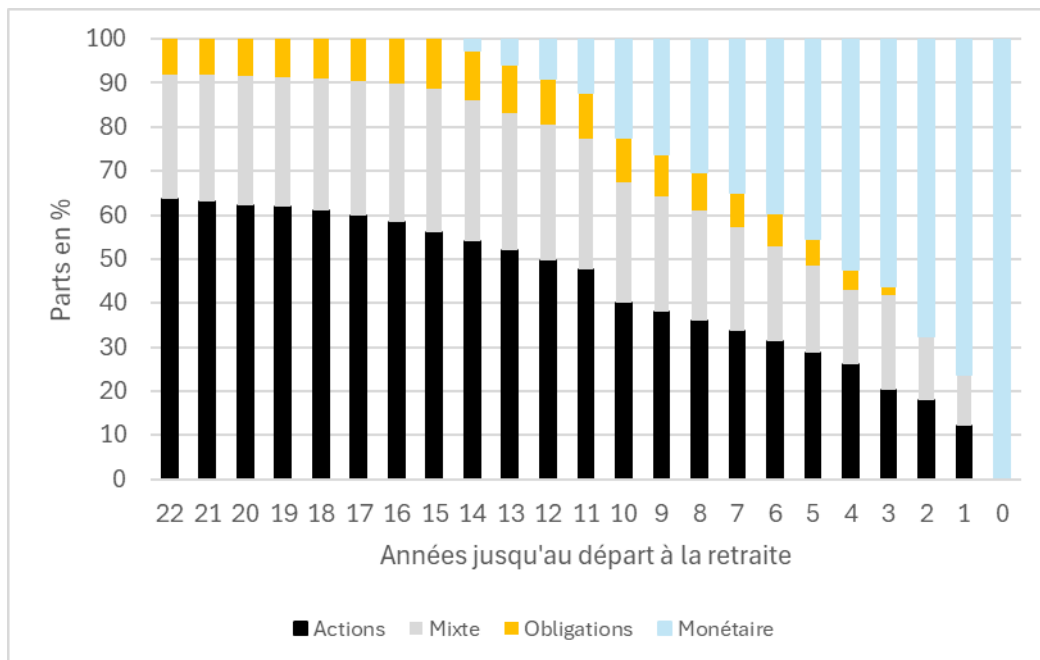


Figure 23 : Grille Gedeon par type d'actifs adaptée au profil de risque prudent

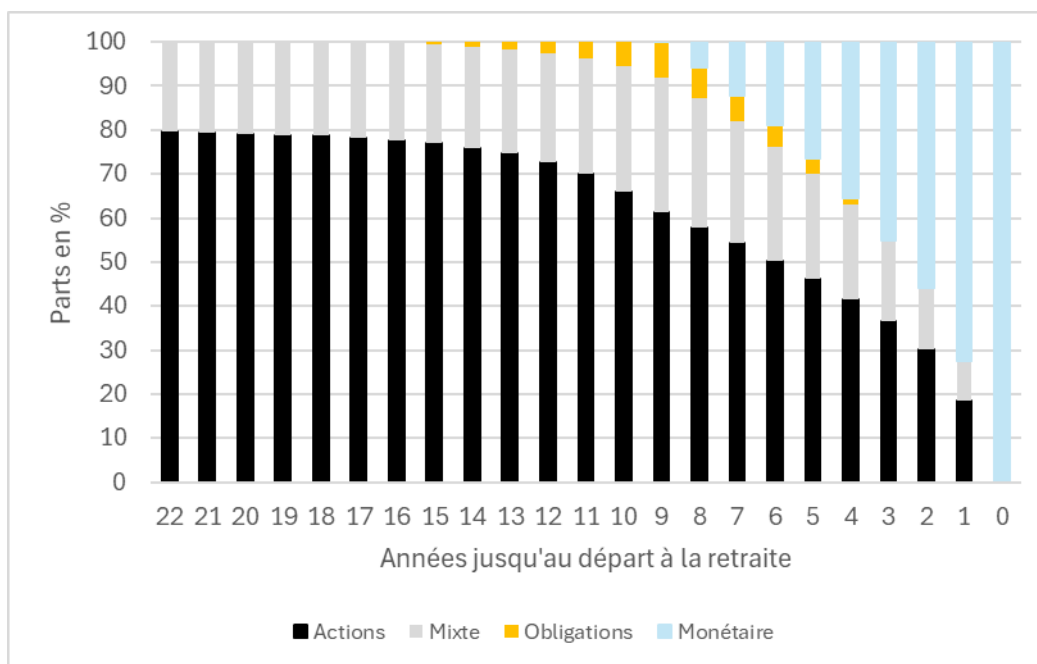


Figure 24 : Grille Gedeon par type d'actifs adaptée au profil de risque dynamique

Cependant, pour les deux grilles établies, on constate que la part des actions reste extrêmement élevée tout au long de la phase de désensibilisation. Cette situation est probablement liée au coefficient de diversification utilisé. En effet, la grille est constituée de trois fonds actions, deux fonds mixtes et un fonds obligataire. Ainsi, le coefficient de pénalisation, qui vise à ajuster les portefeuilles optimaux s'éloignant trop du portefeuille équitablement réparti, tend à accroître la proportion d'actions. Une approche alternative intéressante consisterait à reconstruire les grilles d'allocation en se concentrant d'abord sur la répartition par grandes classes d'actifs. Dans un premier temps, il s'agirait d'appliquer le coefficient de diversification au niveau des types d'actifs (actions, obligations, fonds mixtes), avant d'affiner ensuite l'optimisation en sélectionnant chaque fonds individuellement. Cette méthodologie permettrait de mieux maîtriser l'exposition aux actions tout en conservant une allocation cohérente avec les profils de risque des assurés.

5.3.2 Intégration d'un coefficient de diversification suivant le type d'actif

La première génération de grilles a révélé une problématique majeure. En effet, les allocations obtenues attribuaient des proportions excessives aux fonds actions, rendant ainsi les portefeuilles des assurés excessivement risqués. Pour y remédier, une seconde génération de grilles a été construite en intégrant un coefficient de diversification supplémentaire, cette fois appliqué au niveau des classes d'actifs.

L'objectif est d'assurer une répartition plus équilibrée entre les différentes classes d'actifs, plutôt que d'imposer une homogénéisation au sein d'une même classe. Cela permet d'éviter des allocations trop concentrées sur quelques fonds spécifiques tout en maintenant une diversification cohérente à l'échelle du portefeuille global.

Les nouvelles grilles prudentes et dynamiques sont présentées en annexe, et leur évolution, classée par type d'actif, est illustrée ci-dessous sur les 22 dernières années de carrière des assurés.

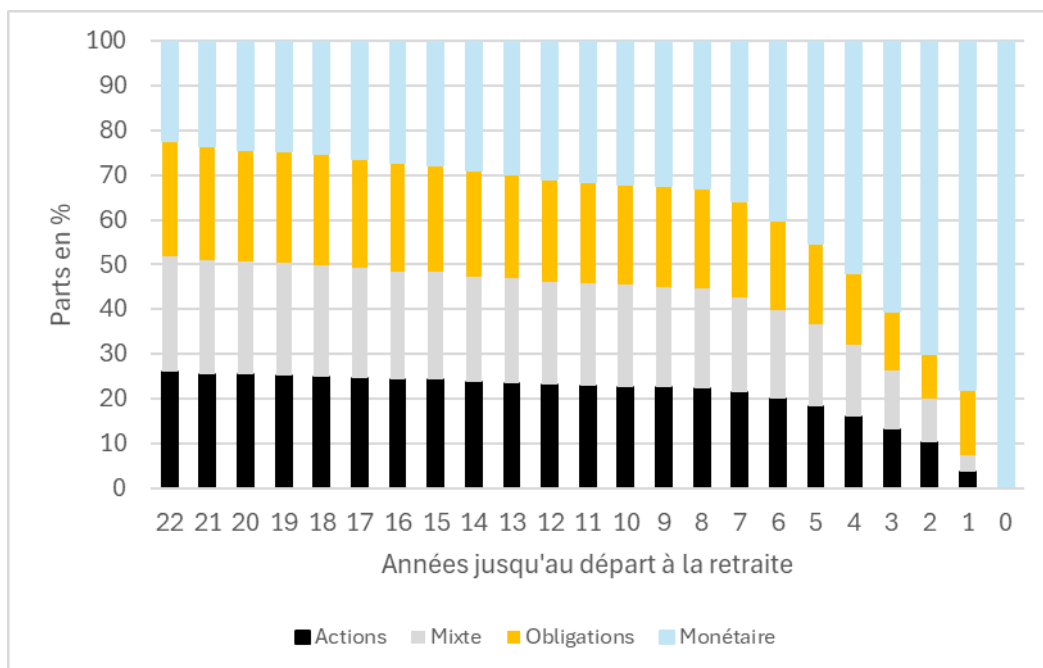


Figure 25 : Grille Gedeon par type d'actifs adaptée au profil de risque prudent v2

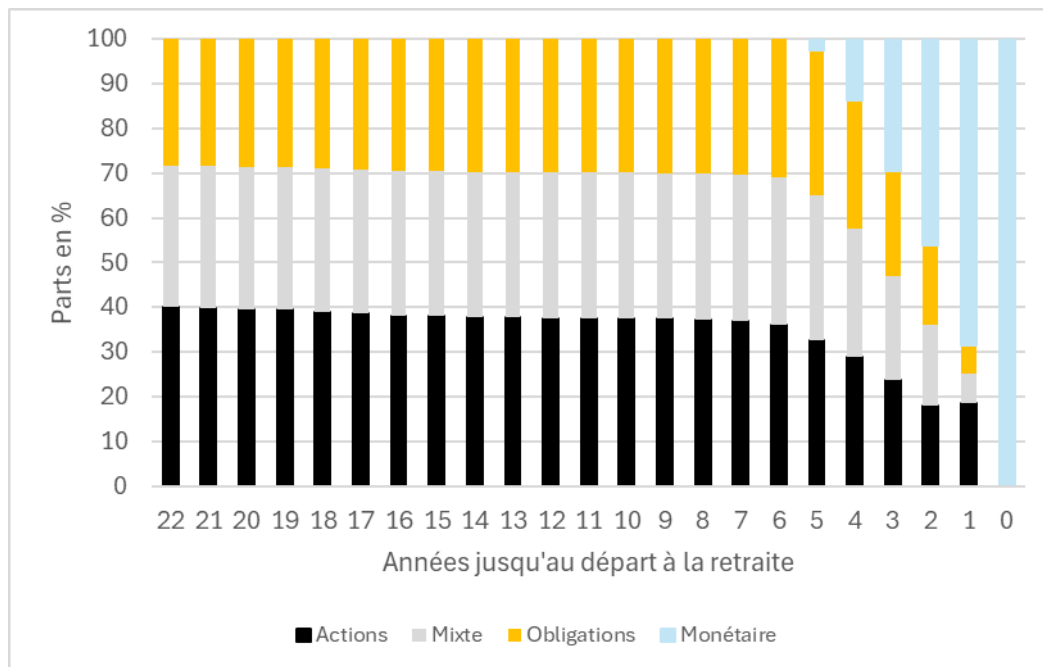


Figure 26 : Grille Gedeon par type d'actifs adaptée au profil de risque dynamique v2

Une fois les nouvelles grilles générées, on constate que l'ajout du coefficient de diversification a bien impacté leur structure. En effet, pour les deux profils de risque, la part allouée aux actions a fortement diminué, au profit des fonds obligataires. Cette évolution permet de mieux maîtriser le risque tout en conservant une allocation optimisée.

Par ailleurs, la dynamique des allocations reste cohérente. Par exemple, pour la grille dynamique, en début de carrière, les actions dominent afin de maximiser le potentiel de rendement à long terme, puis leur proportion diminue progressivement au profit des fonds mixtes et obligataires à mesure que l'adhérent approche de la retraite.

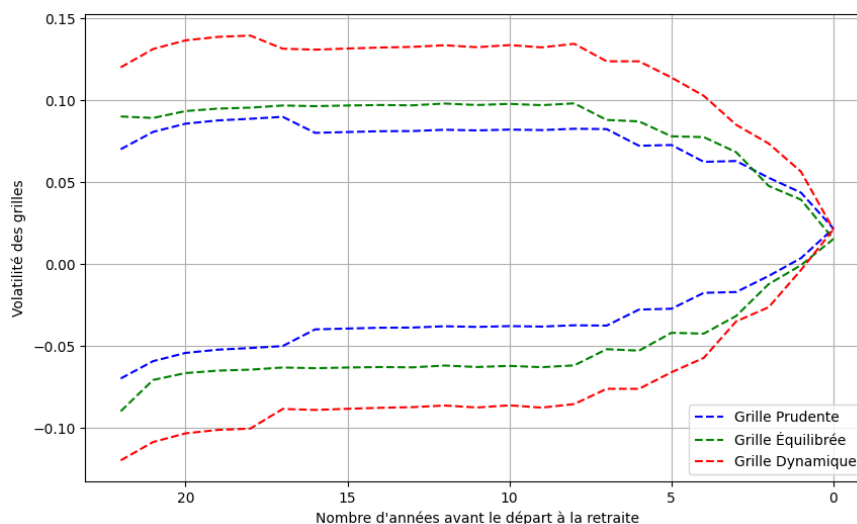


Figure 27 : Volatilité des grilles d'allocations en fonction du nombre d'années avant le départ à la retraite

Le graphique ci-dessus illustre clairement la disparité de structure entre les trois grilles d'allocation. On constate que l'objectif principal est atteint : la grille prudente affiche une volatilité nettement plus faible, tandis que la grille dynamique présente une volatilité plus élevée, traduisant ainsi leur niveau de risque respectif. La grille équilibrée, quant à elle, se positionne entre ces deux extrêmes. Par ailleurs, il apparaît que la part allouée aux fonds euros dans la grille prudente est particulièrement importante, ce qui s'explique par l'historique des données sélectionnées et par un rendement du fonds euros particulièrement attractif. Dans la section suivante, nous nous attarderons sur l'analyse des rendements générés par ces différentes grilles.

5.3.3 Impact du choix de la grille d'allocation

Après avoir brièvement analysé la constitution des grilles générées dans la partie précédente, il est désormais pertinent d'examiner leur impact sur la carrière d'un adhérent. Pour cela, nous reprendrons le même exemple utilisé précédemment afin d'assurer une continuité dans l'analyse et nous l'appliquerons aux secondes grilles générées.

	Grille prudente	Grille équilibrée	Grille dynamique
Capital Constitutif	119 029,17 €	110 425,13 €	116 738,70 €
Rente annuelle	3 771,48 €	3 498,86 €	3 698,91 €

Tableau 35 : Capital constitutif et rente lors du départ en retraite suivant la grille choisie

Le Tableau 35 : Capital constitutif et rente lors du départ en retraite suivant la grille choisie s'intéresse à l'influence de la grille d'allocation sur l'évolution de l'épargne

accumulée au fil des années, ainsi que sur la rente viagère acquise au moment du départ à la retraite.

Les résultats obtenus sont une nouvelle fois surprenants, avec la grille dite prudente qui surperforme les deux autres grilles d'allocations.

En effet, la grille prudente consacre une part significative de son allocation au fonds euros, qui demeure le principal moteur de la performance des différentes grilles.

Examinons maintenant la performance de Dietz des grilles sur l'ensemble de la période, afin de mieux comprendre l'impact de notre historique sur les résultats obtenus dans le cadre de cet exemple. Cette analyse nous permettra de mesurer de manière plus précise l'effet des choix d'allocation et des flux de trésorerie, tout en tenant compte de la manière dont les conditions de marché passées influencent les rendements et la stabilité des grilles d'allocation au fil du temps.

	Grille prudente	Grille équilibrée	Grille dynamique
Performance de Dietz	2,15 %	1,87 %	2,08 %

Tableau 36 : Performance de Dietz annualisée des grilles par profil de risque

La performance de Dietz vient confirmer les résultats obtenus précédemment.

5.3.4 Sensibilité des grilles à un choc financier

Reproduisons les chocs de marché appliqués en début de partie, qui avaient permis de mettre en évidence l'intérêt de la désensibilisation progressive. Cette fois, nous appliquerons un choc à 8 ans du départ à la retraite de l'assuré, une période charnière où l'épargne accumulée commence à être significative, mais où une exposition aux actifs risqués subsiste encore.

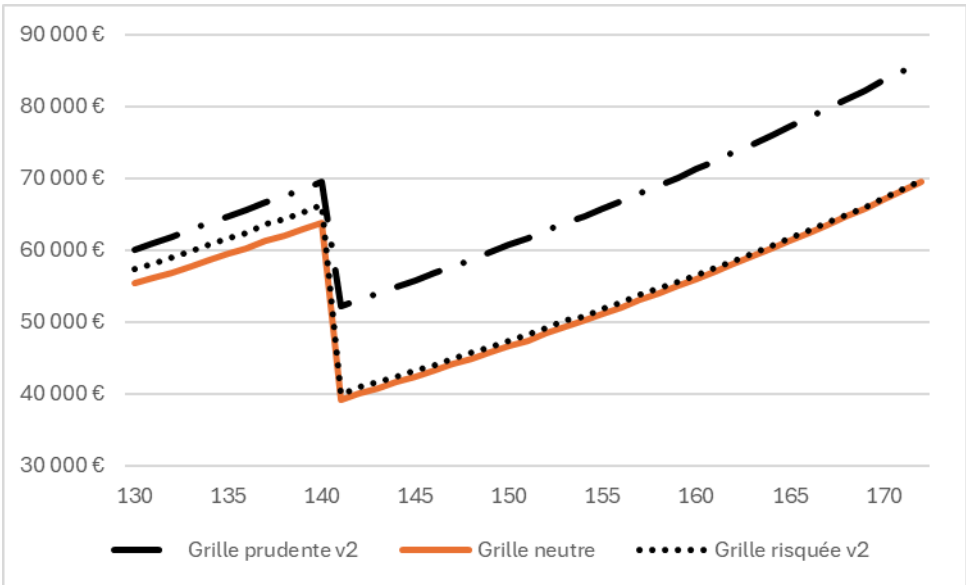


Figure 28 : Evolution de l'épargne sur les 14 dernières années d'un adhérent en fonction de la grille choisie

On remarque que la grille prudente parvient à mieux absorber le choc que la grille risquée, ce qui met en évidence la résilience des portefeuilles moins exposés aux actifs volatils. À l'inverse, la grille risquée, qui surperformait la grille neutre avant le choc, subit davantage l'impact financier, ce qui aboutit à une performance comparable à celle de la grille neutre.

5.3.5 Limites et pistes d'amélioration

Dans un premier temps, la création des grilles d'allocation repose actuellement sur des projections basées sur les performances des quatre dernières années. Toutefois, une telle approche pourrait gagner en pertinence si elle était continuellement réajustée au fil du temps. En effet, les marchés financiers sont en perpétuelle évolution, et les conditions actuelles peuvent ne pas être représentatives de celles qui prévaudront dans les années à venir. Par conséquent, il serait pertinent de reconstituer régulièrement les grilles d'allocation, en tenant compte des nouvelles données économiques et des variations des rendements. Une mise à jour périodique permettrait ainsi de mieux s'adapter aux dynamiques du marché et de garantir que l'allocation reste alignée avec le profil de risque des assurés, même en cas de changements de conditions de marché.

Par ailleurs, une limite importante de notre modèle tient au fait que la performance des fonds actions sur la période étudiée s'est révélée relativement faible, particulièrement au regard de leur niveau de volatilité. Bien que les actions soient historiquement perçues comme des actifs offrant des rendements supérieurs sur le long terme, les données récentes mettent en évidence une corrélation moins favorable entre risque et performance. Cela interroge la pertinence d'une stratégie d'allocation fortement exposée aux actions, dans la mesure où elle accroît la volatilité supportée par l'assuré sans garantir une rémunération à la hauteur du risque pris. Pour atténuer cette limite et améliorer la cohérence des résultats, il aurait été pertinent de retraiter les données postérieures à la crise du Covid-19. Cette démarche aurait permis de neutraliser l'effet exceptionnel de ce choc, dont l'impact tend à se répercuter de manière amplifiée dans les projections à long terme, notamment sur l'horizon de 43 ans utilisé.

De plus, il serait peut-être pertinent d'élargir l'analyse des actifs au-delà de leurs seuls rendements et volatilités historiques. En effet, les classes d'actifs, telles que les actions et les obligations, ont des comportements différents selon les phases économiques. Par exemple, les obligations tendent à offrir une plus grande stabilité et une meilleure performance relative en période de volatilité des marchés financiers, contrairement aux actions qui peuvent être plus sensibles aux cycles économiques. Par conséquent, intégrer une analyse plus fine des classes d'actifs, en prenant en compte non seulement leur rendement et leur volatilité, mais aussi les conditions économiques globales, permettrait d'améliorer la pertinence et la résilience des grilles d'allocation sur le long terme.

Dans un deuxième temps, il aurait également été pertinent de reconsidérer l'hypothèse de rendement appliquée au fonds en euros. En effet, lors de la construction des grilles d'allocation de Gedeon, ce support était déjà en vigueur chez l'assureur. Cette

antériorité a permis de bénéficier rapidement de rendements relativement élevés, grâce à un mécanisme de lissage et de redistribution progressive de la participation aux bénéfices accumulés les années précédentes. À l'inverse, si l'on avait supposé que le fonds en euros eût été créé en même temps que le PER Gedeon, les premières années auraient vraisemblablement affiché des rendements plus modestes, du fait de l'absence de réserve préexistante. Cette hypothèse aurait donc eu un impact à la baisse sur la performance globale projetée des allocations.

Dans un troisième temps, il convient de souligner que le choix des modèles utilisés dans l'élaboration des grilles d'allocation peut grandement influencer les résultats obtenus. En l'absence de modèles parfaits, chaque approche présente des biais ou des hypothèses spécifiques qui peuvent avoir un impact significatif sur les projections. À cet égard, il serait pertinent d'envisager l'utilisation de plusieurs modèles. La comparaison des résultats issus de ces différents modèles permettrait d'obtenir des projections plus robustes, moins sensibles aux hypothèses de départ et mieux adaptées aux incertitudes des marchés financiers. Cette pluralité d'approches offrirait ainsi une vision plus complète et moins biaisée des trajectoires possibles pour l'épargne des assurés.

Dans un quatrième temps, la mise en place de questionnaires précis pour évaluer le profil de risque des assurés pourrait constituer un véritable levier d'amélioration. Bien que certains assurés puissent affirmer avoir une forte tolérance au risque, il est souvent observé que leur appétence pour la prise de risques est en réalité plus limitée. Des outils permettant d'évaluer plus finement le profil psychologique et les comportements face au risque permettraient non seulement de mieux cerner les attentes des assurés, mais aussi d'adapter les grilles d'allocation en conséquence. De plus, ces questionnaires offriraient la possibilité d'ajuster les "vues" des assurés en fonction de leur profil de risque. À l'heure actuelle, les calculs sont réalisés en supposant une approche symétrique, ce qui pourrait être révisé pour tenir compte d'une asymétrie plus marquée dans les préférences et aversions au risque. Une telle précision dans l'évaluation du profil de risque pourrait conduire à des grilles d'allocation plus adaptées et davantage personnalisées.

Enfin, il aurait été judicieux d'intégrer l'ensemble des aléas susceptibles d'affecter la trajectoire professionnelle d'un adhérent durant la phase de constitution de l'épargne. À titre d'exemple, la prise en compte d'une probabilité de décès avant le départ à la retraite aurait permis de mieux modéliser les interruptions potentielles du contrat. De même, l'introduction d'une probabilité de départ de l'entreprise aurait été pertinente, dans la mesure où un tel événement mettrait fin aux versements périodiques effectués par l'employeur. L'intégration de ces variables aurait ainsi permis de renforcer la robustesse et le réalisme des projections effectuées.

6. CONCLUSION

Le PERO représente un outil fondamental dans la gestion de la retraite des salariés, notamment par sa dimension obligatoire. En effet, ce produit touche une population diverse, allant des salariés les plus avertis aux moins intéressés. La création de grilles d'allocations adaptées aux profils de risque des assurés constitue un moyen efficace d'impliquer ces derniers dans la gestion de leur épargne. En offrant la possibilité de choisir entre des profils de risque variés, allant des plus sécurisés aux plus risqués, l'objectif est d'offrir à chaque assuré un plan qui réponde à ses attentes et à son appétence pour l'investissement.

Ce mémoire a permis d'explorer en profondeur la notion d'allocation d'actifs au sein d'un PERO, en mettant en lumière les stratégies d'investissement à adopter selon les profils de risque des assurés. L'objectif principal de ce travail était d'apporter à Gedeon les clés techniques, à travers une approche méthodologique rigoureuse, afin de lui permettre de challenger de manière pertinente les différentes grilles d'allocation proposées par les assureurs. L'une des conclusions majeures de cette étude réside par ailleurs dans la mise en évidence de l'importance de la retraite supplémentaire pour améliorer le taux de remplacement, notamment dans certaines professions telles que celle d'actuaire, où ce taux avoisine 50 % lorsqu'on se limite à la retraite de base et complémentaire. Ce faible niveau de remplacement confère aux produits d'épargne retraite un rôle stratégique, tant pour les entreprises souhaitant renforcer leur attractivité que pour celles désireuses de fidéliser leurs talents.

La gestion des gains et la sécurisation progressive de l'épargne au sein des produits d'épargne retraite ont constitué des éléments clés de cette étude. En effet, sur une carrière complète, les marchés financiers, historiquement haussiers, permettent une augmentation du capital au fil du temps, contribuant ainsi à l'accroissement de l'épargne. Cette dynamique permet aux assurés de bénéficier de l'évolution favorable des marchés tout en amortissant les éventuelles fluctuations proches du départ en retraite. Toutefois, l'analyse a révélé que les grilles d'allocation varient fortement selon le profil de chaque assuré, notamment entre ceux qui privilégient la sécurité et ceux qui sont plus enclins à prendre des risques. Cette diversité peut parfois créer des dilemmes pour les assurés, notamment pour ceux qui hésitent entre deux profils de risque. Il devient dès lors essentiel de bien les accompagner dans le choix de leur grille d'allocation afin de leur fournir les informations nécessaires à une prise de décision éclairée, en prenant en compte les conséquences sur la performance de leur épargne.

Par ailleurs, pour les assurés qui choisissent de partir en retraite plus tôt que prévu, la sécurisation de leur fonds n'est pas toujours totalement finalisée. Cela les expose encore à une certaine volatilité des marchés, ce qui pourrait impacter négativement la valeur de leur épargne à la sortie. Cette observation démontre la nécessité d'ajuster

constamment les grilles d'allocation en fonction des moments clés de la vie professionnelle et des horizons de départ à la retraite des assurés.

Il est à noter que l'étude de la rentabilité des versements volontaires au sein du PERO aurait constitué un complément intéressant à ce travail. La prise en compte de leur déduction à l'entrée, ainsi que leurs impacts sur l'imposition à la sortie, aurait permis d'ajouter une dimension fiscale à l'analyse de l'épargne retraite.

En somme, ce mémoire a permis de démontrer l'importance d'un modèle flexible et personnalisé de gestion d'épargne retraite, où la diversification des allocations en fonction des profils de risque des assurés joue un rôle central. Si ce produit est bien géré et que les stratégies d'allocation sont adaptées à la situation de chaque assuré, le PERO peut devenir un véritable atout pour optimiser la préparation de la retraite.

7. BIBLIOGRAPHIE

- Allaj, E. (2013). The Black–Litterman model : a consistent estimation of the parameter τ . *Financial Markets and Portfolio Management*.
- Autorité des marchés financiers. (2023, 2 1). *Actualités, mises en garde...* Récupéré sur amf-france: <https://www.amf-france.org/fr/espace-epargnants/actualites-mises-en-garde/le-document-dinformations-cles-dic-est-desormais-generalise-tous-les-placements-collectifs#:~:text=Entr%C3%A9e%20en%20application%20en%20janvier,souscription%20d'un%20placement%20col>
- Bachelier, L. (1900). *Théorie de la spéculation*.
- Black, F., & Litterman, R. (1992). Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, 673-654.
- Dorobantu, D. (2021). Gestion de portefeuille. *Modele de Markowitz*.
- Dorobantu, D. (2021). Gestion de portefeuille. *MEDAF*.
- Dorobantu, D. (2021). Gestion de portefeuille. *Modèle de Black-Litterman*.
- INSEE. (2021, 02 09). *Inflation / Taux d'inflation*. Récupéré sur [insee.fr](https://www.insee.fr).
- legifrance. (2024, 7 6). *Arrêté du 1er juillet 2024 modifiant l'arrêté du 7 août 2019 portant application de la réforme de l'épargne retraite*. Récupéré sur [www.legifrance.gouv.fr](https://www.legifrance.gouv.fr/jorf/id/JORFTEXT000049880444): <https://www.legifrance.gouv.fr/jorf/id/JORFTEXT000049880444>
- Litterman, R., & Scheinkman, J. (1991). Common factors affecting bond returns. *Goldman Sachs*.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 77-99.
- O'Toole, R. (2017). The Black-Litterman Model: Active Risk. *Northfield 29th Annual Research*.
- Planchet, F., & Thérond, P. (2005). Simulations de trajectoires de processus continus. *Belgian Actuarial Bulletin*.
- Roncalli, T. (1998). *La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique*. Thèse de l'université Montesquieu-Bordeaux IV.
- Sharpe, W. (1964). Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of. *Journal of Finance*.

Turo, J., Ungar, S., & Huang, C. (2009). *Filtering the interest rate curve : The MENIR framework*.

Windcliff, H., & Boyle, P. (2003). *THE $1/n$ PENSION INVESTMENT PUZZLE*. University of Waterloo.

8. LISTE DES FIGURES

Figure 1 : Convergence de l'estimation de Monte Carlo pour l'actif IE000E66LX20.....	6
Figure 2 : Ajustements et projection des taux zéros-coupons.....	7
Figure 3 : Grilles d'allocations prudente (à gauche) et dynamique (à droite) générées....	8
Figure 4 : Volatilité des grilles d'allocations en fonction du nombre d'années avant le départ à la retraite.....	9
Figure 1 : Convergence of the Monte Carlo estimate for asset IE000E66LX20.....	11
Figure 2 : Zero-coupon rate adjustments and projections.....	12
Figure 3 : Prudent (left) and risky (right) allocation grids generated.....	13
Figure 4 : Volatility of benefit schedules based on the number of years before retirement.....	14
Figure 8 : Panorama de la retraite supplémentaire après la loi Pacte.....	6
Figure 9 : Composition du fonds euros.....	16
Figure 10 : Rendement annuel du fonds euros depuis 2015.....	16
Figure 11 : Variation des VL des différents fonds d'investissement depuis août 2020....	17
Figure 12 : Reconstruction par régression affine des VL à partir du benchmark.....	18
Figure 13 : Reconstruction par GLM avec une distribution gaussienne des VL à partir du benchmark.....	21
Figure 14 : Comparaison des VL obtenues par régression affine et par GLM (distribution gaussienne).....	22
Figure 15 : Variation des VL pour les différentes grilles proposées.....	22
Figure 16 : Ajustements et projection des taux zéros-coupons.....	33
Figure 17 : Convergence de l'estimation de Monte Carlo pour l'actif FR0011637164 à partir de Black & Scholes.....	36
Figure 18 : Convergence de l'estimation de Monte Carlo pour l'actif FR0011637164 à partir de la méthode des variables antithétiques (Black & Scholes).....	37
Figure 19 : Convergence de l'estimation de Monte Carlo pour l'actif IE000E66LX20.....	38
Figure 20 : Chocs réalisé à 27 ans du départ à la retraite.....	54
Figure 21 : Chocs réalisé à 7 ans du départ à la retraite.....	54
Figure 22 : Grille Gedeon par type d'actifs adaptée au profil de risque prudent.....	69
Figure 23 : Grille Gedeon par type d'actifs adaptée au profil de risque dynamique.....	70
Figure 24 : Grille Gedeon par type d'actifs adaptée au profil de risque prudent v2.....	71
Figure 25 : Grille Gedeon par type d'actifs adaptée au profil de risque dynamique v2..	71
Figure 26 : Volatilité des grilles d'allocations en fonction du nombre d'années avant le départ à la retraite.....	72
Figure 27 : Evolution de l'épargne sur les 14 dernières années d'un adhérent en fonction de la grille choisie.....	73

9. LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 : Hypothèses de carrières.....	7
Tableau 2 : Résultats de la projection.....	8
Tableau 3 : Capital constitutif et rente lors du départ en retraite suivant la grille choisie	9
Tableau 1 : Career assumptions	12
Tableau 2 : Résultats de la projection.....	13
Tableau 3 : Constituent capital and annuity on retirement according to the chosen grid	14
Tableau 4 : Les différentes sources d'alimentation du PERO.....	7
Tableau 5 : Part imposable en fonction de l'âge au premier arrérage.....	9
Tableau 6 : Les intervalles de volatilité correspondants aux différentes mesures du risque de marché.....	13
Tableau 7 : Matrice de calcul du SRI à partir de la mesure du risque de marché et de la mesure du risque de crédit.....	14
Tableau 8 : Informations générales des fonds constituant les différentes grilles.....	17
Tableau 9 : Tracking error obtenu par régression affine	19
Tableau 10 : RMSE du GLM suivant la distribution choisie.....	20
Tableau 11 : Tracking error obtenu par GLM.....	21
Tableau 12 : Performance cumulée et performance de Dietz modifiée de 2020 à 2023 pour la grille Gedeon	24
Tableau 13 : Volatilité de Dietz modifiée de 2020 à 2023 pour la grille Gedeon	25
Tableau 14 : Composition des fonds obligataires au sein du PERO.....	32
Tableau 15 : Comparaison des résultats obtenus à partir de Black & Scholes et de la méthode des variables antithétiques (Black & Scholes).....	37
Tableau 16 : Récapitulatif des projections réalisées sur l'ensemble du portefeuille.....	41
Tableau 17 : Probabilité que la grille Gedeon perde de la valeur entre le premier investissement et la liquidation.....	42
Tableau 18 : Probabilité que la grille Gedeon perde de la valeur sur une carrière complète	43
Tableau 19 : Probabilité que la grille Gedeon perde de la valeur sur une carrière complète en prenant en compte l'inflation.....	43
Tableau 20 : Taux de cotisations à l'AGIRC-ARRCO suivant la tranche de rémunération en phase de constitution.....	45
Tableau 21 : Hypothèses de carrières	47
Tableau 22 : Hypothèses d'investissements	47
Tableau 23 : Hypothèses de projection.....	48
Tableau 24 : Résultats de la projection	48
Tableau 25 : Sensibilité de la rente issue du PERO en phase de constitution.....	50
Tableau 26 : Taux d'accroissement calculé à partir d'une variation de +/- 0,10 % du salaire	50
Tableau 27 : Sensibilité de la rente issue du PERO en phase de restitution.....	51

Tableau 28 : Rentabilité attendue annualisée pour un adhérent averse au risque à 20 ans de son départ à la retraite.....	61
Tableau 29 : Vue appliquée selon la classification du fonds d'investissement par profil de risque.	62
Tableau 30 : Grille Gedeon des allocations en pourcentage adaptée au profil de risque prudent.....	68
Tableau 31 : Grille Gedeon des allocations en pourcentage adaptée au profil de risque dynamique	68
Tableau 32 : Capital constitutif et rente lors du départ en retraite suivant la grille choisie	72
Tableau 33 : Performance de Dietz annualisée des grilles par profil de risque	73
Tableau 34 : Frais courants par fonds d'investissements	85
Tableau 35 : Grille Gedeon prudente v2	89
Tableau 36 : Grille Gedeon risquée v2.....	89

10. ANNEXES

Preuve : Calibration par maximum de vraisemblance

Par hypothèse, nous avons :

$$x_t | x_s \sim \mathcal{N} \left(x_s e^{-\mu(t-s)} + x_\infty (1 - e^{-\mu(t-s)}), \frac{\sigma^2}{2\mu} * (1 - e^{-2\mu(t-s)}) \right)$$

$x_{t+1} | x_t$ est :

$$f_\theta(x_{t+1} | x_t) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_{t+1}-a_t)^2}{2b^2}}$$

Avec :

- $a_t = x_s e^{-\mu(t-s)} + x_\infty (1 - e^{-\mu(t-s)})$
- $b^2 = \frac{\sigma^2}{2\mu} * (1 - e^{-2\mu(t-s)})$

Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ des observations de x_t , nous pouvons écrire la vraisemblance de l'échantillon :

$$L(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=0}^{n-1} f_\theta(x_{k+1} | x_k)$$

En passant au logarithme de la vraisemblance, nous obtenons :

$$\ln(L(x_0, x_1, \dots, x_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(f_\theta(x_{k+1} | x_k))$$

$$\ln(L(x_0, x_1, \dots, x_n)) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n * \ln(b) - \frac{1}{2b^2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - a_k)^2$$

De plus, le maximum de vraisemblance est atteint lorsque les dérivées partielles s'annulent i.e :

$$\frac{\partial \ln(L(\theta))}{\partial x_\infty} \propto \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k e^{-\mu(t-s)} - x_\infty * (1 - e^{-\mu(t-s)})) = 0$$

$$\Rightarrow x_\infty = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k e^{-\mu(t-s)})}{n(1 - e^{-\mu(t-s)})}$$

$$\frac{\partial \ln(L(\theta))}{\partial \mu} \propto \sum_{k=0}^{n-1} ((x_{k+1} - x_\infty)(x_k - x_\infty) - e^{-\mu(t-s)}(x_k - x_\infty)^2) = 0$$

$$\Rightarrow \mu = -\frac{1}{t-s} \ln \left(\frac{\sum_{k=0}^{n-1} ((x_{k+1} - x_\infty)(x_k - x_\infty))}{\sum_{k=0}^{n-1} (x_k - x_\infty)^2} \right)$$

$$\frac{\partial \ln(L(\theta))}{\partial b} = \frac{n}{b} - \frac{1}{b^3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(x_{k+1} - x_{\infty} - e^{-\mu(t-s)} * (x_k - x_{\infty}) \right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(x_{k+1} - x_{\infty} - e^{-\mu(t-s)} * (x_k - x_{\infty}) \right)^2$$

En simplifiant et en insérant les notations suivantes :

- $S_x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i$
- $S_y = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}$
- $S_{xx} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2$
- $S_{xy} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i * x_{i+1}$
- $S_{yy} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}^2$

Nous constatons dans ces résolutions que les solutions sont interdépendantes. Toutefois, x_{∞} et μ sont indépendants de b . Par conséquent, la connaissance de x_{∞} ou μ permet de déduire la valeur de l'autre, ce qui nous conduit ensuite à déterminer b .

$$x_{\infty} = \frac{S_y - e^{-\mu(t-s)} S_x}{n(1 - e^{-\mu(t-s)})}$$

$$\mu = -\frac{1}{t-s} \ln \left(\frac{S_{xy} - x_{\infty} S_x - x_{\infty} S_y + n x_{\infty}^2}{S_{xx} - 2x_{\infty} S_x + n x_{\infty}^2} \right)$$

On se retrouve alors avec un système à deux équations et deux inconnus.

$$x_{\infty} = \frac{S_y - e^{\frac{1}{t-s} \ln \left(\frac{S_{xy} - x_{\infty} S_x - x_{\infty} S_y + n x_{\infty}^2}{S_{xx} - 2x_{\infty} S_x + n x_{\infty}^2} \right) (t-s)} S_x}{n \left(1 - e^{\frac{1}{t-s} \ln \left(\frac{S_{xy} - x_{\infty} S_x - x_{\infty} S_y + n x_{\infty}^2}{S_{xx} - 2x_{\infty} S_x + n x_{\infty}^2} \right) (t-s)} \right)}$$

$$\mu = \frac{S_y - \left(\frac{S_{xy} - x_{\infty} S_x - x_{\infty} S_y + n x_{\infty}^2}{S_{xx} - 2x_{\infty} S_x + n x_{\infty}^2} \right) S_x}{n \left(1 - \frac{S_{xy} - x_{\infty} S_x - x_{\infty} S_y + n x_{\infty}^2}{S_{xx} - 2x_{\infty} S_x + n x_{\infty}^2} \right)}$$

$$n * x_{\infty} = \frac{S_y (S_{xx} - 2x_{\infty} S_x + n x_{\infty}^2) - S_x (S_{xy} - x_{\infty} S_x - x_{\infty} S_y + n x_{\infty}^2)}{(S_{xx} - 2x_{\infty} S_x + n x_{\infty}^2) - (S_{xy} - x_{\infty} S_x - x_{\infty} S_y + n x_{\infty}^2)}$$

$$n * x_{\infty} = \frac{(S_y S_{xx} - S_x S_{xy}) + x_{\infty} (S_x^2 - S_x S_y) + n x_{\infty}^2 (S_y - S_x)}{(S_{xx} - S_{xy}) + x_{\infty} (S_y - S_x)}$$

$$n * x_{\infty} (S_{xx} - S_{xy}) + n x_{\infty}^2 (S_y - S_x) = (S_y S_{xx} - S_x S_{xy}) + x_{\infty} (S_x^2 - S_x S_y) + n x_{\infty}^2 (S_y - S_x)$$

$$x_{\infty} (n(S_{xx} - S_{xy}) - (S_x^2 - S_x S_y)) = S_y S_{xx} - S_x S_{xy}$$

$$x_{\infty} = \frac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{n(S_{xx} - S_{xy}) - (S_x^2 - S_x S_y)}$$

Finalement, les estimateurs du maximum de vraisemblance sont :

$$\hat{x}_{\infty} = \frac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{n(S_{xx} - S_{xy}) - (S_x^2 - S_x S_y)}$$

$$\hat{\mu} = -\frac{1}{t-s} \ln \left(\frac{S_{xy} - x_{\infty} S_x - x_{\infty} S_y + n x_{\infty}^2}{S_{xx} - 2x_{\infty} S_x + n x_{\infty}^2} \right)$$

$$\hat{b}^2 = \frac{2\lambda}{n(1 - e^{-2\mu(t-s)})} * A$$

Avec :

- $A = [S_{yy} - 2e^{-\mu(t-s)} S_{xy} + e^{-2\mu(t-s)} S_{xx} - 2x_{\infty}(1 - e^{-\mu(t-s)})(S_y - e^{-\mu(t-s)} S_x) + n x_{\infty}^2 (1 - e^{-\mu(t-s)})^2]$

Frais courants par fonds d'investissements

	Frais courants
LU0171310443	1,77 %
LU0389655811	1,74 %
LU2080768091	1,45 %
IE000E66LX20	0,53 %
FR0011637164	2,40 %
FR0014001FD5	2,13 %
LU0465917044	1,48%
LU1557118921	1,77 %
LU1280195881	0,94 %
LU0164100710	1,12 %
FR0014001H77	1,31 %

Tableau 37 : Frais courants par fonds d'investissements

Preuve : Les portefeuilles efficients ont le même ratio de Sharpe

Le portefeuille M et P étant efficient, ils appartiennent tous les deux à la frontière efficiente, impliquant :

$$\mu_i = r_f + \sqrt{\Pi' \Sigma^{-1} \Pi} * \sigma_i \quad \text{pour } i \in \{P, M\}$$

On en déduit :

$$\sqrt{\Pi' \Sigma^{-1} \Pi} = \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$$

Ainsi, en remplaçant dans l'équation précédente pour $i = P$, on obtient :

$$\mu_P = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M} * \sigma_P$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P} = \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$$

Preuve : Formule du MEDAF standard

Soit M le portefeuille de marché avec $w_M = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, optimal au sens de Markowitz. Le lagrangien du programme d'optimisation est :

$$\mathcal{L}(w, \lambda_1, \lambda_2) = w' \Sigma w - \lambda_1 (w' 1_{\mathbb{R}^n} - 1) - \lambda_2 (w' \mu - \mu_{obj})$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \nabla_w \mathcal{L}(w, \lambda_1, \lambda_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \Sigma w - \lambda_1 1_{\mathbb{R}^n} - \lambda_2 \mu &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{2 \Sigma w}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} 1_{\mathbb{R}^n} + \mu &= 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout i compris entre 1 et n , on a :

$$\Leftrightarrow \mu_i - \lambda - \theta \sum_{k=1}^n w_k \sigma_{i,k} = 0$$

Avec :

- $\lambda = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$
- $\theta = \frac{2}{\lambda_2}$

$$\Leftrightarrow \mu_i - \lambda = \theta \sum_{k=1}^n w_k \sigma_{i,k}$$

$$\text{Or : } \sum_{k=1}^n w_k \sigma_{i,k} = \sum_{k=1}^n w_k \text{Cov}(R_i, R_k) = \text{Cov}(R_i, \sum_{k=1}^n w_k R_k) = \text{Cov}(R_i, R_M) = \sigma_{i,M}$$

Ainsi,

$$\mu_i = \lambda + \theta \sigma_{i,M}$$

De plus, cette relation est vraie pour tout portefeuille efficient ou non. On peut donc l'appliquer au portefeuille de marché :

$$\mu_M = \lambda + \theta \sigma_M^2$$

On en déduit :

$$\theta = \frac{\mu_M - \lambda}{\sigma_M^2}$$

Finalement, nous obtenons :

$$\mu_i = \lambda + \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} (\mu_M - \lambda)$$

Preuve : Formule du MEDAF et taux sans risque

Soit f l'actif sans risque, non-corrélé avec M , cela implique :

$$\beta_f = \frac{\sigma_{f,m}}{\sigma_M^2} = 0$$

On remplace dans (2) pour déterminer λ , et on obtient :

$$r_f = \lambda$$

En remplaçant ensuite λ dans (2), on retrouve la formule standard du MEDAF.

Preuve : Portefeuille optimal de Markowitz

Intéressons-nous au programme d'optimisation suivant, pour un rendement objectif μ_{obj} donné, la proportion optimale de chaque actif est celle minimisant la variance globale du portefeuille.

$$\begin{cases} \min_{w \in \mathbb{R}^n} & w' \Sigma w \\ \text{s. c.} & w' 1_{\mathbb{R}^n} = 1 \\ & w' \mu = \mu_{obj} \end{cases}$$

Le portefeuille optimal est alors :

$$w^* = \frac{B - \mu_{obj}A}{BC - A^2} \Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n} + \frac{\mu_{obj}C - A}{BC - A^2} \Sigma^{-1} \mu$$

Avec :

- $A = 1_{\mathbb{R}^n}' \Sigma^{-1} \mu$
- $B = \mu' \Sigma^{-1} \mu$
- $C = 1_{\mathbb{R}^n}' \Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n}$

Le lagrangien du programme d'optimisation est :

$$\mathcal{L}(w, \lambda_1, \lambda_2) = w' \Sigma w - \lambda_1 (w' 1_{\mathbb{R}^n} - 1) - \lambda_2 (w' \mu - \mu_{obj})$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \nabla_w \mathcal{L}(w, \lambda_1, \lambda_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \Sigma w - \lambda_1 1_{\mathbb{R}^n} - \lambda_2 \mu &= 0 \\ w &= \frac{\lambda_1}{2} \Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n} + \frac{\lambda_2}{2} \Sigma^{-1} \mu \end{aligned} \quad (4)$$

En appliquant le lagrangien sur les deux contraintes, puis en prenant la transposée, on obtient :

$$1_{\mathbb{R}^n}' w = 1 \text{ et } \mu' w = \mu_{obj}$$

On remplace ensuite w dans les deux équations ci-dessus à partir de l'équation (3). De plus, en reprenant les notations de A , B et C explicité précédemment, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \frac{B - \mu_{obj} A}{BC - A^2} \\ \lambda_2 = 2 \frac{\mu_{obj} C - A}{BC - A^2} \end{cases}$$

Enfin, en remplaçant λ_1 et λ_2 dans (4), on retrouve l'équation du portefeuille optimal.

Preuve : Portefeuille optimal de Markowitz en présence d'un actif sans risque

Le lagrangien du programme d'optimisation est :

$$\mathcal{L}(w, \lambda) = w' \Sigma w - \lambda [w' (\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n}) + r_f - \mu_{obj}]$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \nabla_w \mathcal{L}(w, \lambda_1, \lambda_2) &= 0 \\ \Rightarrow 2\Sigma w - \lambda(\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n}) &= 0 \\ \Rightarrow w &= \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} (\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n}) \end{aligned} \quad (3)$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(w, \lambda) &= 0 \\ w' (\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n}) &= \mu_{obj} - r_f \end{aligned}$$

On remplace w :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} (\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n}) \right)' (\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n}) &= \mu_{obj} - r_f \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} &= \frac{\mu_{obj} - r_f}{(\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n})' \Sigma^{-1} (\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n})} \end{aligned}$$

On remplace une dernière fois dans (3), et on obtient le portefeuille optimal suivant :

$$w^* = \frac{\mu_{obj} - r_f}{(\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n})' \Sigma^{-1} (\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n})} \Sigma^{-1} (\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n})$$

Grilles Gedeon construite à partir d'un coefficient de diversification par type d'actifs

Années restantes	FR....164	FD....FD5	LU...443	LU....881	LU....921	LU....091	euros
22	8,6	12,9	8,6	25,8	8,7	13	22,4
21	8,5	12,8	8,5	25,4	8,5	12,8	23,5
20	8,4	12,6	8,4	25,2	8,5	12,7	24,2
19	8,4	12,6	8,4	25,1	8,4	12,6	24,5
18	8,3	12,5	8,3	24,8	8,3	12,5	25,3
17	8,2	12,3	8,2	24,5	8,2	12,3	26,3

16	8,1	12,1	8,1	24,2	8,1	12,1	27,3
15	8	12	8,1	24	8,1	12,1	27,7
14	7,8	11,9	8	23,7	7,9	11,8	28,9
13	7,8	11,7	7,9	23,4	7,8	11,7	29,7
12	7,7	11,5	7,7	23	7,7	11,5	30,9
11	7,6	11,4	7,7	22,8	7,6	11,4	31,5
10	7,5	11,4	7,6	22,6	7,6	11,3	32
9	7,5	11,3	7,6	22,5	7,5	11,2	32,4
8	7,4	11,2	7,5	22,3	7,4	11,2	33
7	7,1	10,7	7,2	21,4	7,1	10,7	35,8
6	6,6	10	6,7	19,9	6,7	9,9	40,2
5	6,1	9,2	6,1	18,2	6,1	9,1	45,2
4	5,3	8	5,4	16	5,4	8	51,9
3	4,4	6,6	4,4	13,1	4,4	6,6	60,5
2	3,3	5	3,4	10	3,4	5	69,9
1	1,2	1,9	1,3	14,7	1,2	1,8	77,9
0	0	0	0	0	0	0	100

Tableau 38 : Grille Gedeon prudente v2

Années restantes	FR....164	FD....FD5	LU...443	LU....881	LU....921	LU....091	euros
22	0	16,5	33,5	28,2	6,7	15,1	0
21	0	16,5	32,8	28,4	7	15,3	0
20	0	16,6	32,1	28,6	7,4	15,3	0
19	0	16,6	31,9	28,7	7,5	15,3	0
18	0	16,6	31,2	28,9	7,8	15,5	0
17	0	16,6	30,4	29,1	8,2	15,7	0
16	0	16,7	29,6	29,4	8,6	15,7	0
15	0	16,7	29,2	29,5	8,8	15,8	0
14	0,4	16,7	28,3	29,7	9	15,9	0
13	0,8	16,7	27,8	29,7	9,1	15,9	0
12	1,4	16,6	26,9	29,8	9,2	16,1	0
11	1,8	16,6	26,5	29,9	9,2	16	0
10	2,1	16,6	26,1	29,9	9,2	16,1	0
9	2,4	16,6	25,7	30	9,3	16	0
8	2,7	16,6	25,3	30	9,3	16,1	0
7	4,4	16,5	23	30,3	9,6	16,2	0
6	7,7	16,4	18,4	30,9	10	16,6	0
5	10,8	16,3	11	32,4	10,9	16,2	2,4
4	9,5	14,4	9,7	28,6	9,6	14,4	13,8
3	7,8	11,8	8	23,4	7,9	11,6	29,5
2	6	9	6,1	17,8	6	9	46,1
1	2,2	3,3	2,3	6,5	14	3,3	68,4
0	0	0	0	0	0	0	100

Tableau 39 : Grille Gedeon risquée v2