

**Mémoire présenté le :  
pour l'obtention du diplôme  
de Statisticien Mention Actuariat  
et l'admission à l'Institut des Actuares**

Par : Pauline Lonné

**Titre du mémoire : Modèles de taux et calibrages alternatifs au modèle LMM+ pour le GSE**

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de la  
filière :

Signature :

Entreprise :

Nom : CNP Assurances

Signature :

Directeur de mémoire en  
entreprise

Membres présents du jury de  
l'Institut des Actuares :

Signature :

Nom : Anouar HASSINE

Signature :

Invité :

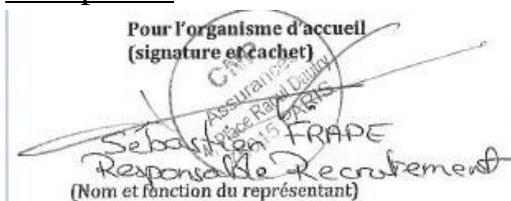
Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise  
en ligne sur un site de diffusion de  
documents actuariels (après expiration  
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable  
entreprise :

Pour l'organisme d'accueil  
(signature et cachet)



Sébastien FRAPE  
Responsable Recrutement  
(Nom et fonction du représentant)

Signature du candidat : *Plonne*



## Résumé

Mots-clés : Calibrage, Générateur de scénarios économiques, Impact, Market-consistency, Martingalité, Modèle de taux, Sensibilité

CNP Assurances utilise le modèle LMM+ pour la diffusion des taux nominaux au sein du scénario économique, dans le cadre de sa production S2 et prochainement IFRS17. Le modèle de taux E2FBK a été testé. Des sensibilités sur le modèle LMM+ et sur le modèle E2FBK ont été réalisés. Des tests techniques ont été nécessaires afin de vérifier que l'ensemble des étapes se déroulait correctement. Les calibrages de ces modèles ont été réalisés à la date du T4 2020, dans un environnement de taux bas. Les paramètres initiaux et les intervalles de ces paramètres de l'ensemble de cette étude sont issus d'un calibrage récent réalisé par Moody's avec ce modèle sur une situation économique proche dans le temps.

L'analyse des résultats des impacts quantitatifs porte exclusivement sur trois portefeuilles historiques de CNP Assurances qui représentent 90% de l'épargne individuelle de CNP Assurances. Seuls les scénarios des portefeuilles ayant des impacts significatifs ont été détaillés. De ce qui a été observé, le passage du modèle LMM+ au modèle E2FBK, a un impact sur l'Equity qui semble négligeable. De même les sensibilités sur le modèle LMM+ présentent des résultats satisfaisants.

La qualité d'un scénario de taux se valide selon deux critères : la martingalité et la market consistency. À noter que l'outil permettant de réaliser les tests de martingalité et de market consistency était déjà disponible. Le test de martingalité consiste à vérifier que sous la probabilité risque-neutre les prix des obligations zéro-coupon actualisés sont des martingales. Le test de market consistency consiste à vérifier que les écarts absolus entre les prix générés par le modèle et les prix de marché sont en dessous d'un certain seuil. Le test de market consistency du scénario E2FBK est moins bon que celui du LMM+ tout en restant correct. Pour les sensibilités sur le modèle E2FBK, il n'y a que la sensibilité 1 qui présente un résultat de test supérieur à celui du LMM+. Pour les sensibilités sur le modèle LMM+ le test de martingalité est bon mais plus faible que celui avec le modèle de référence. Quant au test de market consistency, les sensibilités sur le modèle E2FBK ont des résultats de test inférieurs à celui du LMM+. Les trois sensibilités sur le modèle LMM+ présentent des résultats de test légèrement meilleurs que le scénario LMM+.

Utiliser le modèle E2FBK semble donc envisageable de même pour les sensibilités sur le modèle LMM+. Cependant changer de modèle de taux chez une compagnie d'assurance nécessite beaucoup de réflexion d'études en amonts (impact sur le Taux de couverture, et sur l'ORSA) et est en cœur des sujets de R&D de la compagnie. Ce mémoire fait partie de la réflexion de CNP Assurances sur le sujet.

## Summary

Key words: Calibration, Economic scenario generators, Impact, Interest rate model, Market-consistency, Martingality, Sensibility

CNP Assurances uses the LMM+ model for the diffusion of nominal rates within the economic scenario, in the framework of its S2 production and soon IFRS17. The E2FBK rate model has been tested. Sensitivities on the LMM+ model and on the E2FBK model have been performed. Technical tests were necessary in order to verify that all the steps were carried out correctly. The calibrations of these models were performed at Q4 2020, in a low interest rate environment. The initial parameters and the ranges of these parameters for the entire study are taken from a recent calibration performed by Moody's with this model on a similar economic situation in time.

The analysis of the quantitative impact results focuses exclusively on three historical CNP Assurances portfolios which represent 90% of CNP Assurances individual savings. Only the scenarios of the portfolios with significant impacts have been detailed. The observations show that the switch from the LMM+ model to the E2FBK model has an impact on the Equity that seems negligible. Similarly, the sensitivities on the LMM+ model present satisfactory results.

The quality of a rate scenario is validated according to two criteria: martingality and market consistency. It should be noted that the tool for performing martingality and market consistency tests was already available. The martingality test consists in verifying that under the risk-neutral probability the prices of zero-coupon bonds are martingales. The market consistency test consists in verifying that the absolute differences between the prices generated by the model and the market prices are below a certain threshold. The market consistency test of the E2FBK scenario is not as good as the one of the LMM+, while remaining correct. For the sensitivities on the E2FBK model, only sensitivity 1 has a better test result than LMM+. For the sensitivities on the LMM+ model, the martingality test is good but weaker than the one with the reference model. As for the market consistency test, the sensitivities on the E2FBK model have lower test results than the LMM+. The three sensitivities on the LMM+ model have slightly better test results than the LMM+ scenario.

Therefore, using the E2FBK model seems feasible, as well as the sensitivities on the LMM+ model. However, changing the rate model for an insurance company requires a lot of upstream studies (impact on the coverage rate, and on the ORSA) and is at the heart of the company's research and development topics. This thesis is part of CNP Assurances' reflection on the subject.

Glossaire

<b>Acronyme</b>	<b>Signification</b>
AOA	Absence d'Opportunité d'Arbitrage
ATM	At The Market
BE	Best Estimate
CFA	Centre de Formation d'Apprentis
CV	Curriculum vitae
DTI	Direction Technique et de l'Innovation
E2FBK	Extended 2 Factor Black-Karasinski
GSE	Générateur de scénarios économiques
HW	Hull-White
ISUP	Institut de statistique de Sorbonne Université
LMM+ (ou SVDD LMM)	Stochastic Volatility Displaced Diffusion LIBOR Market Model
MPA	Model Point d'Actif
OATI	Obligation émise par l'État français et indexée sur l'inflation
OTM	Out Of The Market
T4	Trimestre 4
ZC	Zéro Coupon
K €	Milliers d'euros
M €	Millions d'euros
Mds €	Milliards d'euros

## Table des matières

<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>8</b>
<b>1. INTRODUCTION</b>	<b>9</b>
1.1 Contexte de travail et périmètre	9
1.1.1 Contexte de travail	9
1.1.2 Périmètre des activités du service	10
1.2 Problématique	12
1.3 Cadrage et tests techniques	12
1.3.1 Rappel macro processus de génération des scénarios chez CNP Assurances	12
1.3.2 Tests techniques et développements sur NEMO	13
<b>2. MODELES DE TAUX</b>	<b>14</b>
2.1 Modèle LMM+	14
2.2 Modèle E2FBK	16
<b>3. ANALYSES</b>	<b>17</b>
3.1 Calibrages réalisés sur le modèle LMM+	17
3.2 Calibrages réalisés sur le modèle E2FBK	20
3.2.1 Sensibilité 1	22
3.2.2 Sensibilité 2	22
3.2.3 Sensibilité 3	22
3.3 Comparaison des jeux de scénarios	23
3.3.1 Comparaison des scénarios du modèle E2FBK (de référence) et du modèle LMM+	23
3.3.2 Comparaison des scénarios de la sensibilité 1 sur le modèle E2FBK et le calibrage E2FBK de référence	23
3.3.3 Comparaison des scénarios de la sensibilité 2 sur le modèle E2FBK et le calibrage E2FBK de référence	24
3.3.4 Comparaison des scénarios de la sensibilité 3 sur le modèle E2FBK et le calibrage E2FBK de référence	25
3.3.1 Comparaison des scénarios de la sensibilité 1 sur le modèle LMM+ et le calibrage LMM+ de référence	26
3.3.2 Comparaison des scénarios de la sensibilité 2 sur le modèle LMM+ et le calibrage LMM+ de référence	27
3.3.3 Comparaison des scénarios de la sensibilité 3 sur le modèle LMM+ et le calibrage LMM+ de référence	28
3.4 Impacts quantitatifs des différents jeux de scénarios sur le périmètre Epargne	30
3.5 Analyse des impacts les plus significatifs	31
3.5.1 Scénario économique E2FBK (calibrage de référence)	31
3.5.2 Sensibilité 1 sur le modèle E2FBK	34

3.5.3 Sensibilité 2 sur le modèle E2FBK	36
3.5.4 Sensibilité 3 sur le modèle E2FBK	40
3.5.5 Sensibilité 1 sur le modèle LMM+	44
3.6 Comparaison des tests de validation	51
3.6.1 Critères de validation d'un GSE	51
3.6.2 Test de market consistency	53
3.6.3 Tests de validation avec l'outil de CNP Assurances	54
<b>4. CONCLUSIONS</b>	<b>56</b>
<b>5. BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>58</b>
<b>6. ANNEXES</b>	<b>59</b>
6.1 Tests de martingalités	59
6.1.1 Test du déflateur	59
6.1.2 Test de martingalité ZC 10Y	61

# REMERCIEMENTS

Tout d'abord j'adresse mes remerciements à la Direction technique et de l'innovation (DTI) pour leur accueil, leur professionnalisme, et la bonne ambiance au sein de cette direction. Je remercie tout particulièrement Cédric Gaillard et Yann Desserprit qui m'ont aidée à m'intégrer à l'équipe. Leur générosité et leur disponibilité ont été d'un grand soutien.

Je souhaiterais également remercier mon tuteur d'alternance Anouar HASSINE pour le temps qu'il a consacré à ma formation et à l'encadrement de mon mémoire. Sa disponibilité, son savoir-faire et son expertise m'ont permis de mieux comprendre les générateurs de scénarios économiques et le fonctionnement global d'un modèle ALM.

Je remercie enfin toutes les personnes qui ont relu et donné un avis critique et constructif sur ce mémoire.

# 1. INTRODUCTION

## 1.1 Contexte de travail et périmètre

### 1.1.1 Contexte de travail

Le modèle d'affaires de CNP Assurances est multi partenarial. Le Groupe conçoit des solutions de protection des personnes qui sont ensuite distribuées par ses partenaires. Ces partenaires sont des réseaux bancaires, des établissements financiers ou encore des acteurs de la gestion de patrimoine. En Europe, c'est Santander Finance qui distribue l'assurance de crédit à la consommation et les solutions de prévoyance de CNP Assurances.

Je réalise ce mémoire au sein de CNP Assurances à la DTI. Cette direction est en charge de :

- l'inventaire technique et les calculs prospectifs sur l'épargne et la retraite,
- l'inventaire technique et les calculs prospectifs sur la prévoyance & protection,
- la consolidation et du suivi des filiales,
- la stratégie marketing et l'innovation produits,
- l'organisation et le pilotage des départements techniques,
- du support fonctionnel sur les outils complexes et Data,
- la technique produit et la data science.

Les principales directions autour de la DTI sont :

- la direction investissements ingénierie et clientèle qui gère les investissements et le patrimoine de la clientèle,
- l'audit interne c'est-à-dire tout ce qui concerne le contrôle des activités de l'entreprise,
- CNP Clients Connectes, créateur de solutions on line,
- la direction du développement des partenariats qui est en charge des partenariats
- le secrétariat général, il a en charge les achats, l'environnement de travail, la fiscalité, la RSE, la stratégie corporate, etc.
- la direction des ressources humaines,
- la direction des partenariats internationaux, responsable de la gestion des partenariats à l'international
- la direction du marketing stratégique, de la communication et du mécénat, qui gère le marketing, la communication interne et du sponsoring,
- la direction des risques groupe, qui gère le risque et la prudence associée,
- la direction financière groupe qui est en charge de la comptabilité, des normes comptables, des relations avec les investisseurs, du projet IFRS 17 et de l'actuariat,
- et la DECSI, la direction des solutions informatiques

Je suis dans le département Supports outils et data qui est sous la responsabilité de Yann DESSERPRIT. Ce département est composé de deux équipes :

- Expertise actuarielle en charge de la production et de la R&D sur les GSE, de la création des MPA et de quelques études ALM, et de la production des lois biométriques,

- Données et Systèmes techniques (Base de données, SAS, Model Point de passif).

Mon alternance s'est déroulée au sein de l'équipe de l'expertise actuarielle.

### 1.1.2 Périmètre des activités du service

Le calcul du Best Estimate impose de modéliser les périmètres d'activité du groupe (Epargne, Retraite, Prévoyance, etc...) à l'aide de modèle ALM ou Passif seul. Les résultats sont ensuite agrégés par un module de consolidation qui permet de restituer le Best Estimate et la VIF du groupe. Les résultats issus des modules de consolidation ne seront pas étudiés dans le cadre de ce mémoire.

Les modèles ALM nécessitent des scénarios économiques, des Model Point de Passif et des Model Point d'Actif. Les scénarios économiques sont générés à l'aide de modèles risque neutre. Ces scénarios économiques sont utilisés pour valoriser les actifs adossés aux passifs assurantiels.

La constitution de Model Point d'actifs permet de faire le lien entre les actifs réels d'inventaire (équipe qui s'occupe du recalcul du prix de chaque actif détenu par CNP Assurances en date d'arrêté) et ceux modélisés. Elle s'effectue en deux grandes phases : la préparation du stock et la génération du stock d'actifs.

La préparation du stock permet de regrouper les différentes informations sur les actifs et d'en retraiter certaines. Les actifs sont alors présentés ligne à ligne à l'issue de cette étape. Ensuite, la génération du stock d'actifs consiste au retraitement de certaines lignes, notamment pour assurer la cohérence du stock initial avec des projections risque-neutre. Un de ces retraitements concerne la risque-neutralisation des instruments de taux et des produits dérivés. Ce processus permet au modèle financier d'être risque neutre et cohérent avec le prix de marché initial de l'actif.

Par exemple, pour risque neutraliser une obligation à taux fixe, **on modifie la valeur de remboursement** de manière à retrouver l'égalité entre la valeur actuelle des flux futurs d'une part et la valeur de marché des obligations (coupon-couru inclus) d'autre part et ensuite à calculer le taux actuariel à l'achat.

Les Modèles ALM projettent de manière simultanée l'actif et le passif ainsi que les interactions entre les flux d'actifs et de passifs.

Les GSE ont pour objectif de modéliser des scénarios économiques (taux, Action, inflation, Immobilier) à partir d'une situation économique et financière sur une date déterminée. **Les données de marché principalement utilisées** sont les suivantes **pour le modèle de taux** :

- une courbe de taux construite et publiée par l'EIOPA (CNP Assurances a également la capacité de construire la courbe à des dates différentes des dates de publication de l'EIOPA),
- des nappes de volatilités ATM et OTM des swaptions.

Une swaption payeuse est un contrat qui donne le droit à son détenteur d'entrer dans un swap payeur de strike (taux fixe)  $K$ , à la date  $T_\alpha$ , appelée maturité de la swaption. La durée du swap,

$T_\beta - T_\alpha$ , est appelée tenor. Dans le cas où le détenteur de la swaption paie (respectivement reçoit) le taux fixe  $K$ , on parle de swaption payeuse (respectivement receveuse).

Une nappe de volatilité est dite ATM, à la monnaie, si le prix d'exercice de l'option est égal au cours actuel du sous-jacent. Elle est dite OTM, hors de la monnaie, si le prix d'exercice de l'option est supérieur ou inférieure au cours actuel du sous-jacent.

Les critères permettant de valider les scénarios économiques sont les tests de martingalité et de market consistency. Les définitions de ces tests seront rappelées et ces derniers seront détaillés dans la section 3.5.1. *Critères de validation d'un GSE.*

## 1.2 Problématique

L'objet du mémoire est :

- d'étudier des modèles de taux alternatifs au LMM+ ou des calibrages alternatifs du modèle LMM+ dans un environnement de taux bas,
- de réaliser des sensibilités aux méta paramètres des modèles,
- de vérifier la qualité de la martingalité et de la market consistency sur les scénarios économiques pour chacun de ces jeux de scénarios,
- de mesurer les impacts sur le Best Estimate et la VIF à partir des modèles ALM sur le périmètre Epargne individuelle à l'aide de ces jeux de scénarios.

## 1.3 Cadrage et tests techniques

### 1.3.1 Rappel macro processus de génération des scénarios chez CNP Assurances

Quelques rappels sont nécessaires sur les outils / progiciels utilisés dans cette sous-partie par CNP Assurances.

NEMO est un progiciel de modélisation développé par CNP Assurance dont le langage de programmation est Matlab. NEMO permet de lancer des simulations GSE, ALM, Passif Seul, ou de risque neutralisation des model point d'actif.

Moody's Analytics est l'outil de calibrage, il permet le calibrage d'un modèle de taux via ses API et la maquette Excel.

Moody's Analytics Scenario Generator est l'outil de Génération des scénarios économiques.

Aujourd'hui, CNP Assurances utilise un modèle LMM+ pour la diffusion des taux nominaux au sein du scénario économique.

Un actuaire financier va extraire les données de marché pour construire la situation économique à date.

Puis à partir de la courbe des taux EIOPA (en univers Solvabilité 2) et la nappe de volatilité des swaptions (ATM et OTM), l'actuaire va calibrer à partir d'un outil Excel Moody's un modèle de taux.

Ensuite, ce calibrage est injecté dans un fichier d'hypothèses dans une simulation NEMO puis NEMO via son interface matlab va communiquer avec une API Moody's Analytics Scenario Generator pour générer le scénario économique à partir du calibrage. Le code sous NEMO chez CNP Assurances a été implémenté de manière en prendre charge uniquement le calibrage du modèle LMM+ en entrée des simulation GSE.

### 1.3.2 Tests techniques et développements sur NEMO

Les tests techniques ont donc consisté à vérifier que l'ensemble des étapes suivantes se déroulaient correctement :

- Changement de modèle de taux & calibrage
- Injection du calibrage dans une simulation GSE
- Risque neutralisation du MPA (avec branchement du GSE)
- Branchement du GSE au modèles ALM

Cette étude a rencontré quelques difficultés techniques. Lors de la génération des scénarios économiques des simulations sont tombées en erreur. Pour y remédier il a été nécessaire de faire un debug sous Matlab et de modifier une partie du code Matlab sous NEMO. Les points corrigés ne sont pas détaillés car ils n'apportent pas de valeur ajoutée au contenu de ce mémoire.

Cette phase de cadrage technique était importante car elle a permis de s'assurer qu'en changeant de modèle de taux, il était encore possible de produire un scénario économique et de le brancher à un modèle ALM pour produire des impacts sur le Best Estimate.

## 2. MODELES DE TAUX

A ce jour CNP assurances utilise le modèle de taux LMM+ dans le cadre de sa production S2 et prochainement IFRS17. Ci-dessous sont présentés les modèles traités dans cette étude.

### 2.1 Modèle LMM+

Le modèle LMM+ est un modèle de taux largement utilisé par les assureurs et banques/assureurs, dont CNP Assurances. La raison provient de sa capacité à reproduire des prix cohérents avec le marché pour plusieurs produits dérivés : les caps, les floors et les swaptions. Les caps et les swaptions étant les deux principaux marchés d'options sur les taux d'intérêt, il est important qu'un modèle puisse les traiter.

La dynamique du modèle LMM+ sous la probabilité spot Libor est la suivante :

$$dF_k(t) = (F_k(t) + \delta) \left( \left( \sum_{j=m(t)}^k \frac{\Delta(F_j(t)+\delta) \sum_{q=1}^2 \xi_j^q(t) \xi_k^q(t)}{1 + \Delta F_j(t)} \right) dt + \sum_{q=1}^{N_f} \xi_k^q(t) dZ^q(t) \right)$$

où

- $F_k(t)$  est la valeur en date  $t$  du taux forward associé à l'intervalle  $[T_k, T_{k+1}]$
- $Z$  est un mouvement brownien à  $N_f$  dimensions
- $\delta$  est un coefficient de déplacement : le Forward rate displacement, ce paramètre permet de générer les taux négatifs et ainsi de remédier au problème des taux explosifs

La fonction epsilon  $\xi_j^q(t)$  est détaillées ci-dessous.

La volatilité stochastique régie par un processus de variance  $V$  dynamisé par un processus de retour à la moyenne est :

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t)) dt + \sigma\sqrt{V(t)} dW(t) \quad \text{avec } \sigma_k(t) = \sqrt{V(t)} \times g_k(t)$$

où

- $\kappa$  est la vitesse de retour à la moyenne de la variance
- $\theta$  est la moyenne de long terme de la variance
- $\sigma$  est la volatilité de la variance
- $\rho$  est la corrélation entre les browniens des taux forward et de variance

La fonction de Rebonato  $g_k(t)$  est souvent utilisée conjointement avec un processus de volatilité stochastique pour reproduire de manière plus précise la dynamique observée sur le marché. En effet la fonction de Rebonato tient compte des variations de la volatilité au fil du temps en

modélisant la volatilité en fonction de facteurs tels que l'échéance du taux d'intérêt, le niveau actuel des taux d'intérêt, etc. Ce processus de volatilité stochastique est généralement modélisé par un processus de type Cox-Ingersoll-Ross (CIR)  $V(t)$ .

La structure de la volatilité est

$$\xi_j^q(t; (a, b, c, d, \kappa, \theta, \varepsilon, \rho)) = \sqrt{V(t)} g_j(t) \beta_j^q(t)$$

$$\text{où } g_j(t) = g_j(t; (a, b, c, d)) := (a + bT_{j-m(t)}) e^{-cT_{j-m(t)}} + d$$

$$\text{et } \beta_j^q(t) = (\beta_j^1(t), \beta_j^2(t)) \text{ avec } \beta_j^1(t)^2 + \beta_j^2(t)^2 = 1$$

Le paramètre  $a$  est un coefficient de translation. Une augmentation de ce paramètre implique une augmentation de la volatilité déterministe. Le paramètre  $b$  informe du niveau de la fonction de Rebonato et influe sur le point de courbure. Le paramètre  $c$  impacte la diffusion temporelle et notamment le point de changement de sens de variation de la fonction. Ce paramètre  $a$  donc une forte influence sur la forme générale de la fonction et va permettre de décrire le point de smile de volatilité des taux. Le paramètre  $d$  est un paramètre de translation de la fonction et constitue également la limite de la fonction de Rebonato. Il est intéressant de présenter un cas d'analyse sur l'influence de la fonction de Rebonato sur les volatilités simulées dans un scénario.

Les huit paramètres à calibrer du modèle LMM+ sont donc les suivants :

- $a, b, c$  et  $d$  (paramètres de la volatilité déterministe)
- $K$  : vitesse de retour à la moyenne de la variance
- $\theta$  : moyenne de long terme de la variance
- $\varepsilon$  : volatilité de la variance
- $\rho$  : corrélation

A noter également que CNP Assurances pourrait également calibrer son coefficient de déplacement mais CNP Assurances a retenu un coefficient fixe à travers des études ALM.

## 2.2 Modèle E2FBK

Le modèle E2FBK ou Black Karasinski à 2 facteurs est une extension du modèle Black Karasinski (BK) à 1 facteur.

En posant  $r'(t) = r(t) + \delta$ ,

où  $\delta$  est un paramètre de short rate déplacement proche de zéro, et  $r(t)$  est le taux court, sous la probabilité risque neutre la dynamique du taux court est décrite par :

$$\begin{aligned} d\ln(r'(t)) &= \alpha_1 [\ln(m(t)) - \ln(r'(t))]dt + \sigma_1(dW_1 + \gamma_1(t)dt) \\ d\ln(m(t)) &= \alpha_2 [\mu'(t) - \ln(m(t))]dt + \sigma_2(dW_2 + \gamma_2(t)dt) \end{aligned}$$

Avec :

- $r'(t)$  :                   taux court nominal
- $m$  :                         taux long nominal
- $\alpha_1$  :                    vitesse de retour du taux court nominal vers le taux long nominal
- $\alpha_2$  :                    vitesse de retour du taux long nominal vers sa moyenne
- $\sigma_1$  :                    volatilité de  $\ln(r')$
- $\sigma_2$  :                    volatilité de  $\ln(m)$
- $dW_1$  et  $dW_2$  :        mouvements browniens de la volatilité court terme et long terme

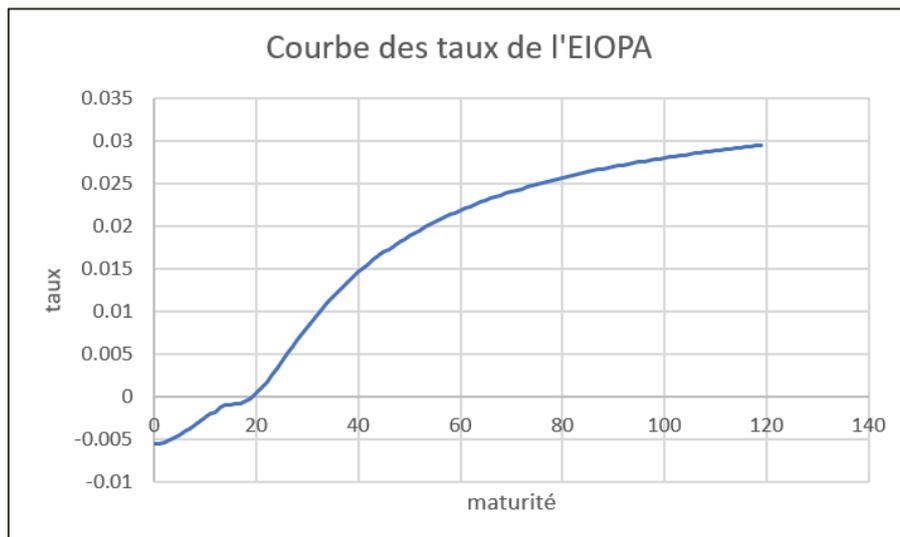
Ce modèle permet comme le LMM+ de repricer des nappes de volatilités ATM et OTM des swaptions.

## 3. ANALYSES

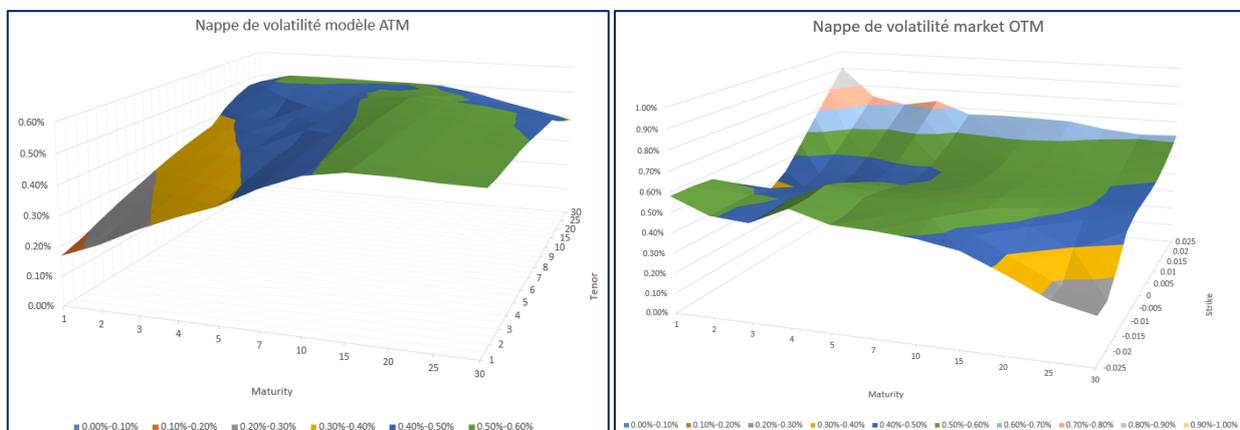
Il est important de noter qu'aujourd'hui CNP Assurances utilise le modèle LMM+ pour le risque de taux.

### 3.1 Calibrages réalisés sur le modèle LMM+

Le calibrage du modèle LMM+ (référence) a été réalisé à la date du T4 2020, dans un environnement de taux bas. La courbe des taux utilisée est celle de l'EIOPA :



Les nappes de volatilité ATM et OTM de marché au T4 2020 sur lesquelles le modèle a été calibré sont les suivantes :



Les valeurs initiales des paramètres du modèle rentrées dans l'outil Moody's Analytics sont issues d'un calibrage récent d'une situation économique proche (T3 2020). A chaque paramètre est

associé un intervalle via une borne inférieure et une borne supérieure. L'algorithme d'optimisation essaye de retrouver le prix en faisant varier les valeurs des paramètres dans leurs intervalles respectifs. Dans ce mémoire, l'algorithme d'optimisation choisi et son fonctionnement ne seront pas détaillés.

Les valeurs initiales des paramètres ainsi que leurs intervalles sont les suivants avec le Lower Bound et le Upper Bound correspondant respectivement aux bornes inférieures et supérieures de l'intervalle :

Modèle LMM+	Seed Values	Lower Bound	Upper Bound
a	0.00447224816425157	0.0001	0.37
b	0.0159320318224403	0.0001	0.14
c	0.076450704274213	0.0315	0.1
d	0	NA	NA
Initial Variance	1	NA	NA
Mean Reversion Speed of Variance	0.149038010173265	0.09	1
Mean Reversion Level of Variance	0.245709572305758	0.01	3
Volatility of Variance	0.270629140066043	0.01	0.55
Correlation	-0.170457537774797	-0.99999	0.99999
Impose DOF Penalty	Add Penalty Term	X	X
DOF Weight	10000	X	X
DOF Threshold	2	X	X
Forward Rate Displacement	0.1	NA	NA

Ils sont issus d'un fichier fourni par Moody's regroupant les paramètres initiaux à utiliser pour plusieurs modèles. Ensuite des sensibilités ont été réalisées sur le modèle LMM+. Une sensibilité consiste à ne changer qu'une seule valeur d'une variable d'entrée afin d'analyser l'impact de ce changement d'hypothèse sur les résultats.

Les sensibilités de cette étude ont d'abord été réalisées sur le modèle LMM+ sur le paramètre forward rate displacement (appelé plus communément le shift) en jouant sur les bornes de calibrage du modèle LMM+.

Paramètres LMM+	Sensibilité 1			Sensibilité 2			Sensibilité 3		
	<u>Seed values</u>	<u>Lower Bound</u>	<u>Upper Bound</u>	<u>Seed values</u>	<u>Lower Bound</u>	<u>Upper Bound</u>	<u>Seed values</u>	<u>Lower Bound</u>	<u>Upper Bound</u>
Forward rate displacement	0.1	0.0001	1	0.1	0.0001	0.8	0.1	0.0001	0.6

Pour la sensibilité 1, il a été choisi de permettre au paramètre forward rate displacement de varier entre 0.0001 et 1 car ce paramètre est fixe avec le modèle LMM+. La valeur initiale de ce paramètre n'a pas été modifiée.

Ensuite les sensibilités 2 et 3 consistent à tester des valeurs plus faibles pour la borne supérieure du forward rate displacement.

Les tableaux présentant les paramètres calibrés pour chacun des scénarios sont les suivants :

LMM+	Paramètre calibré (REF)	Sensibilité 1	Sensibilité 2	Sensibilité 3
a	0.0001	0.000842000765976714	0.000842356344862712	0.00084049308068619
b	0.0146239104818359	0.00264955351030025	0.00265132969441075	0.00264277939310258
c	0.0788840541819337	0.0677675605255349	0.0677708154802181	0.0677593016942977
d	0	0	0	0
Initial Variance	1	1	1	1
Mean Reversion Speed of Variance	0.101529992340769	0.09	0.09	0.09
Mean Reversion	0.255659862188951	0.466226173676508	0.46620741450827	0.466498519735827

Level of Variance				
Volatility of Variance	0.227847070848079	0.106801038087975	0.106797332872425	0.106901077012199
Correlation	-0.0878897861440727	0.99999	0.99999	0.99999
Forward Rate Displacement	0.1	0.466675775823837	0.466381687031115	0.467814777072174

Plus le paramètre forward rate displacement est contraint et plus il est bas. Le modèle de taux compense donc la contrainte sur le forward rate displacement par plus de taux négatifs.

Il ressort du tableau ci-dessus que la valeur du paramètre a augmente de 0,00074 pour les scénarios des sensibilités sur le modèle LMM+. Les valeurs des paramètres b et c diminuent respectivement de 0,012 et 0,011.

a augmente de 0,00074 donc la composante  $(a + bT_{j-m}(t))$  augmente légèrement, ce qui tend à augmenter la fonction de Rebonato. b diminue de 0,012, ainsi la composante  $bT_{j-m}(t)$  diminue, ce qui tend à diminuer la fonction de Rebonato. Si c diminue de 0,011 le terme  $\exp(-cT_{j-m}(t))$  augmente, ce qui a tendance à augmenter la fonction de Rebonato. Le terme a est constant et négligeable comparé aux autres termes de la fonction. La fonction  $bT_{j-m}(t)$  est linéaire et pour  $b > 0$  elle augmente proportionnellement à x. La fonction  $\exp(-cT_{j-m}(t))$  pour c proche de 0 augmente lentement. En conclusion, la diminution de b a un plus grand impact sur la fonction de Rebonato que les variations de a et de c ce qui induit une diminution de la volatilité pour l'ensemble des sensibilités réalisées sur le modèle LMM+.

## 3.2 Calibrages réalisés sur le modèle E2FBK

Le calibrage du modèle E2FBK a également été réalisé avec la situation économique des taux du T4 2020 avec la même courbe de taux et les mêmes nappes de volatilités des swaptions que le calibrage du modèle LMM+.

Les paramètres initiaux ainsi que les intervalles pour les paramètres du scénario E2FBK et de ces sensibilités sont les suivants :

E2FBK	Seed values	Lower Bound	Upper Bound
a1	0.017713294974873	0.0001	0.03
a2	0.174489935681842	0.0001	0.5
s1	0.0303079096176361	0.0001	0.25

s2	0.655517381074375	0.0001	1
Short Rate Displacement	0.1	0.05	0.2

Comme pour le modèle LMM+, ils sont issus d'un calibrage récent réalisé par Moody's avec ce modèle sur une situation économique proche dans le temps.

Ensuite des sensibilités ont été réalisées sur le modèle E2FBK.

Les sensibilités de cette étude ont été réalisées sur le modèle E2FBK sur les paramètres short rate displacement,  $\sigma_1$ , et  $\sigma_2$  (respectivement s1 et s2 dans la suite de ce mémoire) en jouant sur les bornes de calibrage du modèle E2FBK.

Paramètres E2FBK	Sensibilité 1			Sensibilité 2			Sensibilité 3		
	Seed values	Lower Bound	Upper Bound	Seed values	Lower Bound	Upper Bound	Seed values	Lower Bound	Upper Bound
a1	0.017713295	0.0001	0.03	0.017713295	0.0001	0.03	0.017713295	0.0001	0.03
a2	0.174489936	0.0001	0.5	0.174489936	0.0001	0.5	0.174489936	0.0001	0.5
s1	0.03030791	0.0001	0.25	0.03030791	0.0001	0.25	<b>0.05005</b>	<b>0.0001</b>	<b>0.1</b>
s2	0.655517381	0.0001	1	<b>0.12505</b>	<b>0.0001</b>	<b>0.25</b>	0.655517381	0.0001	1
Short Rate Displacement	<b>0.075</b>	<b>0.05</b>	<b>0.1</b>	0.1	0.05	0.2	0.1	0.05	0.2

Pour la sensibilité 1, il a été choisi de diminuer la valeur initiale du short rate displacement et sa borne supérieure car la valeur de paramètre calibré pour le short rate displacement avec le modèle E2FBK est égal à sa borne supérieure : 0.2.

Pour la sensibilité 2, la valeur initiale du paramètre s2 correspondant à la volatilité à long terme a été diminuée et l'intervalle de calibrage a été réduit qui rendait comme valeur de paramètre calibré la borne supérieure avec le modèle E2FBK.

Pour la sensibilité 3, la valeur initiale du paramètre s1 correspondant à la volatilité à court terme a été diminuée et l'intervalle de calibrage a également été réduit.

Les tableaux présentant les paramètres calibrés pour chacun des scénarios sont les suivants :

E2FBK	Paramètre calibré (REF)	Sensibilité 1	Sensibilité 2	Sensibilité 3
a1	0.03	0.03	0.03	0.03

a2	0.333332925154906	0.461508333657892	0.235987767459046	0.333332535916252
s1	0.00396643400228758	0.00009999999999989	0.0168646886796908	0.00398112968072405
s2	0.388378616808714	1	0.25	0.388358070970879
Short Rate Displacement	0.2	0.1	0.2	0.2

### 3.2.1 Sensibilité 1

Pour la sensibilité 1, la valeur de la borne supérieure du short rate displacement et la valeur du short rate displacement ont été diminués. Le short rate displacement correspond à la limite négative de taux pour le taux court ( $r(t) + \delta > 0 \Leftrightarrow r(t) > -\delta$ ).

La diminution de la borne supérieure du short rate displacement (et donc de sa valeur initiale) a eu pour conséquence de diminuer la volatilité du taux court s1. En effet diminuer la valeur du short rate displacement implique l'augmentation de la valeur du taux le plus bas atteignable. Une conséquence directe est alors la diminution de la volatilité du taux court à savoir s1.

Afin de permettre la correspondance avec les prix constatés, la baisse de volatilité à court terme doit être compensée par l'augmentation de la volatilité à long terme : s2. Toujours dans un souci d'équilibre, il faut que a2 la vitesse de retour vers la moyenne du taux long augmente pour atténuer la hausse de s2.

### 3.2.2 Sensibilité 2

La deuxième sensibilité visait à faire diminuer le paramètre s2 la volatilité à long terme et à comprendre l'impact sur le calibrage du GSE.

La diminution de la borne supérieure de s2 la volatilité à long terme et de sa valeur initiale implique que a2 la vitesse de retour vers la moyenne à long terme diminue également, ces deux paramètres sont donc corrélés.

La volatilité du taux court augmente pour compenser la diminution de la volatilité du taux long.

### 3.2.3 Sensibilité 3

La troisième sensibilité visait à faire varier la volatilité à court terme s1 et à comprendre l'impact sur le calibrage du GSE.

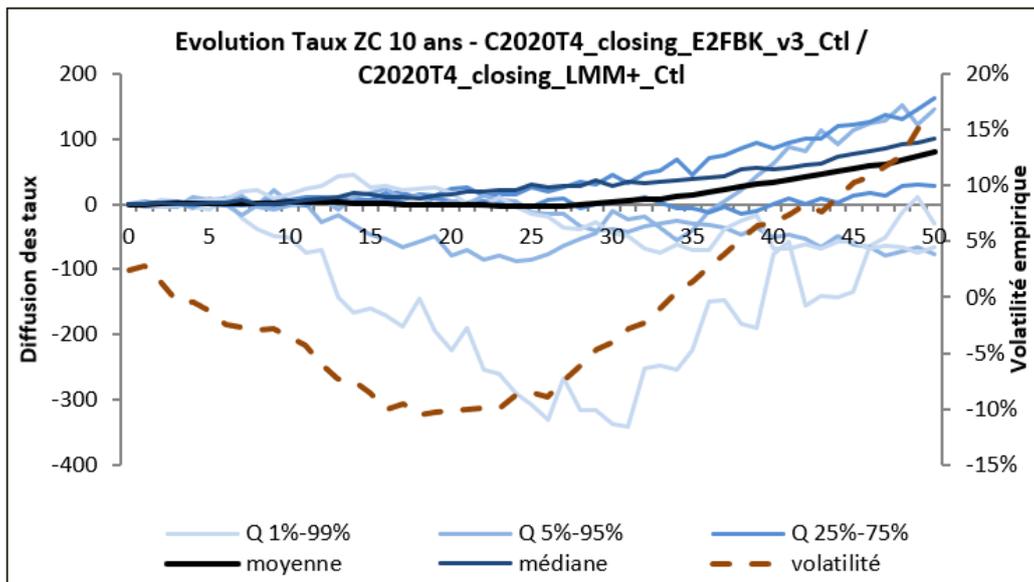
La diminution de la borne supérieure de s1 la volatilité du taux court et de sa valeur initiale a eu très peu d'impact sur le calibrage par rapport au calibrage de référence.

### 3.3 Comparaison des jeux de scénarios

Afin de mieux comprendre les impacts ALM qui seront présentés dans la section suivante, une comparaison entre les différents jeux de scénarios a été réalisée.

#### 3.3.1 Comparaison des scénarios du modèle E2FBK (de référence) et du modèle LMM+

Le graphique ci-dessous compare la moyenne, médiane et les quantiles de trajectoires des taux nominaux de maturité 10 ans des deux modèles. Les prochains graphiques similaires réaliseront la même comparaison sur des sensibilités différentes.



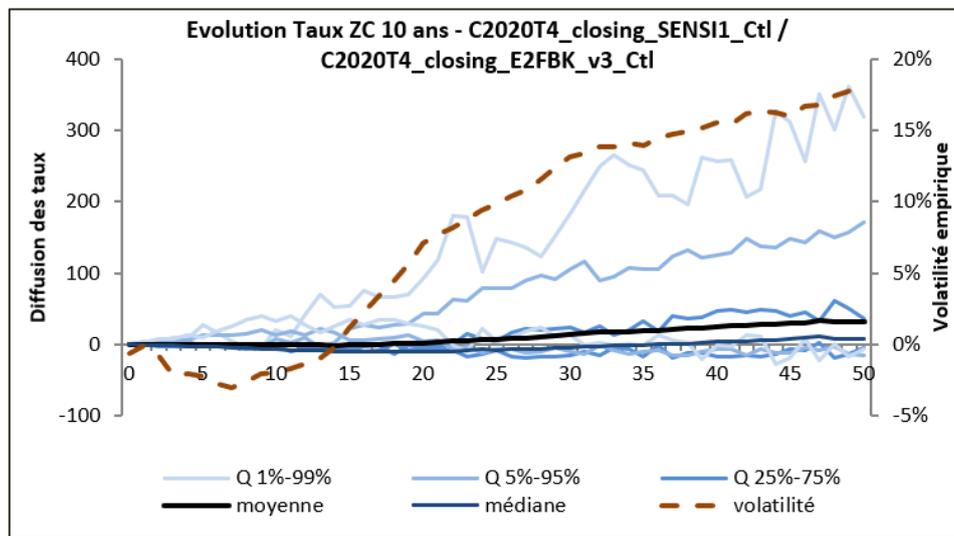
Sur le scénario généré avec le modèle E2FBK, il y a plus de trajectoires extrêmes faibles comme en témoigne la position du quantile Q1%-99% très basse dans les taux.

#### 3.3.2 Comparaison des scénarios de la sensibilité 1 sur le modèle E2FBK et le calibrage E2FBK de référence

La deuxième comparaison est entre la sensibilité 1 et le GSE issu du calibrage de référence (référence pour chacune des sensibilités réalisées sur le modèle E2FBK). Pour rappel, les paramètres calibrés sont les suivants :

E2FBK	Paramètre calibré (REF)	Sensibilité 1 (Diminution du short rate displacement)
a1	0.03	0.03
a2	0.333332925154906	0.461508333657892
s1	0.00396643400228758	0.000099999999999989
s2	0.388378616808714	1
Short Rate Displacement	0.2	0.1

Pour les taux ZC 1Y, 5Y et 10Y, les quantiles ne vont au contraire que très peu dans le négatif et montent beaucoup dans le positif. La volatilité augmente drastiquement à partir de 15ans et les quantiles Q1%-99% et Q5%-95% sont importants. Pour cette sensibilité ce sont les trajectoires extrêmes élevées qui sont beaucoup plus importantes.



Pour cette sensibilité la borne supérieure du short rate displacement a été augmentée comme expliqué dans la section précédente. Une conséquence est l'augmentation de la valeur du taux le plus haut/bas atteignable, ce qui peut expliquer les taux élevés du graphique précédent.

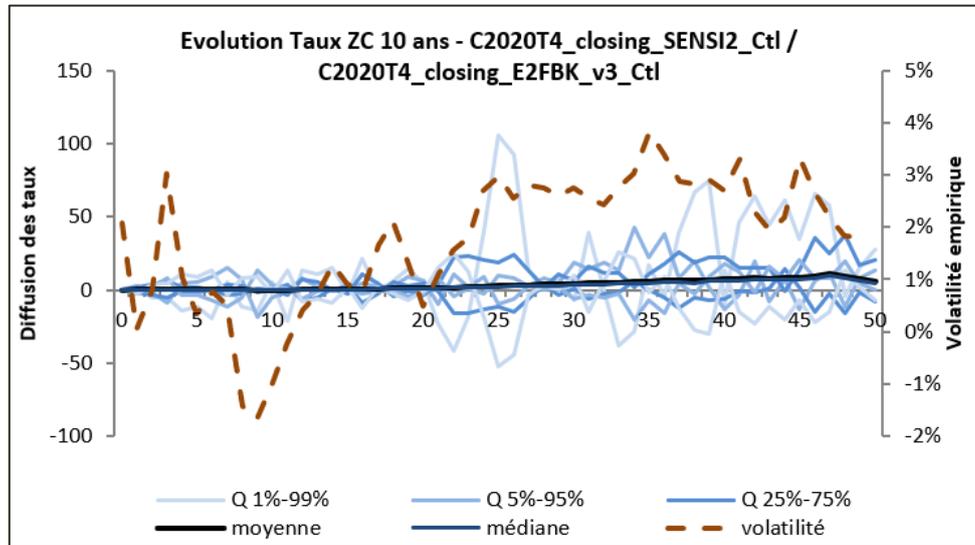
### 3.3.3 Comparaison des scénarios de la sensibilité 2 sur le modèle E2FBK et le calibrage E2FBK de référence

L'impact sur le calibrage de la sensibilité est rappelé ci-dessous :

E2FBK	Paramètre calibré (REF)	Sensibilité 2 (diminution de la volatilité long terme)
a1	0.03	0.03
a2	0.333332925154906	0.235987767459046
s1	0.00396643400228758	0.0168646886796908
s2	0.388378616808714	0.25
Short Rate Displacement	0.2	0.2

La borne supérieure de s2 la volatilité à long terme avait été diminuée.

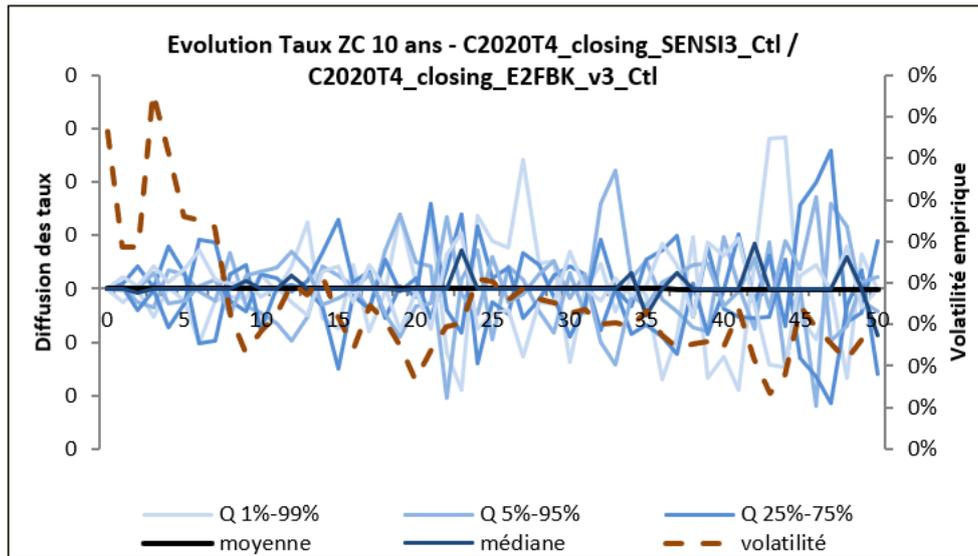
Sur le graphique suivant il apparaît que les trajectoires sont moins attirées vers la courbe de taux sur laquelle est réalisé le calibrage. Cela est expliqué par une diminution du retour à la moyenne  $a_2$  : la volatilité à long terme augmente légèrement et la volatilité court/moyen terme augmente par effet de compensation.



### 3.3.4 Comparaison des scénarios de la sensibilité 3 sur le modèle E2FBK et le calibrage E2FBK de référence

Pour rappel, le calibrage de la sensibilité 3 (diminution de la borne supérieure de la volatilité court terme) a eu très peu d'effets significatifs sur le calibrage.

E2FBK	Paramètre calibré (REF)	Sensibilité 3
a1	0.03	0.03
a2	0.333332925154906	0.333332535916252
s1	0.00396643400228758	0.00398112968072405
s2	0.388378616808714	0.388358070970879
Short Rate Displacement	0.2	0.2



Comme on peut l'observer sur ce graphique, les scénarios sont quasiment équivalents : peu d'écart sur les quantiles, et sur la volatilité court terme et long terme.

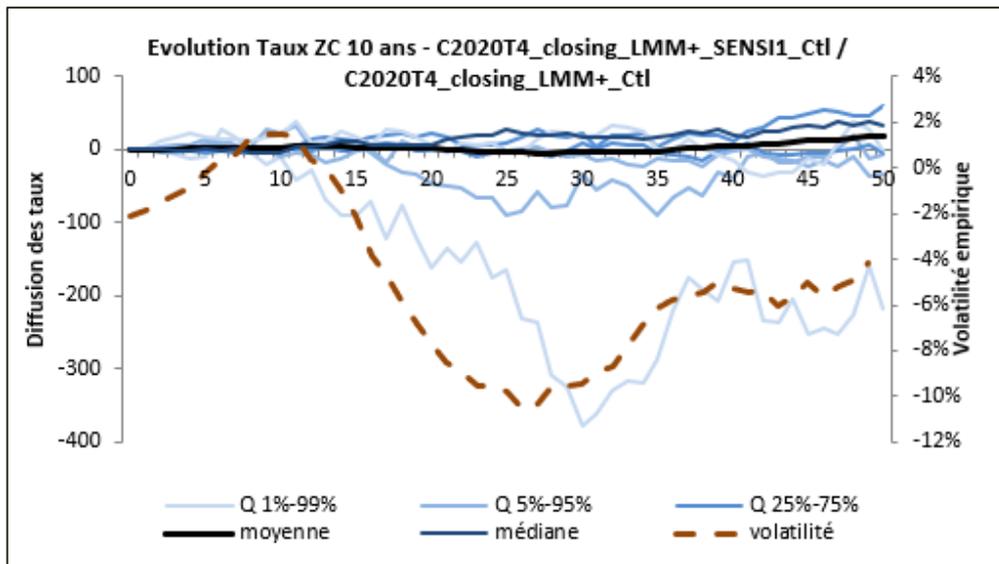
### 3.3.1 Comparaison des scénarios de la sensibilité 1 sur le modèle LMM+ et le calibrage LMM+ de référence

Cette comparaison est entre la sensibilité 1 sur le modèle LMM+ et le GSE issu du calibrage de référence (référence pour chacune des sensibilités réalisées sur le modèle LMM+). Pour rappel, les paramètres calibrés sont les suivants :

LMM+	Paramètre calibré (REF)	Sensibilité 1
a	0.0001	0.000842000765976714
b	0.0146239104818359	0.00264955351030025
c	0.0788840541819337	0.0677675605255349
d	0	0
Initial Variance	1	1
Mean Reversion Speed of Variance	0.101529992340769	0.09
Mean Reversion Level of Variance	0.255659862188951	0.466226173676508
Volatility of Variance	0.227847070848079	0.106801038087975
Correlation	-0.0878897861440727	0.99999

Forward Rate Displacement	0.1	0.466675775823837
---------------------------	-----	-------------------

Pour cette sensibilité la borne supérieure du forward rate displacement a été fixée à 1 comme expliqué dans la section précédente. Sur ce scénario, il y a plus de trajectoires extrêmes faibles comme en témoigne la position du quantile Q1%-99% très basse dans les taux. L'abaissement du shift attire les trajectoires extrêmes négatives dans des zones plus basses. Mais sur les autres quantiles, les scénarios restent similaires.



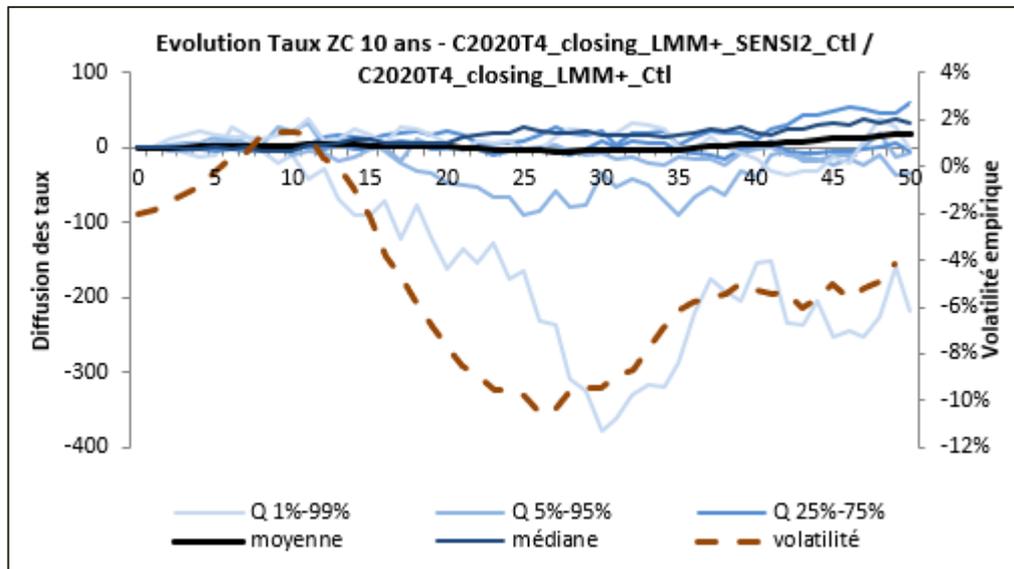
### 3.3.2 Comparaison des scénarios de la sensibilité 2 sur le modèle LMM+ et le calibrage LMM+ de référence

La comparaison qui suit est réalisée entre la sensibilité 2 sur le modèle LMM+ et le GSE issu du calibrage de référence (référence pour chacune des sensibilités réalisées sur le modèle LMM+). Pour rappel, les paramètres calibrés sont les suivants :

LMM+	Paramètre calibré (REF)	Sensibilité 2
a	0.0001	0.000842356344862712
b	0.0146239104818359	0.00265132969441075
c	0.0788840541819337	0.0677708154802181
d	0	0
Initial Variance	1	1
Mean Reversion Speed of Variance	0.101529992340769	0.09

Mean Reversion Level of Variance	0.255659862188951	0.46620741450827
Volatility of Variance	0.227847070848079	0.106797332872425
Correlation	-0.0878897861440727	0.99999
Forward Rate Displacement	0.1	0.466381687031115

Pour cette sensibilité la borne supérieure du forward rate displacement a été fixée à 0.8. Sur ce scénario, il y a également plus de trajectoires extrêmes faibles comme en témoigne la position du quantile Q1%-99% très basse dans les taux.



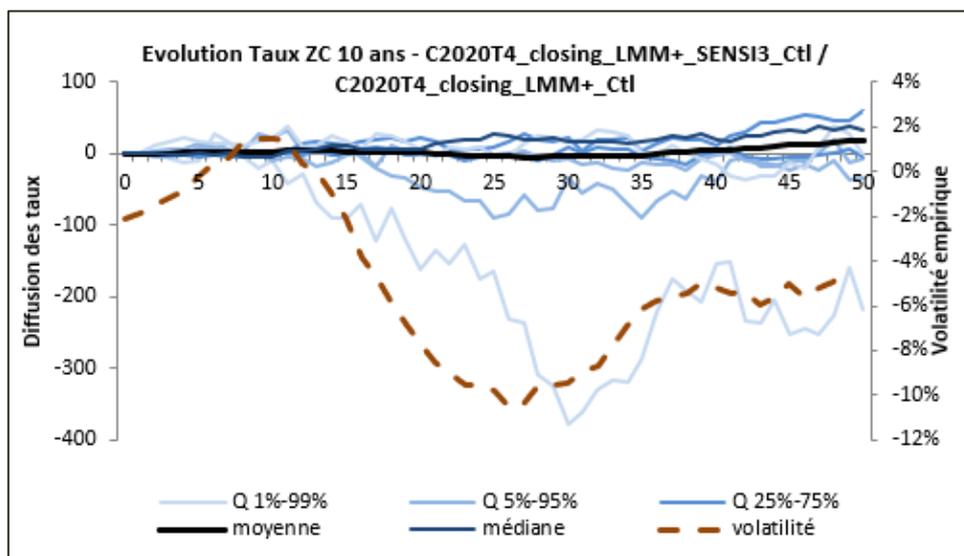
### 3.3.3 Comparaison des scénarios de la sensibilité 3 sur le modèle LMM+ et le calibrage LMM+ de référence

La prochaine comparaison est entre la sensibilité 3 sur le modèle LMM+ et le GSE issu du calibrage de référence (référence pour chacune des sensibilités réalisées sur le modèle LMM+). Pour rappel, les paramètres calibrés sont les suivants :

LMM+	Paramètre calibré (REF)	Sensibilité 3
a	0.0001	0.00084049308068619
b	0.0146239104818359	0.00264277939310258
c	0.0788840541819337	0.0677593016942977
d	0	0

Initial Variance	1	1
Mean Reversion Speed of Variance	0.101529992340769	0.09
Mean Reversion Level of Variance	0.255659862188951	0.466498519735827
Volatility of Variance	0.227847070848079	0.106901077012199
Correlation	-0.0878897861440727	0.99999
Forward Rate Displacement	0.1	0.467814777072174

Pour cette sensibilité la borne supérieure du forward rate displacement a été fixée à 0.6. Sur ce scénario, il y a également plus de trajectoires extrêmes faibles comme en témoigne la position du quantile Q1%-99% très basse dans les taux.



A noter que les diminutions de volatilité constatées dans la section 3.1 Calibrages réalisés sur le modèle LMM+ se retrouvent bien dans les graphiques ci-dessus présentant les comparaisons des jeux de scénarios.

### 3.4 Impacts quantitatifs des différents jeux de scénarios sur le périmètre Epargne

L'analyse des résultats ALM porte exclusivement sur trois portefeuilles historiques de CNP Assurances les plus importants en termes d'encours. Les portefeuilles sont les suivants :

- Portefeuille 270 (Partenaire La Banque Postale) : l'âge moyen des assurés est 71.0 ans et la duration moyenne du portefeuille d'actif est de 32 ans.
- Portefeuille 272 (CNP Patrimoine / Clientèle patrimoniale) : l'âge moyen des assurés est 71.3 ans et la duration moyenne du portefeuille d'actif est de 33 ans.
- Portefeuille EVJ (Partenaire BPCE) : l'âge moyen des assurés est 70.8 ans et la duration moyenne du portefeuille d'actif est de 33 ans

Ces trois portefeuilles représentent 90% de l'épargne individuel de CNP Assurances.

Portefeuilles \ Calibrage & Modèle de taux	Equity Modèle LMM+	Impact E2FBK de référence	Impact sur l'Equity de la sensibilité 1 E2FBK	Impact sur l'Equity de la sensibilité 2 E2FBK	Impact sur l'Equity sur la sensibilité 3 E2FBK
270	-1 Mds€	-6 M€	-25 M€	-5 M€	-6 M€
272	-400 M€	+600 K€	+4 M€	-6 M€	+600 K€
EVJ	-2 Mds€	+18 M€	-7 M€	-29 M€	+ 18 M€

Portefeuilles \ Calibrage & Modèle de taux	Equity Modèle LMM+	Impact Sensibilité 1 LMM+	Impact Sensibilité 2 LMM+	Impact Sensibilité 3 LMM+
270	-1 Md€	+69, 582 865 M€	+69, 567 720 M€	+69, 596 785 M€
EVJ	-2 Mds€	+87, 876 744 M€	+87, 844 073 M€	+87, 878 014 M€

Uniquement les impacts dont le montant est inférieur à 10 M€ (surlignés en rouge dans le tableau ci-dessus) en valeur absolue seront étudiés.

Le portefeuille 272 est composé en grande partie de contrats à TMG brut. Pour ces contrats, en cas de production financière insuffisante le risque de financement des chargements est porté par l'assuré. Cette particularité sur le portefeuille 272 explique les faibles impacts qui ont été observés.

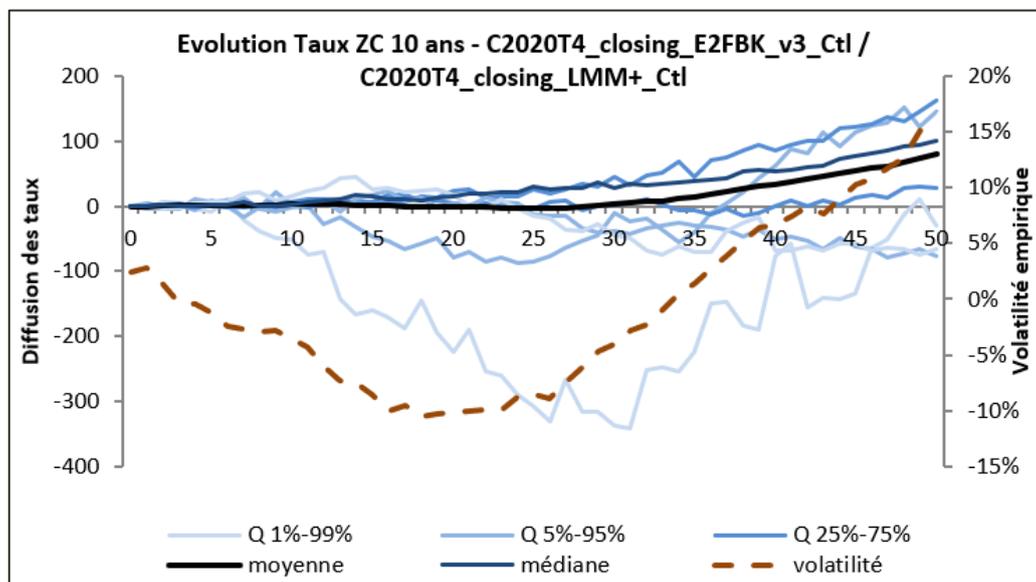
## 3.5 Analyse des impacts les plus significatifs

### 3.5.1 Scénario économique E2FBK (calibrage de référence)

L'étape de risque neutralisation expliquée précédemment entraîne une modification des cash-flows des titres obligataires résultant de la modification des valeurs de remboursement. Il est donc difficile de percevoir ces dernières via les scénarios économiques. Ces mêmes modifications provoquent une modification de la production financière. La risque neutralisation, peut dans certains cas créer des impacts contre intuitifs.

Dans toute cette section le modèle LMM+ sera le modèle de référence pour les impacts sur l'Equity.

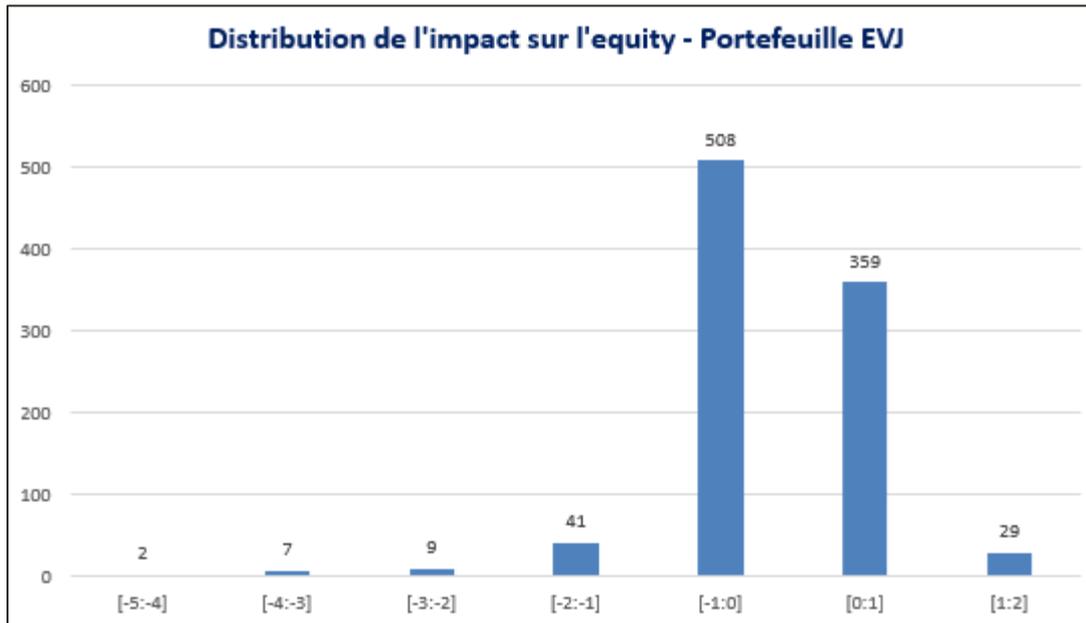
En reprenant le graphique qui compare la diffusion des scénarios économiques du modèle LMM+ et du modèle E2FBK, une diminution de l'Equity est anticipée en raison d'une plus grande augmentation des trajectoires explosives négatives.



L'impact de la sensibilité est analysé uniquement sur le portefeuille EVJ

L'impact sur l'equity stochastique est de + 18 M€. Afin de comprendre cet impact contre intuitif, une analyse plus fine a été réalisée portant sur certaines trajectoires. Pour chaque trajectoire (1000 trajectoires), un écart relatif entre l'Equity obtenue à l'aide du GSE LMM+ et le GSE E2FBK de référence.

La distribution de l'impact sur l'Equity sur le portefeuille EVJ est la suivante :



Pour le modèle EVJ, la forte concentration de trajectoires faibles révélée dans la partie 3.3 Comparaison des scénarios (Report) se retrouve également dans le graphique ci-dessus.

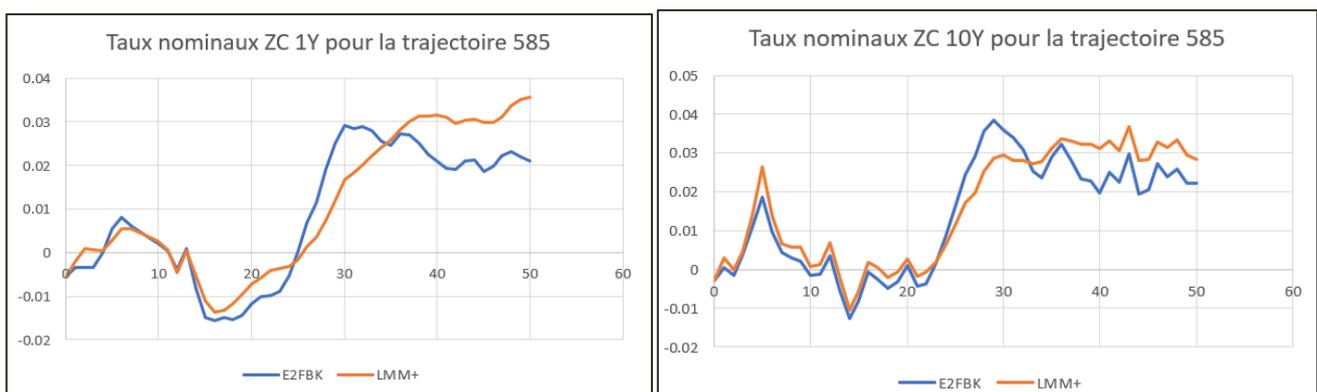
Trois trajectoires représentatives de ces 1000 trajectoires ont été étudiées : la trajectoire 585 du paquet [-2 :-1], la trajectoire 653 du paquet [-1:0] et la trajectoire 445 du paquet [0 :1]. Les simulations ALM ont été relancées pour chacune de ces trois trajectoires.

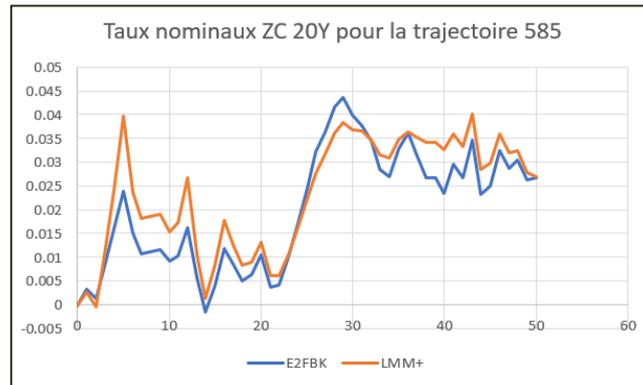
Les analyses des maquettes ALM ont donné les résultats suivants :

- Pour la trajectoire 585 (dans [-2:-1] écart relatif d'Equity de -150%)

Les taux nominaux ZC 1Y, 10Y et 20Y sur cette trajectoire avec le scénario LMM+ sont globalement supérieurs aux taux du E2FBK, ce qui suggère une production financière supérieure pour le scénario LMM+.

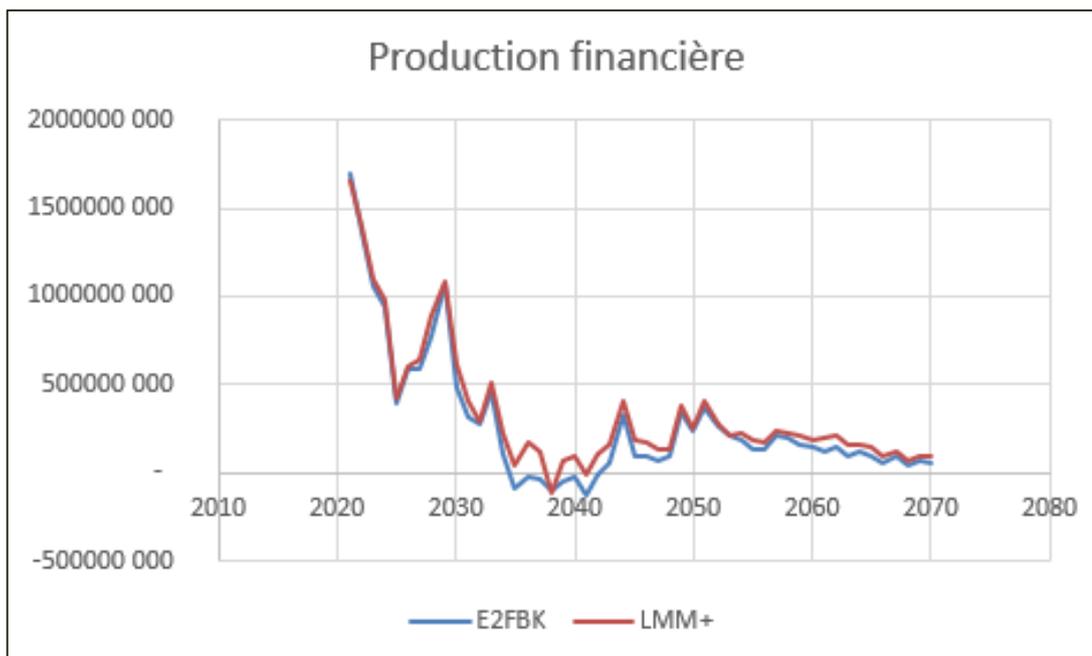
Ci-dessous, les graphiques des taux nominaux de maturité 1Y, 10Y, et 20Y pour la trajectoire 585.





L'Equity du scénario EFBK est négative et inférieure à celle du LMM+ de 1 Md €. Cette différence se retrouve dans les coûts de fonds propres qui sont supérieurs pour le scénario E2FBK de 2 Mds € (7 Mds € contre 5 Mds € avec le scénario LMM+).

Comme il avait été pressenti, pour cette trajectoire, la production financière avec le scénario LMM+ est supérieure à celle du E2FBK, de 2 Mds €. La diminution de l'Equity s'explique par la diminution de la production financière.

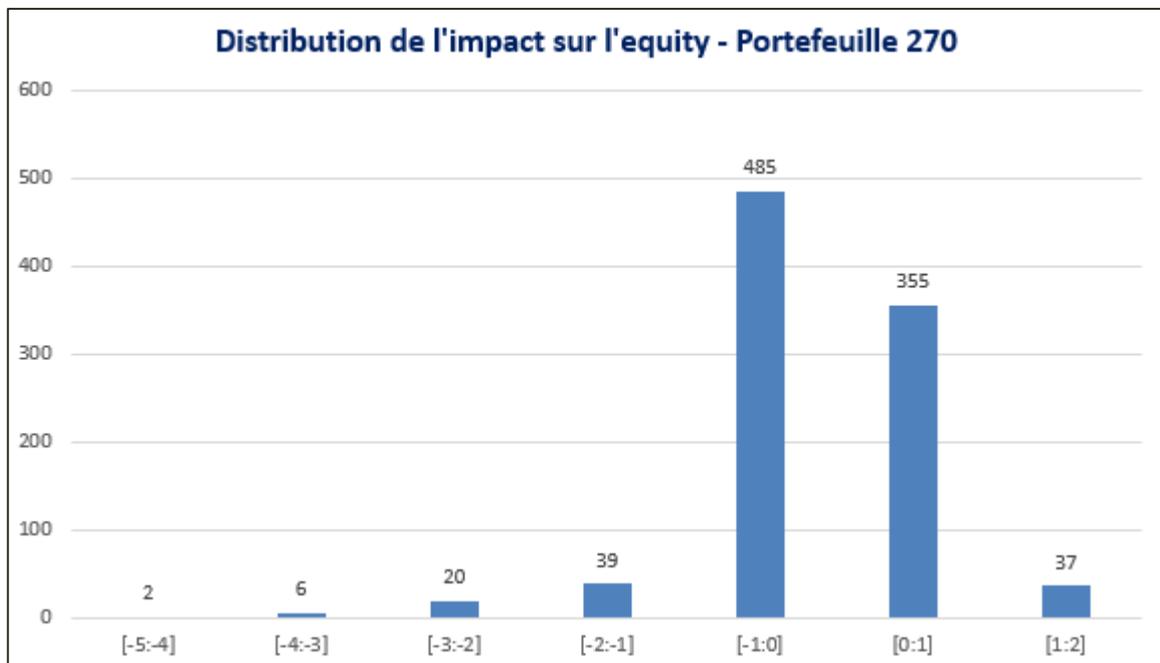


L'analyse des composantes de la production financière a permis d'identifier la production financière courante dont les coupons, les plus-values réalisées et les amortissements + PVR de remboursement comme responsables de cette production financière moindre.

### 3.5.2 Sensibilité 1 sur le modèle E2FBK

L'analyse de l'Equity pour le modèle épargne 270 a révélé une Equity plus faible pour la sensibilité 1 que pour le scénario E2FBK, l'écart étant de 19 M €. Afin de comprendre cette différence, une analyse plus fine a été réalisée portant sur certaines trajectoires.

La distribution de l'impact sur l'Equity sur le portefeuille 270 est la suivante :



Le graphique ci-dessus illustre que 57% des trajectoires ont un impact négatif sur l'Equity ce qui explique que l'Equity Stochastique diminue faiblement.

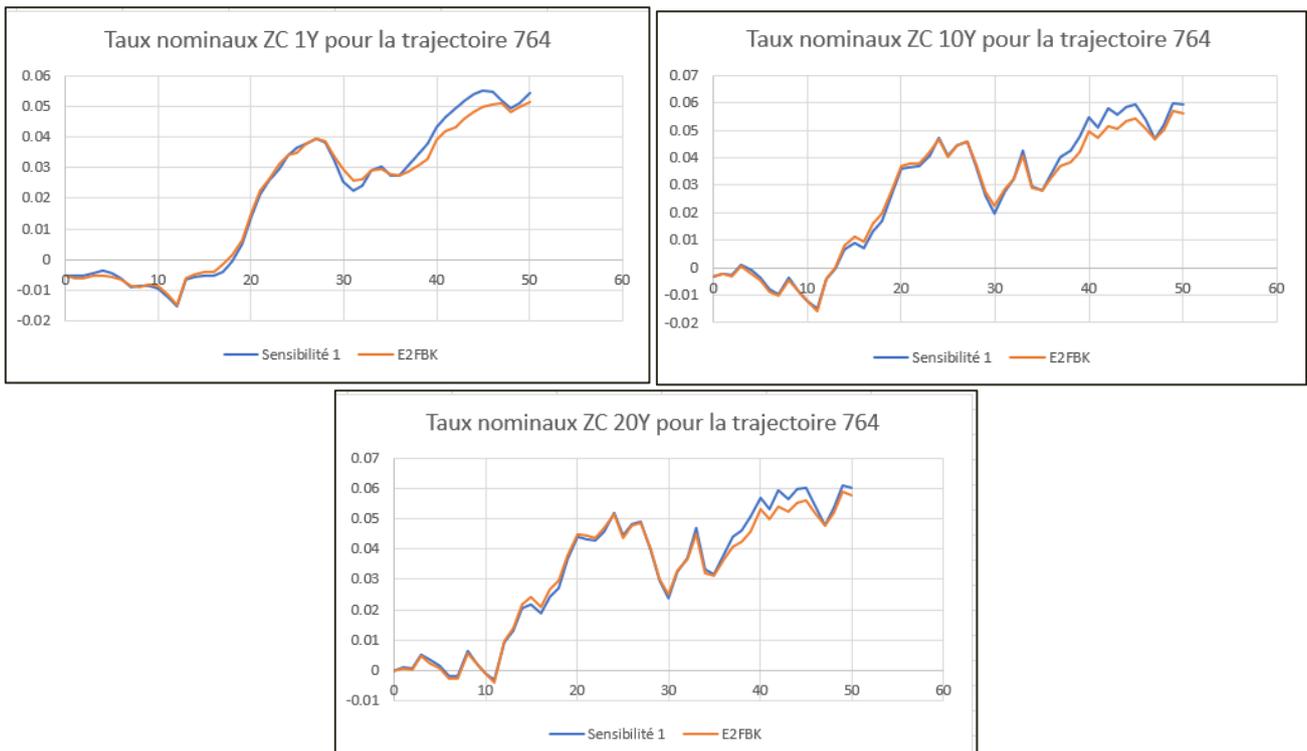
Trois trajectoires représentatives de ces 1000 trajectoires ont été étudiées : une trajectoire du paquet [-2:-1], une trajectoire du paquet [-1:0] et une trajectoire du paquet [0 :1]. Les simulations ALM ont été relancées pour chacune de ces trois trajectoires.

Les analyses des maquettes ALM ont donné les résultats suivants :

- Pour la trajectoire 764 (dans [0:1] écart relatif d'Equity de + 50%)

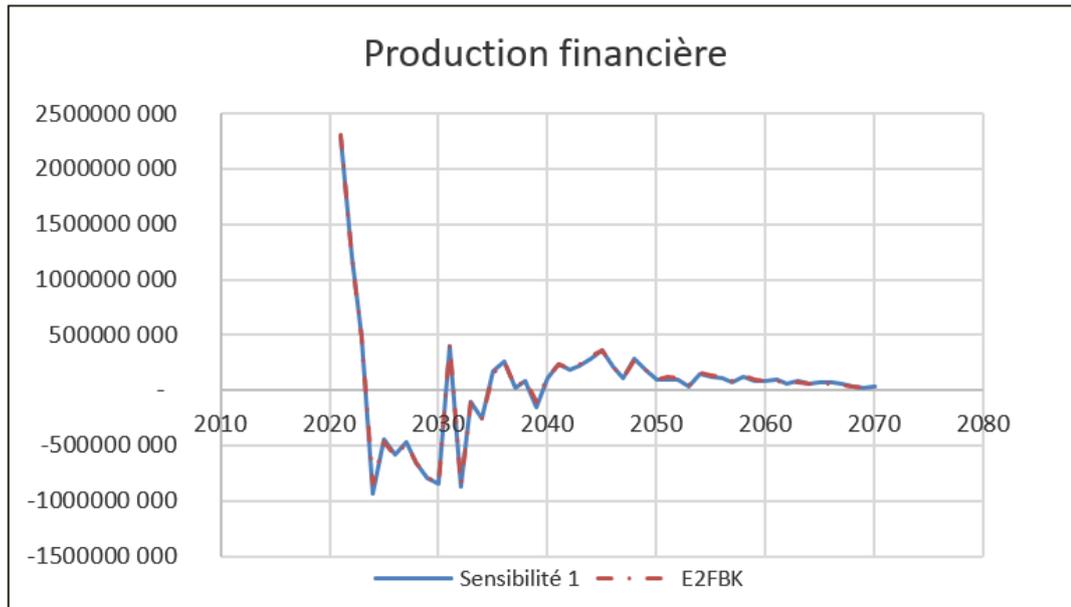
Les taux nominaux ZC 1Y, 10Y et 20Y sur cette trajectoire avec la sensibilité 1 sont globalement supérieurs aux taux du E2FBK, ce qui suggère une production financière supérieure pour la sensibilité 1.

Ci-dessous, les graphiques des taux nominaux de maturité 1Y, 10Y, et 20Y pour la trajectoire 764.



Les Equity des deux scénarios sont négatives, celle de la sensibilité 1 est inférieure de moins de 100 M €. Cette différence se retrouve dans les couts de fonds propres qui sont plus légèrement plus importants pour la sensibilité 1 de 40 M €.

Pour cette trajectoire, la production financière avec la sensibilité 1 est supérieure à celle du scénario E2FBK 32 années sur 50 années de projection.

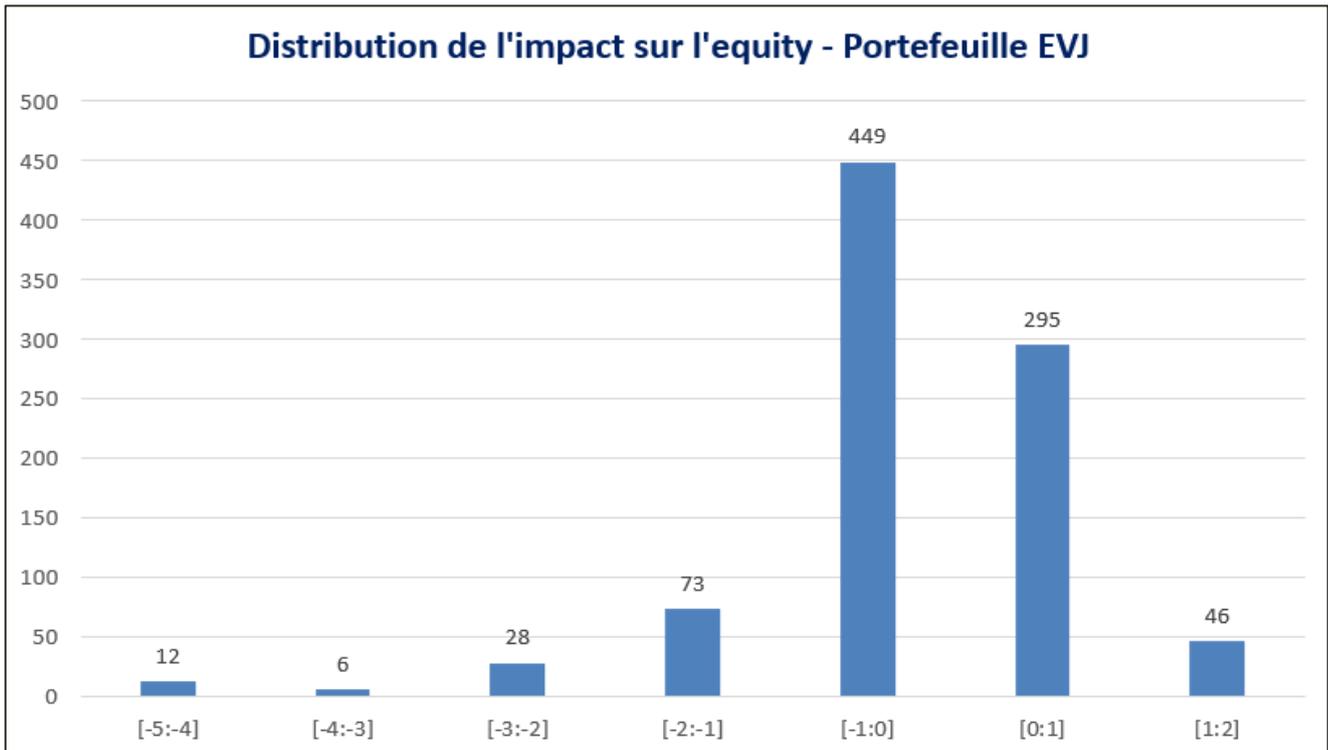


L'analyse des composantes de la production financière a permis d'identifier la production financière courante dont les coupons, les plus-values réalisées et la dotation/reprise de PRE comme responsables de cette production financière moindre.

### 3.5.3 Sensibilité 2 sur le modèle E2FBK

L'Equity Stochastique pour le portefeuille EVJ est plus faible pour la sensibilité 2 que pour le scénario E2FBK, l'écart étant de 48 M €. Afin de comprendre cette différence, une analyse plus fine a été réalisée portant sur certaines trajectoires. Pour chaque trajectoire (1000 trajectoires), un écart relatif entre la VIF obtenu à l'aide du GSE de référence et le GSE alternatif.

La distribution de l'impact sur l'Equity sur le portefeuille EVJ est la suivante :

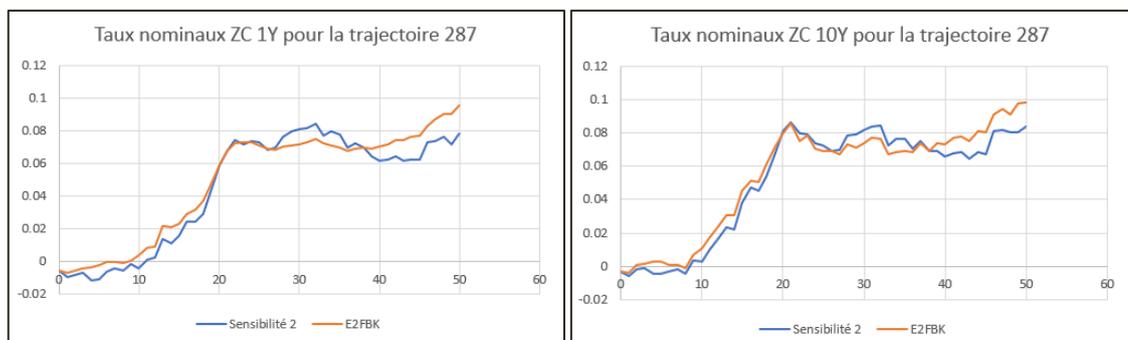


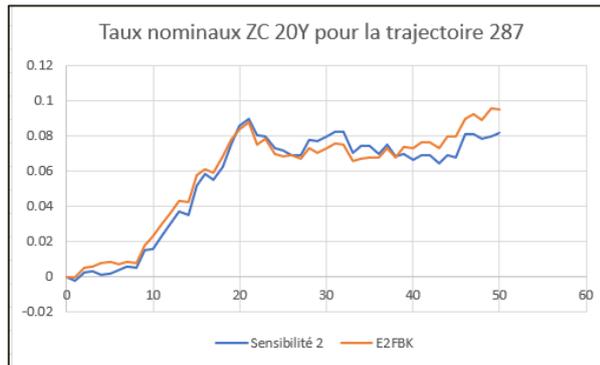
Trois trajectoires représentatives de ces 1000 trajectoires ont été étudiées : une trajectoire du paquet [-2:-1], une trajectoire du paquet [-1 :0] et une trajectoire du paquet [0 :1]. Les simulations ALM ont été relancées pour chacune de ces trois trajectoires.

Les analyses des maquettes ALM ont donné les résultats suivants :

- Pour la trajectoire 287 (dans [-2:-1] écart relatif d'Equity -150%)

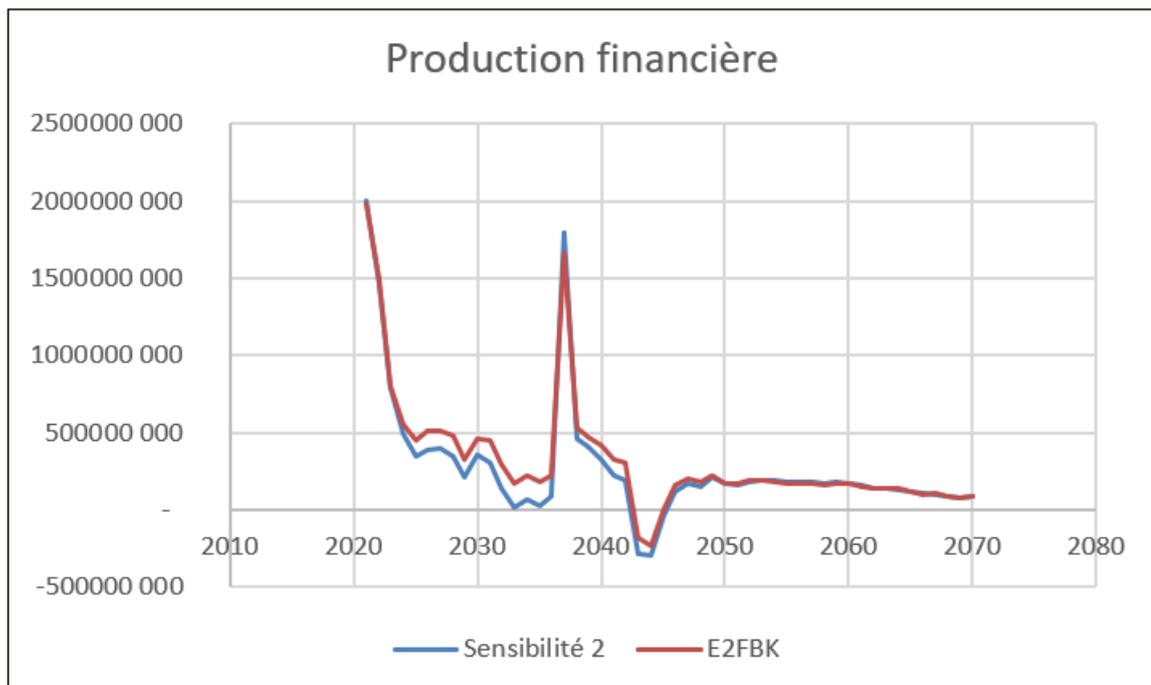
Les taux nominaux ZC 1Y, 10Y et 20Y du scénario E2FBK sont globalement supérieurs aux taux de la sensibilité 2, ce qui suggère une production financière supérieure pour le scénario E2FBK.





L'Equity de la sensibilité 2 est négative et inférieure à celle du scénario E2FBK de 1.8 Md €. Cette différence se retrouve dans les coûts de fonds propres qui sont plus importants pour la sensibilité 2 de 2.2 Mds €.

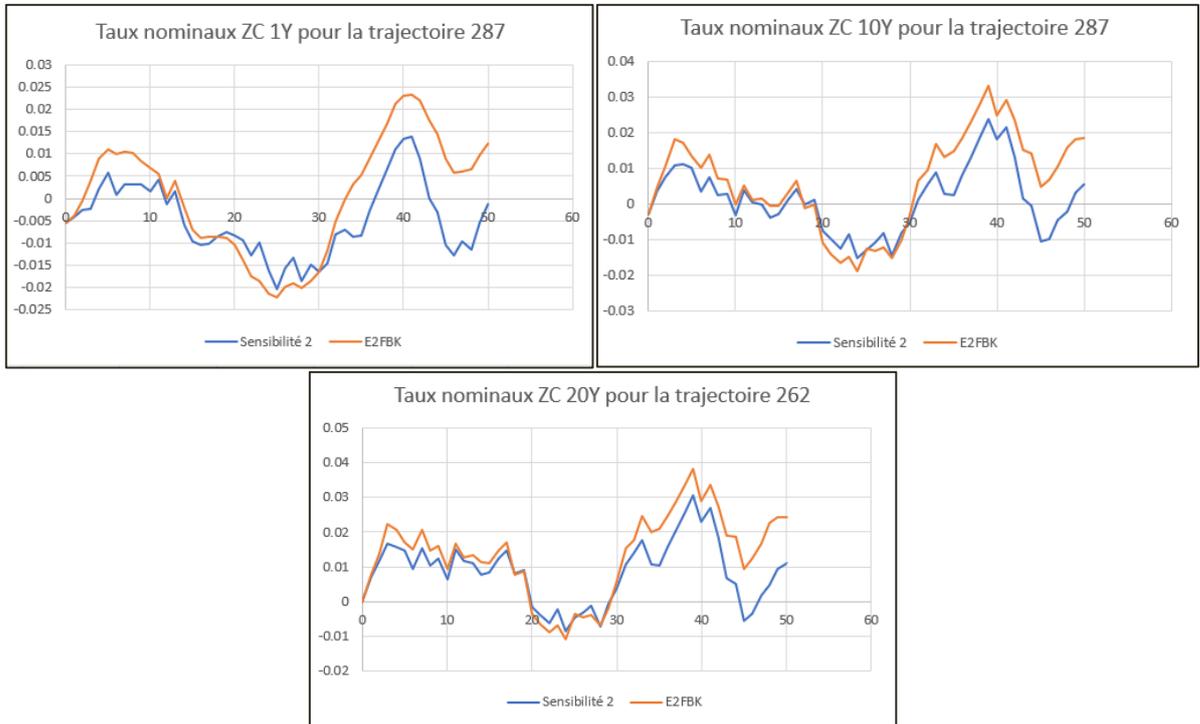
Comme il avait été pressenti, la production financière avec le scénario E2FBK est supérieure à celle de la sensibilité 2, de 2.3 Mds €.



L'analyse des composantes de la production financière a permis d'identifier la production financière courante dont les coupons, les dividendes, les plus-values réalisées, les amortissements + PVR de remboursement, les MVR obligataires non compensées, les Plus-ou-Moins-values réalisées automatiques et la dotation/reprise de PRE comme responsables de la baisse de la production financière.

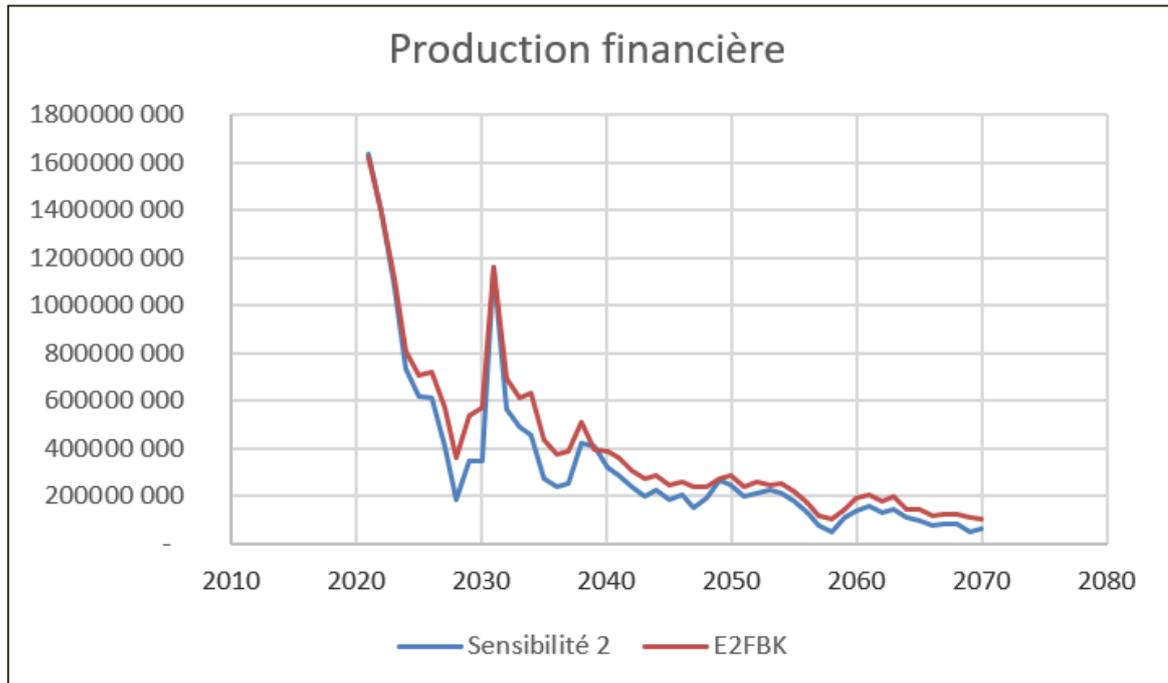
- Pour la trajectoire 262 dans [-1:0] écart relatif d'Equity -50%)

Les taux nominaux ZC 1Y, 10Y et 20Y du scénario E2FBK sont globalement supérieurs aux taux de la sensibilité 2, ce qui suggère une production financière supérieure pour le scénario E2FBK.



Les Equity des deux scénarios sont positives, celle de la sensibilité 2 est inférieure de 1 Md €. Cette différence se retrouve dans les couts de fonds propres qui sont plus importants pour la sensibilité 2 de 2 Mds €.

Comme il avait été pressenti, pour cette trajectoire, la production financière avec le scénario E2FBK est supérieure à celle de la sensibilité 2, de 3.5 Mds €.

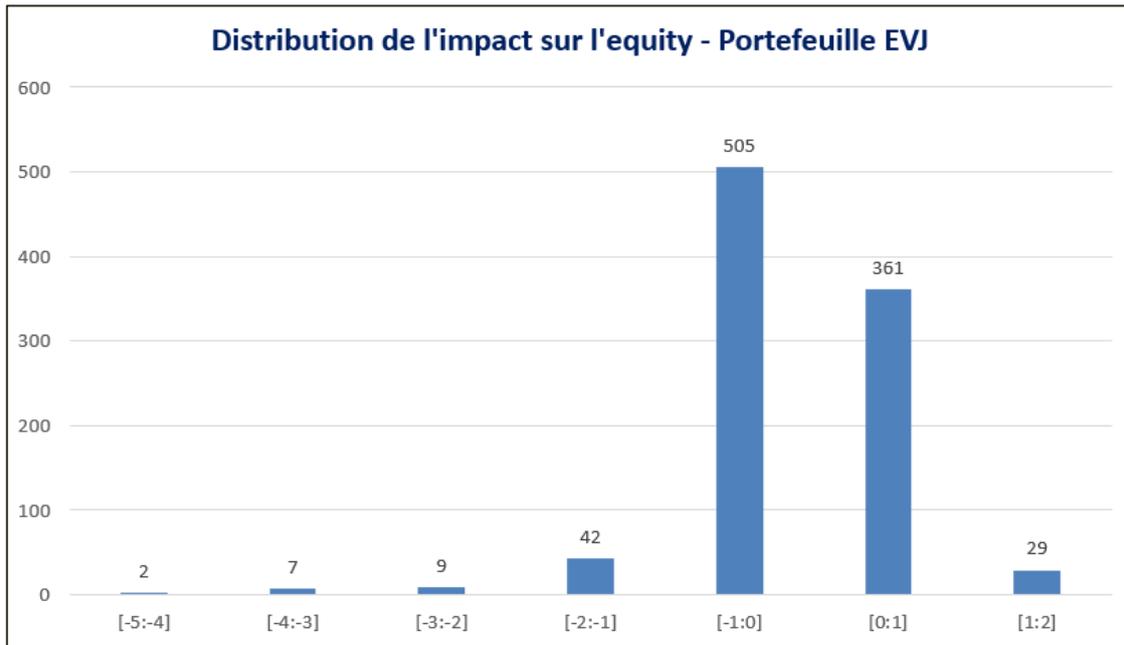


L'analyse des composantes de la production financière a permis d'identifier la production financière courante dont les coupons, les dividendes, les plus-values réalisées, les amortissements + PVR de remboursement et la dotation/reprise de PRE comme responsables de la baisse de la production financière.

#### 3.5.4 Sensibilité 3 sur le modèle E2FBK

L'analyse de l'Equity pour le portefeuille EVJ a révélé une Equity plus élevée pour la sensibilité 3 que pour le scénario E2FBK, l'écart étant de 100 M €. Afin de comprendre cette différence, une analyse plus fine a été réalisée portant sur certaines trajectoires. Pour chaque trajectoire (1000 trajectoires), un écart relatif entre la VIF obtenu à l'aide du GSE de référence et le GSE alternatif.

La distribution de l'impact sur l'Equity sur le portefeuille EVJ est la suivante :



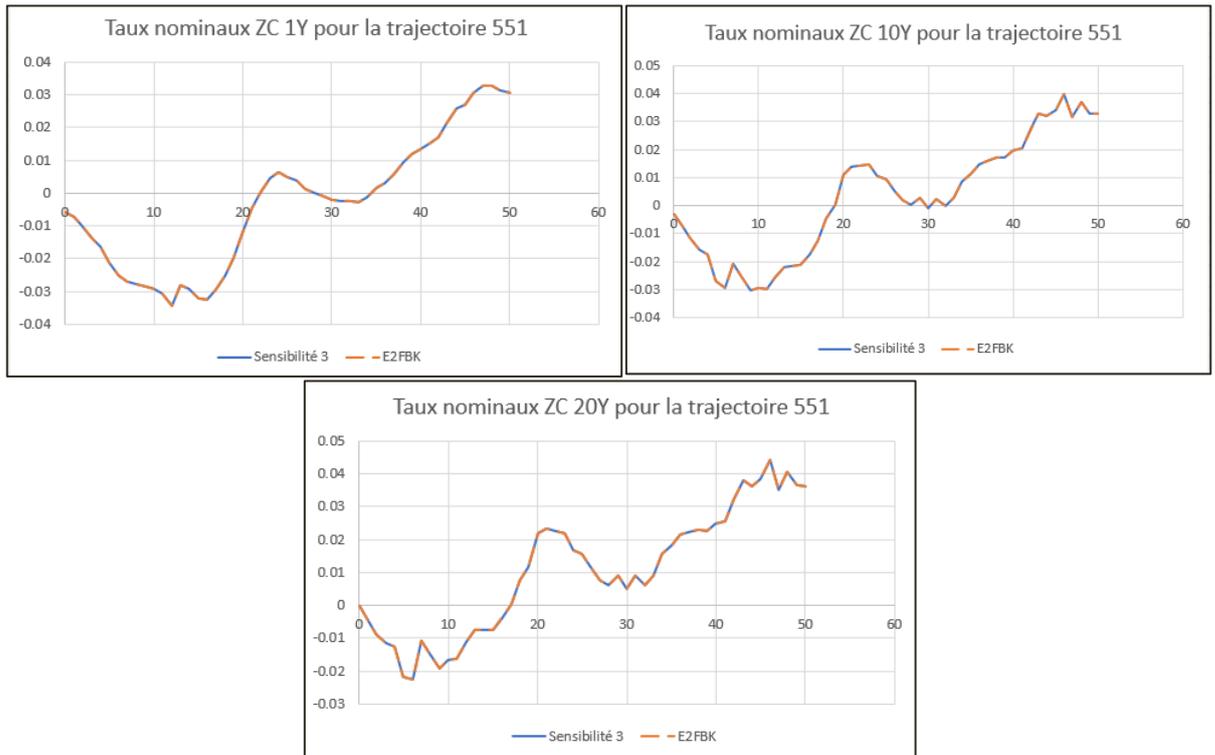
Trois trajectoires représentatives de ces 1000 trajectoires ont été étudiées : une trajectoire du paquet [-1 :0], une trajectoire du paquet [0 :1] et une trajectoire du paquet [1:2]. Les simulations ALM ont été relancées pour chacune de ces trois trajectoires.

Les analyses des maquettes ALM ont démontré les éléments suivants :

- Pour la trajectoire 551 (dans [-1:0] écart relatif d'Equity -50%)

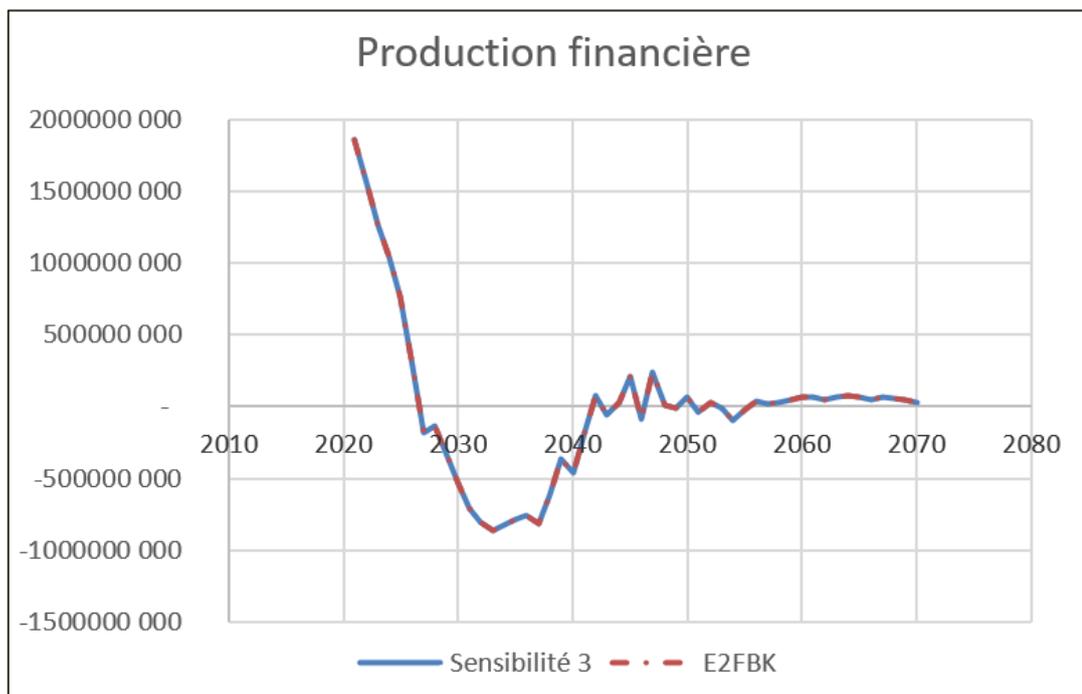
Les taux nominaux ZC 1Y, 10Y et 20Y sont proches pour la sensibilité 3 et le scénario E2FBK, ce qui suggère des productions financières similaires entre les deux scénarios.

Les taux nominaux ZC 1Y, 10Y et 20Y du scénario E2FBK sont globalement supérieurs aux taux de la sensibilité 3, ce qui suggère une production financière supérieure pour le scénario E2FBK.



Les Equity des deux scénarios sont négatives, celle de la sensibilité 3 est inférieure à celle du scénario E2FBK de 7 M €. Cette différence se retrouve dans les couts de fonds propres qui sont plus importants pour la sensibilité 3 de 8 M €.

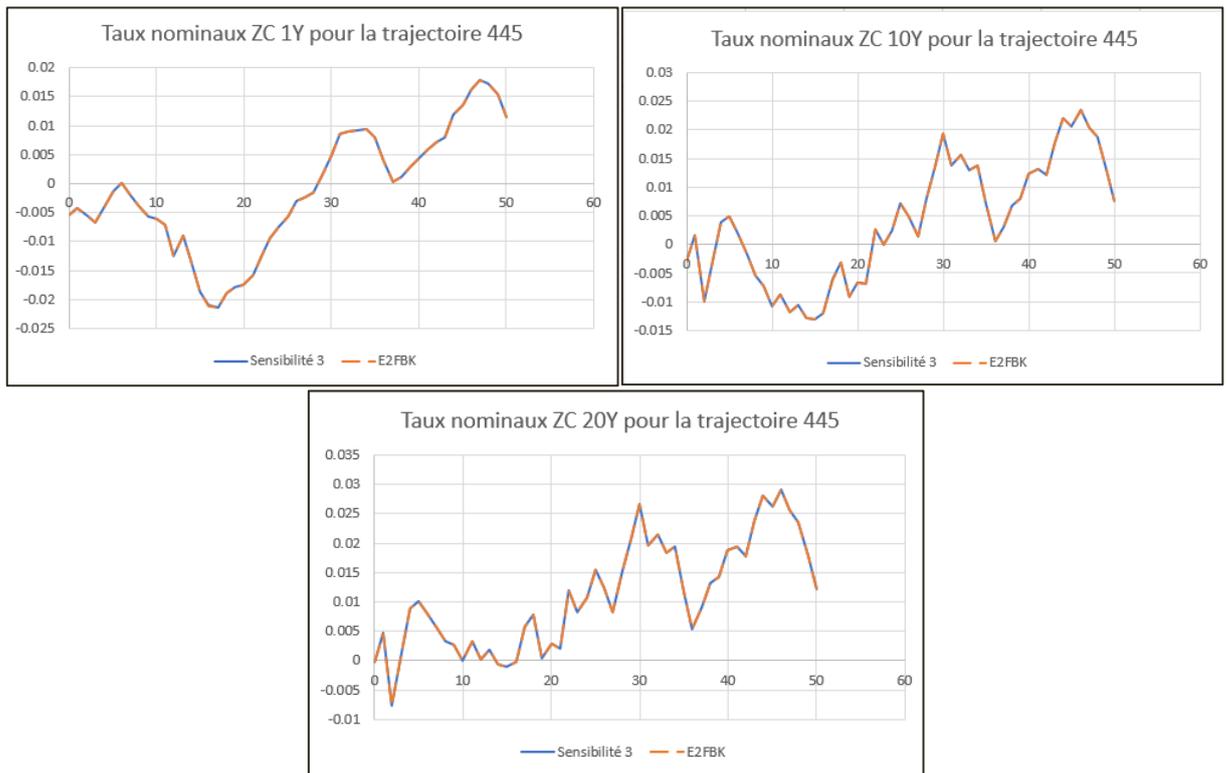
Comme il avait été pressenti, pour cette trajectoire, la production financière avec le scénario E2FBK est supérieure à celle de la sensibilité 3, de 4 M € .



L'analyse des composantes de la production financière a permis d'identifier la production financière courante dont les coupons, les dividendes, les plus-values réalisées, les amortissements + PVR de remboursement, les Plus-ou-Moins-values réalisées automatiques et la dotation/reprise de PRE comme responsables de la baisse de la production financière.

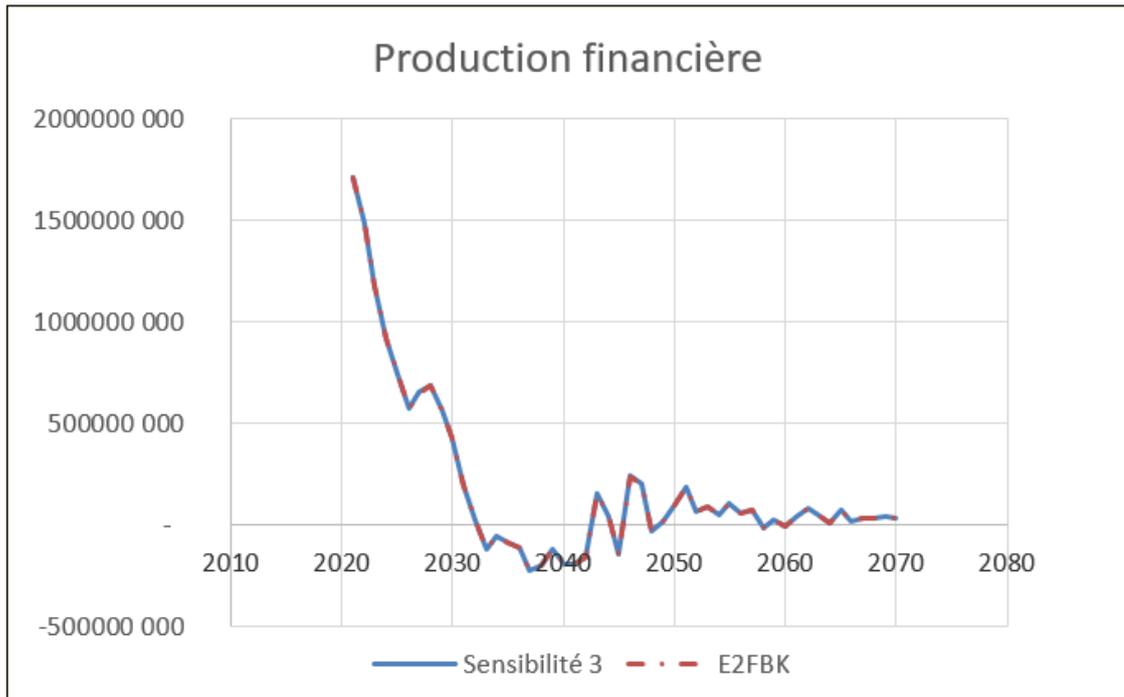
- Pour la trajectoire 445 (dans [0:1] écart relatif d'Equity 50%)

Les taux nominaux ZC 1Y, 10Y et 20Y de la sensibilité 3 sont globalement supérieurs aux taux du scénario E2FBK, ce qui suggère une production financière supérieure pour la sensibilité 3.



Les Equity des deux scénarios sont négatives, celle de la sensibilité 3 est supérieure de 4 M €. Les couts de fonds propres sont cependant plus importants pour la sensibilité 3 de 5 M €.

Comme il avait été pressenti, pour cette trajectoire, la production financière avec la sensibilité 3 est supérieure à celle du scénario E2FBK, de 3 M €.



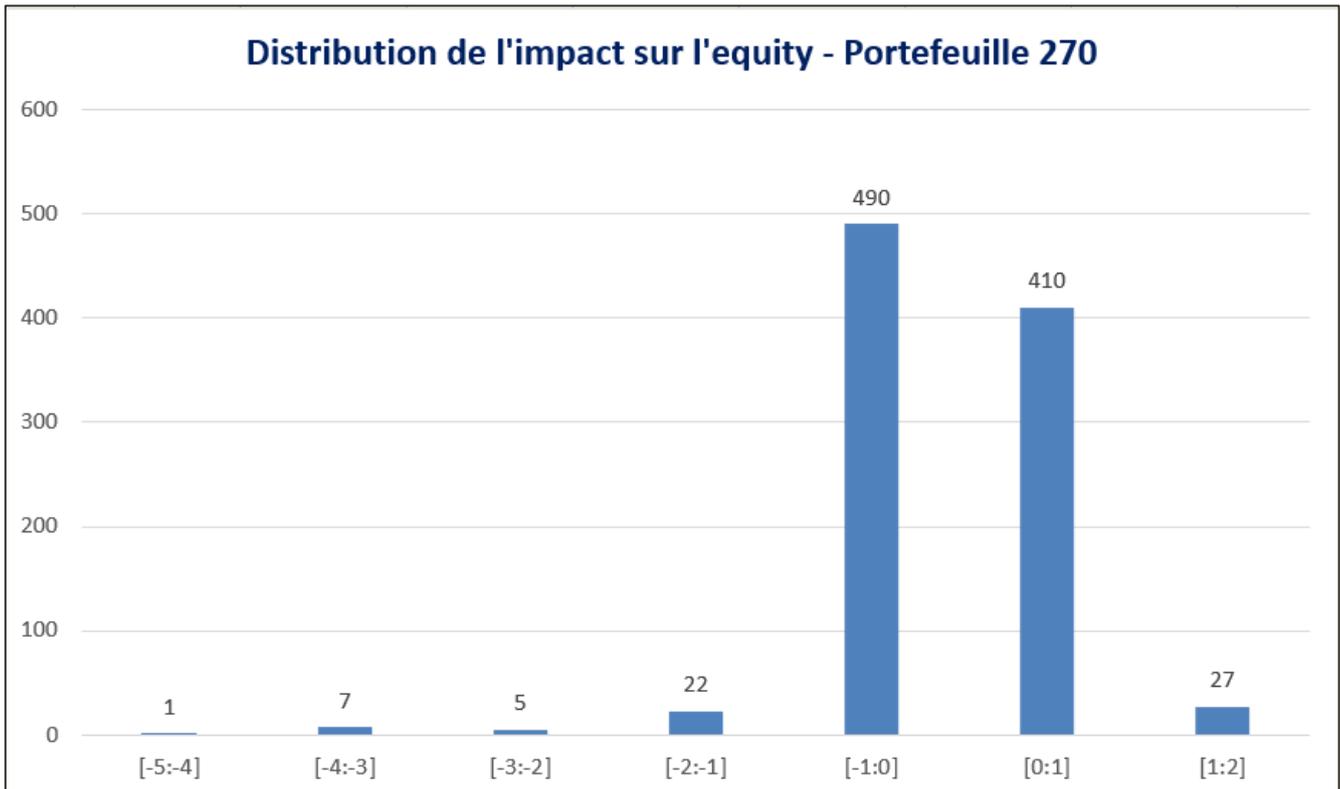
L'analyse des composantes de la production financière a permis d'identifier la production financière courante dont les coupons, les plus-values réalisées et la dotation/reprise de PRE comme responsables de la baisse de la production financière.

### 3.5.5 Sensibilité 1 sur le modèle LMM+

#### 3.5.5.1 Analyse de l'impact sur portefeuille 270

L'analyse de l'Equity pour le modèle épargne 270 a révélé une Equity plus élevée pour la sensibilité 1 que pour le scénario LMM+, l'écart étant de 69 582 865. Afin de comprendre cette différence, une analyse plus fine a été réalisée portant sur certaines trajectoires. Pour chaque trajectoire (1000 trajectoires), un écart relatif entre la VIF obtenu à l'aide du GSE de référence et le GSE alternatif.

La distribution de l'impact sur l'Equity sur le portefeuille 270 est la suivante :

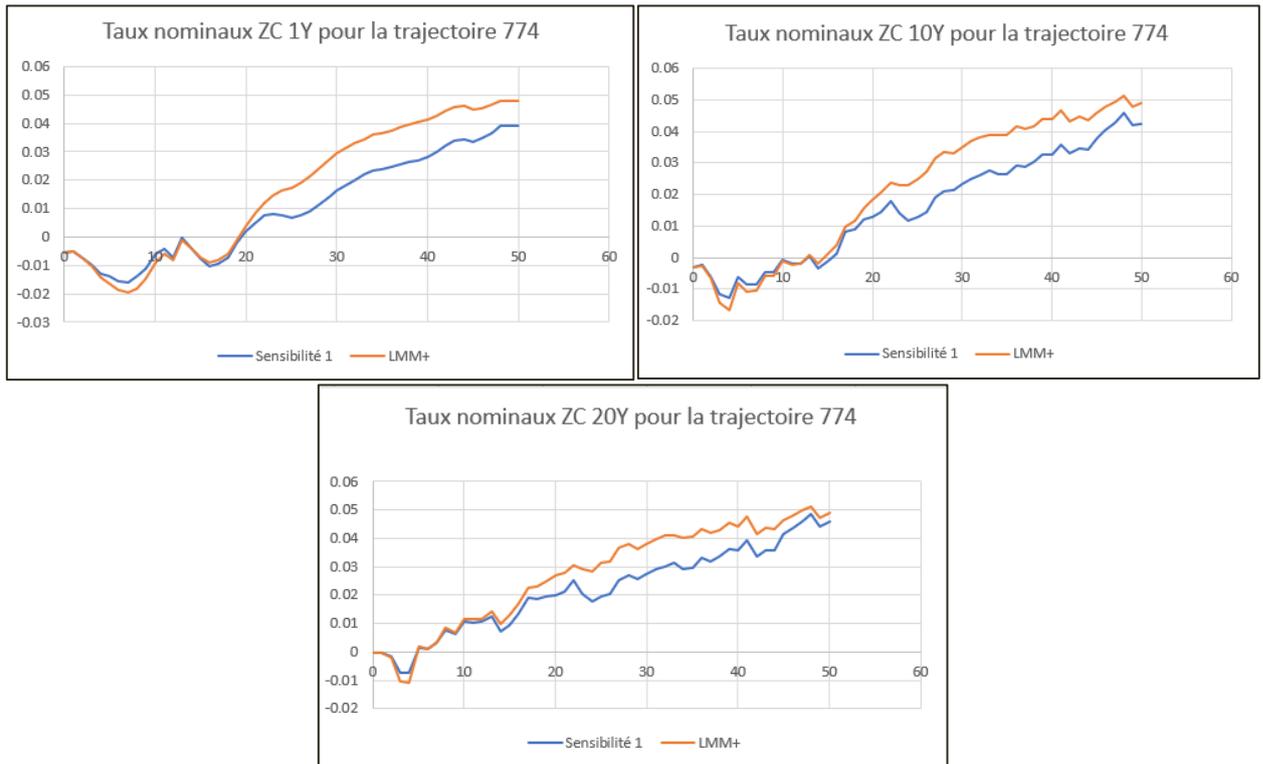


Trois trajectoires représentatives de ces 1000 trajectoires ont été étudiées : une trajectoire du paquet [-1:0], une trajectoire du paquet [0 :1] et une trajectoire du paquet [1 :2]. Les simulations ALM ont été relancées pour chacune de ces trois trajectoires.

Les analyses des maquettes ALM ont donné les résultats suivants :

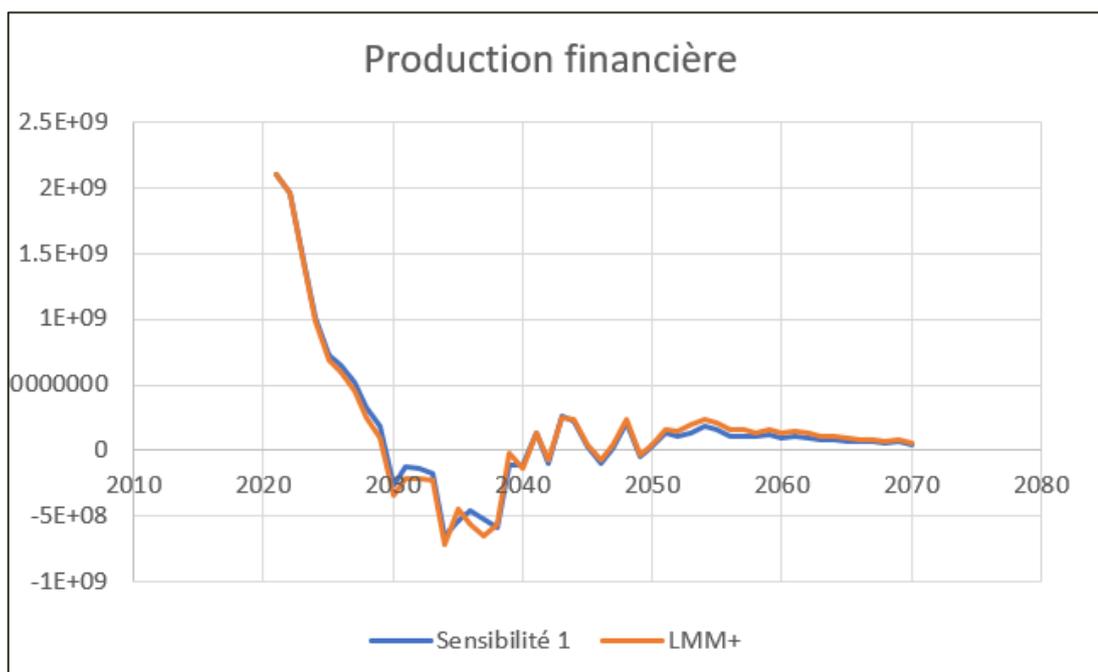
- Pour la trajectoire 774 (dans [-1:0] écart relatif d'Equity -50%)

Les taux nominaux ZC 1Y, 10Y et 20Y du scénario LMM+ sont globalement supérieurs aux taux de la sensibilité 1, ce qui suggère une production financière supérieure pour le scénario LMM+.



Les Equity des deux scénarios sont négatives, celle de la sensibilité 1 est supérieure de 500 M €. Cette différence se retrouve dans les couts de fonds propres qui sont plus importants pour le scénario LMM+ de 600 M €.

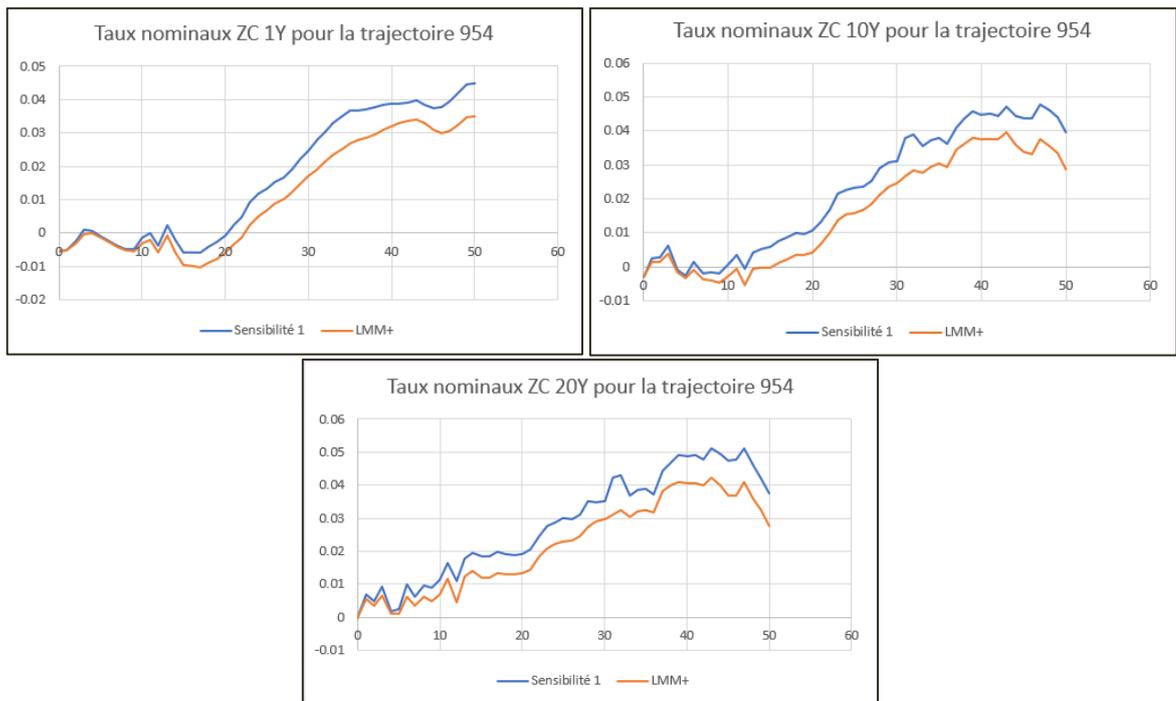
Comme il avait été pressenti, la production financière avec le scénario LMM+ est supérieure à celle de la sensibilité 1, de 13 M €.



L'analyse des composantes de la production financière a permis d'identifier la production financière courante dont les coupons, les plus-values réalisées et la dotation/reprise de PRE comme responsables de cette production financière moindre.

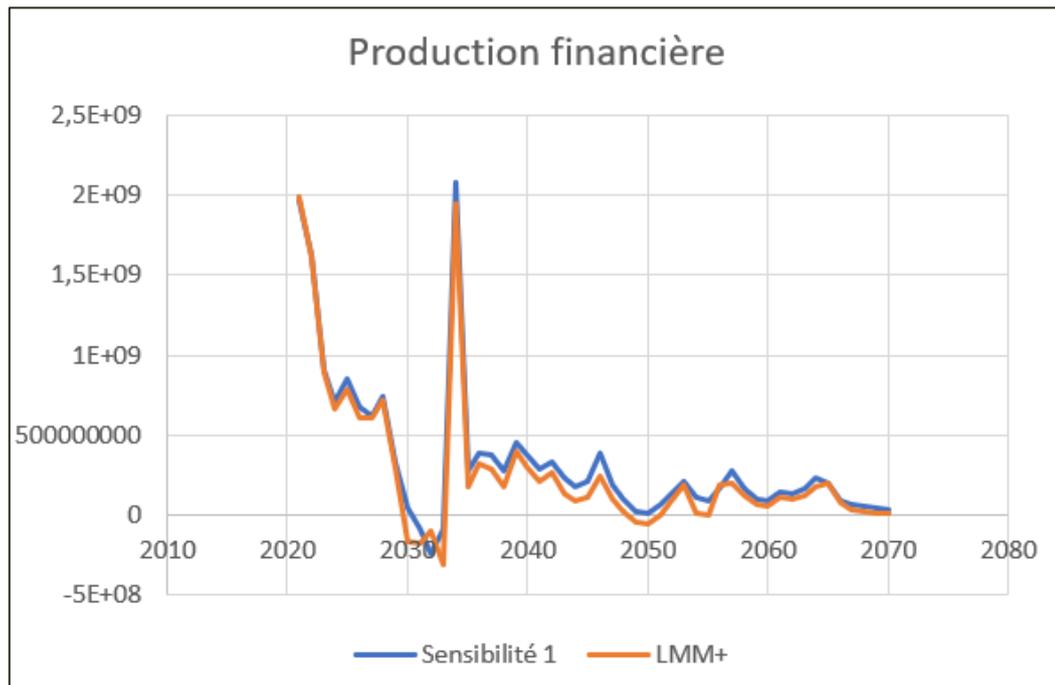
- Pour la trajectoire 954 (dans [1:2] écart relatif d'Equity 150%)

Les taux nominaux ZC 1Y, 10Y et 20Y de la sensibilité 1 sont globalement supérieurs aux taux du scénario LMM+, ce qui suggère une production financière supérieure pour la sensibilité 1.



Les Equity des deux scénarios sont positives, celle de la sensibilité 1 est supérieure de 1 Md €. Cette différence se retrouve dans les coûts de fonds propres qui sont plus importants pour le LMM+ de 1.2 Md €.

Comme il avait été pressenti, la production financière avec la sensibilité 1 est supérieure à celle du scénario LMM+, de 3 Mds €.

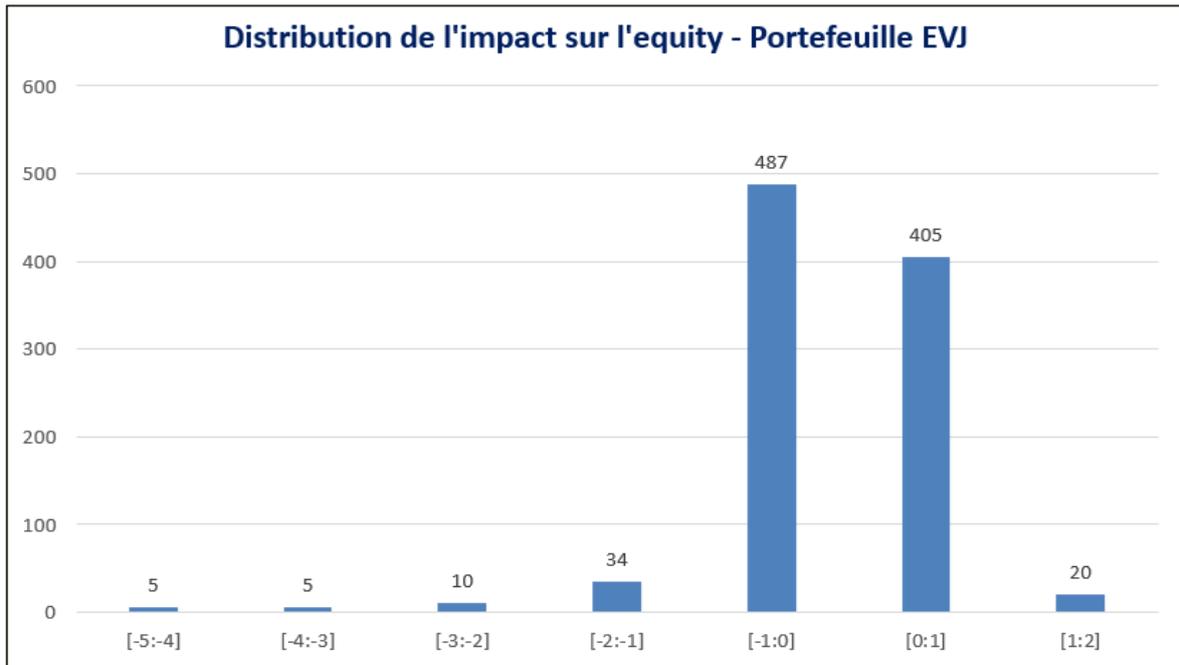


L'analyse des composantes de la production financière a permis d'identifier la production financière courante dont les coupons, les dividendes et la dotation/reprise de PRE comme responsables de cette production financière moindre.

### 3.5.5.2 Analyse de l'impact sur le portefeuille EVJ

L'analyse de l'equity pour le modèle épargne EVJ a révélé une Equity plus élevée pour la sensibilité 1 que pour le scénario LMM+, l'écart étant de 87 876 744. Afin de comprendre cette différence, une analyse plus fine a été réalisée portant sur certaines trajectoires. Pour chaque trajectoire (1000 trajectoires), un écart relatif entre la VIF obtenu à l'aide du GSE de référence et le GSE alternatif.

La distribution de l'impact sur l'Equity sur le portefeuille EVJ est la suivante :

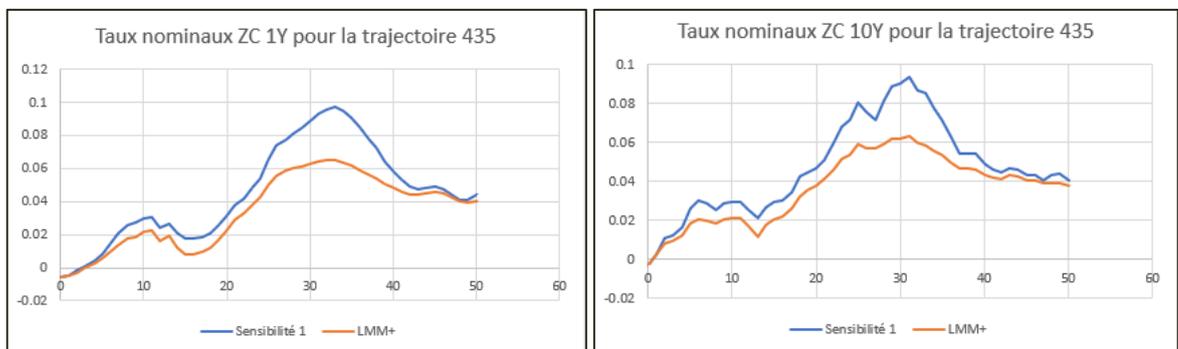


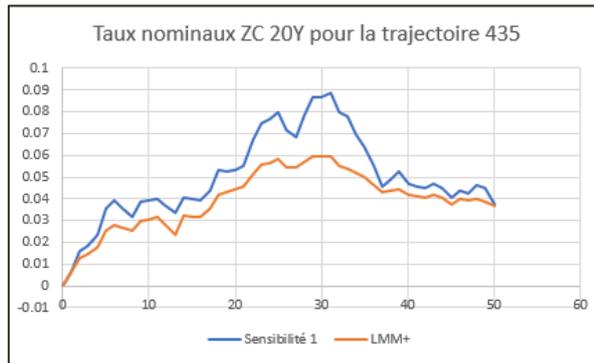
Trois trajectoires représentatives de ces 1000 trajectoires ont été étudiées : une trajectoire du paquet [-1:0], une trajectoire du paquet [0 :1] et une trajectoire du paquet [1 :2]. Les simulations ALM ont été relancées pour chacune de ces trois trajectoires.

Les analyses des maquettes ALM ont donné les résultats suivants :

- Pour la trajectoire 435 (dans [0:1] écart relatif d'Equity 50%)

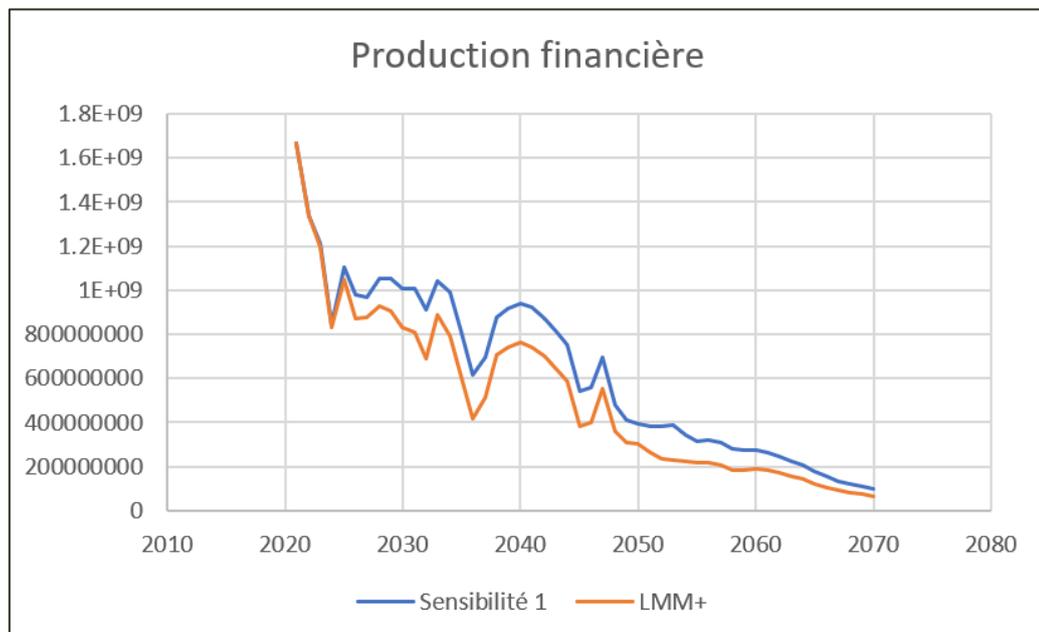
Les taux nominaux ZC 1Y, 10Y et 20Y de la sensibilité 1 sont globalement supérieurs aux taux du scénario LMM+, ce qui suggère une production financière supérieure pour la sensibilité 1.





Les Equity des deux scénarios sont positives, celle de la sensibilité 1 est supérieure de 600 M €. Les couts de fonds propres sont cependant plus importants pour le scénario LMM+ de 70 M €.

Comme il avait été pressenti, la production financière avec la sensibilité 1 est supérieure à celle du scénario LMM+, de 5 Mds €.



L'analyse des composantes de la production financière a permis d'identifier la production financière courante dont les coupons, les dividendes, les amortissements + PVR de remboursement et la dotation/reprise de PRE comme responsables de cette production financière moindre pour le scénario LMM+.

Comme les impacts quantitatifs sont similaires sur les sensibilités 2 et 3, l'analyse des impacts a donc été dépriorisée.

En cas de délais supplémentaires, il aurait été judicieux d'apporter davantage de commentaires aux graphiques exposant les écarts entre les distributions des scénarios afin de faciliter la compréhension de ces derniers au lecteur.

## 3.6 Comparaison des tests de validation

### 3.6.1 Critères de validation d'un GSE

#### 3.6.1.1 Test de martingalité

La qualité d'un scénario de taux se valide selon deux critères : la martingalité et la market consistency. A noter que l'outil permettant de réaliser les tests de martingalité est un outil qui a été développé par CNP Assurances.

Le test de martingalité consiste à vérifier que sous la probabilité risque-neutre les prix des obligations zéro-coupon actualisés sont des martingales. En univers « risque neutre » :

$$E^Q \left( S_T \exp\left(-\int_0^T r_s ds\right) / \mathcal{F}_t \right) = S_0 \quad \forall T$$

Avec

- Q un univers « risque neutre »,
- Si l'indice considéré au temps  $t$ ,
- $r_s$  le taux,
- $(\mathcal{F}_t)_{t \geq T}$  une filtration.

#### 3.6.1.2 Test du déflateur

Le test de martingalité du déflateur utilise le taux ZC 1Y soit un taux sur une obligation zéro coupon de maturité 1 an.

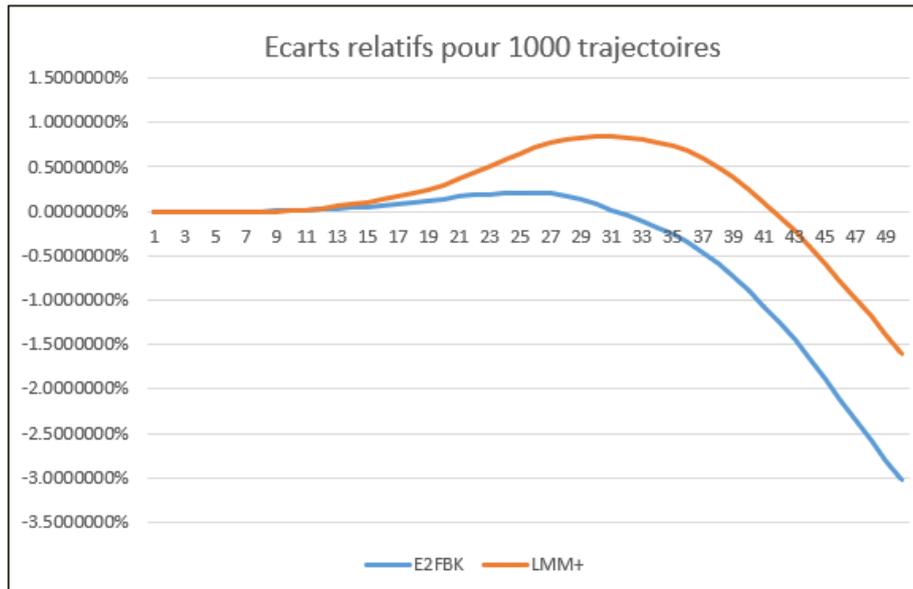
Le test consiste à calculer dans un premier temps l'espérance des déflateurs sur les 1000 trajectoires pour chacun des 50 pas de projection, à partir des taux du fichier RapportMarches. Puis, il faut calculer d'autres facteurs d'actualisation avec les taux de la courbe des taux, fournie par l'EIOPA, de même pour les 50 pas de projection.

Ensuite les écarts relatifs entre l'espérance des déflateurs et les autres facteurs d'actualisation sont évalués pour les 50 pas de projection.

Le test de martingalité permet de vérifier que le déflateur de marché (calculé via la courbe des taux de l'EIOPA) est égal au déflateur d'un Monte Carlo (l'espérance sur les déflateurs).

### **Modèles LMM+ et E2FBK**

Les tests du déflateur pour les scénarios LMM+ et E2FBK (calibrage de référence) donnent les résultats suivants pour 1000 trajectoires.



Pour 1000 trajectoires, les écarts relatifs sont plus faibles avec le scénario E2FBK qu'avec le scénario LMM+ jusqu'à la 37<sup>ème</sup> année. La durée des contrats à CNP Assurances étant de 30 ans, le scénario E2FBK est donc un bon alternatif au scénario LMM+ pour ce test.

Le même test a été reproduit pour 2000, 5000 et 10 000 trajectoires avec le scénario E2FBK ainsi que sur les sensibilités sur les modèles E2BK et LMM+. Les résultats sont présentés en annexe.

### 3.6.1.3 Test de martingalité ZC 10Y

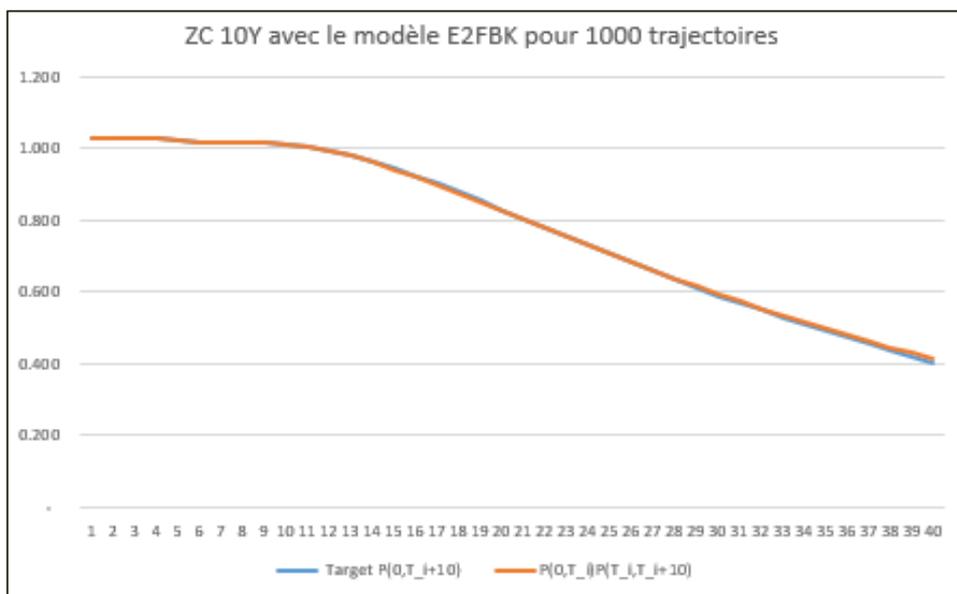
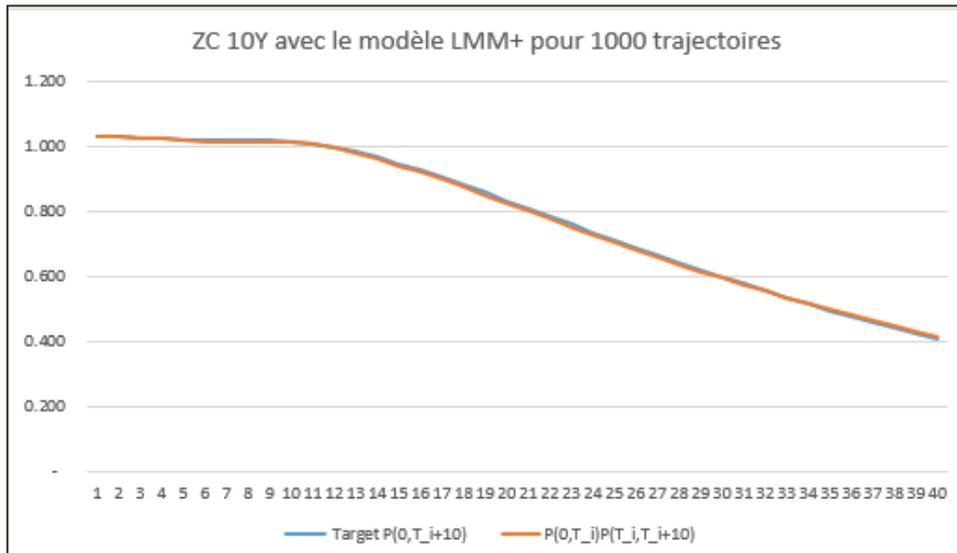
Le test de martingalité ZC 10Y porte sur une obligation zéro coupon de maturité 10 ans. Il consiste également à calculer des écarts relatifs mais cette fois-ci entre les facteurs d'actualisation calculés via la courbe des taux de l'EIOPA et le prix moyen d'une obligation ZC 10Y.

Ce test permet de vérifier que la valorisation d'une obligation se déroule bien.

A noter qu'ici le test porte sur les obligations mais d'autres tests portent sur les autres classes d'actifs.

### Modèles LMM+ et E2FBK

Le test de martingalité portant sur une obligation ZC 10Y a été réalisé sur le scénario LMM+ puis sur le scénario E2FBK. Les résultats obtenus avec les scénarios LMM+ et E2FBK pour 1000 trajectoires sont les suivants :



Le scénario E2FBK fournit de bons résultats pour 1000 trajectoires. En effet il y a peu d'écarts entre la courbe attendue et la courbe obtenue via le GSE.

Le même test a été reproduit pour 2000, 5000 et 10000 trajectoires avec le scénario E2FBK ainsi que sur les sensibilités sur les modèles E2BK et LMM+.

Les résultats sont présentés en annexe.

### 3.6.2 Test de market consistency

Le test de Market consistency consiste à vérifier que les écarts absolus entre les prix générés par le modèle et les prix de marché sont en-dessous d'un certain seuil. Pour avoir une vision

qualitative sur ce critère de validation, un fichier Excel calcul le pourcentage de points qui vérifie ce critère, ce qui fournit la valeur du test de Market consistency.

Il s'agit de calculer le prix de chaque instrument  $i$  par la méthode de Monte Carlo :

$$\text{Prix}_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D_{n,i} \times V_{n,i}$$

où

- $V_{n,i}$  est le prix de l'instrument  $i$  pour le scénario  $n$
- $D_{n,i}$  est le déflateur associé à ce pay-off

Puis il faut vérifier si le prix calculé est égal au prix de l'instrument sur le marché en  $t=0$  :

$$\text{Prix}_i = \text{Prix}_i^M$$

Les résultats des tests de market consistency seront présentés dans la partie *suivante 3.6*

### 3.6.3 Tests de validation avec l'outil de CNP Assurances

CNP Assurances dispose d'un outil de validation qui réalise l'ensemble des tests de martingalité et de market consistency sur le GSE. Les pourcentages pour la martingalité des tableaux ci-dessous représentent le respect de la martingalité de manière moyennée par aux seuils définis par CNP Assurances.

Les pourcentages pour la market consistency représentent les pourcentages de points des nappes de volatilité ATM et OTM Monte Carlo dont l'écart avec la Volatilité marché est inférieure aux seuils définis par CNP Assurances.

Les résultats de ces tests sont les suivants :

Modèle LMM+	Test du déflateur	Test de martingalité ZC 10Y	Test de market consistency
LMM+	100%	100%	85%
Sensibilité 1 du LMM+	96%	100%	87%
Sensibilité 2 du LMM+	96%	100%	87%
Sensibilité 3 du LMM+	96%	100%	87%

Modèle E2FBK	Test du déflateur	Test de martingalité ZC 10Y	Test de market consistency

E2FBK	90%	100%	82%
Sensibilité 1 du E2FBK	92%	98%	86%
Sensibilité 2 du E2FBK	90%	97%	76%
Sensibilité 3 du E2FBK	90%	100%	82%

Le test de market consistency du scénario E2FBK est moins bon que celui du LMM+. Pour les sensibilités, il n'y a que la sensibilité 1 qui présente un résultat de test supérieur à la fois à celui du E2FBK et à celui du LMM+.

Pour les sensibilités sur le modèle LMM+ le test du déflateur est moins bon qu'avec le modèle de référence. Le test de martingalité ZC 10Y est maximal pour le scénario LMM+ et pour les sensibilités sur le modèle LMM+. Quant au test de market consistency, les trois sensibilités présente de meilleurs résultats de test que le scénario LMM+ de référence.

Concernant les tests de martingalité et de market consistency, il est utile de rappeler que pour chaque point de la courbe de taux ou de la nappe de volatilité CNP Assurances a fixé des seuils maximaux pour les écarts en valeur absolue. La méthodologie de fixation de ces seuils est confidentielle et ne peut pas être présentée dans le cadre de ce mémoire.

## 4. CONCLUSIONS

De ce qui a été observé, le passage du modèle LMM+ au modèle E2FBK, a un impact sur l'Equity qui semble négligeable. Concernant les critères de validation, les tests du déflateur et de martingalité ZC 10Y ont révélé que la sensibilité 2 pouvait être une bonne alternative dans le cas de contrats à durations supérieures à 30 ans ce qui est le cas chez CNP Assurances pour les périmètres Epargne Retraite.

Le test de market consistency produit des résultats satisfaisants pour le modèle E2FBK mais moins bons qu'avec le modèle LMM+. Il en est de même pour les résultats des tests pour les sensibilités 2 et 3 sur le modèle E2FBK. Seule la sensibilité 1 sur le modèle E2FBK a un résultat de test supérieur à celui du modèle LMM+.

Les résultats des tests de validation pour les sensibilités sur le modèle LMM+ montrent que libérer le forward rate displacement permet d'améliorer la market consistency sans pour autant que la martingalité soit très affectée. Les impacts quantitatifs sont satisfaisants. Libérer le forward rate displacement pour CNP Assurances pourrait être une alternative dans le calibrage du modèle LMM+. De plus, les impacts quantitatifs sont limités et pourraient rassurer le management sur ce choix.

Utiliser le modèle E2FBK semble donc envisageable de même pour les sensibilités sur le modèle LMM+. Cependant changer de modèle de taux chez une compagnie d'assurance nécessite beaucoup de réflexion d'études en amonts. La justification du choix du modèle de taux est au cœur des sujets de R&D de la compagnie.

En outre, il a également été jugé nécessaire de vérifier que l'écart de convergence reste stable pour l'ensemble des sensibilités réalisées dans le cadre de ce mémoire. L'écart de convergence est un indicateur qui permet de s'assurer de la cohérence de la valorisation de l'actif et du passif. Cet indicateur est donc important pour vérifier que les fuites du modèle (actif et passif) sont maîtrisées.

La fuite de l'actif augmente de 0,04% pour le scénario du modèle LMM+. Cet écart varie entre 0,02% et 0,10% pour les scénarios E2FBK, les sensibilités sur le modèle E2FBK et les sensibilités sur le modèle LMM+. Ces fuites ne sont pas significatives compte tenu de la valeur de marché de l'actif qui est de 117 Md € par exemple pour le portefeuille 270 (portefeuille d'épargne La Banque Postale). L'écart étant globalement inférieur à 0,5%, les écarts de convergence des scénarios de cette étude montrent que la valorisation de l'actif est restée cohérente malgré que les modèles de taux aient été retouchés. Par manque de temps cette fuite non significative a été considérée non prioritaire.

A noter que d'autres sensibilités ont été réalisées sur les paramètres des modèles et que seules les plus pertinentes ayant le plus d'impact sur l'Equity sont présentées dans cette étude. D'autres modèles seraient intéressants à étudier via la fonction de calibrage. Le modèle Hull & White est un bon candidat pour la génération des scénarios économiques. De par sa distribution gaussienne, il génère des taux négatifs relativement importants notamment dans un contexte de volatilité importante sur les taux. Comme les modèles LMM+ et E2FBK, le modèle Hull & White respecte les propriétés de martingalité et de market consistency. Plusieurs tentatives ont été réalisées : un calibrage a bien été effectué avec le modèle Hull & White mais lancer ce scénario sous Moody's n'a pas été possible car il manquait des éléments de la matrice de corrélation qui n'étaient pas disponibles avec la licence Moody's de CNP Assurances.

Ce mémoire fait partie de la réflexion de CNP Assurances sur la justification du choix du modèle de taux. L'assistance de mon tuteur d'alternance Anouar HASSINE était récurrente pour résoudre les problèmes techniques et m'aider à avancer sur les points de blocage. Ce mémoire m'a permis également de mieux cerner l'univers des GSE, et du modèle de gestion actif/passif.

## 5. BIBLIOGRAPHIE

### Mémoires IA

- Pierre VAUJANY : Impact du modèle de taux nominaux et de son calibrage sur les indicateurs de Solvabilité II, Institut des actuaires, Natixis Assurances, Mémoire IA, 2019.
- Sacha Flavian : Modèles de diffusion de taux en période de taux négatifs dans le cadre d'un générateur de scénarios économiques, Institut des actuaires, FIXAGE Employee Benefits, Mémoire IA, 2016.

### Articles et publications

- Institut des actuaires, Document d'Orientation : Les Générateurs de scénarios économiques Eléments d'analyse et exemples de pratiques actuarielles applicables au marché français, 2018

### Cours et autres documents

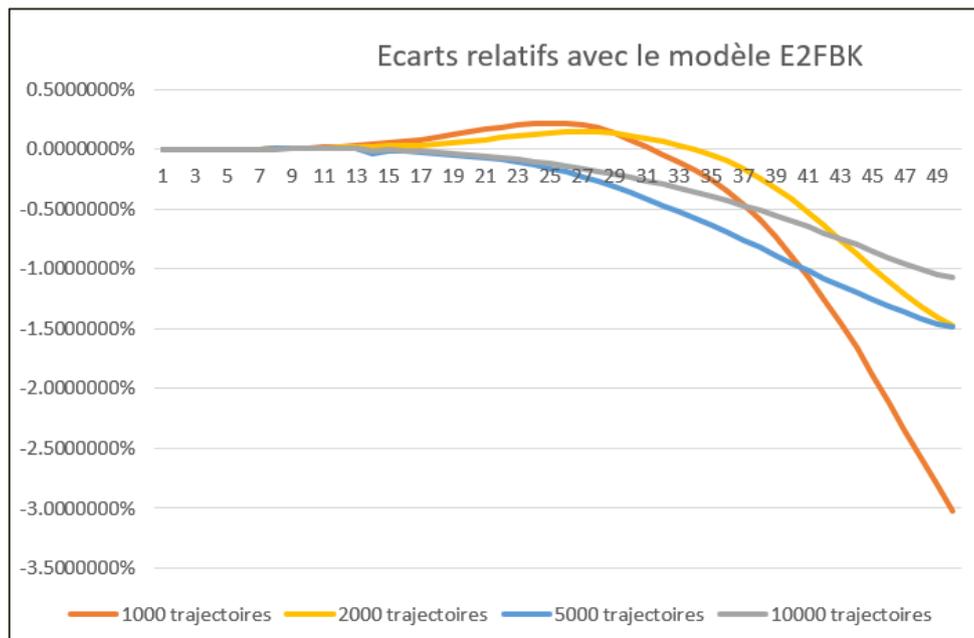
- Cours Modélisation risque-neutre des taux d'intérêt nominaux, Milliman, ISFA, 2019
- Documents de CNP Assurances :
  - Documentation Fonctionnelle Macron : Modèle Epargne, Direction Technique Groupe CNP Assurances, 2015
  - Document Fonctionnel détaille d'actifs : Constitution de Model Point d'actifs Direction des Investissements CNP Assurances, 2015
  - Calibration Tools Methodology Guide, Moody's Analytics, 2021

## 6. ANNEXES

### 6.1 Tests de martingalités

#### 6.1.1 Test du déflateur

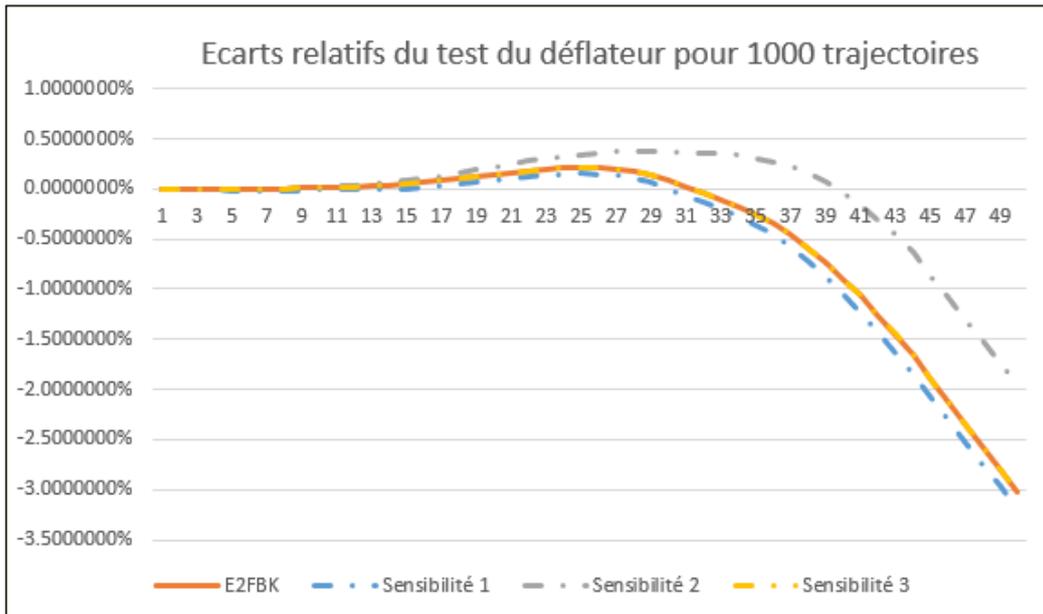
Le test du déflateur de la section 3.6.1.2 a été reproduit pour 2000, 5000 et 10000 trajectoires avec le scénario E2FBK.



La martingalité semble s'améliorer dès le passage de 1000 à 2000 trajectoires. Plus le nombre de trajectoires est grand et plus les écarts relatifs sont globalement faibles.

#### Sensibilités sur le modèle E2FBK

Les tests du déflateur ont été reproduit pour chacune des trois sensibilités sur le modèle E2FBK. Les résultats sont les suivants pour 1000 trajectoires :



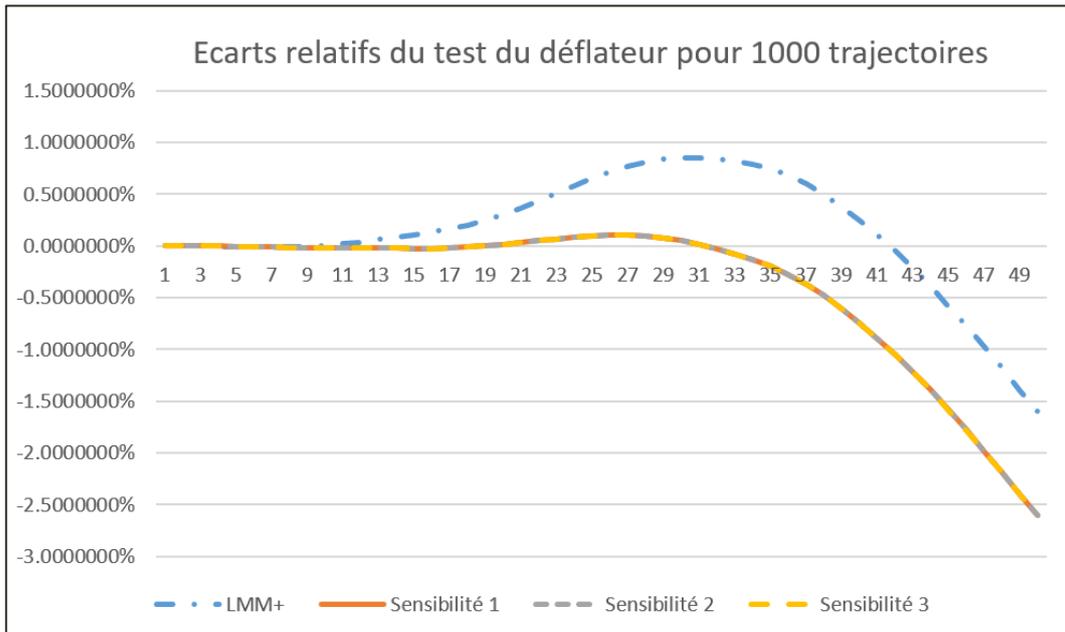
La sensibilité 1 a de meilleurs résultats jusqu'à 29 ans. Puis à 30 ans c'est le scénario E2FBK qui présente les écarts les plus intéressants, ensuite c'est la sensibilité 3 et la sensibilité 2.

De 0 à 29 ans	A 30 ans	De 31 à 34 ans	De 35 à 49 ans
Sensibilité 1	E2FBK	Sensibilité 3	Sensibilité 2

La sensibilité 1 présente de bons résultats pour ce test.

### Sensibilités sur le modèle LMM+

Les tests du déflateur ont été reproduit pour chacune des trois sensibilités sur le modèle LMM+. Les résultats sont les suivants pour 1000 trajectoires :



Le tableau ci-dessous indique le scénario dont les écarts relatifs pour le test du déflateur sont les plus faibles selon l'année de projection.

En 0	De 1 à 2 ans	De 3 à 5 ans	De 6 à 8 ans	De 9 à 18 ans	De 19 à 30 ans	De 31 à 36 ans	De 37 à 38 ans	De 39 à 49 ans
LMM+	Sensibilité 2	Sensibilité 1	LMM+	Sensibilité 1	Sensibilité 3	Sensibilité 1	Sensibilité 2	LMM+

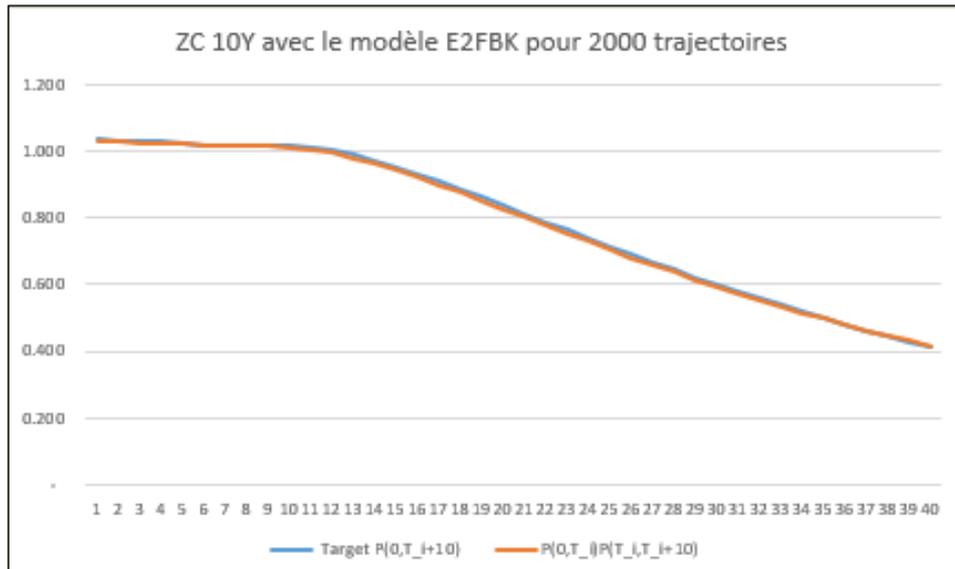
La sensibilité 1 sur le modèle LMM+ est donc le scénario qui a les écarts relatifs les plus faibles le plus grand nombre d'années : 19 années, puis il s'agit du LMM+ avec 19 années, suivi de la sensibilité 3 avec 12 années et ensuite la sensibilité 2 avec 4 années.

### 6.1.2 Test de martingalité ZC 10Y

Le test de martingalité ZC 10Y de la section 3.6.1.3 a été reproduit pour 2000, 5000 et 10000 trajectoires avec le scénario E2FBK.

En augmentant le nombre de trajectoires, les résultats du test devraient s'améliorer.

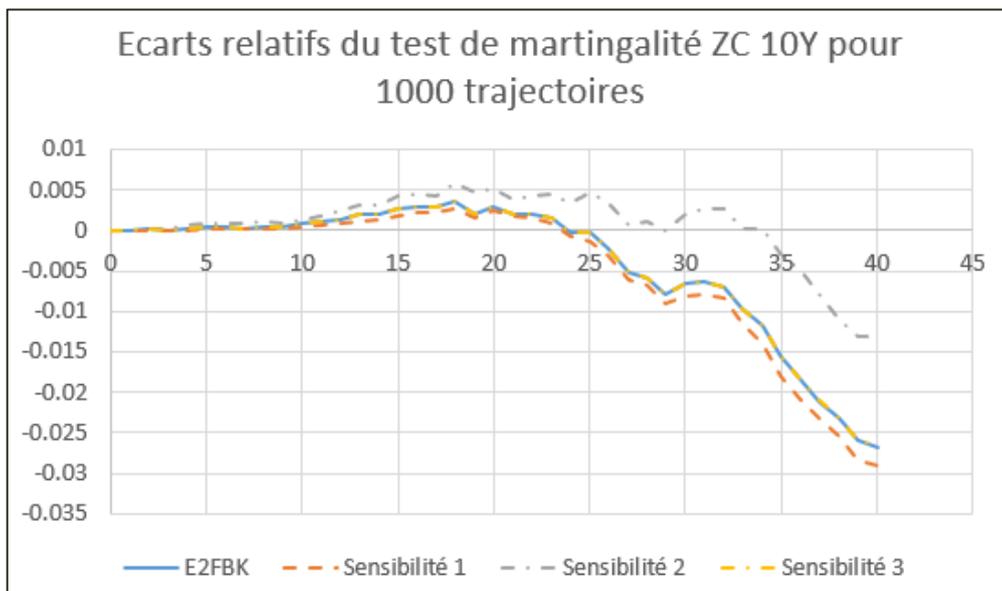
Les résultats obtenus pour 2000 trajectoires sont présentés ci-dessous.



Au global il n'y a pas d'amélioration dans les écarts relatifs pour une obligation ZC 10Y pour le scénario E2FBK lorsque le nombre de trajectoires est augmenté.

**Sensibilités sur le modèle E2FBK**

Le même test de martingalité portant sur une obligation ZC 10Y a été reproduit pour les sensibilités 1, 2 et 3 sur le modèle E2FBK. Les résultats obtenus pour 1000 trajectoires sont satisfaisants pour les trois sensibilités.

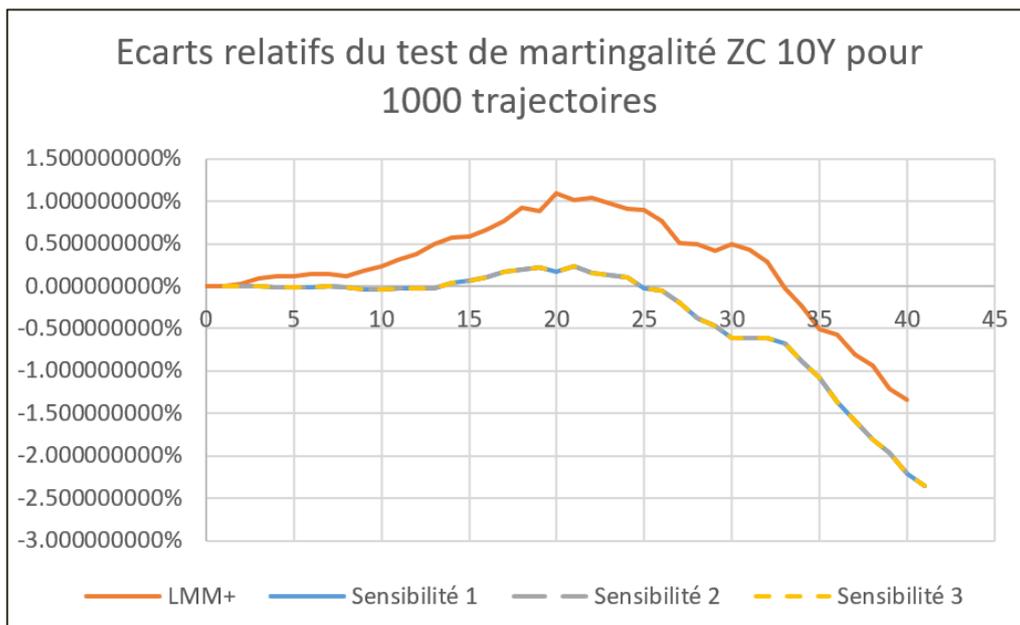


La sensibilité 1 sur le modèle E2FBK permet d'obtenir les meilleurs écarts relatifs de 2 à 23 ans.

En 0 an	De 2 à 23 ans	De 24 à 27 ans	De 28 à 40 ans
Sensibilité 2	Sensibilité 1	Sensibilité 3	Sensibilité 2

**Sensibilités sur le modèle LMM+**

Le même test de martingalité portant sur une obligation ZC 10Y a été reproduit pour les sensibilités 1, 2 et 3 sur le modèle LMM+. Les résultats obtenus pour 1000 trajectoires sont satisfaisants pour les trois sensibilités.



Le tableau ci-dessous indique le scénario dont les écarts relatifs pour le test de martingalité ZC 10Y sont les plus faibles selon l'année de projection.

De 0 à 1 an	De 2 à 8 ans	A 9 an	De 10 à 12 ans	De 13 à 23 ans	De 24 à 27 ans	A 28 ans	De 29 à 40 ans
LMM+	Sensibilité 1	Sensibilité 2	Sensibilité 1	Sensibilité 3	Sensibilité 1	Sensibilité 2	LMM+

Les scénarios du LMM+ et de la sensibilité 1 ont les écarts relatifs les plus faibles 14 années, ils sont suivis par la sensibilité 3 avec 11 années.

La sensibilité 2 sur le modèle LMM+ se distingue des autres scénarios puisque son scénario présente les écarts relatifs les plus faibles seulement 2 années.