

**Mémoire présenté devant l'UFR de Mathématique et Informatique
pour l'obtention du diplôme du Master Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaire**
le

Par : Gabriel CHATEAUX--WARIN

Titre : Analyse comparative des modèles d'inflation classiques et des modèles à chaînes de Markov cachées en contexte de forte inflation

Confidentialité : Non Oui (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaire :*

Entreprise :

Nom : SeaBird Conseil

Signature :

*Membres présents du Jury du Master
Actuariat du DUAS :*

Directeur de Mémoire en entreprise :

Nom : Melissande SANCHEZ

Signature :



Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat



Résumé

Les récentes crises mondiales ont entraîné d'importantes pressions inflationnistes, mettant en évidence les limites des générateurs de scénarios économiques traditionnels. Ces outils, souvent basés sur des modèles d'inflation à paramètres constants, peinent à anticiper les crises aiguës et les changements de régime marqués qui caractérisent ces périodes d'instabilité économique.

Ce mémoire vise à répondre à cette problématique en explorant et en comparant plusieurs modèles de projection de l'inflation, afin de déterminer lequel est le plus adapté aux régimes inflationnistes fluctuants. L'accent est mis sur les modèles de Markov cachés, qui offrent une capacité à représenter l'inflation en fonction de différents états économiques. Ces modèles dynamiques permettent de capturer les variations d'inflation à travers des changements de régime, rendant ainsi les projections plus flexibles aux périodes de forte inflation.

En définitive, l'étude ambitionne d'identifier le modèle d'inflation le plus pertinent pour intégrer les pressions inflationnistes de manière fiable dans un générateur de scénarios économiques en univers réel, renforçant ainsi la gestion des risques dans un contexte économique volatil et incertain.

Mots-clés : modélisation de l'inflation, changement de régimes, modèle de Markov caché, corrélation dynamique dans le temps, univers monde réel, périodes inflationnistes, générateur de scénarios économiques.

Abstract

Recent global crises have led to significant inflationary pressures, highlighting the limitations of traditional economic scenario generators. These tools, often based on inflation models with constant parameters, struggle to anticipate sharp crises and regime changes that characterize such periods of economic instability.

This thesis aims to address this issue by exploring and comparing several inflation projection models to determine which is best suited to fluctuating inflationary regimes. The focus is on hidden Markov models, which offer a unique ability to represent inflation according to different economic states. These dynamic models capture inflation variations through regime changes, making projections more flexible and better adapted to periods of high inflation.

Ultimately, this study seeks to identify the most relevant inflation model to reliably incorporate inflationary pressures into a real-world economic scenario generator, thereby strengthening risk management in a volatile and uncertain economic context.

Keywords : inflation modeling, regime switching, hidden Markov model, dynamic correlation over time, real-world universe, inflationary periods, economic scenario generator.

Note de Synthèse

Ce mémoire vise à identifier le modèle d'inflation le plus adapté pour intégrer les périodes de forte inflation dans un générateur de scénarios économiques. Deux modèles à changements d'états, comparés à un modèle traditionnel, ont été choisis pour leur capacité à capturer les dynamiques complexes de l'inflation, en particulier lors des fluctuations marquées, récemment observées en Europe. Leur flexibilité permet de modéliser les transitions entre différents régimes économiques, offrant ainsi une représentation plus réaliste des périodes inflationnistes.

Pour permettre une comparaison des différents modèles d'inflation, il est essentiel de créer un cadre de référence stable dans lequel seules les spécificités des modèles d'inflation varient. C'est pourquoi, la notion de composantes fixes est introduite.

Concernant la modélisation des composantes fixes, à savoir un modèle de taux, un modèle action et un modèle immobilier, le choix s'est porté sur des modèles faciles à comprendre, à calibrer, à valider et à implémenter. Ainsi, le modèle de taux retenu est le modèle utilisé par [Gillot \(2019\)](#), tandis que pour les actions et l'immobilier, le modèle de Black & Scholes a été choisi.

Concernant les modèles d'inflation, trois modèles sont comparés : un modèle standard de Vasicek, couramment utilisé pour sa caractéristique de retour à la moyenne (adaptée à la politique de la BCE), et deux modèles de Markov cachés, qui permettent d'intégrer les changements de régimes de l'inflation.

Un modèle de Markov caché, ou en anglais *Hidden Markov Model (HMM)*, se compose :

- d'un processus non observable, modélisé comme une séquence d'états cachés suivant un processus de Markov. En d'autres termes, le *HMM* repose sur une chaîne de Markov dont les probabilités de transitions ne sont pas connus, et,
- d'un processus observable, où chaque observation à l'instant t est générée à partir de l'état du système à ce même instant.

Les deux *HMM* se distinguent par les distributions associées aux observations.

- Pour le *Normal-HMM*, les observations à chaque pas sont supposés suivre une distribution normale. Cela signifie que les données observées sont générées à partir d'une distribution normale dont les paramètres varient selon l'état de l'inflation.
- Pour le *Vasicek-HMM*, chaque état est associé à un modèle de Vasicek avec des paramètres propres à cet état. Cela signifie que les observations à chaque pas sont supposés suivre un modèle de Vasicek, dont les paramètres évoluent en fonction de l'état dans lequel est l'inflation.

Ainsi, contrairement aux chaînes de Markov classiques où les états sont directement visibles, les états d'un *HMM* doivent être inférés à partir des observations.

Tandis que les paramètres du modèle de Vasicek sont estimés par MCO, ceux des *HMM* sont estimés par l'algorithme de Baum-Welch (algorithme EM appliqué aux *HMM*), permettant d'obtenir les matrices de probabilités de transition des chaînes de Markov sous-jacentes, les distributions initiales ainsi que les paramètres associés à la distribution des observations pour chaque modèle.

Par la suite, le choix du nombre d'états dans un *HMM* est guidé par les critères *AIC* et *BIC*.

L'algorithme de Viterbi est utilisé pour identifier la séquence d'états la plus probable sur l'historique de l'inflation. Les décodages des deux modèles est présenté dans les figures 1 et 2. Pour le *Normal-HMM*, un modèle à 6 états a été sélectionné :



FIGURE 1 – Décodage de la séquence d'états la plus probable d'un *Normal-HMM* à 6 états à l'aide de l'algorithme de Viterbi

Pour le *Vasicek-HMM*, un modèle à 3 états a été sélectionné :



FIGURE 2 – Décodage de la séquence d'états la plus probable d'un *Vasicek-HMM* à 3 états à l'aide de l'algorithme de Viterbi

A partir des séquences d'états les plus probables, les résultats du *backtesting* déterministe pour chaque modèle d'inflation sont représentés dans la figure 3.

Le modèle de Vasicek montre une capacité limitée à capturer les variations de crises, tandis que les modèles de Markov cachés, mieux adaptés aux périodes de crise, présentent une meilleure adéquation aux données historiques.

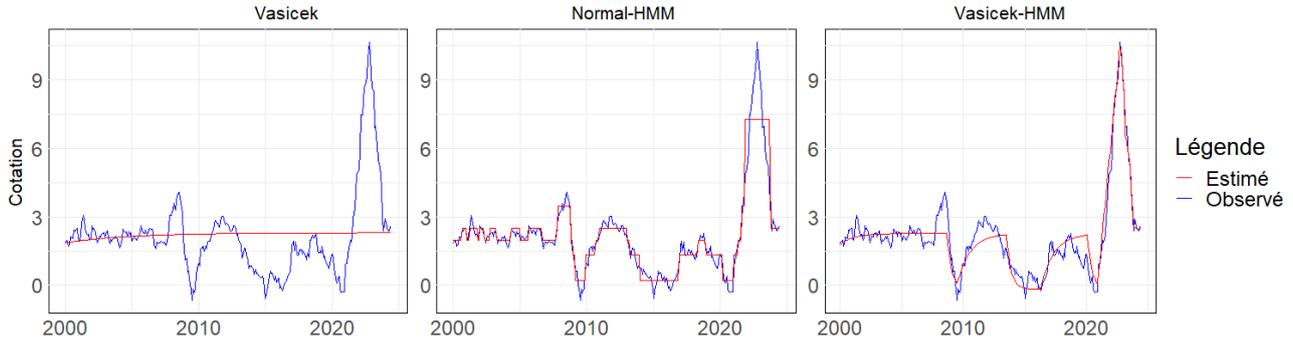


FIGURE 3 – *Backtesting* déterministe de l'inflation estimé par un modèle de Vasicek, un *Normal-HMM* et un *Vasicek-HMM*

Par la suite, afin de comparer les projections des différents modèles d'inflation, il est nécessaire d'introduire une structure de dépendance propre à chaque modèle.

Pour cela, trois structures de dépendance distinctes sont définies.

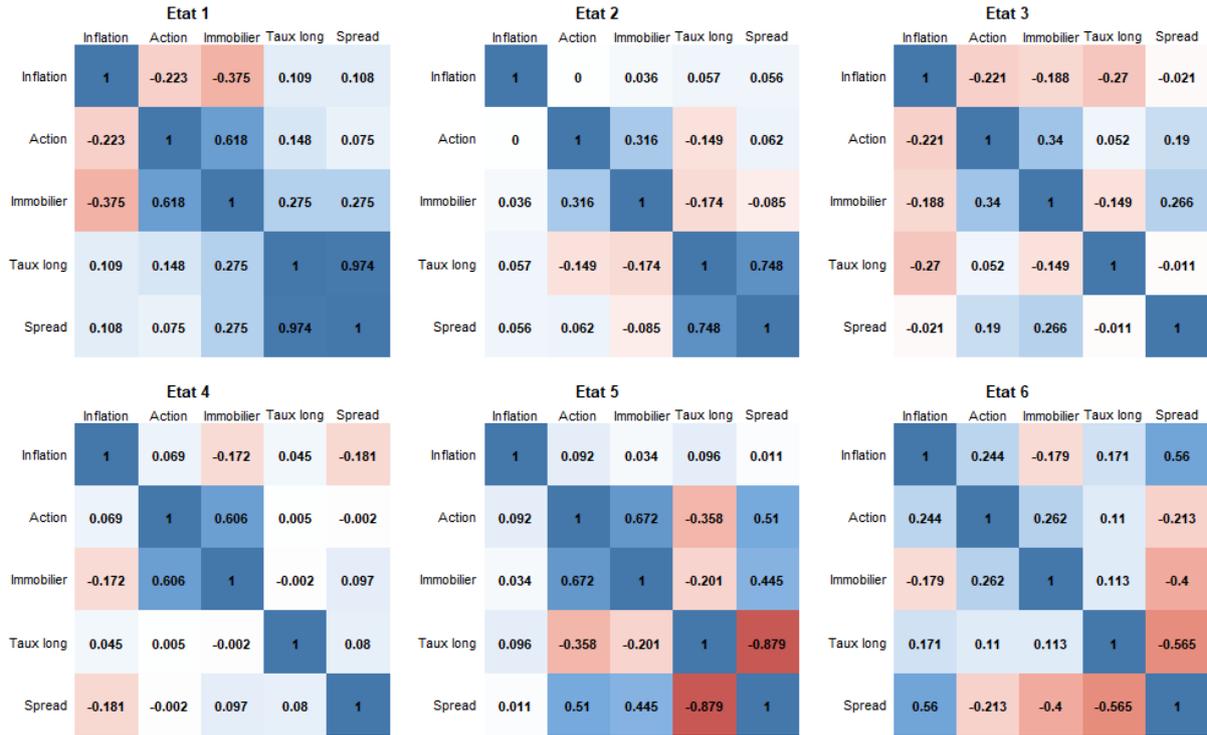
- Pour le modèle de Vasicek, une structure de dépendance est mise en place en s'appuyant sur la matrice de corrélation linéaire entre les résidus des modèles d'inflation, de taux, d'actions et d'immobilier.
- Pour les modèles à changements d'états, une structure de dépendance dynamique dans le temps est établie à partir des différentes matrices de corrélations calculés sur les résidus des modèles pour chaque état du modèle.

La matrice de corrélation linéaire estimée sur les résidus du modèle d'inflation de Vasicek est présentée dans la figure 4.

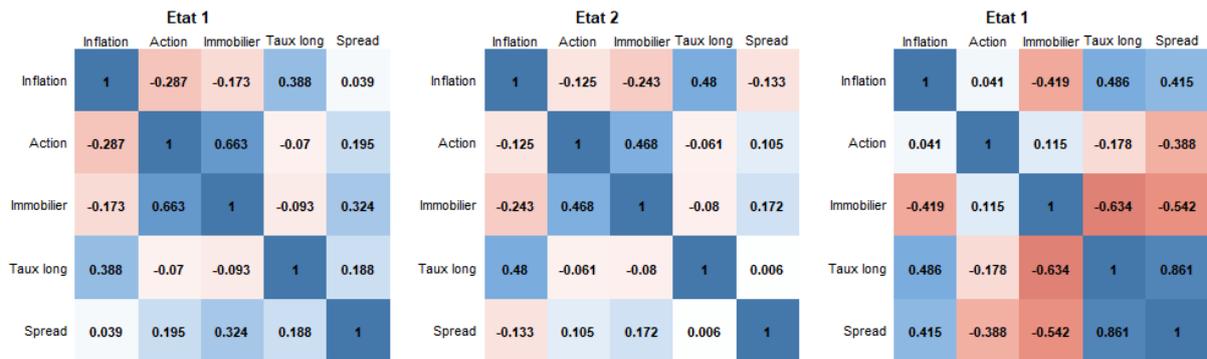
	Inflation	Action	Immobilier	Taux long	Spread
Inflation	1	-0.056	-0.21	0.243	-0.23
Action	-0.056	1	0.504	-0.065	0.11
Immobilier	-0.21	0.504	1	-0.039	0.179
Taux long	0.243	-0.065	-0.039	1	0.048
Spread	-0.23	0.11	0.179	0.048	1

FIGURE 4 – Matrice de corrélation des résidus pour le modèle Vasicek

Les matrices de corrélation linéaires estimées sur les résidus des différents états du *Normal-HMM* d'inflation sont présentées dans la figure 5.

FIGURE 5 – Matrices de corrélation des résidus pour les 6 états du *Normal-HMM*

Les matrices de corrélation linéaires estimées sur les résidus des différents états du *Vasicek-HMM* d'inflation sont présentées dans la figure 6.

FIGURE 6 – Matrices de corrélation des résidus pour les 3 états du *Vasicek-HMM*

Pour la projection, 20 000 simulations sont réalisées, et différents quantiles (5 %, 25 %, 50 %, 75 %, 95 %) sont ensuite analysés. Lors de la projection des modèles de Markov cachés, chaque simulation génère une séquence d'états à partir de la matrice de transition associée au modèle. Selon l'état de l'inflation, la dynamique ainsi que les paramètres spécifiques à cet état sont appliqués pour produire une estimation. Les bruits sont corrélés en fonction de la structure de dépendance définie et de l'état dans lequel est l'inflation (dans le cas d'une dynamique markovienne).

Après application de cette méthodologie, les quantiles de projection pour les différents modèles d'inflation sont obtenus et comparés :

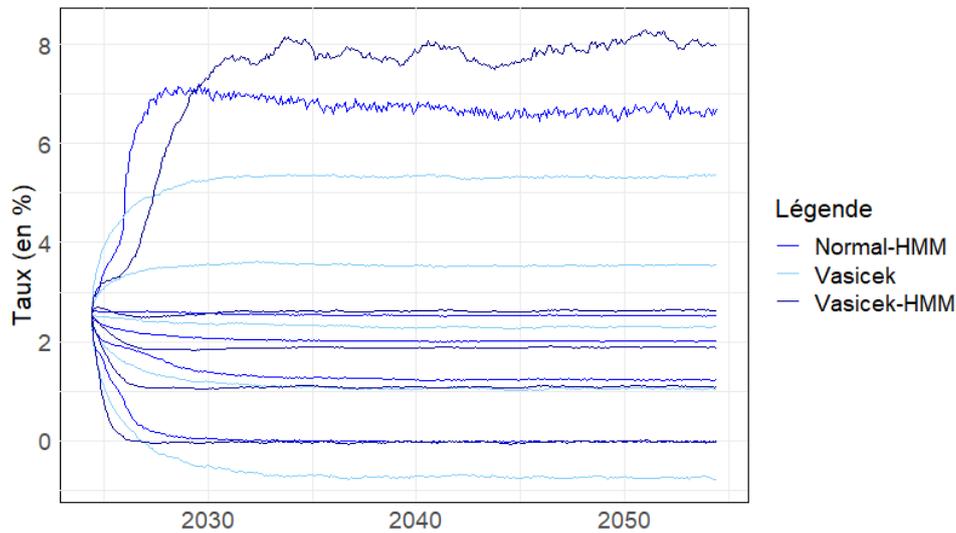


FIGURE 7 – Comparaison des quantiles des projections à 30 ans des différents modèles d'inflation

Finalement, deux conclusions s'en dégagent.

1. Le modèle de Vasicek apparaît très rudimentaire par rapport aux deux modèles *HMM*. Il tend à surestimer les valeurs centrales tout en sous-estimant les valeurs aux extrémités.
2. Dans une moindre mesure, le *Vasicek-HMM* se distingue du *Normal-HMM* par sa capacité à mieux intégrer des situations de crise extrême. Il offre une capacité accrue à intégrer des situations de crise extrême et surpasse également les autres modèles étudiés en termes de comportement en période de crise et de *backtesting*.

Pour conclure, les principaux points à retenir de ce mémoire sont les suivants :

- les modèles de Markov cachés, bien que plus complexes et sensibles aux données, offrent une meilleure flexibilité et précision face aux modèles standards,
- parmi eux, le *Vasicek-HMM* s'est révélé particulièrement pertinent, capturant efficacement les variations historiques de l'inflation.
- Cependant, des limites subsistent dans cette étude, notamment la possibilité d'utiliser des modèles d'actifs plus complexes et d'affiner davantage les corrélations dynamiques. Des améliorations sur ces points pourraient renforcer la robustesse des projections.

Synthesis note

This thesis aims to identify the most suitable inflation model for incorporating periods of high inflation into an economic scenario generator. Two state-switching models, compared to a traditional model, were chosen for their ability to capture the complex dynamics of inflation, particularly during the marked fluctuations recently observed in Europe. Their flexibility allows for the modeling of transitions between different economic regimes, offering a more realistic representation of inflationary periods.

To enable a comparison of the different inflation models, it is essential to establish a stable reference framework in which only the inflation models vary. This leads to the introduction of the concept of fixed components.

In terms of modeling fixed components—namely, an interest rate model, an equity model, and a real estate model—the choice was made to use models that are easy to understand, calibrate, validate, and implement. The chosen interest rate model follows the one used by [Gillot \(2019\)](#), while the Black & Scholes model was selected for both equity and real estate components.

For inflation models, three models are compared : a Vasicek model, commonly used for its mean-reverting characteristic (suitable for ECB policy), and two hidden Markov models that allow for incorporating regime shifts in inflation.

A hidden Markov model (HMM) consists of :

- an unobservable process modeled as a sequence of hidden states following a Markov process. In other words, the HMM is based on a Markov chain whose transition probabilities are unknown, and,
- an observable process where each observation at time t is generated from the system's state at that instant.

The two HMMs differ in the distributions associated with their observations.

- For the Normal-HMM, each observation at each time step is assumed to follow a normal state-dependent distribution, meaning that the observed data is generated from a normal distribution with parameters that vary depending on the inflation state.
- For the Vasicek-HMM, each state is associated with a Vasicek model with parameters unique to that state. This implies that observations at each time step follow a Vasicek model with parameters that change according to the inflation state.

Thus, unlike classic Markov chains where states are directly visible, the states in an HMM must be inferred from observations.

While the parameters of the Vasicek model are estimated using ordinary least squares (OLS), the HMM parameters are estimated with the Baum-Welch algorithm (an EM algorithm applied to HMMs), enabling the calculation of transition probability matrices for the underlying Markov chains, initial distributions, and the parameters of the state-dependent distribution.

The number of states in an HMM is chosen based on AIC and BIC criteria.

The Viterbi algorithm is used to identify the most likely sequence of states over the historical period for inflation. The decodings for the two models are presented in Figures 8 and 9. For the Normal-HMM, a six-state model was selected :



Figure 8 – Most probable state sequence decoding for a six-state Normal-HMM using the Viterbi algorithm

For the Vasicek-HMM, a three-state model was selected :



Figure 9 – Most probable state sequence decoding for a three-state Vasicek-HMM using the Viterbi algorithm

Using the most probable state sequences, the results of deterministic backtesting for each inflation model are shown in Figure 10.

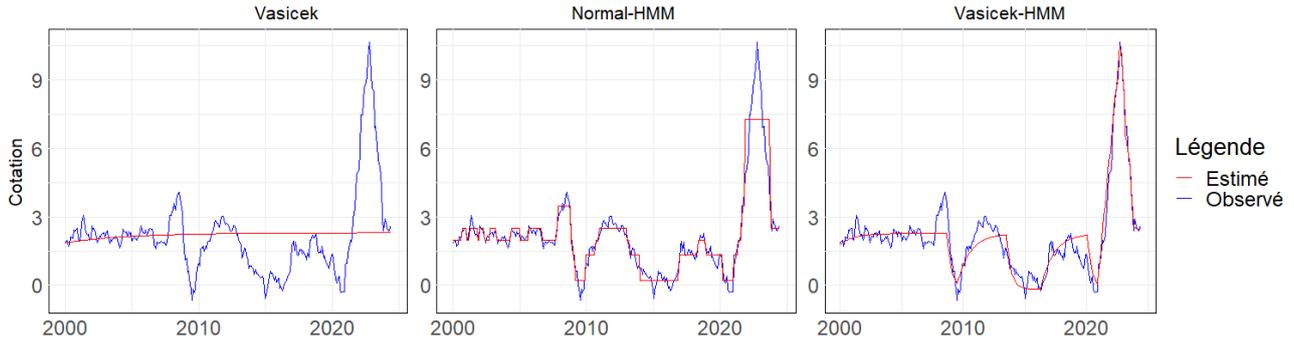


Figure 10 – Deterministic backtesting of inflation estimates by a Vasicek model, a Normal-HMM, and a Vasicek-HMM

The Vasicek model shows limited capability to capture crisis variations, while the hidden Markov models, better suited for crisis periods, provide a closer fit to historical data.

For comparing inflation projections across models, each model requires a distinct dependency structure.

Three dependency structures are defined.

- For the Vasicek model, a dependency structure is established based on the linear correlation matrix between the residuals of the inflation, interest rate, equity, and real estate models.
- For state-switching models, a time-varying dependency structure is established using separate correlation matrices calculated on the model residuals for each state.

The linear correlation matrix estimated on the residuals of the Vasicek inflation model is shown in Figure 11.

	Inflation	Action	Immobilier	Taux long	Spread
Inflation	1	-0.056	-0.21	0.243	-0.23
Action	-0.056	1	0.504	-0.065	0.11
Immobilier	-0.21	0.504	1	-0.039	0.179
Taux long	0.243	-0.065	-0.039	1	0.048
Spread	-0.23	0.11	0.179	0.048	1

Figure 11 – Correlation matrix of residuals for the Vasicek model

The linear correlation matrices estimated on the residuals of the different states in the Normal-HMM inflation model are shown in Figure 12.

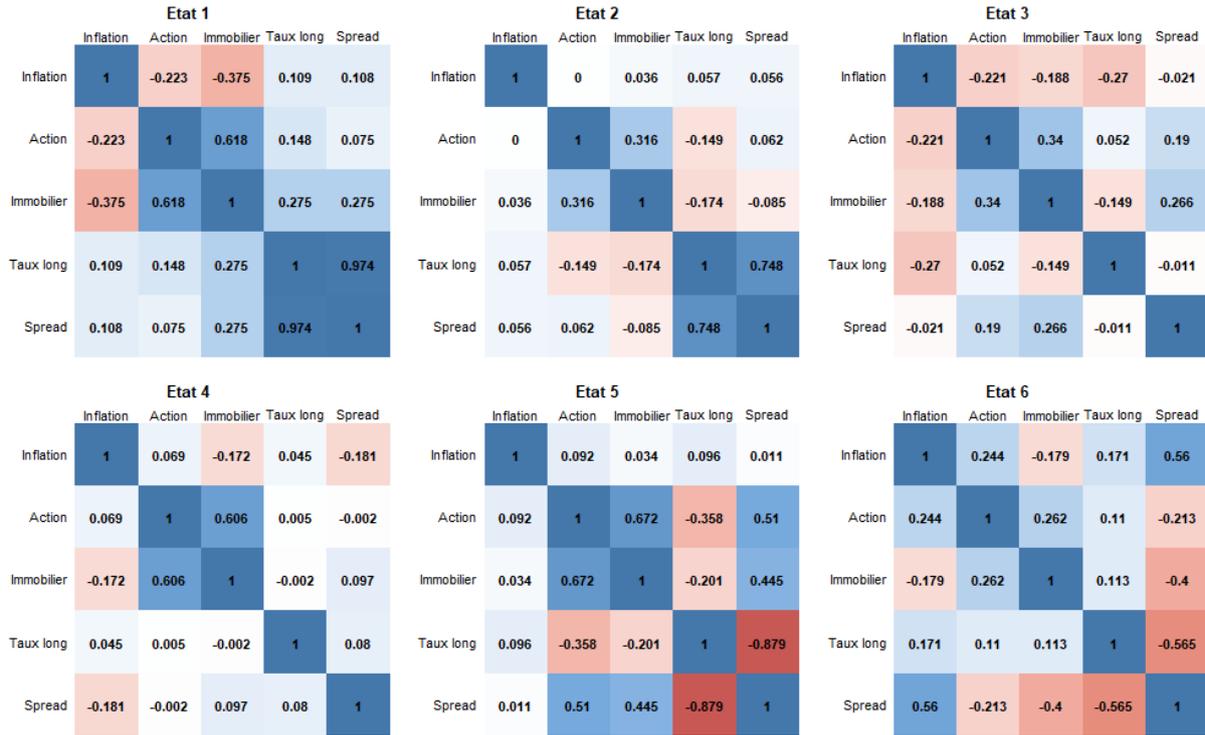


Figure 12 – Correlation matrices of residuals for the six states of the Normal-HMM

The linear correlation matrices estimated on the residuals of the different states in the Vasicek-HMM inflation model are shown in Figure 13.

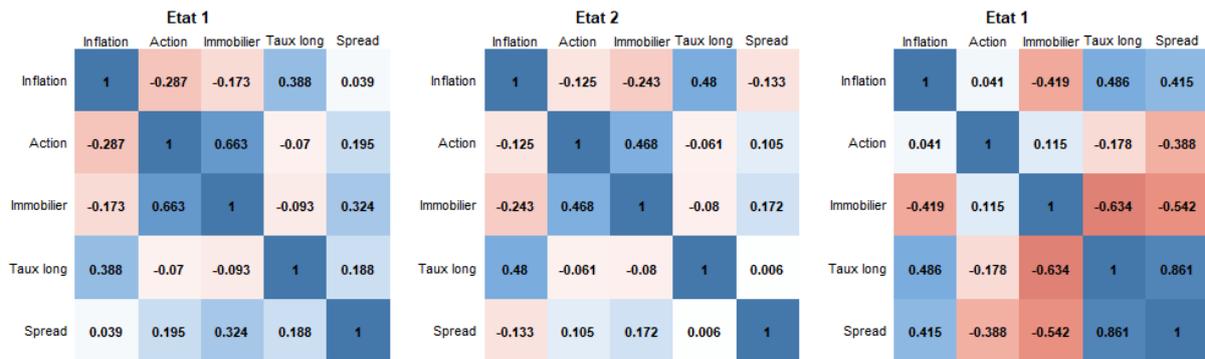


Figure 13 – Correlation matrices of residuals for the three states of the Vasicek-HMM

For projection, 20,000 simulations are performed, and various quantiles (5 %, 25 %, 50 %, 75 %, 95 %) are analyzed. For projecting hidden Markov models, each simulation generates a sequence of states from the transition matrix associated with the model. Depending on the inflation state, the dynamics and specific parameters for that state are applied to generate an estimate. Noises are correlated based on the defined dependency structure and the inflation state (in the case of Markovian dynamics).

Following this methodology, the projection quantiles for different inflation models are obtained and compared :

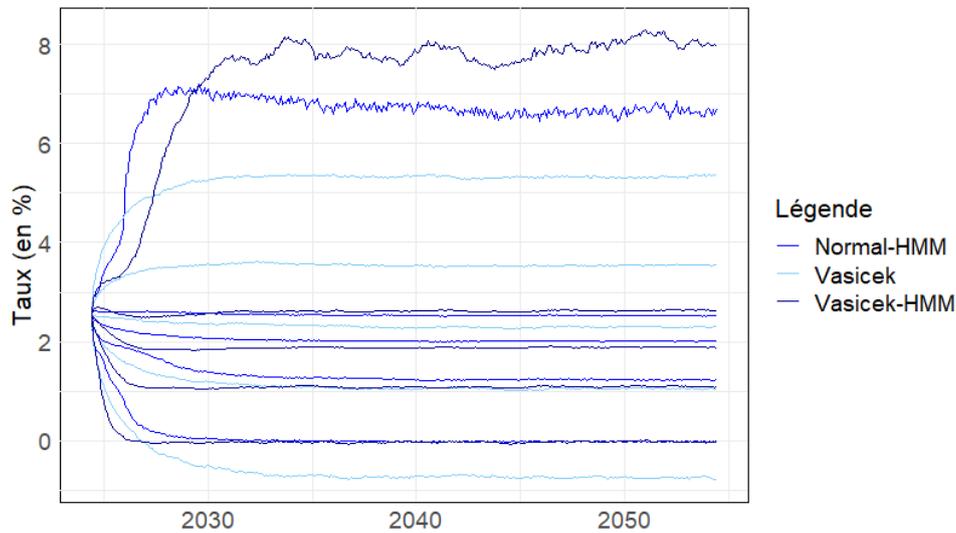


Figure 14 – Comparison of quantiles for 30-year projections of different inflation models

Finally, two main conclusions emerge.

1. The Vasicek model appears quite rudimentary compared to the two HMMs, tending to overestimate central values while underestimating the extremes.
2. The Vasicek-HMM, to a lesser extent, differs from the Normal-HMM in its ability to account better for extreme crisis scenarios. It offers an enhanced ability to integrate extreme crisis situations and also outperforms the other models studied in terms of behavior during crisis periods and backtesting.

The key takeaways from this thesis are :

- Hidden Markov models, while more complex and data-sensitive, offer greater flexibility and precision than standard models.
- Among them, the Vasicek-HMM proved particularly effective in capturing historical inflation variations.
- However, limitations remain, including the potential to use more complex asset models and to refine dynamic correlations. Improvements in these areas could enhance the robustness of projections.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord adresser mes sincères remerciements à SeaBird et Pierre Thérond pour m'avoir permis d'intégrer l'équipe d'actuariat de Seabird et pour l'opportunité qu'ils m'ont donnée de développer ce mémoire.

Ensuite, j'aimerais exprimer ma gratitude envers Pierre-Olivier GOFFARD et Melissande SAN-CHEZ, respectivement mon tuteur académique et ma tutrice professionnelle. Leur expertise et leur disponibilité ont été précieuses tout au long de l'élaboration de ce travail.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à Jean BERARD ainsi qu'à tous les professeurs du DUAS pour la qualité de leur enseignement.

Enfin, je souhaite remercier particulièrement mes amis, ma famille, ainsi que tous les stagiaires et alternants de l'équipe d'actuariat de SeaBird pour leur soutien et pour avoir rendu cette année d'alternance si agréable.

Table des matières

Note de Synthèse	5
Synthesis note	11
Remerciements	17
Table des matières	19
Introduction	21
1 Le cadre théorique et les enjeux de l'étude	23
1.1 Introduction à l'inflation	23
1.2 Contexte de l'étude	35
2 Les fondements théoriques	37
2.1 Généralités sur les chaînes de Markov et les modèles de Markov cachés	37
2.2 Théorie mathématique du modèle	41
3 Développement des différents modèles	51
3.1 Présentation du modèle	51
3.2 Données et hypothèses	52
3.3 Modélisation et estimation	56
4 Comparaison des modèles	77
4.1 Projection des modèles d'inflation	77
4.2 Comportement des modèles d'inflation en période de crise	86
4.3 Validation croisée	87
4.4 Comparaison des densités de distribution ds différents modèles	90

4.5 Synthèse	91
Conclusion	93
Bibliographie	95
Annexes	97
A Démonstrations relatives aux modèles	99
A.1 Modèle de Black & Scholes	99
A.2 Estimation des paramètres d'un <i>Vasicek-HMM</i> via la maximisation du terme de la <i>CDLL</i> associé aux paramètres	100
A.3 Estimation des paramètres d'un <i>Normal-HMM</i> via la maximisation du terme de la <i>CDLL</i> associé aux paramètres	104
B Informations complémentaires pour l'étude des modèles	107
B.1 Définition et analyse des résidus selon Hardy et al. (2006)	107
B.2 Différence entre décodage local et décodage global pour un <i>HMM</i>	108

Introduction

Ces dernières années ont été fortement marquées par différentes périodes inflationnistes, conséquence de la crise des *subprimes* entre 2007 et 2008, et plus récemment sous l'effet de la crise de la COVID-19, puis de la guerre en Ukraine, ce qui a entraîné de multiples perturbations économiques et financières. Chez les gestionnaires d'actifs, ces changements de régime d'inflation ont eu pour conséquence de perturber les stratégies d'allocation optimale d'actifs, dont les modèles n'étaient parfois plus adaptés pour refléter la situation réelle.

Dans ce contexte, les gestionnaires d'actifs, dont les portefeuilles incluent des classes d'actifs indexées sur l'inflation, sont de plus en plus confrontés à des besoins de projections fines du taux d'inflation. La capacité à anticiper les changements de régime inflationniste devient essentielle pour alimenter des générateurs de scénarios économiques cohérents et robustes. Ce mémoire se penche donc sur la pertinence des méthodes de modélisation de l'inflation et vise à comparer plusieurs modèles, en particulier ceux intégrant la notion de changements de régime.

Les modèles qui tiennent compte des changements de régimes dans le temps, c'est-à-dire qui modélisent des périodes successives de forte ou faible inflation, seront comparés à un modèle d'inflation plus courant, dont les paramètres sont constants dans le temps et ne captent donc pas les différentes périodes inflationnistes. Plus largement, l'objectif de ce mémoire est de proposer une méthodologie permettant d'identifier quel modèle d'inflation offre des projections cohérentes et fiables pour une intégration optimale dans des générateurs de scénarios économiques.

Pour traiter ce sujet, le mémoire est structuré en quatre parties distinctes. La première partie offre une vue d'ensemble approfondie du thème, en définissant les concepts fondamentaux liés à l'inflation. Elle contextualise également les enjeux actuels et les motivations ayant conduit à l'élaboration de ce mémoire.

La seconde partie constitue la partie théorique du mémoire et vise à présenter l'ensemble des modèles mathématiques utilisés lors de l'étude. Elle s'appuie sur une bibliographie détaillée de plusieurs ouvrages et papiers de recherche. En particulier, elle se fonde sur le livre de [Zucchini et al. \(2016\)](#), *Hidden Markov Models for Time Series : An Introduction Using R*, pour expliquer les concepts clés des modèles à changement d'états, en détaillant les algorithmes de Baum-Welch et de Viterbi.

Les troisième et quatrième parties sont dédiées à l'aspect technique et pratique de l'étude. Elles traitent de la description, de la construction et de la calibration des différents modèles de ce mémoire. La troisième partie se concentre sur la présentation et le développement des différents modèles. Elle se divise en deux sous-sections : la première décrit les modèles de taux, d'actions et d'immobilier, qui servent de composantes fixes dans notre cadre de comparaison. Un modèle de Vasicek est utilisé pour modéliser la dynamique des taux, tandis que des modèles de Black-Scholes sont appliqués aux actions et à l'immobilier. La seconde sous-section introduit les trois modèles d'inflation : un modèle (usuel d'inflation) de Vasicek, un modèle de Markov caché dont les observations suivent des distributions

gaussiennes (*Normal-HMM*), et un modèle de Markov caché plus complexe qui combine la structure d'un modèle de Markov caché avec un modèle de Vasicek (*Vasicek-HMM*). Cette section examine également l'adéquation des modèles.

La quatrième section consiste à comparer les différents modèles d'inflation au sein du générateur de scénarios économiques, en examinant les structures de dépendance des différents actifs et leurs projections, avec l'utilisation d'une corrélation dynamique dans le temps pour les modèles à changement de régime. Elle compare également les comportements des modèles d'inflation en période de crise ainsi qu'un *backtesting* de ces derniers.

Chapitre 1

Le cadre théorique et les enjeux de l'étude

1.1 Introduction à l'inflation

Ce chapitre définit d'abord les concepts fondamentaux de l'inflation en présentant sa définition, ses causes, sa gestion, ses mesures, ainsi que les produits liés à l'inflation.

Ensuite, les enjeux actuels et les motivations ayant conduit à l'élaboration de ce mémoire seront présentés.

Il est important de noter que, dans la suite de ce mémoire, le terme « inflation » fera souvent référence à la notion de taux d'inflation.

1.1.1 Définition générale

Définition de l'inflation

L'inflation désigne une augmentation générale et durable des prix des biens et services dans une économie sur une période donnée. Les hausses de prix qui se limitent à certains secteurs spécifiques ou à une courte période ne sont pas considérées comme de l'inflation.

Cette augmentation des prix entraîne une dévaluation de la monnaie, ce qui signifie qu'avec une même quantité d'argent, il est possible d'acquérir moins de biens et de services au fil du temps. Ce phénomène peut avoir un impact négatif sur le niveau de vie des ménages et réduire leur capacité d'épargne. En d'autres termes, l'inflation représente une perte de pouvoir d'achat.

Il est important de distinguer les différentes notions relatives à l'évolution des prix au sein d'une économie.

- **La déflation** (ou inflation négative) est l'opposé de l'inflation et correspond à une baisse générale du niveau des prix, entraînant un taux d'inflation négatif. Ce phénomène apparaît souvent après un choc financier et menace la croissance économique : c'était le cas de la Chine, qui a connu une période de déflation au dernier trimestre de 2023 et au début de l'année 2024 à la suite de la crise sanitaire.

- **La désinflation** est la diminution du taux d'inflation ; bien que le taux baisse, il reste strictement positif. Ce phénomène est actuellement observé dans la zone euro depuis le pic d'inflation de fin 2022. Il nécessite une vigilance particulière, car un niveau d'inflation insuffisant peut mener à la déflation, menaçant ainsi l'économie.
- **L'inflation rampante** désigne une augmentation annuelle du niveau des prix comprise entre 1 % et 3 %. C'est généralement le cas en Europe lorsque l'économie est stable.
- **L'inflation galopante** correspond à une inflation élevée, où la hausse des prix annuelle dépasse les 10 %.
- **L'hyperinflation** se manifeste par une croissance extrême et rapide du niveau des prix, avec une hausse de plus de 50 % par mois. C'est actuellement le cas en Argentine, touchée par une inflation aiguë depuis plusieurs années, avec un taux d'inflation annuel dépassant 200 % en 2023 et un taux pour le mois d'avril 2024 dépassant les 290 %.
- **La stagflation** est la contraction des termes « stagnation » et « inflation » : elle désigne une combinaison d'inflation élevée et de croissance économique stagnante, faible ou nulle. Ce phénomène entraîne une érosion du pouvoir d'achat des ménages et limite les investissements ainsi que la création d'emplois, ce qui peut mener à une récession prolongée.

L'inflation ne se mesure pas directement, mais s'évalue à travers divers indicateurs. **La mesure de l'inflation la plus couramment utilisée est le calcul du glissement annuel de l'Indice des Prix à la Consommation (IPC)**. Dans un souci d'harmonisation entre les pays, son équivalent européen est l'Indice des Prix à la Consommation Harmonisé (IPCH). Ces indicateurs seront détaillés dans la section 1.1.4.

1.1.2 Causes de l'inflation

Inflation par la demande

L'inflation par la demande est l'inflation qui se produit lorsque la demande excède l'offre. Plus ce déséquilibre est important, plus l'inflation par la demande est forte. Cela survient souvent à la fin d'une période de récession, lorsque le rythme de la croissance économique reprend et que les ménages consomment davantage, entraînant une forte augmentation de la demande.

L'inflation par la demande est courante lorsque l'activité commence à repartir. Ce phénomène a pu être observé à la sortie de la Seconde Guerre Mondiale lors des Trente Glorieuses. Les ménages consomment alors que l'offre est très faible à la suite de la guerre, créant ainsi une pression inflationniste.

Inflation par les coûts

L'inflation par les coûts est l'inflation qui est causée par la hausse des coûts des productions. Il est important de souligner que dans l'expression « inflation par les coûts », le terme « coût » doit être compris au sens large. Il englobe non seulement les dépenses directes engagées par les entreprises pour produire, mais aussi toutes les dépenses indirectes qui influencent le prix final.

Cette forme d'inflation se manifeste par une hausse générale d'un élément du prix de revient. Ces augmentations peuvent prendre plusieurs formes, par exemple :

- l'augmentation des salaires,

- la hausse du prix de l'énergie,
- l'augmentation des coûts des matières premières,
- l'augmentation des profits en l'absence de concurrence.

La hausse des coûts influe ainsi sur le prix de revient du produit, puis les prix de vente, entraînant finalement une augmentation générale des prix.

Inflation importée

L'inflation importée est un cas particulier de l'inflation par les coûts, principalement causée par les fluctuations des taux de change, qui représentent le prix d'une devise par rapport à une autre.

Si la valeur d'une devise baisse par rapport aux principales devises étrangères, son pouvoir d'achat diminue sur le plan international, ce qui accroît le coût des produits importés et affecte le marché local. Les entreprises paient alors davantage pour importer les biens nécessaires à leur production, ce qui augmente leurs coûts de production. Cette hausse des coûts se répercute sur les prix de vente, provoquant une augmentation générale des prix.

Inflation monétaire

L'inflation monétaire, ou inflation par excès de création monétaire, résulte d'une augmentation de la masse monétaire, c'est-à-dire de la quantité de monnaie en circulation dans une économie. Toutefois, cette hausse de la masse monétaire ne suffit pas à provoquer l'inflation ; il faut qu'elle entraîne un déséquilibre entre la quantité de monnaie en circulation et la quantité de biens et services disponibles. Cet excès de monnaie accroît la demande globale, réduit la valeur de la monnaie et génère ainsi une hausse des prix, créant de l'inflation.

Une étude récente menée par Thomas Andrieu, haut fonctionnaire et économiste français, soutient que l'augmentation de la masse monétaire explique en grande partie l'inflation à long terme actuelle¹. Bien que cette étude repose sur des données américaines de 1963 à 2022, notre analyse adapte ce cadre au contexte de ce mémoire².

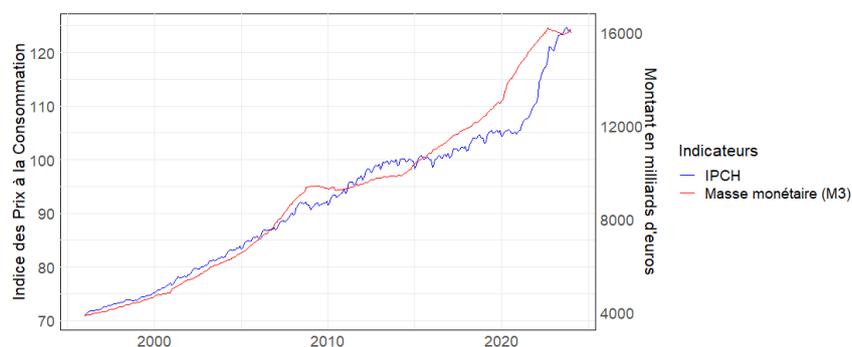


FIGURE 1.1 – Tendances de la masse monétaire et de l'IPCH européenne

1. Quel est le lien entre l'inflation et la masse monétaire ? Thomas Andrieu, 2022

2. L'étude dans ce mémoire se concentre sur les données de la masse monétaire (M3) et de l'Indice des Prix à la Consommation Harmonisé (IPCH) de l'Union européenne, de 1996 à nos jours.

Pour illustrer la relation entre la masse monétaire et l'inflation, une approche empirique est employée afin d'analyser l'évolution de ces deux variables. La figure 1.1 présente les tendances de l'IPCH et de la masse monétaire dans l'Union européenne depuis 1996. Depuis cette date, une corrélation de près de 98 % et un coefficient de détermination d'environ 96 % entre les deux séries de données suggèrent l'existence d'une relation significative entre l'augmentation de la masse monétaire et l'inflation à long terme.

L'étude indique également qu'une forte augmentation de la masse monétaire n'influence pas immédiatement l'inflation, la corrélation entre ces variables étant quasiment nulle au cours des deux premières années. Toutefois, cette relation se manifeste progressivement sur le long terme, devenant indéniable après 10 ans, comme l'illustre la figure 1.2.

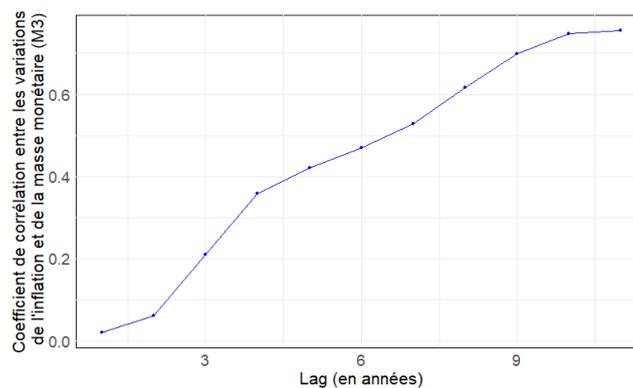


FIGURE 1.2 – Corrélation entre les variations de l'inflation et de la masse monétaire pour une variation donnée - période de 1996 à aujourd'hui

Selon l'étude, les effets de la création ou de la destruction monétaire sur l'économie mettent environ 4 ans à se manifester et jusqu'à 10 ans pour influencer de manière significative les prix.

Cette vision est néanmoins critiquée par certains économistes, car elle repose sur l'hypothèse d'une offre de monnaie exogène, entièrement déterminée par la banque centrale, sans tenir compte de la demande de monnaie des agents économiques. Cependant, il est indéniable que les décisions et politiques des autorités monétaires et fiscales exercent une influence déterminante.

1.1.3 Gestion de l'inflation

Après avoir examiné les différentes causes de l'inflation, cette section se concentre sur la gestion de celle-ci. Elle met en lumière le rôle des banques centrales et leurs politiques monétaires, afin de maintenir la stabilité économique et financière.

Rôle des banques centrale

Les banques centrales jouent un rôle capital dans la gestion de l'inflation. Elles sont au centre des systèmes monétaires d'un pays ou d'une zone économique. Dans ces zones, elles sont les principaux acteurs de la gestion de la masse monétaire et, par conséquent, elles sont chargées de prendre des décisions concernant les politiques monétaires. En France, cette mission est assurée par la Banque de France, et au niveau européen, par la Banque centrale européenne (BCE).

Les banques centrales sont des institutions financières publiques, chargées de servir l'intérêt général, et sont principalement détenues par un Etat (ou un groupe d'Etats, comme c'est le cas de la BCE). Néanmoins, il est essentiel que ces banques disposent :

- d'une **indépendance politique**, visant à éviter tout lien avec le pouvoir politique en place, et,
- d'une **indépendance économique**, permettant une autonomie dans les choix relatifs aux objectifs et aux moyens pour les atteindre.

La BCE s'appuie sur son Conseil des gouverneurs pour prendre les décisions relatives aux politiques monétaires de la zone euro. Ce comité est composé des membres du directoire (incluant la présidente de la BCE, Christine Lagarde, le vice-président, ainsi que quatre autres membres) et des gouverneurs des banques centrales nationales des 20 pays de la zone euro.

Ciblage de l'inflation

L'objectif principal des banques centrales est de maintenir la stabilité des prix. Selon la BCE, cela implique de veiller à ce que l'inflation soit « faible, stable et prévisible ». Ce faisant, les décisions concernant le ciblage de l'inflation ont ainsi évolué au fil du temps :

- Lorsque la BCE devient l'institut monétaire européen en **1998**, dans le but de maintenir la stabilité monétaire, un objectif d'inflation est fixé ; il doit être **inférieur à 2 %**. Autrement dit, la BCE fixe un plafond de 2 %, toute inflation comprise entre 0 et 2 % satisfait cette décision.
- En **2003**, pour mieux se protéger du risque de déflation, elle maintient cet objectif tout en précisant que le taux doit être « **inférieur à, mais proche de 2 %** »¹ à moyen terme.
- Finalement en **2021**, la BCE adopte une cible d'inflation **symétrique de 2 %** à moyen terme. En d'autres termes le plafond n'existe plus, toute inflation trop faible ou trop élevée est néfaste pour l'économie.

A savoir qu'un ciblage d'inflation autour des 2 % est commun aux banques centrales des grandes économies mondiales, à l'image de la *Fed* (Réserve Fédérale des Etats-Unis), de la Banque Nationale Suisse, ou encore de la Banque du Canada.

Cette préférence s'explique principalement par la volonté des banques centrales de se prémunir contre le risque de déflation en créant une « marge de sécurité », tout en maintenant un niveau d'inflation favorable à la stimulation économique.

Politiques monétaires

Pour mettre en œuvre des politiques monétaires et agir sur l'inflation, la banque centrale dispose de plusieurs outils. L'instrument principal est la manipulation des taux directeurs, qui influence directement la masse monétaire. Ces taux représentent les intérêts auxquels les banques commerciales empruntent ou déposent des liquidités auprès de la banque centrale.

Dans la zone euro, les banques commerciales peuvent échanger des liquidités soit avec l'Euro-système, qui regroupe la BCE et les banques centrales nationales, soit avec d'autres banques sur le marché interbancaire. La BCE fixe trois taux directeurs.

1. [Première revue de la stratégie de politique monétaire de la BCE, 2003](#)

- Le **taux d'intérêt des opérations principales de refinancement (OPR)**, qui correspond au taux auquel une banque emprunte des liquidités pour une durée d'une semaine auprès de l'Eurosystème.
- Le **taux de la facilité de prêt marginal (FPM)**, qui correspond au taux auquel une banque emprunte des liquidités pour une durée de 24 heures auprès de l'Eurosystème.
- Le **taux de la facilité de dépôt (FD)**, qui correspond au taux d'intérêt des banques lorsqu'elles déposent des liquidités pour une durée de 24 heures auprès de l'Eurosystème.

La facilité de dépôt et la facilité de prêt marginal constituent les opérations de politique monétaire dites facilités permanentes, permettant aux banques de déposer des liquidités ou d'obtenir des prêts à 24 heures.

En manipulant ces taux directeurs, les banques centrales peuvent influencer l'économie à court terme. Par exemple, une augmentation des taux directeurs entraîne une hausse des taux d'intérêt des prêts, rendant ainsi l'emprunt plus coûteux. Cela décourage les entreprises et les ménages de dépenser et d'investir, ce qui réduit les crédits et la quantité de monnaie en circulation dans l'économie. Cette diminution de la demande globale entraîne un ralentissement de l'activité économique. Par conséquent, en relevant ses taux directeurs, la banque centrale contribue à ralentir l'économie et à faire baisser le niveau des prix.

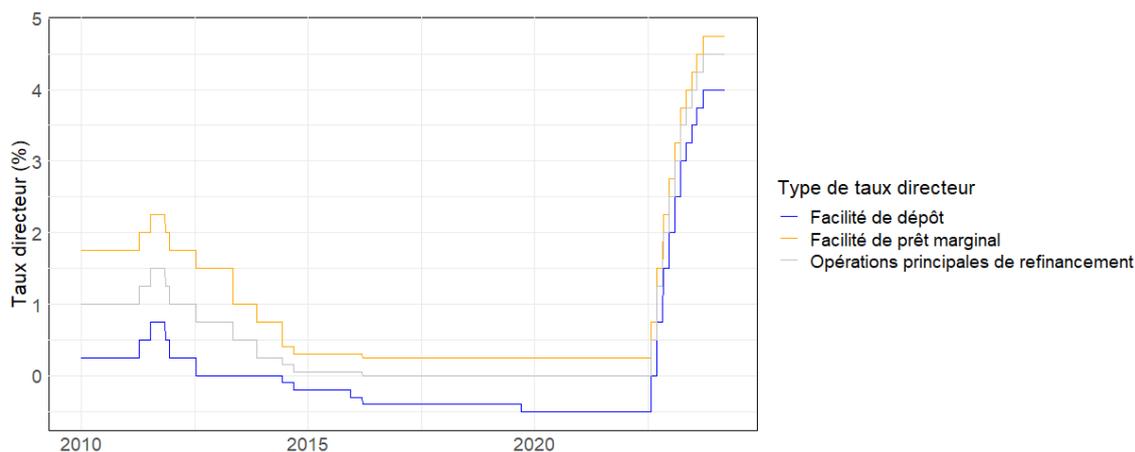


FIGURE 1.3 – Tendence des différents taux directeurs de la BCE

La figure 1.3 présente l'évolution des taux directeurs depuis le 1er janvier 2010. Actuellement, ces taux atteignent leur plus haut niveau historique, ce qui est cohérent avec le contexte actuel qui oblige la BCE à les augmenter pour contenir l'inflation.

1.1.4 Mesure de l'inflation

Méthodologie de calcul

L'Indice des Prix à la Consommation est la principale mesure de l'inflation. Il est calculé à partir d'un panier de biens et services représentatif de la consommation des ménages. Ce panier est mis à jour chaque année pour refléter les changements dans les habitudes de consommation et les évolutions technologiques. Les différentes classes de consommation des ménages sont définies par la nomenclature

ECOICOP (*European Classification of Individual Consumption by Purpose*) qui est la classification européenne des fonctions de consommation des ménages, visibles sur la figure 1.4.

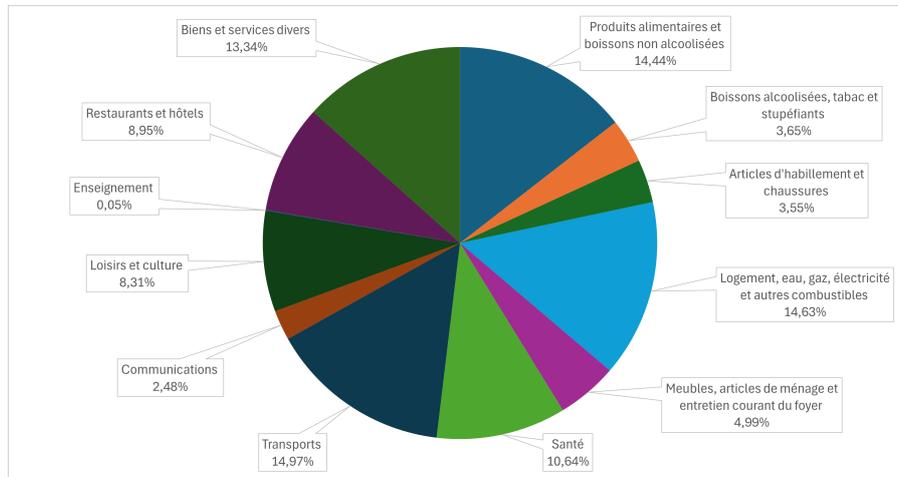


FIGURE 1.4 – Panier de consommation de biens et services des ménages français. INSEE, 2023

De plus, chaque produit est pondéré en fonction de son prix et de la fréquence à laquelle on l'achète. Autrement dit, un produit qu'on achète rarement mais à un prix élevé peut avoir la même pondération qu'un produit qu'on achète plus souvent à un prix moins élevé, à l'image de la voiture et de son carburant qui ont le même poids dans le panier.

A noter également qu'il y a une différence dans le traitement des paniers de consommation des pays mesurés par les instituts nationaux de statistiques de chaque pays membre et celui d'Eurostat, organe de la Commission européenne qui s'occupe de l'information statistique de l'UE. En effet, les paniers de consommation de la France mesurés par l'INSEE (Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques) et Eurostat ne sont pas les mêmes.

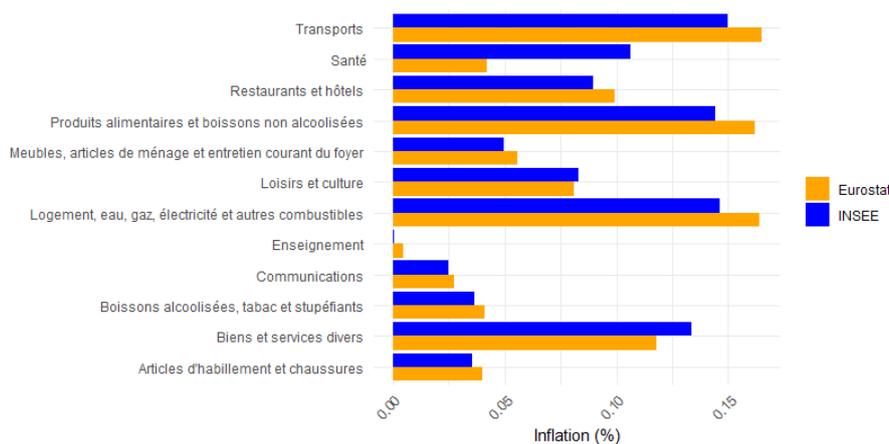


FIGURE 1.5 – Différence des postes du panier de consommation des français. INSEE et Eurostat, 2023

Il y a de nombreuses raisons qui expliquent cela, les plus importantes :

- L'INSEE prend en compte la totalité du prix des biens ou des services, tandis que Eurostat ne prend en compte que le restant à charge des ménages. Cela explique pourquoi les dépenses en

santé, visibles sur la figure 1.5, prises en charge en grande partie par la protection sociale en France divergent autant.

- L'INSEE mesure la consommation des résidents dans le pays et à l'étranger, alors que Eurostat mesure la consommation des résidents et non-résidents au sein du pays.
- La maille de décomposition des postes pour mesurer la consommation des ménages est plus fine pour les instituts nationaux. L'INSEE analyse près des 400 postes contre 300 postes pour Eurostat.

L'indice des Prix à la Consommation

L'**Indice des Prix à la Consommation (IPC)** est l'outil principal de mesure de l'inflation. Cet indice macroéconomique est calculé selon le principe de l'indice de Laspeyres, c'est-à-dire qu'il mesure les variations moyennes des prix à partir d'un panier de biens et de services, en comparant les prix à un instant t avec ceux de la période de référence 0.

En considérant n biens et services tels que $i = \{1, \dots, n\}$, avec p et q représentant respectivement le prix et la quantité du bien i . La formule d'un indice de Laspeyres entre les date 0 et t peut alors être définie comme suit :

$$\Delta P_L = \frac{\sum_{i=1}^n p_{t;i} \cdot q_{0;i}}{\sum_{i=1}^n p_{0;i} \cdot q_{0;i}} \cdot 100.$$

C'est de cette manière que l'INSEE calcule et publie mensuellement l'IPC national, à partir de l'année de référence choisie, qui est 2015. Ainsi, l'indice des prix pour cette année est fixé à 100.

Dans un souci de comparaison pour mener à bien ses politiques monétaires, la BCE a mis en place une mesure standardisée de l'inflation, utilisée au sein de l'Union européenne pour permettre des comparaisons internationales : l'**Indice des Prix à la Consommation Harmonisé (IPCH)**. Ce dernier est qualifié d'« harmonisé » parce que tous les pays de l'Union européenne suivent la même méthodologie. Cela garantit que les données d'un pays peuvent être comparées à celles d'un autre. »¹. C'est donc Eurostat qui collecte et harmonise les données transmises par les instituts nationaux de statistiques de chaque pays, puis calcule et publie les indices harmonisés de chaque pays.

Mesure de l'inflation

A partir de l'indice d'inflation ad hoc, il est possible de calculer le taux d'inflation, qui correspond à la variation de la valeur de cet indice entre deux périodes données. Selon l'intervalle de temps et la base temporelle sélectionnés, plusieurs mesures d'inflation peuvent être établies. Les méthodologies de calcul des mesures les plus couramment utilisées, en accord avec celles transmises régulièrement par l'INSEE, sont présentées ci-dessous. On considère l'IPC comme l'indice d'inflation de référence, noté $IPC(m, a)$ pour l'IPC du mois m et de l'année a .

Le taux d'inflation calculé en **glissement annuel** est la mesure la plus communément utilisée lorsqu'il s'agit d'inflation. Il est calculé mensuellement et correspond à la variation entre la valeur de l'IPC à une période donnée et celle de la même période de l'année précédente. Il peut être exprimé de la manière suivante :

1. Inflation et prix à la consommation, Banque centrale européenne

$$I_{GA} = \frac{IPC(m, a)}{IPC(m, a - 1)} - 1.$$

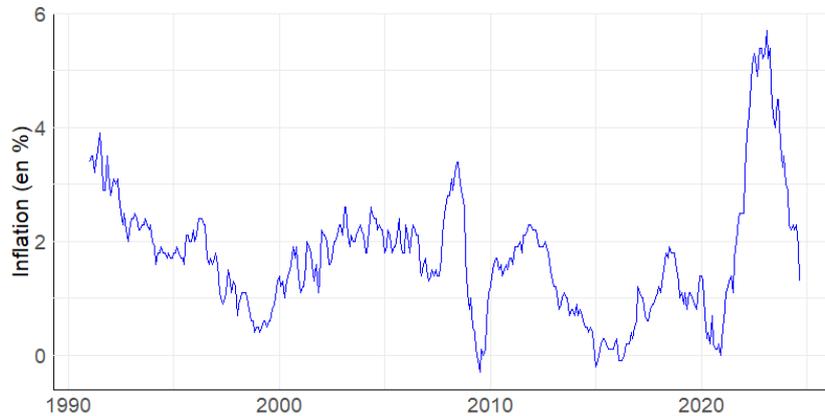


FIGURE 1.6 – Evolution de l'inflation en glissement annuel

La figure 1.6 montre qu'avec une inflation moyenne de 1,71 %, l'inflation en glissement annuel oscille autour de la moyenne à long terme fixée par la BCE à 2 %. On distingue également très clairement les pics d'inflation liés à la crise des subprimes (2007-2008) ainsi qu'à la crise combinée de la COVID-19 et de la guerre en Ukraine (de 2021 à aujourd'hui). Une analyse approfondie de l'inflation actuelle est abordée dans la section 1.2.1.

Le taux d'inflation calculé en **variations mensuelles** est également une mesure mensuelle; il correspond à la variation de la valeur de l'IPC d'un mois à l'autre. Elle peut être exprimée de la manière suivante :

$$I_{VM} = \frac{IPC(m, a)}{IPC(m - 1, a)} - 1.$$

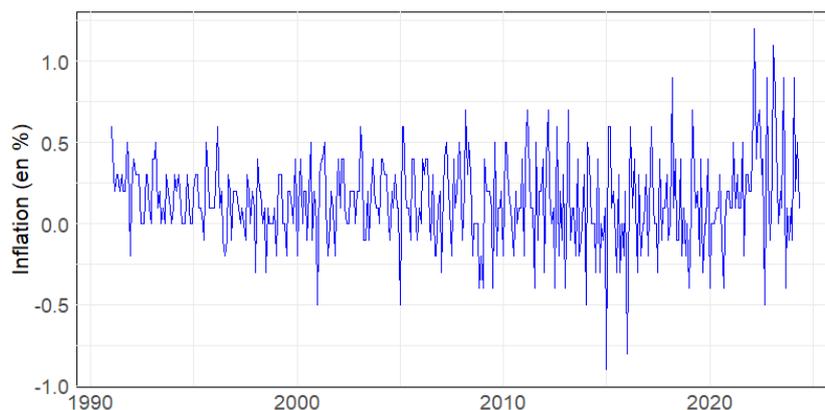


FIGURE 1.7 – Evolution de l'inflation en variations mensuelles

La figure 1.7 illustre la volonté de la BCE de maintenir une inflation stable sur le long terme. En effet, une inflation en glissement annuel de 2 % correspond à une inflation mensuelle moyenne de

0,17 %. Ainsi, avec une inflation mensuelle moyenne de 0,15 %, on observe clairement les répercussions d'une politique d'inflation visant à rester proche, mais en dessous de 2 %, mise en place jusqu'en 2021. On constate également une inflation mensuelle logiquement plus élevée durant la période inflationniste liée à la COVID-19 et à la guerre en Ukraine.

Le taux d'inflation calculé en **variations annuelles** est, contrairement aux deux autres, une mesure calculée annuellement. Il correspond à la variation de la valeur moyenne annuelle de l'IPC d'une année à l'autre. De manière similaire à la méthode de variations mensuelles, cette mesure permet d'examiner les changements de prix par rapport à la période précédente, mais avec une granularité temporelle différente. Elle peut être exprimée comme suit :

$$I_{VA} = \frac{\frac{1}{12} \sum_{m=1}^{12} IPC(m, a)}{\frac{1}{12} \sum_{m=1}^{12} IPC(m, a-1)} - 1.$$

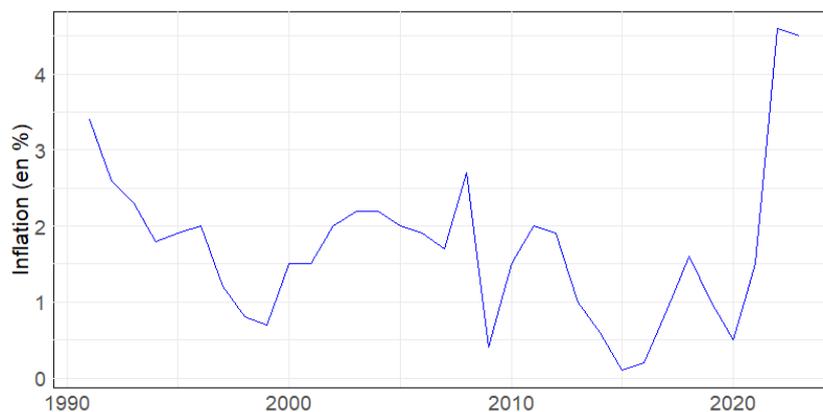


FIGURE 1.8 – Evolution de l'inflation en variations annuelles

La tendance de l'inflation en variations annuelles, présentée sur la figure 1.8, permet d'apprécier plus facilement les différentes périodes inflationnistes des dernières années. On peut ainsi observer plus clairement les périodes déflationnistes de 1996 à 1999, de 2013 à 2016, et de 2020, ainsi que les périodes inflationnistes de 2007 à 2008 et de 2021 à aujourd'hui.

1.1.5 Produits d'inflation

Marchés d'inflation

Selon [Deacon et al. \(2004\)](#), les marchés de l'inflation peuvent être facilement divisés en quatre catégories, selon leur niveau de développement et leurs différences distinctes de tarification et de couverture. Ils se répartissent selon des niveaux croissants de développement :

- **Niveau I**

Dans un tel marché, il n'existe pas d'obligations ou de titres directement liés à l'inflation disponibles sur le marché. Les prix des swaps sont déterminés par des accords de gré à gré entre parties sur la base de la dynamique de l'offre et la demande.

- **Niveau II**

Les marchés de niveau II sont définis par la présence d'un ou de plusieurs instruments négociables, le plus souvent des obligations souveraines indexées sur l'inflation. Malgré cette présence, la rareté de ces instruments oblige l'offre et la demande à déterminer les prix pour les échéances manquantes.

- **Niveau III**

Dans ce niveau, le marché possède de nombreux titres négociables, qui permettent donc la construction de courbes de swap d'inflation ou de swap réel presque complètes.

- **Niveau IV**

Ce dernier niveau est hypothétique. En effet, tous les marchés d'inflation actuellement existants entrent dans l'une des trois catégories présentées ci-dessus. Dans une hypothèse de croissance des marchés, celui-ci aurait atteint un niveau de maturité, de liquidité et de stabilité analogue à celui des principaux marchés de swaps de taux d'intérêt nominaux.

Le marché français, et plus globalement le marché européen, est en transition entre le niveau II et le niveau III. Il est aujourd'hui le marché le plus liquide au monde, avec pour certaines maturités des caractéristiques d'un marché de niveau IV, notamment en termes de liquidité.

Obligation indexée sur l'inflation

Les obligations indexées sur l'inflation constituent les principaux instruments négociables sur les marchés d'inflation. Ces titres de créance sont conçus pour protéger les investisseurs contre la perte de pouvoir d'achat résultant de l'inflation.

En effet, le principal et les intérêts de ces obligations sont ajustés en fonction de l'évolution de l'inflation, plus précisément mesurée par l'IPC. Tant le coupon que le nominal de l'obligation sont indexés sur l'inflation, le coefficient d'indexation étant défini comme le rapport entre l'IPC à la date t et l'IPC à la date d'émission.

Ainsi, lorsque l'inflation augmente, le rendement de l'obligation s'accroît également, garantissant aux investisseurs un rendement réel positif.

Relation de Fisher

Une notion importante reliant l'inflation et les taux est la relation de Fisher. Cette relation, qui lie le taux d'inflation, le taux réel et le taux nominal, a été expliquée pour la première fois par [Fisher \(1896\)](#) dans sa publication de 1896 pour l'American Economic Association intitulée « Appreciation and Interest ».

Dans sa démonstration, il s'intéresse aux prix de l'or et du blé sur un marché liquide et sans risque de défaut :

Raisonnement de la démonstration

En supposant que l'or prend de la valeur par rapport au blé, de telle sorte que la quantité d'or qui achèterait un boisseau de blé au début de l'année en achèterait $1 + a$ à la fin de l'année, avec a le taux d'appréciation de l'or par rapport au blé.

Puis, en posant i le taux d'intérêt de l'or et j le taux d'intérêt du blé. Soit, pour D dollars empruntés, $D(1 + i)$ dollars sont dus dans 1 an. De même pour le blé, pour B boisseaux de blé empruntés, $B(1 + j)$ boisseaux sont dus dans 1 an.

Si au départ, D dollars équivalent à B boisseaux, à la fin de l'année, D dollars équivalent à $B(1 + a)$ boisseaux. Autrement dit, $D(1 + i)$ dollars = $B(1 + a)(1 + i)$ boisseaux.

Puisque $D(1 + i)$ dollars est le montant nécessaire pour liquider la dette, alors $B(1 + a)(1 + i)$ est l'équivalent en nombre de boisseaux pour liquider cette dette. Cependant, ce nombre a déjà été défini comme étant $B(1 + j)$, donc il vient la relation suivante : $B(1 + a)(1 + i) = B(1 + j)$.

Ainsi, par analogie, a , qui est le taux d'appréciation de l'or par rapport au blé, peut être interprété comme le taux d'inflation espéré pour le blé. De même, i , qui est le taux d'intérêt de l'or, peut être considéré comme le taux d'intérêt réel, tandis que j , qui est le taux d'intérêt du blé, représente le taux d'intérêt nominal. De ce raisonnement découle l'équation qui relie le taux nominal, le taux réel et l'inflation :

$$1 + i = (1 + r)(1 + \pi^e), \quad (1.1)$$

où, i est le taux d'inflation nominal, r est le taux réel et π^e est le taux d'inflation espéré. En développant l'équation 1.1 :

$$i = r + \pi^e + r\pi^e,$$

et puisque $r\pi^e$ est négligeable,

$$r = i - \pi^e.$$

C'est de cette manière qu'est définie l'équation de Fisher, qui se traduit comme le taux d'intérêt réel (à peu près) égale au taux d'intérêt nominal diminué du taux d'inflation espéré.

Point mort d'inflation

Le point mort d'inflation (ou *breakeven* d'inflation) est défini comme la différence entre le rendement d'une obligation classique et celui d'une obligation indexée sur l'indice des prix à la consommation, ayant la même maturité. Autrement dit, il s'agit de la différence entre les taux nominaux et les taux réels, ce qui constitue l'application directe de l'équation de Fisher.

Cet écart représente l'inflation espérée par les participants du marché. Par exemple, si cet écart, pour deux obligations de maturité de 10 ans, est de 2 %, cela signifie que les investisseurs anticipent une inflation moyenne de 2 % sur les dix prochaines années.

Ainsi, le point mort d'inflation peut être compris comme le « taux d'inflation nécessaire pour qu'une obligation indexée sur l'inflation et une obligation classique, à termes équivalents, aient le même rendement »¹.

1.2 Contexte de l'étude

1.2.1 Contexte actuel

Récemment, l'Europe, et plus particulièrement la France, a connu une période inflationniste historique. Cette inflation est principalement la résultante de deux événements qui ont perturbé les chaînes d'approvisionnement et modifié les dynamiques de la demande : la pandémie de la Covid-19 et le conflit russo-ukrainien.

Avec la pandémie et l'annonce des confinements en 2020, l'économie a été brutalement ralentie, entraînant une forte baisse de la demande. En 2021, la levée progressive des restrictions sanitaires et la réouverture des économies ont provoqué une reprise soudaine de la demande, que l'offre n'a pas réussi à absorber, générant ainsi des pressions inflationnistes. Ce phénomène a été renforcé par les politiques monétaires accommodantes et les plans de relance budgétaire mis en place pour soutenir la reprise économique.

L'invasion de l'Ukraine par la Russie en 2022 a exacerbé ces tensions, entraînant des hausses de prix pour les matières premières, en particulier l'énergie et les denrées alimentaires, en raison des sanctions et des perturbations des exportations.

Ainsi, l'inflation observée en France depuis la mi-2021 est le résultat de ces crises interconnectées, soulignant la fragilité des marchés et la nécessité d'adapter les stratégies économiques face à cet environnement incertain.

1.2.2 Enjeux du mémoire

A la suite de ces récentes périodes inflationnistes, de nombreuses perturbations économiques et financières importantes ont émergé. Ces fluctuations ont perturbé les stratégies d'allocation optimale d'actifs pour les gestionnaires d'actifs dont les modèles n'étaient plus adaptées pour refléter la situation réelle. En effet, les stratégies d'allocations d'actifs comprenant des classes d'actifs indexés sur l'inflation doivent s'appuyer sur des méthodes fines de projection du taux d'inflation.

La problématique de ce mémoire est donc : **Dans un contexte économique incertain, quelle méthode de modélisation de l'inflation offre les projections les plus fiables pour être intégrée dans un générateur de scénarios économiques ?**

Pour répondre à cette question, différents modèles d'inflation, dont certains à changements de régimes, ont été mis en place et comparés au sein d'un générateur de scénarios économiques. L'objectif est d'évaluer leur capacité à projeter l'inflation de manière cohérente, afin de déterminer lequel offre les résultats les plus fiables et pertinents.

1. Définition du point mort d'inflation, Finance de marché

Chapitre 2

Les fondements théoriques

Ce chapitre présente les fondements théoriques du mémoire.

Les sections 2.1 et 2.2 développent la théorie des modèles de Markov cachés, en s'appuyant sur mes cours relatifs aux chaînes de Markov cachées et en se basant sur les travaux de [Zucchini et al. \(2016\)](#).

2.1 Généralités sur les chaînes de Markov et les modèles de Markov cachés

2.1.1 Chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est un modèle statistique composé d'états et de probabilités de transition. Ces probabilités de transition correspondent à la probabilité de rester dans le même état ou de passer d'un état à un autre. Le plus simplement possible, la figure 2.1 donne l'illustration d'une chaîne de Markov à 2 états avec les probabilités de transition associées à chaque état.

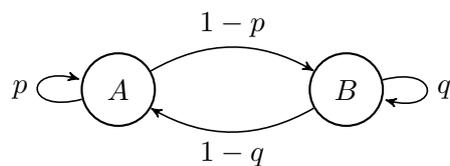


FIGURE 2.1 – Exemple d'une chaîne de Markov à 2 états

Il est facile de comprendre que l'état de la chaîne de Markov dépend du temps. C'est pourquoi, comme illustré dans le graphe 2.2, une chaîne de Markov est associée à une séquence $X_0, X_1, \dots, X_t, \dots$, où, à chaque pas de temps, la variable X_i représente l'état du processus à l'instant i .



FIGURE 2.2 – Séquence d'états issue d'une chaîne de Markov

Plus formellement,

Définition 2.1. (*Chaîne de Markov*) C'est un processus stochastique $X = \{X_t; t = 0, 1, \dots\}$ qui vérifie pour tout $t \in \mathbb{N}$, la propriété de Markov :

$$Pr(X_{t+1} | X_1, \dots, X_t) = Pr(X_{t+1} | X_t). \quad (2.1)$$

Pour des raisons de clarté, $\mathbf{X}^{(t)}$ est défini comme l'historique de (X_1, X_2, \dots, X_t) et la propriété de Markov 2.1 peut être réécrite :

$$Pr(X_{t+1} | \mathbf{X}^{(t)}) = Pr(X_{t+1} | X_t).$$

Autrement dit, le fait de conditionner sur l'historique du processus jusqu'à l'instant t équivaut à conditionner uniquement le processus sur la valeur la plus récente.

Définition 2.2. (*Probabilités de transition*) Ce sont les probabilités conditionnelles associées à une chaîne de Markov, ce sont les probabilités de passer de l'état j à l'état k .

Une chaîne de Markov est dite homogène si la probabilité de transition de l'état j à l'état k , à tout instant, est toujours constante, de telle sorte que cette probabilité de transition est :

$$\gamma_{jk} = Pr(X_{t+1} = k | X_t = j).$$

Autrement dit, les probabilités de passer d'un état à un autre, ne changent pas au fil du temps.

Définition 2.3. (*Matrice de probabilité de transition*) C'est une matrice carré d'ordre m et d'éléments γ_{jk} , dont les sommes des lignes sont égales à 1 :

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mm} \end{pmatrix},$$

où m représente le nombre d'états de la chaîne de Markov.

Définition 2.4. (*Probabilités inconditionnelles*) Ce sont les probabilités de se trouver dans un état donné à un moment t donné. Elles sont dénotés par le vecteur ligne :

$$\mathbf{u}(t) = (Pr(X_t = 1), \dots, Pr(X_t = m)), \quad t \in \mathbb{N}.$$

$\mathbf{u}(1)$ est la distribution initiale de la chaîne de Markov. Pour déduire la distribution au temps $t+1$ de celle au temps t , il faut post-multiplier le vecteur \mathbf{u} à la matrice de probabilité de transition $\mathbf{\Gamma}$:

$$\mathbf{u}(t+1) = \mathbf{u}(t)\mathbf{\Gamma}. \quad (2.2)$$

Définition 2.5. (*Distribution stationnaire*) Une chaîne de Markov avec une matrice de probabilité de transition Γ est dite avoir une distribution stationnaire δ si :

$$\delta\Gamma = \delta \quad \text{et} \quad \delta\mathbf{1}' = 1,$$

où, δ est un vecteur ligne avec des éléments non négatifs et $\mathbf{1}'$ est un vecteur colonne 1.

2.1.2 Modèle de Markov caché

Généralités

Un modèle de Markov caché, ou en anglais *Hidden Markov Model (HMM)*, se compose de deux parties.

La première partie est un processus non observable, noté $\{X_t \mid t = 1, 2, \dots\}$, qui est modélisé comme une séquence d'états cachés suivant un processus de Markov. En d'autres termes, le *HMM* repose sur une chaîne de Markov dont les probabilités de transitions ne sont pas connus.

La seconde partie est un processus observable, noté $O_t \mid t = 1, 2, \dots$, où chaque observation à l'instant t est générée à partir de l'état du système à ce même instant. La distribution de O_t ne dépend que de l'état actuel X_t et non des états ou des observations précédents.

Ainsi, contrairement aux chaînes de Markov classiques où les états sont directement visibles, dans un *HMM*, les états sont cachés et doivent être inférés à partir des observations disponibles. Cette structure est représentée par le graphe 2.3.

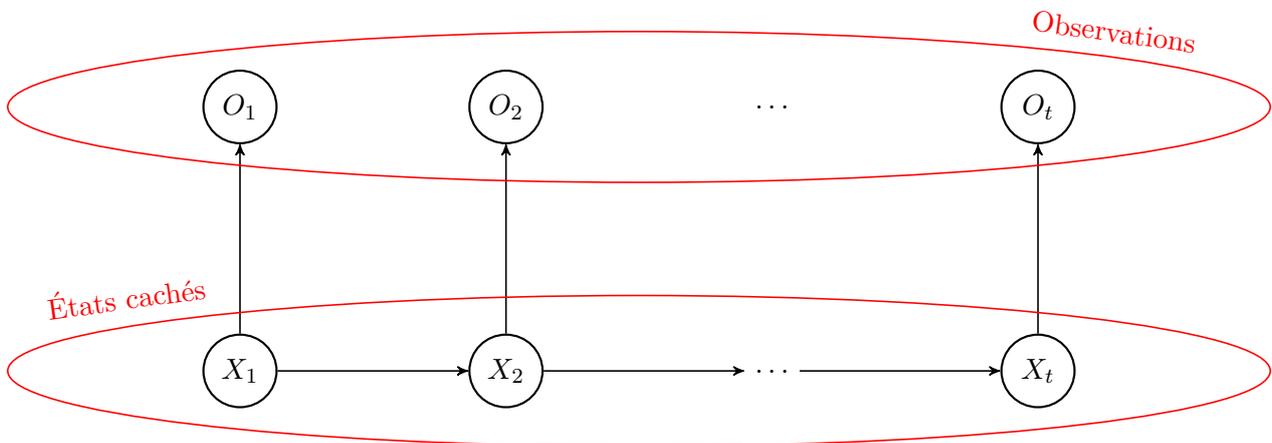


FIGURE 2.3 – Graphe d'un modèle de Markov caché simple

Ce type de modèle est caractérisé par un ensemble d'états cachés, des probabilités de transition entre ces états, des probabilités d'émission des observations depuis les états, et des probabilités initiales pour chaque état.

Plus formellement,

Définition 2.6. (Modèle de Markov caché) Avec $\mathbf{X}^{(t)}$ et $\mathbf{O}^{(t)}$ représentant respectivement les historiques des états occupés et des observations du temps 1 au temps t ;

$$\mathbf{X}^{(t)} = (X_1, X_2, \dots, X_t) \quad \text{et} \quad \mathbf{O}^{(t)} = (O_1, O_2, \dots, O_t),$$

le modèle de Markov caché le plus simple peut être résumé par :

$$Pr(X_t | \mathbf{X}^{(t-1)}) = Pr(X_t | X_{t-1}), \quad t = 2, 3, \dots$$

$$Pr(O_t | \mathbf{O}^{(t-1)}, \mathbf{X}^{(t)}) = Pr(O_t | X_t), \quad t \in \mathbb{N}.$$

Définition 2.7. (Probabilités d'émission) Ce sont les probabilités d'observer une certaine observation o , étant donné que la chaîne de Markov se trouve dans l'état j à l'instant t :

$$p_j(o) = Pr(O_t = o | X_t = j).$$

A noter que, dans ce cas, la variable O est discrète; dans le cas d'une variable continue, la probabilité est remplacée par la densité.

Distributions marginales

En définissant $u_j(t) = Pr(X_t = j)$ pour $t = 1, \dots, T$, la distribution des observations O_t est

$$\begin{aligned} Pr(O_t = o) &= \sum_{j=1}^m Pr(X_t = j) Pr(O_t = o | X_t = j) \\ &= \sum_{j=1}^m u_j(t) p_j(o). \end{aligned}$$

Cette expression peut être réécrite de manière matricielle :

$$\begin{aligned} Pr(O_t = o) &= (u_1(t) \cdots u_m(t)) \begin{pmatrix} p_1(o) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_m(o) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}(t) \mathbf{P}(o) \mathbf{1}', \end{aligned}$$

où $\mathbf{P}(o)$ représente la matrice diagonale avec comme j -ème élément diagonal $p_j(o)$. De l'équation 2.2 suit que $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(1) \mathbf{\Gamma}^{t-1}$, et que donc

$$Pr(O_t = o) = \mathbf{u}(1) \mathbf{\Gamma}^{t-1} \mathbf{P}(o) \mathbf{1}'.$$

La vraisemblance

La vraisemblance L_T d'une séquence de T observations consécutives $O = o_1, o_2, \dots, o_T$ générée par un *HMM* à m états est la probabilité d'observer cette séquence d'observations. Autrement dit,

$$L_T = Pr(\mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)}) = \sum_{x_1, x_2, \dots, x_T=1}^m Pr(\mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)}, \mathbf{X}^{(T)} = \mathbf{x}^{(T)}). \quad (2.3)$$

De ceci, vient que

$$Pr(\mathbf{O}^{(T)}, \mathbf{X}^{(T)}) = Pr(X_1) \prod_{k=2}^T Pr(X_k | X_{k-1}) \prod_{k=1}^T Pr(O_k | X_k),$$

voir (Zucchini et al. 2016, p. 38) pour la démonstration.

Puis, à partir de l'équation 2.3 en découle que

$$\begin{aligned} L_T &= \sum_{x_1, x_2, \dots, x_T=1}^m (\delta_{x_1} \gamma_{x_1, x_2} \gamma_{x_2, x_3} \dots \gamma_{x_{T-1}, x_T}) (p_{x_1}(o_1) p_{x_2}(o_2) \dots p_{x_T}(o_T)) \\ &= \sum_{x_1, x_2, \dots, x_T=1}^m \delta_{x_1} p_{x_1}(o_1) \gamma_{x_1, x_2} p_{x_2}(o_2) \gamma_{x_2, x_3} \dots \gamma_{x_{T-1}, x_T} p_{x_T}(o_T). \end{aligned}$$

Finalement, la formule générale de la vraisemblance d'un *HMM* est donnée par :

$$L_T = \delta \mathbf{P}(o_1) \mathbf{\Gamma} \mathbf{P}(o_2) \mathbf{\Gamma} \mathbf{P}(o_3) \dots \mathbf{\Gamma} \mathbf{P}(o_T) \mathbf{1}'.$$

2.2 Théorie mathématique du modèle

2.2.1 Estimation des paramètres par l'algorithme de Baum-Welch

L'algorithme *EM* (*Expectation-Maximization*) est une méthode itérative utilisée pour trouver les estimations du maximum de vraisemblance des paramètres dans les modèles statistiques avec des données incomplètes (voir les travaux de Dempster et al. (1977)). Dans le contexte des modèles de Markov cachés (*HMM*), cet algorithme est connu sous le nom d'algorithme de Baum-Welch (voir les travaux de Baum et al. (1970) ; Baum (1972) ; Welch (2003)). Il estime les paramètres des *HMM* en traitant les états cachés comme les données manquantes. L'algorithme alterne entre l'étape d'espérance, qui calcule les probabilités conditionnelles des états cachés, et l'étape de maximisation, qui ajuste les paramètres pour maximiser la vraisemblance des observations, étant donné les estimations actuelles des états cachés.

Probabilité *forward*

Pour aborder l'algorithme *EM* appliqué aux modèles de Markov cachés, il est essentiel de définir au préalable les probabilités *forward* et *backward*, qui jouent un rôle clé dans cet algorithme, mais aussi dans le décodage et la prédiction d'état, abordés dans la section 2.2.3.

La probabilité *forward* est définie, pour $t = 1, 2, \dots, T$, par

$$\alpha_t = \delta\mathbf{P}(o_1)\mathbf{\Gamma P}(o_2)\mathbf{\Gamma P}(o_3)\dots\mathbf{\Gamma P}(o_t) = \delta\mathbf{P}(o_1) \prod_{s=2}^t \mathbf{\Gamma P}(o_s)$$

De cette définition, il découle que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \delta\mathbf{P}(o_1) ; \\ \alpha_t &= \alpha_{t-1}\mathbf{\Gamma P}(o_t) \quad t = 2, 3, \dots, T. \end{aligned}$$

En reformulant l'équation récursive de α_t pour $t = 1, 2, \dots, T - 1$ sous forme scalaire, on obtient l'expression suivante :

$$\alpha_{t+1}(j) = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_t(i)\gamma_{ij} \right) p_j(o_{t+1}).$$

De cette équation, il vient la proposition suivante ;

Proposition 2.1. Pour $t = 1, 2, \dots, T$ et $j = 1, 2, \dots, m$,

$$\alpha_t(j) = Pr(\mathbf{O}^{(t)} = \mathbf{o}^{(t)}, X_t = j).$$

Plus explicitement, cela signifie que la probabilité conjointe $\alpha_t(j)$ est la probabilité que l'historique des observations est o_1, o_2, \dots, o_t et que la chaîne de Markov se trouve dans l'état j au moment t .

Probabilité *backward*

La probabilité *backward* est définie, pour $t = 1, 2, \dots, T - 1$, par

$$\beta'_t = \mathbf{\Gamma P}(o_{t+1})\mathbf{\Gamma P}(o_{t+2})\dots\mathbf{\Gamma P}(o_T)\mathbf{1}' = \left(\prod_{s=t+1}^T \mathbf{\Gamma P}(o_s) \right) \mathbf{1}'.$$

De cette définition, il découle que

$$\beta'_t = \mathbf{\Gamma P}(o_{t+1})\beta'_{t+1}.$$

De cette équation, il vient la proposition suivante ;

Proposition 2.2. Pour $t = 1, 2, \dots, T$ et $j = 1, 2, \dots, m$,

$$\beta_t(j) = Pr(\mathbf{O}_{t+1} = \mathbf{o}_{t+1}, \mathbf{O}_{t+2} = \mathbf{o}_{t+2}, \dots, \mathbf{O}_T = \mathbf{o}_T \mid X_t = j),$$

ou de manière plus compacte,

$$\beta_t(j) = Pr(\mathbf{O}_{t+1}^T = \mathbf{o}_{t+1}^T \mid X_t = j),$$

où \mathbf{X}_a^b représente le vecteur $(X_a, X_{a+1}, \dots, X_b)$.

Plus explicitement, cela signifie que la probabilité conditionnelle $\beta_t(j)$ est la probabilité d'observer les observations $o_{t+1}, o_{t+2}, \dots, o_T$ étant donné que la chaîne de Markov se trouve dans l'état j au moment t .

Propriétés des probabilités *forward* et *backward*

Il est important de noter que les probabilités *forward* et *backward* sont respectivement des probabilités conjointes et conditionnelles. Une notion importante pour le produit des deux probabilités qui est utile pour la suite, de manière compacte,

$$\begin{aligned} \alpha_t(j)\beta_t(j) &= Pr(\mathbf{O}_1^t, X_t = j)Pr(\mathbf{O}_{t+1}^T \mid X_t = j) \\ &= Pr(\mathbf{X}_t = j)Pr(\mathbf{O}_1^t \mid X_t = j)Pr(\mathbf{O}_{t+1}^T \mid X_t = j). \end{aligned}$$

En utilisant l'indépendance conditionnelle entre \mathbf{O}_1^t et \mathbf{O}_{t+1}^T sachant \mathbf{X}_t , cela nous donne

$$\alpha_t(j)\beta_t(j) = Pr(\mathbf{X}_t = j)Pr(\mathbf{O}_1^t, \mathbf{O}_{t+1}^T \mid X_t = j).$$

Ce qui finalement nous donne :

Proposition 2.3. Pour $t = 1, 2, \dots, T$ et $j = 1, 2, \dots, m$,

$$\alpha_t(j)\beta_t(j) = Pr(\mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)}, X_t = j)$$

Puis, en sommant cette équation sur j , vient

$$\alpha_t \beta_t' = Pr(\mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)}) = L_T.$$

Pour appliquer l'algorithme de Baum-Welch, les propositions suivantes sont également nécessaires :

Proposition 2.4. Pour $t = 1, 2, \dots, T$,

$$Pr(X_t = j \mid \mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)}) = \frac{\alpha_t(j)\beta_t(j)}{L_T};$$

et, pour $t = 2, \dots, T$,

$$Pr(X_{t-1} = j, X_t = k \mid \mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)}) = \frac{\alpha_{t-1}(j)\gamma_{jk}p_k(o_t)\beta_t(k)}{L_T}.$$

2.2.2 Algorithme Baum-Welch

Fonctionnement de l'algorithme pour un *HMM*

L'algorithme EM est une méthode itérative d'estimation du maximum de vraisemblance avec des données manquantes. Il tire parti du fait que la maximisation de la log-vraisemblance des données complètes, ou *complete-data log-likelihood (CDLL)* en anglais, est souvent plus simple que la maximisation de la vraisemblance des seules données observées. La *CDLL* fait référence à la log-vraisemblance des paramètres basée à la fois sur les données observées et sur les données manquantes.

Dans le cadre des *HMM*, [Zucchini et al. \(2016\)](#) introduisent pour $t = 1, 2, \dots, T$,

$$u_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{si et seulement si } x_t = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

et pour $t = 2, 3, \dots, T$,

$$v_{jk}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si et seulement si } x_{t-1} = j \text{ et } x_t = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

Avec ces notations, la log-vraisemblance des données complètes *CDLL*, qui est la log-vraisemblance des observations o_1, o_2, \dots, o_T plus les données manquantes x_1, x_2, \dots, x_T , est donnée par

$$\begin{aligned} \log \left(Pr(\mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)}, \mathbf{X}^{(T)} = \mathbf{x}^{(T)}) \right) &= \log \left(\delta_{x_1} \prod_{t=2}^T \gamma_{x_{t-1}, x_t} \prod_{t=1}^T p_{x_t}(o_t) \right) \\ &= \log \delta_{x_1} + \sum_{t=2}^T \log \gamma_{x_{t-1}, x_t} + \sum_{t=1}^T \log p_{x_t}(o_t), \end{aligned}$$

qui peut être réécrit comme

$$\begin{aligned} \log \left(Pr(\mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)}, \mathbf{X}^{(T)} = \mathbf{x}^{(T)}) \right) &= \sum_{j=1}^m u_j(1) \log \delta_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left(\sum_{t=2}^T v_{jk}(t) \right) \log \gamma_{jk} \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^T u_j(t) \log p_j(o_t) \quad (2.4) \\ &= \text{terme 1} + \text{terme 2} + \text{terme 3}. \end{aligned}$$

L'algorithme *EM*, pour un *HMM*, peut être décrit comme suit :

- **Choix des paramètres initiaux**
- **Etape E**

Pour l'étape d'espérance, il faut calculer l'espérance de la *CDLL*, conditionnelle aux observations et aux paramètres actuels du modèle. Dans le cadre des *HMM*, cela revient à calculer les espérances conditionnelles des fonctions des données manquantes qui apparaissent dans la *CDLL*. Autrement dit, il faut remplacer les $v_{jk}(t)$ et $u_j(t)$ par leurs espérances conditionnelles d'être dans un état à un moment donné, étant donné les observations $\mathbf{o}^{(T)}$:

$$\hat{u}_j(t) = Pr(X_t = j \mid \mathbf{o}^{(T)}) = \frac{\alpha_t(j)\beta_t(j)}{L_T},$$

et

$$\hat{v}_{jk}(t) = Pr(X_{t-1} = j, X_t = k \mid \mathbf{o}^{(T)}) = \frac{\alpha_{t-1}(j)\gamma_{jk}p_k(o_t)\beta_t(k)}{L_T}.$$

- **Etape M**

Pour l'étape de maximisation, après avoir remplacé $u_j(t)$ et $v_{jk}(t)$ par $\hat{u}_j(t)$ et $\hat{v}_{jk}(t)$, il faut maximiser chaque terme de l'équation de la *CDLL* définie par l'équation 2.4. A noter que les termes dépendent respectivement de la distribution initiale δ , de la matrice de probabilité de transition Γ et, des paramètres des états implicitement inclus dans la densité $p_j(o_t)$.

- **Itération**

Les nouveaux paramètres maximisés obtenus à l'étape M permettent de recalculer les espérances $\hat{u}_j(t)$ et $\hat{v}_{jk}(t)$ lors de l'étape E suivante. Les étapes E et M sont répétées jusqu'à ce que le critère de convergence soit atteint, c'est-à-dire jusqu'à ce que les variations des paramètres entre deux étapes successives deviennent suffisamment faibles

Etape M pour un *Normal-HMM* et un *Vasicek-HMM*

Dans cette partie, l'étape M est explicitement détaillée pour les modèles *Normal-HMM* et *Vasicek-HMM*. Comme expliqué précédemment, elle se décompose en trois maximisations distinctes. Il est donc nécessaire de maximiser :

1. $\sum_{j=1}^m \hat{u}_j(1) \log \delta_j$ par rapport à δ ;
2. $\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left(\sum_{t=2}^T \hat{v}_{jk}(t) \right) \log \gamma_{jk}$ par rapport à Γ ;
3. $\sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) \log p_j(o_t)$ par rapport aux paramètres dépendants de l'état.

Les solutions des problèmes de maximisation sont comme suit :

1. $\delta_j = \frac{\hat{u}_j(1)}{\sum_{j=1}^m \hat{u}_j(1)} = \hat{u}_j(1)$;
2. $\gamma_{jk} = \frac{\sum_{t=2}^T \hat{v}_{jk}(t)}{\sum_{k=1}^m \sum_{t=2}^T \hat{v}_{jk}(t)}$;
3. Etant donné que le troisième terme est fonction des distributions dépendantes de l'état, les solutions de la maximisation du troisième terme de la *CDLL* est présentée pour des observations suivant des lois normales d'une part et des modèles de Vasicek d'autre part.

Pour rappel, la partie de la *CDLL* qui est dépendante de l'état est

$$\sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) \log p_j(o_t).$$

Pour un *Normal-HMM*, la densité dépendante de l'état est de la forme

$$p_j(o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_j^2} (o - \mu_j)^2\right),$$

et les valeurs maximisant les paramètres dépendants de l'état μ_j et σ_j^2 sont

$$\hat{\mu}_j = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) o_t}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t)},$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) (o_t - \hat{\mu}_j)^2}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t)}.$$

Pour un *Vasicek-HMM*, comme les observations $o_{t+1} - e^{-\kappa_j} o_t$ suivent la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu_j(1 - e^{-\kappa_j}), \sigma_j^2 \frac{1 - e^{-2\kappa_j}}{2\kappa_j}\right)$, la densité dépendante de l'état est de la forme :

$$p_j(o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2 \frac{1 - e^{-2\kappa_j}}{2\kappa_j}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(o_{t+1} - e^{-\kappa_j} o_t - \mu_j(1 - e^{-\kappa_j}))^2}{\sigma_j^2 \frac{1 - e^{-2\kappa_j}}{2\kappa_j}}\right\},$$

et les valeurs maximisant les paramètres dépendants de l'état μ_j , κ_j et σ_j^2 sont

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{1 - e^{-\hat{\kappa}_j}} \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - e^{-\hat{\kappa}_j} o_t)}{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t)},$$

$$\hat{\kappa}_j = -\log\left(\frac{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_{t+1} o_t - \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_{t+1} \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t}{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t\right)^2}\right),$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{2\hat{\kappa}_j}{1 - e^{-2\hat{\kappa}_j}} \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - e^{-\hat{\kappa}_j} o_t - \hat{\mu}_j(1 - e^{-\hat{\kappa}_j}))^2}{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t)}.$$

A noter que la présentation et l'interprétation du *Normal-HMM* et du *Vasicek-HMM* sont abordées dans la section 3.3.3. Les démonstrations concernant l'estimation des paramètres, pour chacun des modèles de Markov cachés, sont présentées dans les annexes A.2 et A.3.

2.2.3 Décodage d'état

Dans le cadre de la reconnaissance d'états, deux méthodes de décodage sont utilisées. Le décodage local se réfère au décodage de l'état à l'instant t et détermine l'état le plus probable à cet instant, tandis que le décodage global détermine la séquence d'états la plus probable. Un algorithme couramment utilisé pour le décodage global des *HMM* est l'algorithme de Viterbi.

Probabilités d'état et décodage local

La probabilité d'état est la probabilité que la chaîne de Markov se trouve dans l'état j au moment t , sachant les observations $\mathbf{o}^{(T)}$. Autrement dit, pour $t = \{1, \dots, T\}$,

$$\begin{aligned} Pr(X_t = j \mid \mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)}) &= \frac{Pr(X_t = j, \mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)})}{Pr(\mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)})} \\ &= \frac{\alpha_t(j)\beta_t(j)}{L_T}. \end{aligned}$$

L'état le plus probable i_t^* au temps t , est déterminé séparément pour chaque t , en maximisant la probabilité conditionnelle $Pr(X_t = j \mid \mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)})$ comme suit :

$$\begin{aligned} i_t^* &= \arg \max_{j=1, \dots, m} Pr(X_t = j \mid \mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)}) \\ &= \arg \max_{j=1, \dots, m} \frac{\alpha_t(j)\beta_t(j)}{L_T}. \end{aligned}$$

L'estimation de l'état le plus probable dans ce cas est appelée décodage local en raison de l'estimation indépendante pour chaque t .

Décodage global

Plus communément, le décodage global est préféré au décodage local. En effet, à la différence du décodage local qui recherche l'état maximisant la probabilité $Pr(X_t = j \mid \mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)})$, le décodage global vise à d'obtenir la séquence d'états x_1, x_2, \dots, x_T la plus probable, maximisant la probabilité

$$Pr(\mathbf{X}^{(T)} = \mathbf{x}^{(T)} \mid \mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)}) ; \quad (2.5)$$

ou de manière équivalente, la probabilité conjointe

$$Pr(\mathbf{X}^{(T)}, \mathbf{O}^{(T)}) = \delta_{x_1} \prod_{t=2}^T \gamma_{x_{t-1}, x_t} \prod_{t=1}^T p_{x_t}(o_t).$$

Les résultats du décodage local et du décodage global sont souvent similaires mais pas identiques (voir B.2).

Ainsi, l'application de la méthode du décodage global nécessite de maximiser (2.5) sur toutes les séquences d'états possibles x_1, x_2, \dots, x_T , cela entraîne une complexité computationnelle considérable ; pour T observations et m états possibles, cela nécessite d'évaluer m^T fonctions.

L'une des solutions à ce problème de complexité est l'utilisation d'un algorithme de programmation dynamique pour déterminer la séquence d'états la plus probable : l'algorithme de Viterbi. La programmation dynamique consiste à décomposer le problème global en sous-problèmes plus petits et à stocker les résultats intermédiaires pour éviter des calculs redondants.

Pour ce faire, l'algorithme de Viterbi définit :

$$\xi_{1,j} = Pr(X_1 = j, O_1 = o_1) = \delta_j p_j(o_1),$$

qui initialise les probabilités pour chaque état j au premier moment $t = 1$, puis, pour $t = 2, 3, \dots, T$,

$$\xi_{t,j} = \max_{x_1, x_2, \dots, x_{t-1}} Pr(\mathbf{X}^{(t-1)} = \mathbf{x}^{(t-1)}, X_t = j, \mathbf{O}^{(T)} = \mathbf{o}^{(T)}).$$

Cette étape calcule la probabilité maximale de la séquence d'états jusqu'au temps t se terminant dans chaque état j . De cela découle la relation récursive suivante, pour $t = 2, 3, \dots, T$ et $j = 1, 2, \dots, m$:

$$\xi_{t,k} = \left(\max_j (\xi_{t-1,j} \gamma_{jk}) \right) p_k(o_t).$$

Ainsi, la séquence d'états la plus probable i_1, i_2, \dots, i_T est déterminé récursivement par

$$i_T = \arg \max_{j=1, \dots, m} \xi_{T,j}$$

et, pour $t = T - 1, T - 2, \dots, 1$, par

$$i_t = \arg \max_{j=1, \dots, m} (\xi_{t,j} \gamma_{j,i_{t+1}}).$$

En résumé, l'algorithme de Viterbi, dans le cadre des modèles de Markov cachés, décompose le problème global de la détermination de la séquence d'états la plus probable en sous-problèmes de détermination de la probabilité maximale pour chaque état à chaque instant.

2.2.4 Sélection du modèle

Dans le contexte d'un *HMM* à m états, l'augmentation du nombre d'états améliore toujours l'ajustement du modèle. Toutefois, cette amélioration s'accompagne d'une augmentation du nombre de paramètres, et donc d'une complexité accrue. Il est donc essentiel de recourir à des critères de sélection pour choisir un modèle qui offre le meilleur compromis entre l'ajustement aux données et la complexité.

Dans cette optique, cette partie présente, d'une part, les critères utilisés pour la sélection du nombre d'états du modèle de Markov caché et, d'autre part, les métriques employées pour la vérification et l'évaluation de la performance du modèle.

Sélection du modèle par *AIC* et *BIC*

Le critère d'information d'Akaike (*AIC* - *Akaike Information Criterion*) et le critère d'information bayésien (*BIC* - *Bayesian Information Criterion*) sont des outils couramment utilisés pour la sélection de modèles (voir [Zucchini \(2000\)](#)). Ils permettent d'évaluer l'ajustement du modèle aux données tout en pénalisant la complexité du modèle pour éviter le sur-ajustement.

Les deux critères maximisent la vraisemblance tout en minimisant la complexité, chacun définissant un terme de pénalisation différent.

L'*AIC* est défini comme suit :

$$AIC = -2 \log L + 2p,$$

où $\log L$ est la log-vraisemblance du modèle ajusté et p correspond au nombre de paramètres du modèle. L'*AIC* pénalise la complexité avec le second terme $2p$, qui augmente linéairement avec chaque paramètre ajouté, c'est-à-dire avec l'augmentation du nombre d'états m .

Le *BIC* est défini comme suit :

$$BIC = -2 \log L + p \log T,$$

où $\log L$ et p sont les mêmes que pour l'*AIC*, et T est le nombre d'observations. Dès que $T > e^2$, le *BIC* pénalise davantage la complexité que l'*AIC*, puisque le terme de pénalisation du *BIC*, $p \log T$, croît plus rapidement avec la taille de l'échantillon que celui de l'*AIC*. Étant donné que T vérifie le plus souvent cette inégalité, le *BIC* est particulièrement strict pour les grands échantillons.

Évaluation des modèles avec MAE et MSE

L'erreur absolue moyenne (*MAE* – *Mean Absolute Error*) et l'erreur quadratique moyenne (*MSE* – *Mean Squared Error*) sont des métriques utilisées pour évaluer la performance des modèles en mesurant la qualité de leurs prédictions.

La *MAE* calcule la moyenne des valeurs absolues des erreurs, c'est-à-dire la différence absolue entre chaque valeur prédite et chaque valeur réelle. Elle est définie comme suit :

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |o_t - \hat{o}_t|,$$

pour $t = 1, 2, \dots, T$, où T est le nombre d'observations et $|o_t - \hat{o}_t|$ correspond à l'erreur absolue pour l'observation t .

Quant à la *MSE*, elle mesure la moyenne des carrés des erreurs entre les valeurs prédites par un modèle et les valeurs réelles observées. En d'autres termes, elle calcule la moyenne des carrés des différences entre les valeurs prédites et les valeurs réelles, comme suit :

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (o_t - \hat{o}_t)^2,$$

pour $t = 1, 2, \dots, T$, où T est le même que pour la *MAE*, et $(o_t - \hat{o}_t)^2$ correspond à l'erreur quadratique pour l'observation t .

Ainsi, les deux métriques diffèrent dans la manière dont elles traitent les erreurs individuelles entre les valeurs observées et les valeurs prédites. En effet, la *MAE* est la moyenne des valeurs absolues,

mettant l'accent sur la magnitude des erreurs, tandis que la MSE est la moyenne des erreurs au carré, donnant plus de poids aux grandes erreurs, aux valeurs extrêmes.

Chapitre 3

Développement des différents modèles

Ce chapitre est dédié à une présentation exhaustive du modèle général utilisé dans ce mémoire.

Il aborde les aspects essentiels tels que les hypothèses fondamentales du modèle, les différentes composantes de celui-ci et le choix de données pertinentes. Il traite également de l'estimation des paramètres des différents modèles du modèle général, ainsi que de l'étude des résidus pour évaluer leur adéquation et leur validité.

Le modèle développé repose sur les fondations établies par [Ahlgrim et al. \(2005\)](#), dont les composantes et certaines spécificités sont directement inspirées. Il s'appuie également sur le livre de [Zucchini et al. \(2016\)](#) et sur les travaux de [Gillot \(2019\)](#) concernant les modèles de Markov cachés.

3.1 Présentation du modèle

3.1.1 Cadre de travail

Lorsqu'il est question de modélisation d'actifs financiers, l'une des premières questions est le choix de l'univers dans lequel on se place : univers risque neutre ou univers monde réel.

L'**univers risque neutre** est un cadre théorique où les prix des actifs sont déterminés en supposant que tous les investisseurs sont indifférents au risque, ce qui signifie que tous les instruments financiers se comportent en moyenne comme un actif sans risque. Dans cet univers, les flux futurs sont actualisés à l'aide de taux sans risque, et les probabilités des scénarios futurs sont ajustées pour refléter cette neutralité au risque.

L'**univers monde réel** est un cadre de modélisation financière où les prix des actifs et les probabilités des scénarios futurs reflètent les conditions économiques et les préférences réelles des investisseurs. Contrairement à l'univers risque neutre, où les investisseurs sont supposés indifférents au risque, cet univers prend en compte la prime de risque que les investisseurs exigent pour accepter des incertitudes.

Dans ce mémoire, l'objectif est de sélectionner un modèle d'inflation dynamique à intégrer dans un modèle complet et simple d'utilisation, destiné à une stratégie d'allocation d'actifs incluant des actifs indexés sur l'inflation. C'est pourquoi l'univers monde réel est privilégié dans cette étude.

3.1.2 Spécificité du modèle

L'objectif de ce mémoire est de déterminer quel modèle d'inflation, entre un modèle traditionnel et deux modèles à changements d'états, est le mieux adapté pour intégrer les périodes de forte inflation. Ces modèles d'inflation seront intégrés dans une structure fixe, choisie pour représenter une base solide adaptée aux besoins des assureurs, en s'appuyant sur des actifs fondamentaux largement utilisés dans les stratégies d'allocation d'actifs.

Les modèles à changements d'états ont été choisis pour répondre à la problématique de modélisation de l'inflation, notamment dans un contexte de périodes inflationnistes marquées, telles que celles récemment observées en Europe. Ces modèles se distinguent par leur capacité à capturer plus précisément les dynamiques complexes de l'inflation, en modélisant les transitions entre différents régimes économiques. Cette flexibilité permet de mieux représenter les périodes de forte inflation et d'adapter les projections aux fluctuations économiques, là où les modèles traditionnels peuvent s'avérer trop rigides en raison de leurs paramètres constants dans le temps.

En outre, l'utilisation d'un modèle à changements d'états introduit une dépendance dynamique entre les actifs, avec une corrélation qui varie en fonction de l'état dans lequel se trouve le système à un instant t . Cela améliore la capacité du modèle à refléter les comportements réels du marché, en particulier en période d'instabilité économique.

3.2 Données et hypothèses

Cette section aborde les enjeux et les critères liés à la sélection des données des différents actifs, ainsi que les choix spécifiques des actifs utilisés dans le modèle.

3.2.1 Choix de l'historique

Le choix des données pour cette étude repose sur plusieurs critères essentiels afin d'assurer leur pertinence dans le cadre de ce mémoire :

- Les données doivent être en **lien direct avec la zone euro**.
- L'intervalle de temps considéré est mensuel, il est donc nécessaire que les séries de données aient une **fréquence mensuelle**.
- La profondeur de l'historique est également un facteur déterminant. Étant donné que les modèles se basent sur la comparaison de l'inflation, les données doivent être cohérentes avec l'évolution de l'inflation dans la zone euro. Depuis que la BCE a pris en charge la gestion de l'inflation à partir de janvier 1999, les données antérieures à cette période ne reflètent pas la politique monétaire actuelle visant à maintenir l'inflation autour de 2 %. Pour cette raison, ainsi que pour des raisons de disponibilité des données, **les séries sélectionnées commencent en janvier 2000**.
- Enfin, étant donné l'objectif de ce mémoire qui porte une attention particulière aux périodes de forte inflation, il est crucial d'inclure toutes les crises économiques ayant affecté la zone euro depuis la mise en place de la politique monétaire de la BCE. Ainsi, l'historique des données est prolongé jusqu'à la date la plus récente possible, ici **jusqu'à fin 2024**.

3.2.2 Taux d'intérêt nominaux

Dans le cadre de la gestion de portefeuille, il est essentiel de modéliser les taux d'intérêt en raison de leur impact direct sur le prix des obligations. Etant donné que les obligations constituent une part importante des portefeuilles des assureurs, une modélisation précise des taux d'intérêt permet d'évaluer correctement l'évolution des prix des obligations et, par conséquent, celle des portefeuilles dans leur ensemble.

A cet effet, le modèle de taux d'intérêt nominal développé par [Gillot \(2019\)](#) est utilisé. Ce modèle se concentre sur les taux d'intérêt à long terme et sur le *spread* entre les taux courts et les taux longs.

Pour les **taux d'intérêt nominaux à court terme**, les données utilisées sont celles du taux Euribor à 3 mois :

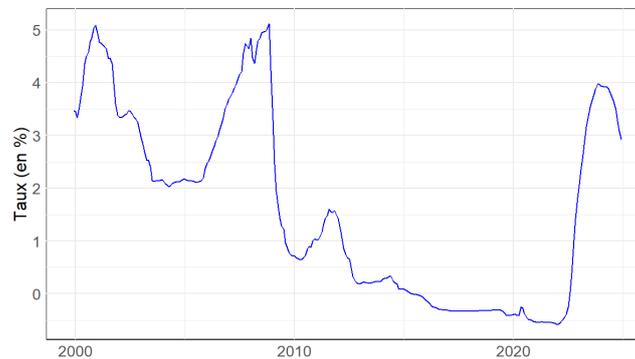


FIGURE 3.1 – Taux Euribor 3 mois de janvier 2000 à fin 2024

Le taux Euribor 3 mois est un taux de référence interbancaire, calculé à partir des taux auxquels les principales banques de la zone euro se prêtent de l'argent pour une période de 3 mois. Il reflète le coût moyen du crédit à court terme et est utilisé comme référence pour divers produits financiers.

Le taux Euribor 3 mois montre une tendance générale à la baisse, avec des pics notables pendant les périodes de crises importantes en Europe.

Pour les **taux d'intérêts nominaux à long terme**, le taux *Bund* 30 ans est sélectionné pour représenter la zone euro :

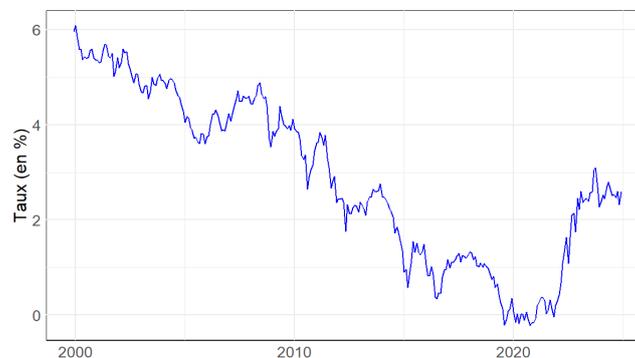


FIGURE 3.2 – Taux *Bund* 30 ans de janvier 2000 à fin 2024

Le taux *Bund* 30 ans est un taux d'intérêt de référence pour les obligations d'Etat allemandes

à long terme, émises avec une maturité de 30 ans. Il reflète le coût d'emprunt à long terme pour le gouvernement allemand et est utilisé comme *benchmark* pour évaluer les rendements des obligations dans la zone euro.¹

Le taux *Bund* 30 ans montre également une tendance à la baisse, mais il est moins sensible aux pics des crises financières dans la zone euro.

Ainsi, en combinant les deux taux précédents, on obtient le ***spread* entre les taux nominaux à court terme et les taux nominaux à long terme** :

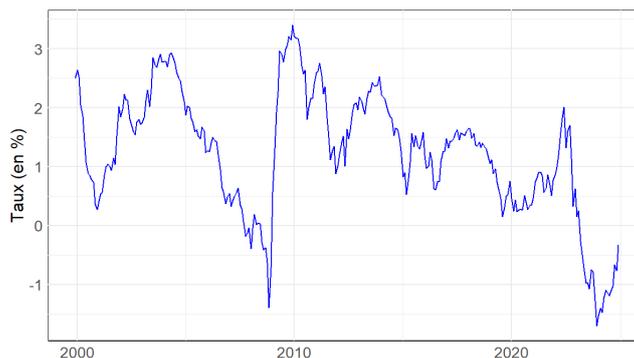


FIGURE 3.3 – Taux *spread* taux court / taux long de janvier 2000 à fin 2024

Le *spread* entre les taux courts nominaux et les taux longs nominaux mesure la différence entre les taux d'intérêt à court terme et à long terme. Ce *spread* capture la pente de la courbe de taux, qui reflète les primes de risque, les attentes du marché sur les changements de taux futurs, et les ajustements pour le risque de liquidité.

- Lorsque le *spread* est positif (taux long > taux court) : la courbe des taux est normale, ce qui suggère des attentes de croissance économique stable et d'inflation future modérée.
- Lorsque le *spread* est négatif (taux long < taux court) : cela indique une courbe des taux inversée, souvent perçue comme un signe précurseur d'une récession économique imminente. Cela reflète les anticipations de baisse future des taux courts par la BCE.

Les périodes où le *spread* est négatif coïncident avec des événements économiques majeurs tels que la crise des *subprimes* de 2008, la crise de la Covid-19, et la guerre en Ukraine. Il est également important de souligner que le *spread* a fortement diminué au début des années 2000, période qui correspond à la forte récession des années 2000 liée à l'éclatement de la bulle internet et à un ralentissement économique général.

Dans la suite du mémoire, le terme « *spread* » fera référence à la notion de *spread* entre taux court et taux long.

3.2.3 Actions

Dans le cadre de la gestion de portefeuille, modéliser les actions est crucial en raison de leur place importante dans les portefeuilles des assureurs. En effet, elles permettent d'obtenir des rendements

1. Qu'est-ce qu'un *spread* de taux, lafinancepourtous.com 2022

plus élevés et de diversifier les investissements, ce qui aide à équilibrer les risques et optimiser les rendements à long terme.

Pour les **actions**, les données utilisées sont celles de l'Euro Stoxx 50 :

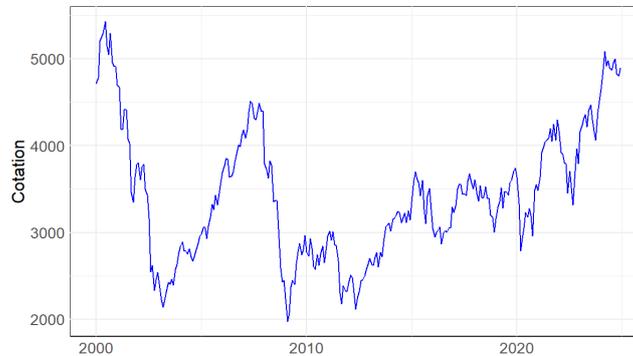


FIGURE 3.4 – Cotation de l'Euro Stoxx 50 de janvier 2000 à fin 2024

L'Euro Stoxx 50 est un indice boursier qui regroupe les 50 plus grandes entreprises de la zone euro. Il sert de référence pour évaluer la performance des actions majeures de cette dernière.

La courbe de l'Euro Stoxx 50 montre une tendance générale à la hausse, avec des pics plus marqués pendant les crises financières en Europe.

3.2.4 Immobilier

L'immobilier est modélisé pour des raisons similaires à celles des actions, car il contribue également à la diversification et à l'optimisation des portefeuilles. Ces deux actifs sont souvent associés dans les modèles financiers.

Pour l'**immobilier**, les données utilisées sont celles de l'IEIF (Institut de l'Épargne Immobilière et Foncière) de la zone euro :

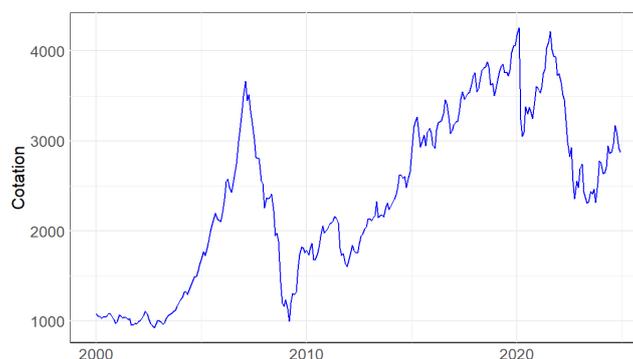


FIGURE 3.5 – Cotation de l'IEIF de la zone euro de janvier 2000 à fin 2024

Cet indice mesure la performance des investissements immobiliers dans la zone euro : il suit l'évolution des rendements et des valeurs des actifs immobiliers pour fournir une vue d'ensemble du marché immobilier européen.

La courbe de l'IEIF de la zone euro, comme l'Euro Stoxx 50, suit généralement une tendance haussière avec des pics plus marqués lors des crises financières. Cependant, elle a paradoxalement baissé pendant la crise de la Covid-19, principalement en raison de la réduction temporaire des transactions immobilières et des incertitudes économiques qui ont freiné la hausse des prix.

3.2.5 Inflation

Dans le cadre des modèles financiers et plus particulièrement de la gestion de portefeuille, l'inflation constitue un élément fondamental car elle influence directement ou indirectement la performance de tous les actifs d'un portefeuille. Il est donc crucial d'intégrer des prévisions d'inflation dans les modèles financiers afin d'ajuster la stratégie d'allocation d'actifs en fonction des conditions économiques.

Les données d'**inflation** utilisées dans ce mémoire sont celles de la zone euro :

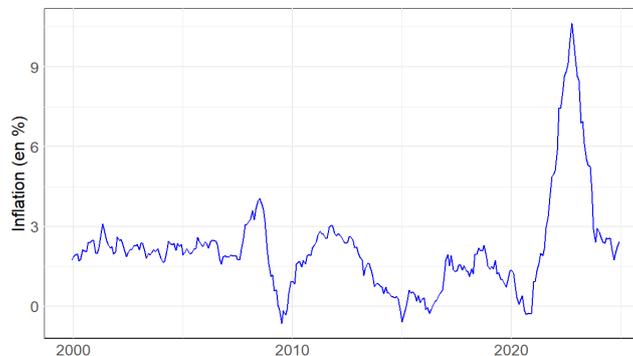


FIGURE 3.6 – Inflation de la zone euro de janvier 2000 à fin 2024

Pour l'analyse de l'inflation, voir le chapitre 1.

3.3 Modélisation et estimation

Cette section s'appuie sur des modèles issus de la littérature scientifique pour modéliser les différents actifs financiers, avec une analyse principalement fondée sur les cours de [Cousin \(2024\)](#) et le livre de [Brigo & Mercurio \(2006\)](#).

Dans cette section, plusieurs notions sont abordées. En ce qui concerne les tests d'adéquation et l'analyse des résidus, ceux-ci reposent sur les travaux de [Hardy et al. \(2006\)](#) et [Zucchini et al. \(2016\)](#). Pour plus de détails sur cette notion, il faut se référer à l'annexe B.1. En ce qui concerne la notion de décodage local et global, il faut se référer à l'annexe B.2.

3.3.1 Modèle de Vasicek

Dans le cadre de ce mémoire, le modèle de Vasicek est couramment utilisé. C'est pourquoi une courte présentation et interprétation de ce modèle sont présentées dans la suite de cette section.

Interprétation du modèle de Vasicek

Sous la probabilité historique \mathbb{P} , la dynamique du modèle de Vasicek s'écrit :

$$dr_t = \kappa(\mu - r_t) dt + \sigma d\mathcal{W}_t,$$

où :

- r_t est le taux d'intérêt à l'instant t ,
- μ est la moyenne à long terme du taux d'intérêt,
- κ est le coefficient de retour à la moyenne, indiquant la vitesse à laquelle le taux d'intérêt revient vers sa moyenne,
- σ est la volatilité du taux d'intérêt,
- $d\mathcal{W}_t$ est le terme de bruit blanc, représentant un processus de Wiener (ou mouvement brownien).

L'espérance de la dynamique est

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[dr_t | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\kappa(\mu - r_t) dt | \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\sigma d\mathcal{W}_t | \mathcal{F}_t] \\ &= \kappa(\mu - r_t) dt + \sigma \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[d\mathcal{W}_t | \mathcal{F}_t], \\ &= \kappa(\mu - r_t) dt. \end{aligned}$$

Elle correspond à l'effet de retour à la moyenne :

- $\kappa(\mu - r_t) dt > 0$ si $r_t < \mu$ et,
- $\kappa(\mu - r_t) dt \leq 0$ si $r_t \geq \mu$.

La force de rappel vers μ est d'autant plus importante que r_t est éloigné de μ ($|\mu - r_t|$ grand), ou que κ est grand.

La variance de la dynamique est

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathbb{P}}(dr_t | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[(dr_t - \kappa(\mu - r_t) dt)^2 | \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[(\sigma d\mathcal{W}_t)^2 | \mathcal{F}_t\right] \\ &= \sigma^2 \text{Var}(d\mathcal{W}_t) \\ &= \sigma^2 dt. \end{aligned}$$

Plus le paramètre de volatilité σ est grand, plus il y a une incertitude sur la valeur de dr_t .

Loi de r_t sachant \mathcal{F}_t

En posant le changement de variable $Y_t = e^{\kappa t} r_t (= f(t, r_t))$ et en appliquant le lemme d'Itô :

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, r_t) dt + \frac{\partial f}{\partial r_t}(t, r_t) dr_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r_t^2}(t, r_t) d\langle r, r \rangle_t \\ &= e^{\kappa t} (\kappa r_t dt + dr_t) \\ &= e^{\kappa t} (\kappa r_t dt + \kappa(\mu - r_t) dt + \sigma d\mathcal{W}_t) \end{aligned}$$

$$\implies dY_t = \kappa\mu e^{\kappa t} dt + \sigma e^{\kappa t} d\mathcal{W}_t.$$

En intégrant entre t et $t + \delta_t$:

$$\begin{aligned} Y_{t+\delta_t} - Y_t &= \int_t^{t+\delta_t} dY_s \\ &= \int_t^{t+\delta_t} \kappa\mu e^{\kappa s} ds + \sigma \int_t^{t+\delta_t} e^{\kappa s} d\mathcal{W}_s \\ &= \kappa\mu \int_t^{t+\delta_t} e^{\kappa s} ds + \sigma \int_t^{t+\delta_t} e^{\kappa s} d\mathcal{W}_s, \end{aligned}$$

en utilisant le changement de variable introduit plus tôt,

$$\begin{aligned} \iff e^{\kappa(t+\delta_t)} r_{t+\delta_t} - e^{\kappa t} r_t &= \kappa\mu \int_t^{t+\delta_t} e^{\kappa s} ds + \sigma \int_t^{t+\delta_t} e^{\kappa s} d\mathcal{W}_s, \\ \implies r_{t+\delta_t} &= e^{-\kappa\delta_t} r_t + \frac{\kappa\mu}{\kappa} \left[e^{-\kappa((t+\delta_t)-s)} \right]_t^{t+\delta_t} + \sigma \int_t^{t+\delta_t} e^{-\kappa((t+\delta_t)-s)} d\mathcal{W}_s \\ &= e^{-\kappa\delta_t} r_t + \mu \left(1 - e^{-\kappa\delta_t} \right) + \sigma \int_t^{t+\delta_t} e^{-\kappa((t+\delta_t)-s)} d\mathcal{W}_s. \end{aligned}$$

Proposition 3.1. *Si g est une fonction déterministe, alors*

$$I = \int_t^{t+\delta_t} g(s) d\mathcal{W}_s$$

est appelée intégrale de Wiener. I est de loi normale :

$$I \sim \mathcal{N} \left(0, \sigma^2(t, t + \delta_t) \right) ;$$

avec

$$\sigma^2(t + \delta_t) = \int_t^{t+\delta_t} g^2(u) du.$$

De cette proposition, r_t sachant \mathcal{F}_t est la somme d'un terme déterministe et d'une intégrale de Wiener. Autrement dit,

$$\implies r_{t+\delta_t} | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N} \left(m(t, t + \delta_t), \sigma^2(t, t + \delta_t) \right),$$

avec

$$m(t, t + \delta_t) = \mathbb{E}[r_t | \mathcal{F}_t] = e^{-\kappa\delta_t} r_t + \mu \left(1 - e^{-\kappa\delta_t} \right),$$

et

$$\begin{aligned}\sigma^2(t, t + \delta_t) &= \mathbb{E} \left[(r_{t+\delta_t} - m(t, t + \delta_t))^2 \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\int_t^{t+\delta_t} e^{-\kappa((t+\delta_t)-s)} d\mathcal{W}_s \right)^2 \right] \\ &= \sigma^2 \text{Var} \left(\int_t^{t+\delta_t} e^{-\kappa((t+\delta_t)-s)} d\mathcal{W}_s \right),\end{aligned}$$

en utilisant la proposition 3.1 et en définissant $g(s) = e^{-\kappa((t+\delta_t)-s)}$, vient ;

$$\begin{aligned}\sigma^2(t, t + \delta_t) &= \sigma^2 \int_t^{t+\delta_t} e^{-2\kappa((t+\delta_t)-s)} ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left[e^{-2\kappa((t+\delta_t)-s)} \right]_t^{t+\delta_t}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\boxed{\sigma^2(t, t + \delta_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left(1 - e^{-2\kappa\delta_t} \right)}.$$

Comme $r_t \mid \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on obtient la discrétisation exacte :

$$\boxed{r_{t+\delta_t} = e^{-\kappa\delta_t} r_t + \mu \left(1 - e^{-\kappa\delta_t} \right) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa\delta_t}}{2\kappa}} \epsilon_t},$$

où ϵ_t suit une loi normale centrée réduite, et δ_t correspond au pas de discrétisation.

3.3.2 Composantes fixes

Pour les modèles des composantes fixes, l'objectif est de sélectionner des modèles simples à comprendre, faciles à calibrer, valider et implémenter, qui ont déjà été utilisés dans la gestion de portefeuille et ont répondu aux besoins.

Taux d'intérêt nominaux

Pour modéliser la dynamique des taux d'intérêt, [Ahlgrim et al. \(2005\)](#) utilise un modèle Hull & White à deux facteurs, qui permet de modéliser simultanément les taux d'intérêt à court terme et à long terme. Ce modèle, initialement proposé par [Hibbert et al. \(2001\)](#) et couramment employé pour modéliser les taux d'intérêt, est formulé à l'aide de deux équations différentielles stochastiques :

$$dc_t = \kappa_c (l_t - c_t) dt + \sigma_c d\mathcal{W}_{c,t}$$

$$dl_t = \kappa_l (\mu_l - l_t) dt + \sigma_l d\mathcal{W}_{l,t},$$

la dynamique du taux long terme dl_t suit un processus de Vasicek à un facteur, tandis que la dynamique du taux court terme nominal dc_t suit également un modèle de Vasicek à un facteur, mais dont la moyenne long terme vers laquelle les taux courts tendent à se rapprocher, est stochastique et correspond aux taux longs.

En effet, le terme de réversion de la dynamique des taux courts, $\kappa_c (l_t - c_t) dt$, reflète l'idée que les taux d'intérêt à court terme tendent à s'aligner progressivement sur les taux d'intérêt à long terme. Cette relation traduit les attentes du marché quant aux conditions économiques futures, où les taux longs intègrent des anticipations sur les tendances de fond.

Cependant, dans le cadre de ce mémoire, l'implémentation de ce modèle n'est **pas jugée satisfaisante** : le coefficient de retour à la moyenne pour les taux courts est négatif, ce qui est impossible pour un modèle de Vasicek.

Gillot (2019) arrive à la même conclusion dans son étude, et propose une autre approche sur laquelle ce mémoire va s'appuyer.

Pour modéliser la structure par terme des taux d'intérêt court terme nominaux, ce modèle se base sur la relation $c_t = l_t - s_t$, où s_t représente le *spread* entre le taux court nominal et le taux long nominal (voir Payen (2016) pour une étude approfondie du *spread* entre le taux court et le taux long dans le cadre d'un GSE monde réel).

Les dynamiques du modèle suivent toutes les deux des modèles de Vasicek dont les équations différentielles stochastiques, sous la probabilité historique \mathbb{P} , sont de la forme :

$$\begin{aligned} dl_t &= \kappa_l (\mu_l - l_t) dt + \sigma_l d\mathcal{W}_{l,t} \\ ds_t &= \kappa_s (\mu_s - s_t) dt + \sigma_s d\mathcal{W}_{s,t}. \end{aligned}$$

Ces processus admettent une discrétisation exacte (voir section 3.3.1) :

$$\begin{aligned} l_{t+\delta_t} &= e^{-\kappa_l \delta_t} l_t + \mu_l \left(1 - e^{-\kappa_l \delta_t}\right) + \sigma_l \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_l \delta_t}}{2\kappa_l}} \epsilon_{l,t}, \\ s_{t+\delta_t} &= e^{-\kappa_s \delta_t} s_t + \mu_s \left(1 - e^{-\kappa_s \delta_t}\right) + \sigma_s \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_s \delta_t}}{2\kappa_s}} \epsilon_{s,t}. \end{aligned}$$

Dans le cadre de ce mémoire, le pas de discrétisation est choisi comme étant $\delta_t = 1$, pour un pas mensuel.

Pour l'estimation des paramètres, elle est réalisée par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO). Cette méthode consiste à minimiser la somme des carrés des résidus du modèle.

Paramètre	
μ_l	1,91 %
κ_l	1,20 %
σ_l	0,20 %

TABLE 3.1 – Valeurs des paramètres du modèle taux long

Comme le montre le graphique 3.1, les paramètres estimés pour le modèle de taux d'intérêt long terme semblent cohérents avec l'environnement actuel, marqué par une longue période de baisse des taux longs.

Cependant, compte tenu de l'historique (voir la figure 3.2), les paramètres de la moyenne long terme μ_l et du coefficient de retour à la moyenne κ_l semblent avoir été influencés à la hausse par les récentes crises, notamment la crise de la Covid-19 et la guerre en Ukraine. En effet, en calibrant sur l'historique hors crise (2000-2020), le paramètre de variance reste sensiblement le même, tandis que la moyenne long terme et le coefficient de retour à la moyenne descendent respectivement à $-0,7\%$ et $0,59\%$.

Les paramètres estimés pour le modèle de *spread* sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Paramètre	
μ_s	0,74 %
κ_s	2,29 %
σ_s	0,25 %

TABLE 3.2 – Valeurs des paramètres du modèle *spread* taux court / taux long

Les mêmes conclusions s'appliquent inversement au *spread*, étant donné qu'il est calculé en soustrayant le taux court du taux long (voir les figures 3.1, 3.2 et 3.3) : les paramètres de la moyenne long terme et du coefficient de retour à la moyenne augmentent respectivement à $1,34\%$ et $4,03\%$ lorsqu'on se base sur la période hors gros pic d'inflation (2000-2020).

La trajectoire déterministe du modèle de taux long est présentée ci-dessous :



FIGURE 3.7 – Trajectoire déterministe du taux long estimé par un modèle de Vasicek

La trajectoire déterministe du taux long (Figure 3.7) semble cohérente avec les remarques faites précédemment sur les valeurs des paramètres. En effet, la trajectoire déterministe du modèle semble être déviée de sa trajectoire historique par le pic de la crise de la Covid-19 et de la guerre en Ukraine.

Quant au *spread* (Figure 3.8), la trajectoire semble alignée avec la tendance générale de la courbe, bien qu'empiriquement, les pics des taux courts lors des crises importantes tendent à tirer les valeurs de la trajectoire déterministe vers le bas.



FIGURE 3.8 – Trajectoire déterministe du taux de *spread* taux court / taux long estimé par un modèle de Vasicek

Il convient maintenant d'étudier l'adéquation du modèle aux données, c'est-à-dire, dans le cadre du modèle de Vasicek, de vérifier que les résidus du modèle suivent une loi normale centrée et de même variance que celle du modèle.

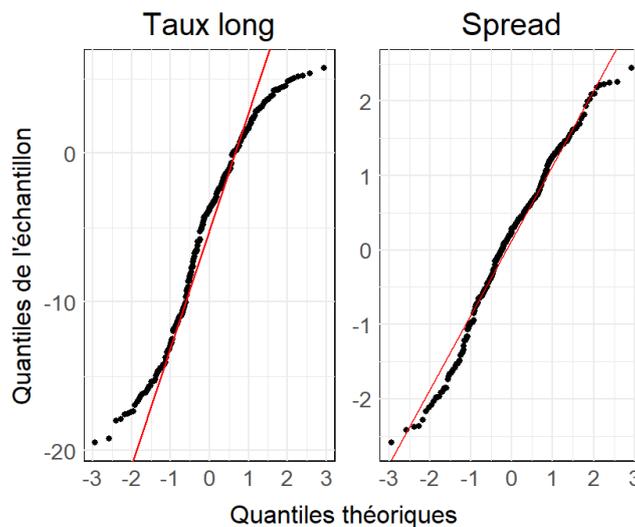


FIGURE 3.9 – Diagrammes Q-Q des résidus des modèles de taux

Les diagrammes Q-Q (figure 3.9) montrent que la distribution empirique des résidus du modèle de taux long présente des queues plus légères que la distribution normale, ce qui est confirmé par un *kurtosis* de $-0,82$. L'hypothèse de normalité est rejetée par le test de Jarque-Bera, avec une *p-value* = $1,54 \times 10^{-4}$ %.

Pour la distribution empirique du modèle de *spread*, les queues légères sont moins prononcées que celles observées pour le taux long, ce qui est reflété par un *kurtosis* de $-0,29$. Comme le montre le diagramme Q-Q, l'hypothèse de normalité des résidus du modèle de *spread* n'est pas rejetée par le test de Jarque-Bera, avec une *p-value* = $6,08$ %.

Action et immobilier

Compte tenu des hypothèses et des contraintes de modélisation des composantes fixes, le modèle de Black & Scholes est choisi pour la modélisation des actions et de l'immobilier. Ce choix est couramment adopté lorsqu'il s'agit de modéliser ces actifs.

Les démonstrations relatives au modèle de Black & Scholes sont disponibles en annexe A.1.

La dynamique de l'équation différentielle stochastique du modèle de Black & Scholes, sous la probabilité historique \mathbb{P} , est de la forme

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma d\mathcal{W}_t,$$

où :

- S_t correspond au prix de l'actif à l'instant t ,
- μ correspond au taux de rendement attendu de l'actif,
- σ correspond à la volatilité du prix de l'actif,
- \mathcal{W}_t correspond à un processus de Wiener.

Ce processus admet une discrétisation exacte :

$$S_{t+\delta_t} = S_t \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \delta_t + \sigma \sqrt{\delta_t} \epsilon_t \right\}.$$

Dans le cadre de ce mémoire, le pas de discrétisation est choisi comme étant $\delta_t = 1$, pour un pas mensuel.

En ce qui concerne l'estimation des paramètres, elle est réalisée directement par la méthode des moments. Étant donné que, dans le cadre du modèle de Black & Scholes, le log-rendement suit une loi normale, les deux premiers moments du rendement logarithmique permettent d'obtenir l'estimation des paramètres :

$$\hat{\mu} = \mathbb{E} \left[\log \frac{S_{t+\delta_t}}{S_t} \right] + \frac{1}{2} \text{Var} \left(\log \frac{S_{t+\delta_t}}{S_t} \right),$$

$$\hat{\sigma}^2 = \text{Var} \left(\log \frac{S_{t+\delta_t}}{S_t} \right).$$

Pour ce qui est de la calibration du modèle action, les paramètres obtenus à partir de l'historique de l'Euro Stoxx 50, de janvier 2000 à décembre 2024, sont présentés dans le tableau 3.3.

Paramètre	
μ_A	0,17 %
σ_A	5,17 %

TABLE 3.3 – Valeurs des paramètres du modèle action

Quant au modèle immobilier, les paramètres sont calibrés sur l'historique des données de l'IEIF pour la zone euro, de janvier 2000 à décembre 2024. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.4.

Paramètre	
μ_I	0,46 %
σ_I	5,14 %

TABLE 3.4 – Valeurs des paramètres du modèle immobilier

Le rendement de l'action apparaît relativement bas, ce qui s'explique par les deux crises des années 2000, période au cours de laquelle le rendement a été mesuré à $-1,71$ %, pesant lourdement sur le rendement historique. En revanche, l'immobilier affiche un rendement relativement élevé malgré la période de repli liée à la Covid-19.

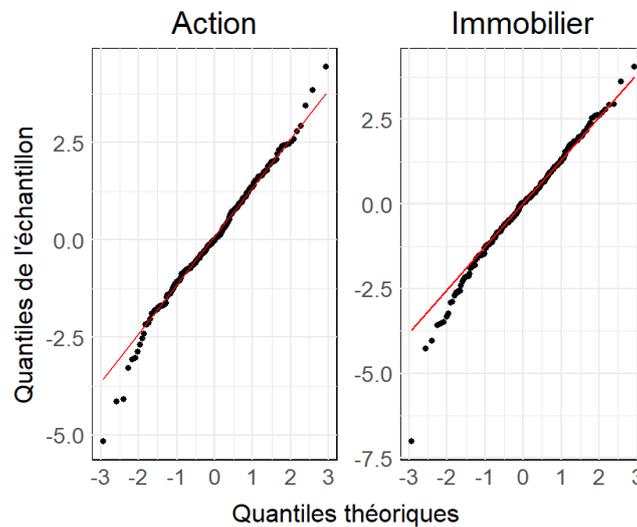


FIGURE 3.10 – Diagrammes Q-Q des résidus des modèles action et immobilier

Les diagrammes Q-Q des résidus des log-rendements de l'action et de l'immobilier (figure 3.10) indiquent que leur distribution empirique présente des queues particulièrement lourdes, notamment les queues gauches. Cette observation est confirmée par des valeurs de *skewness* et de *kurtosis* respectivement de $-0,71$ et $1,62$ pour l'action, et de $-1,28$ et $6,26$ pour l'immobilier.

En d'autres termes, les observations aux extrémités de la distribution, notamment les valeurs inférieures, sont plus fréquentes que dans une distribution normale. En effet, selon le test de Jarque-Bera, l'hypothèse de normalité est rejetée avec une *p-value* de $6,47 \times 10^{-4}$ % pour l'action et de $8,77 \times 10^{-11}$ % pour l'immobilier.

Ces observations sont corroborées par [Aas & Haff \(2006\)](#), qui explique que les rendements des variables des marchés financiers, tels que les prix des actions, sont caractérisés par une non-normalité : « la distribution empirique de ces rendements présente des pics et des queues plus lourdes que la distribution normale ; elle est souvent asymétrique, avec une queue lourde et une queue plus gaussienne ou semi-lourde ».

Bien que la non-normalité des log-rendements de l'action et de l'immobilier soit courante, il est essentiel, comme pour les taux nominaux, de prêter attention à leur projection.

3.3.3 Modèles d'inflation

Etat de l'art des modèles d'inflation dans le cadre de cette étude

Pour ce qui est de la modélisation de l'inflation, la littérature est riche sur le sujet. En effet, il existe de nombreuses manières de le faire dans le cadre de cette étude. Une présentation non exhaustive des modèles d'inflation est fournie ci-dessous.

D'une part, l'inflation peut être modélisée à l'aide de modèles macroéconomiques, qui se basent principalement sur les relations qu'entretient l'inflation avec certains facteurs de l'économie, comme présenté dans la section 1.1.2.

- Le modèle d'inflation de la Banque de France, MAPI, est un outil d'analyse et de projection d'inflation utilisant une approche désagrégée pour prévoir l'évolution des prix des principaux agrégats économiques à court et moyen terme. En intégrant des équations économétriques et des informations économiques récentes, MAPI communique avec le modèle FR-BDF pour assurer la cohérence entre les dynamiques réelles et nominales de l'économie. Ce système intégré permet de déterminer les projections d'inflation en fonction de l'évolution du scénario macroéconomique, notamment la dynamique des salaires, essentielle pour l'inflation totale à moyen terme.
- Un document de travail de l'INSEE de [Milin \(2017\)](#) propose un modèle d'inflation par une approche macrosectorielle, c'est-à-dire basé sur quatre équations : le prix de la valeur ajoutée, les salaires, les prix des consommations intermédiaires et les prix de production. Les prévisions permettent d'estimer les prix à la consommation sous-jacents.

D'autre part, la composante de l'inflation peut être modélisée via des processus de séries temporelles. En effet, pour les études actuarielles, l'une des principales manières de modéliser l'inflation passe par les séries temporelles. De nombreux articles de recherche ou mémoires existent sur le sujet. Par exemple, [Mear \(2016\)](#) propose une description précise des processus de séries temporelles permettant cela, tels que les processus autorégressifs $AR(p)$, les moyennes mobiles $MA(q)$ ou $ARMA(p, q)$. Ces modèles se retrouvent dans de nombreux GSE en univers monde réel pour modéliser l'inflation.

- Le GSE d'équilibre de Wilkie fait de l'inflation la variable motrice de son GSE avec un modèle autorégressif d'ordre 1. [Moulin \(2024\)](#) s'appuie sur ce modèle dans le cadre de son mémoire pour évaluer les conséquences de la nouvelle conjoncture inflationniste liée à l'envolée des prix en 2021. [Frayssé \(2012\)](#) modifie ce modèle en intégrant des sauts avec l'algorithme de Box et Tiao pour prendre en compte des scénarios de crises.
- Le GSE d'équilibre de [Ahlgrim et al. \(2005\)](#), conçu à la demande de la *Casualty Actuarial Society (CAS)* et de la *Society of Actuaries (SOA)*, utilise un processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour modéliser l'inflation. Ce modèle inspire [Rosspopoff \(2013\)](#) pour son modèle d'inflation en univers monde réel, et sert de base à ce mémoire pour proposer un des modèles d'inflation.

Pour plus de détails sur les GSE de référence dans la littérature, un tableau de synthèse des principaux modèles existants est disponible dans [Frayssé \(2012\)](#). Une présentation des principaux GSE de référence peut également être trouvée dans le mémoire de [Rosspopoff \(2013\)](#) ou dans [Ahlgrim et al. \(2005\)](#), qui présente une analyse complète des travaux existants concernant les générateurs de scénarios économiques.

Finalement, au lieu de considérer l'inflation comme la source de l'incertitude en la modélisant directement, la deuxième grande approche pour modéliser l'inflation consiste à exprimer le taux d'inflation via la relation de Fisher, qui représente la différence entre le taux d'intérêt nominal et le taux

d'intérêt réel. Cette méthode permet d'analyser les interactions entre les taux d'intérêt et l'inflation, comme présenté dans la partie 1.1.5. Par exemple, [Rajasundram \(2010\)](#) utilise cette méthode pour modéliser l'inflation dans son générateur de scénarios économiques, tandis que [Fabre \(2020\)](#) l'applique à la modélisation d'obligations indexées sur l'inflation.

Modèle de Vasicek

Le premier modèle d'inflation est le modèle de Vasicek. C'est un modèle simple à utiliser, calibrer et comprendre. Il est également couramment utilisé pour modéliser l'inflation. En effet, le modèle de Vasicek suppose que les taux suivent un processus de retour à la moyenne, ce qui est cohérent avec la politique de la BCE en matière d'inflation (voir section 1.1.3).

Les paramètres estimés par la méthode des MCO pour le premier modèle d'inflation sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Paramètre	
$\mu^{(1)}$	2,27 %
$\kappa^{(1)}$	1,75 %
$\sigma^{(1)}$	0,34 %

TABLE 3.5 – Valeurs des paramètres du modèle Vasicek d'inflation

Les paramètres estimés semblent cohérents avec l'historique et les différentes politiques menées par la BCE en matière d'inflation. Le paramètre de moyenne à long terme s'établit à 2,27 %, ce qui est proche de l'objectif de 2 % fixé par la BCE. Cette cohérence est encore plus marquée lorsque l'on exclut le dernier pic d'inflation, auquel cas la moyenne à long terme s'établit à 1,76 %.

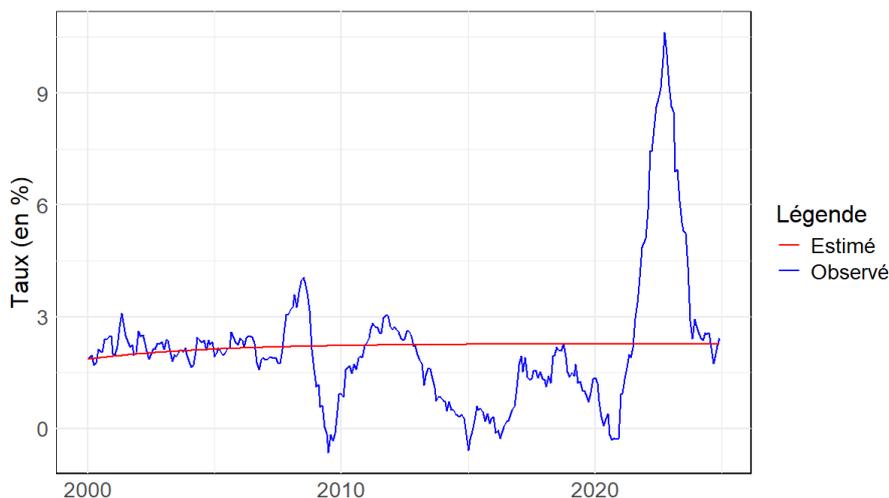


FIGURE 3.11 – Trajectoire déterministe de l'inflation estimée par un modèle de Vasicek

La trajectoire (figure 3.11) du modèle de Vasicek pour l'inflation montre qu'il n'est pas adapté pour modéliser les différentes périodes de crise. En effet, ce modèle ne prend en compte ces variations que par le biais de la volatilité, sans différencier les périodes d'inflation et de déflation historiques. Cela peut rendre difficile la prédiction d'une forte inflation, comme celle observée récemment en Europe.

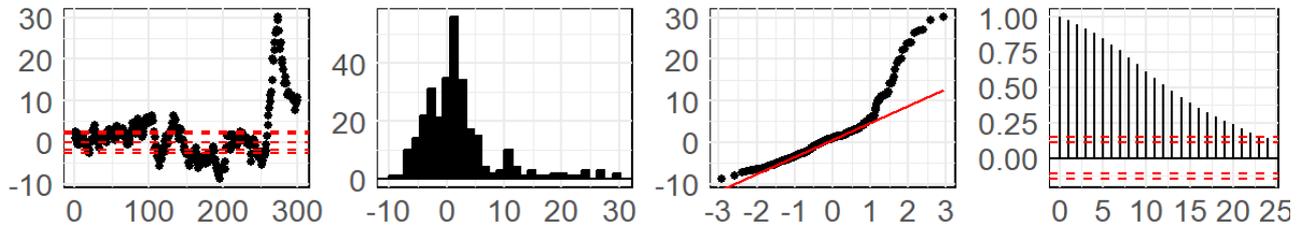


FIGURE 3.12 – Analyse des résidus du modèle de Vasicek. Le premier graphique correspond au graphique des résidus, avec des lignes horizontales à $0, \pm 1,96$ (intervalle de confiance à 95 %) et à $\pm 2,58$ (intervalle de confiance à 99 %). Le deuxième graphique présente l’histogramme des résidus. Le troisième graphique montre le diagramme quantile-quantile des résidus, avec les quantiles théoriques sur l’axe horizontal. Le dernier graphique illustre la fonction d’autocorrélation des résidus (ACF).

L’analyse des résidus du modèle de Vasicek (figure 3.12), soutenue par la tendance déterministe, valide les observations précédentes. Le modèle de Vasicek ne capture pas les valeurs extrêmes, limitant ainsi sa capacité à modéliser l’inflation en période de crise. De nombreux résidus dépassent les intervalles de confiance, ce qui indique que le modèle a du mal à capturer la volatilité réelle de l’inflation. L’histogramme révèle une asymétrie, suggérant une mauvaise adéquation à la distribution réelle des données. Le diagramme Q-Q montre une queue lourde à droite, indiquant une sous-estimation du risque associé à ces valeurs. La déviation par rapport à la normalité, confirmée par le test de Jarque-Bera ($p\text{-value} < 2,2 \times 10^{-14}$), suggère que le modèle ne représente pas correctement la distribution empirique de l’inflation. Enfin, l’ ACF des résidus montre une autocorrélation persistante, ce qui signifie que le modèle ne saisit pas correctement la dynamique temporelle des données.

Normal-HMM

Le second modèle d’inflation est le *Normal-HMM*, un modèle de Markov caché dont les observations suivent une distribution normale (voir section 2.1.2).

Autrement dit, dans un *Normal-HMM* à m états, les observations à chaque pas sont supposées suivre une distribution normale. Cela signifie que les données observées sont générées à partir d’une distribution normale dont les paramètres varient selon l’état de l’inflation.

La dynamique d’inflation, pour $j = 1, 2, \dots, m$,

$$i_t^{(2)} | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N} \left(\mu_j^{(2)}, \sigma_j^{(2)2} \right), \quad (3.1)$$

où :

- $\mu_j^{(2)}$ correspond à la moyenne de la distribution normale associé à l’état j ,
- $\sigma_j^{(2)}$ correspond à l’écart-type de la distribution normale associé à l’état j .

Une des premières difficultés consiste à choisir quel *Normal-HMM* utiliser, c’est-à-dire le nombre d’états du *HMM*, en tenant compte du nombre de paramètres et de l’ajustement aux données qu’il offre. Les critères AIC et BIC permettent de faire ce choix, tandis que les mesures MAE et MSE servent à appuyer ou à réfuter ce choix (voir section 2.2.4).

En utilisant un algorithme de Baum-Welch pour estimer les différents paramètres (moyenne, écart-type, matrice de probabilité de transition et distribution initiale) des *Normal-HMM*, les critères des différents modèles, ainsi que les mesures, sont présentés respectivement dans les figures 3.13 et 3.14.

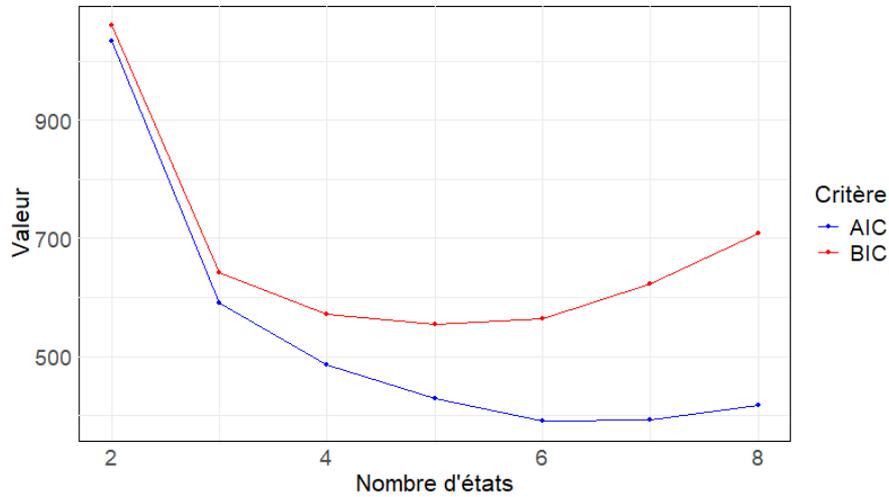


FIGURE 3.13 – Sélection du *Normal-HMM* avec le *AIC* et le *BIC*

Il apparaît clairement que l'*AIC* sélectionne le *Normal-HMM* à 6 états, tandis que le *BIC* privilégie celui à 5 états. Bien que le modèle à 5 états présente le BIC le plus bas (554), le modèle à 6 états reste convenable avec un BIC relativement proche (563), tout en offrant une meilleure capacité d'ajustement selon l'*AIC*.

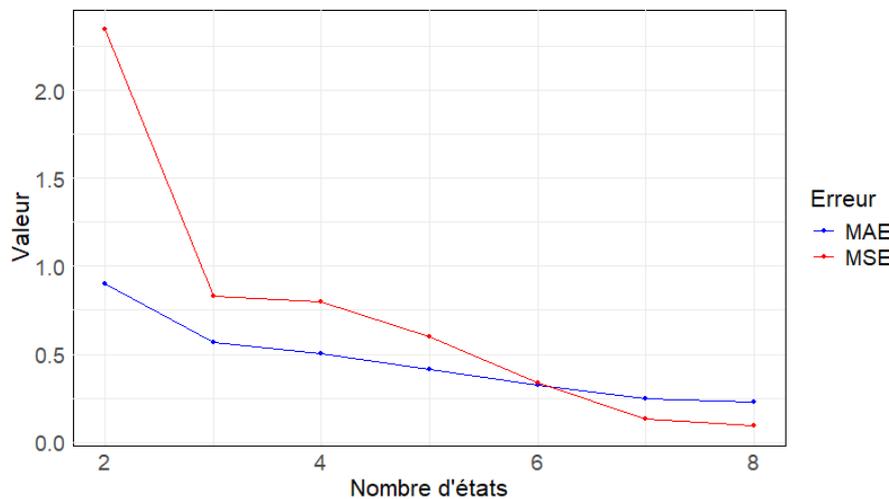


FIGURE 3.14 – Evaluation des *Normal-HMM* avec les mesures *MAE* et *MSE*

De plus, le graphique des mesures indique que les modèles jusqu'à 7 états montrent une réduction continue de la *MAE* et de la *MSE*, suivie d'une stagnation, ce qui suggère que l'ajout d'états (jusqu'à 7, donc 6 inclus) améliore la performance en termes de précision des prédictions.

C'est pourquoi, pour la suite de ce mémoire, le *Normal-HMM* sélectionné est celui à **6 états**.

Les paramètres estimés par l'algorithme de Baum-Welch pour un *Normal-HMM* (voir section 2.2.2)

à 6 états sont présentés dans le tableau 3.6 et dans la figure 3.7 :

Paramètre	Etat 1	Etat 2	Etat 3	Etat 4	Etat 5	Etat 6
$\mu^{(2)}$	0,20 %	1,32 %	1,97 %	2,48 %	3,47 %	7,26 %
$\sigma^{(2)}$	0,37 %	0,30 %	0,16 %	0,23 %	0,37 %	1,89 %

TABLE 3.6 – Valeurs des paramètres du *Normal-HMM* d'inflation à 6 états

Les paramètres estimés reflètent bien l'historique de l'inflation étudié :

- L'état 3 représente un **état stable de l'inflation**, avec une moyenne proche de 2 %, en ligne avec l'objectif à moyen terme de la BCE. Cet état présente également la plus faible volatilité parmi les 6 états, tandis que la volatilité augmente à mesure que l'on s'éloigne de cet état, que ce soit en direction de l'inflation (états supérieurs) ou de la déflation (états inférieurs),
- Les états 1 et 5 correspondent respectivement à des **états de faible inflation (ou déflation) et d'inflation**,
- Les états 2 et 4 sont des **états de transition** entre l'état stable (état 3) et les états de crise (états 1 et 5).
- L'état 6, avec une inflation proche de 7 % et une volatilité élevée de près de 2 %, est identifié comme un **état de forte inflation**, reflétant le pic d'inflation observé dans la zone euro.

$$\Gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0,94} & \mathbf{0,06} & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ \mathbf{0,05} & \mathbf{0,89} & \mathbf{0,06} & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & \mathbf{0,05} & \mathbf{0,81} & \mathbf{0,13} & \mathbf{0,01} & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & \mathbf{0,10} & \mathbf{0,89} & \mathbf{0,01} & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & \mathbf{0,07} & 0,00 & \mathbf{0,86} & \mathbf{0,07} \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & \mathbf{0,04} & 0,00 & \mathbf{0,96} \end{pmatrix}$$

$$\delta^{(2)} = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

TABLE 3.7 – Matrice de probabilité de transition $\Gamma^{(2)}$ et état initial $\delta^{(2)}$ pour le *Normal-HMM* d'inflation à 6 états

Ce modèle présente cependant **quelques limites**. Dans l'état 5, identifié comme l'état d'inflation, la probabilité de transition vers l'état 4 (état de transition) est proche de zéro. En période d'inflation, il est logique de penser que l'économie peut passer par une phase de transition avant de revenir à une situation stable. Cependant, ce n'est pas le cas ici : l'économie passe directement d'une phase d'inflation à une phase stable. De même, pour l'état de forte inflation, la probabilité de passer à l'état d'inflation est également proche de zéro. Cette situation s'explique par l'historique, où les périodes d'inflation et de forte inflation sont représentées chacune par un seul pic (voir graphe 3.15).

A partir de ces paramètres, l'algorithme de Viterbi détermine la séquence d'états la plus probable (décodage global) sur l'historique de l'inflation (voir l'annexe B.2 pour la différence entre le décodage local et le décodage global). Les résultats sont présentés dans la figure 3.15. Le décodage global est satisfaisant, les différentes périodes de chaque état semblent être en concordance.

La trajectoire déterministe du *Normal-HMM*, obtenue en utilisant la séquence d'états la plus probable ainsi que les paramètres conditionnels aux différents états, est présentée dans la figure 3.16.



FIGURE 3.15 – Décodage de la séquence d'états la plus probable d'un *Normal-HMM* à 6 états à l'aide de l'algorithme de Viterbi

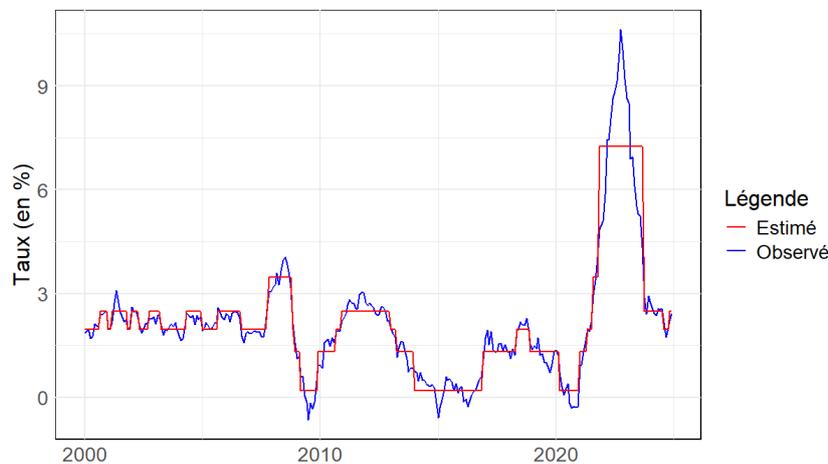


FIGURE 3.16 – Trajectoire déterministe de l'inflation estimée par un *Normal-HMM*

La prise en compte de différents états permet au modèle de bien fitter les diverses crises qui se sont produites pendant la période considérée. La tendance déterministe semble bien suivre l'historique, même si le dernier pic semble sous-estimé.

Il est maintenant pertinent d'étudier les résidus ainsi que de vérifier la validité des hypothèses sous-jacentes du *Normal-HMM*. Les résultats de l'analyse des résidus sont présentés dans la figure 3.23.

L'analyse des résidus du *Normal-HMM*, tant au niveau global que pour chacun des six états, démontre une adéquation satisfaisante aux données. Les résidus du modèle global sont principalement contenus dans les intervalles de confiance, avec une distribution semblable à une distribution gaussienne centrée sur zéro. Le diagramme Q-Q montre que les résidus suivent de près la distribution théorique, ce qui est confirmé par le test de Jarque-Bera, indiquant que l'hypothèse de normalité n'est pas rejetée. L'*ACF* des résidus indique une absence d'autocorrélation significative, renforçant la validité du modèle. Pour les états individuels, malgré le nombre limité de résidus pour les états 5 et 6, l'analyse reste cohérente avec celle du modèle global. Les résidus de chaque état respectent les intervalles de confiance, les histogrammes sont centrés sur zéro, et les diagrammes Q-Q sont satisfaisants, tous

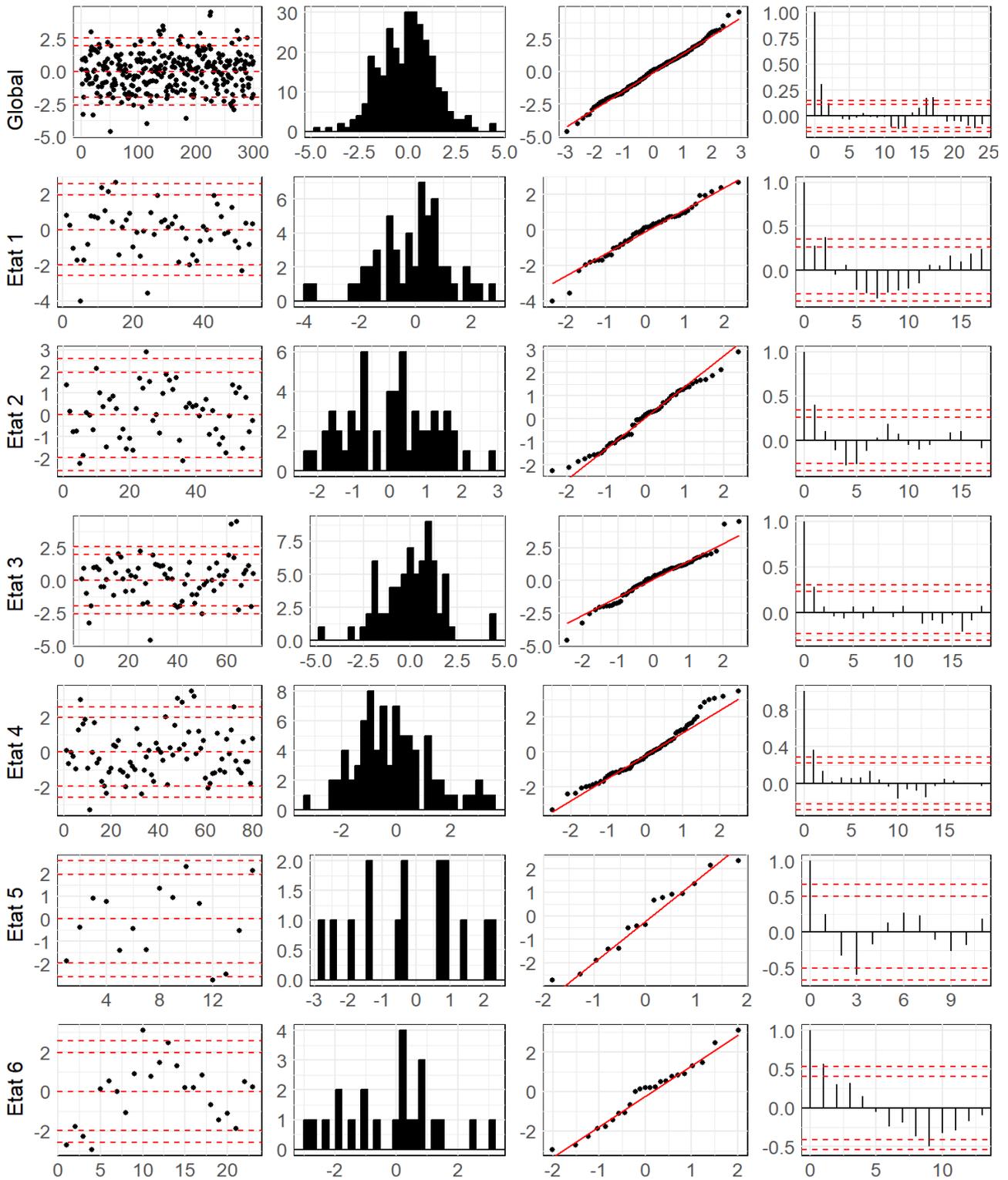


FIGURE 3.17 – Analyse des résidus du *Normal-HMM*. La ligne 1 correspond au modèle global, tandis que les lignes 2 à 7 se rapportent respectivement aux états 1 à 6 du *Normal-HMM*. La première colonne correspond au graphique des résidus, avec des lignes horizontales à 0, $\pm 1,96$ (intervalle de confiance à 95 %) et à $\pm 2,58$ (intervalle de confiance à 99 %). La deuxième colonne présente l’histogramme des résidus. La troisième colonne montre le diagramme quantile-quantile des résidus, avec les quantiles théoriques sur l’axe horizontal. La dernière colonne illustre la fonction d’autocorrélation des résidus (*ACF*).

validés par les tests de Jarque-Bera. Globalement, le Normal-HMM semble capturer la dynamique de l'inflation, offrant un ajustement acceptable, tant au niveau global qu'au niveau des états individuels.

Vasicek-HMM

Le troisième modèle d'inflation est le *Vasicek-HMM*, un modèle de Markov caché dont les observations suivent un modèle de Vasicek. Autrement dit, un *Vasicek-HMM* est un modèle hybride qui combine le modèle de Vasicek à un *HMM*. C'est un modèle où les paramètres du modèle de Vasicek dépendent d'un état caché qui évolue selon une chaîne de Markov.

Ainsi, à chaque pas de temps :

- l'inflation $i_t^{(3)}$ est décrit par un modèle de Vasicek,
- les paramètres du modèle de Vasicek changent en fonction de l'état caché à l'instant t (issu du modèle *HMM*).

La dynamique d'inflation pour $j = 1, 2, \dots, m$,

$$di_t^{(3)} = \kappa_j^{(3)} \left(\mu_j^{(3)} - i_t^{(3)} \right) + \sigma_j^{(3)} dW_{i,t}, \quad (3.2)$$

où :

- $\mu_j^{(3)}$ correspond à la moyenne long terme de l'inflation associé à l'état j ,
- $\kappa_j^{(3)}$ correspond au coefficient de retour à la moyenne de l'inflation associé à l'état j ,
- $\sigma_j^{(3)}$ correspond à la volatilité de l'inflation associé à l'état j ,
- $dW_{i,t}$ correspond à processus de Wiener associé à l'inflation.

De la même manière que pour le *Normal-HMM*, la sélection du nombre d'états pour le *Vasicek-HMM* s'effectue à l'aide des critères et mesures décrits à la section 2.2.4. Les critères et mesures des différents *Vasicek-HMM* sont présentés dans les figures 3.18 et 3.19

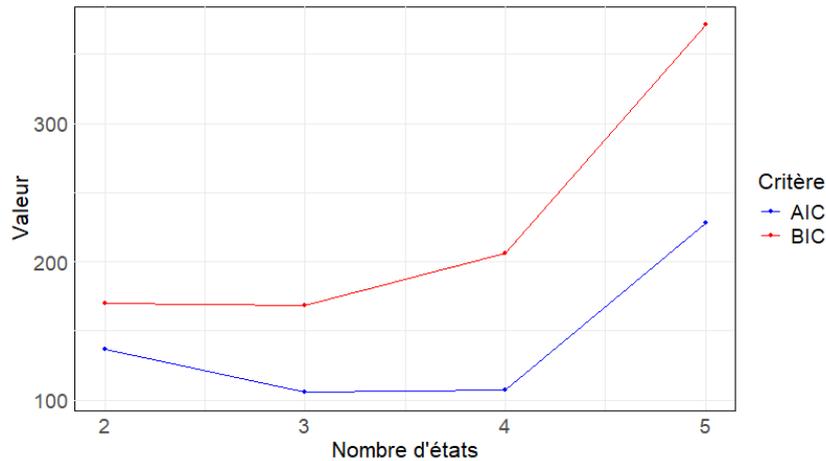
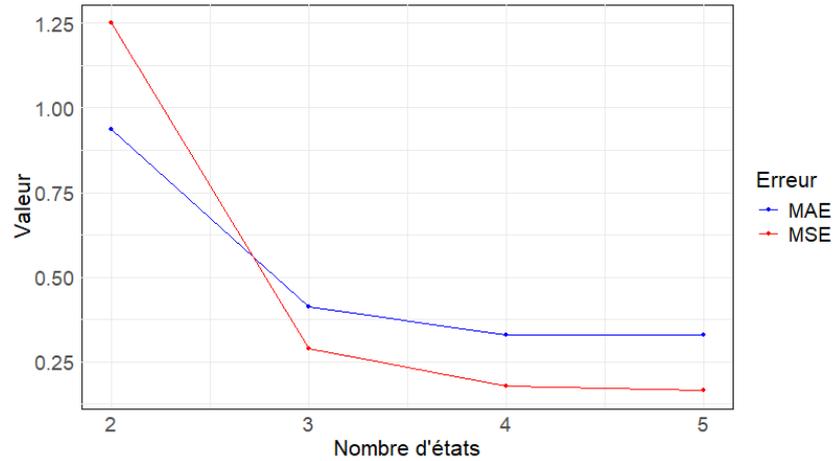


FIGURE 3.18 – Sélection du *Vasicek-HMM* avec le *AIC* et le *BIC*

FIGURE 3.19 – Evaluation des *Vasicek-HMM* avec les mesures *MAE* et *MSE*

D'après les graphes de l'*AIC* et du *BIC*, le modèle sélectionné est le *Vasicek-HMM* à 3 états ; il présente les valeurs des critères les plus faibles parmi tous les modèles comparés.

Les paramètres estimés par l'algorithme de Baum-Welch pour un *Vasicek-HMM* (voir section 2.2.2) à 3 états sont présentés dans le tableau 3.8 et la figure 3.20 :

Paramètre	Etat 1	Etat 2	Etat 3
$\mu^{(3)}$	-0,18 %	2,26 %	123,80 %
$\kappa^{(3)}$	22,52 %	7.83 %	4.04 %
$\sigma^{(3)}$	0,27 %	0,24 %	0,40 %

TABLE 3.8 – Valeurs des paramètres du *Vasicek-HMM* d'inflation à 3 états

$$\mathbf{\Gamma}^{(3)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0,86} & \mathbf{0,11} & \mathbf{0,03} \\ \mathbf{0,03} & \mathbf{0,97} & \mathbf{0,00} \\ \mathbf{0,00} & \mathbf{0,06} & \mathbf{0,94} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\delta}^{(3)} = (0 \quad 1 \quad 0)$$

FIGURE 3.20 – Matrice de probabilité de transition $\mathbf{\Gamma}$ et état initial $\boldsymbol{\delta}$ pour le *Vasicek-HMM* à 3 états

À l'image du *Normal-HMM*, les paramètres estimés permettent de distinguer différents états historiques d'inflation.

- L'**état 2**, similaire à l'état 3 du *Normal-HMM*, représente un **état stable d'inflation**, avec une moyenne proche de 2 % et la volatilité la plus faible parmi les différents états.
- L'**état 1** correspond à un **état de faible inflation (ou déflation)**, caractérisé par un fort coefficient de retour à la moyenne, reflétant l'historique de cet état.
- L'**état 3** reflète un **état de forte inflation**. La moyenne à long terme élevée résulte du fait que cet état est marqué par un pic extrême sur une courte période, sans une moyenne à long terme évidente ; le modèle ajuste donc cette valeur pour mieux correspondre à cette dynamique.

Ce modèle présente également **quelques limites**, analogues à celles du *Normal-HMM*. En effet, la probabilité de transition de l'état 2 à l'état 3 est proche de zéro, ce qui s'explique par l'historique de l'inflation : la seule occurrence de passage à l'état de forte inflation se produit durant le pic d'inflation, et ce passage se fait via l'état 1 (voir figure 3.21). Or, il est difficile de concevoir qu'un état de forte inflation puisse survenir uniquement à partir d'un état de faible inflation.



FIGURE 3.21 – Décodage de la séquence d'états la plus probable d'un *Vasicek-HMM* à 3 états à l'aide de l'algorithme de Viterbi

La prise en compte et la reproduction de cette crise peuvent représenter un biais, car elle est le résultat d'une désinflation suite à une crise pandémique, suivie directement d'une forte inflation due à une guerre.

Néanmoins, dans la suite de ce mémoire, c'est le *Vasicek-HMM* à 3 états qui est sélectionné, car, étant donné qu'il s'agit de la seule crise de cette ampleur, elle est conservée dans l'historique. De plus, la probabilité de transition vers l'état de forte inflation est incluse dans la probabilité de transition de l'état 1 vers l'état 3. En effet, il est possible de passer d'un état de faible inflation à un état de forte inflation, comme le démontre le décodage effectué par l'algorithme de Viterbi sur l'historique de l'inflation européenne, présenté dans la figure 3.21.

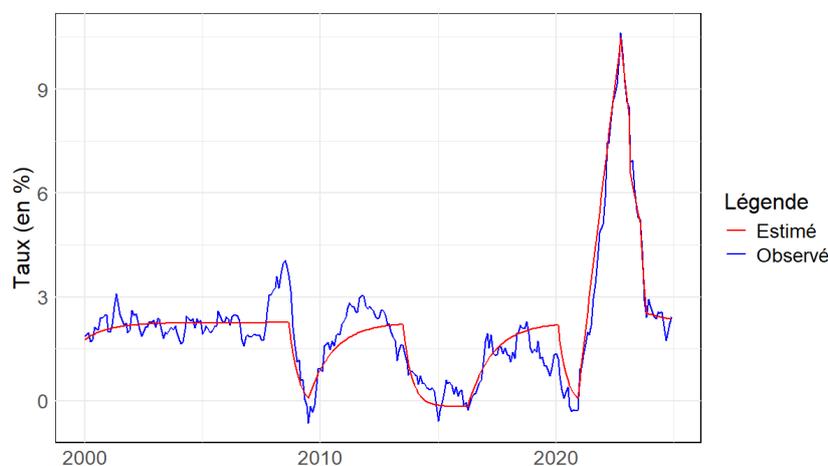


FIGURE 3.22 – Trajectoire déterministe de l'inflation estimée par un *Vasicek-HMM*

Avec ces paramètres et le décodage de la séquence d'états la plus probable (décodage global) effectué par l'algorithme de Viterbi (voir annexe B.2 pour la différence entre le décodage global et le décodage local du *Vasicek-HMM*), la trajectoire déterministe du troisième modèle d'inflation est présenté dans la figure 3.22, ci-dessus.

La trajectoire déterministe du *Vasicek-HMM* s'ajuste bien à l'historique de l'inflation. Elle illustre également pourquoi le coefficient de retour à la moyenne est élevé pour l'état 1, qui converge rapidement vers sa moyenne à long terme pour s'y maintenir, et pourquoi la moyenne à long terme de l'état 3 est si élevée, afin de mieux s'ajuster au pic d'inflation aiguë.

Pour les mêmes raisons que pour le *Normal-HMM*, il est pertinent de vérifier les hypothèses et l'adéquation du modèle dans le cadre des *HMM*. Pour cela, les graphiques liés à l'analyse des résidus du modèle sont présentés dans la figure 3.23.

L'analyse des résidus du *Vasicek-HMM* montre une adéquation globalement satisfaisante aux données, similaire à celle du *Normal-HMM*. Les résidus du modèle global et des états valident le test de Jarque-Bera, acceptant l'hypothèse de normalité. Bien que le diagramme Q-Q global soit satisfaisant, les diagrammes Q-Q des états montrent des résidus légèrement plus écartés, bien qu'ils restent proches des quantiles théoriques. Les histogrammes présentent des valeurs plus concentrées autour de la moyenne, mais restent acceptables. Bien que l'*ACF* capture plus de structures temporelles à court terme que le *Normal-HMM*, cela reste satisfaisant et n'indique pas une autocorrélation significative à long terme.

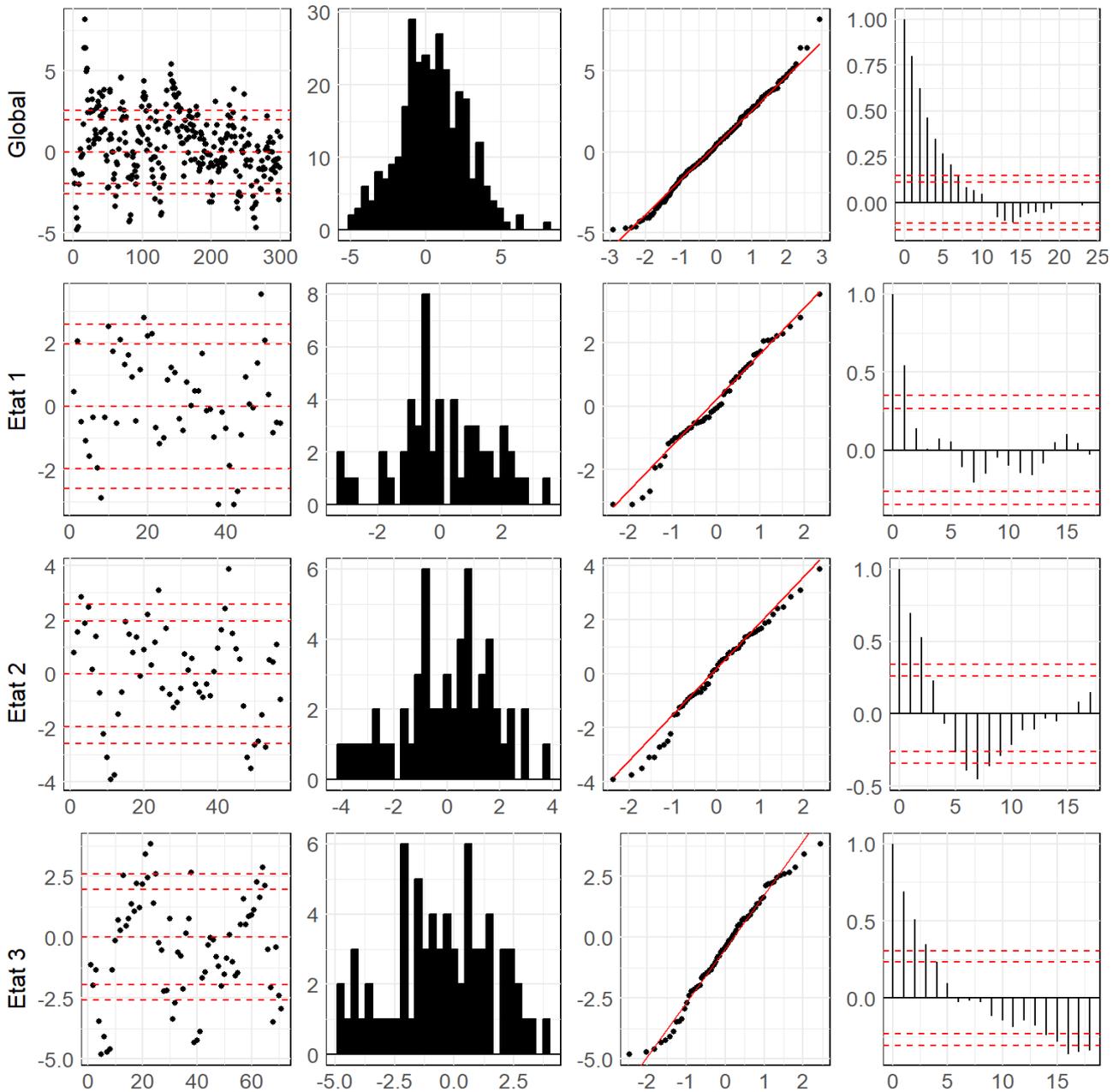


FIGURE 3.23 – Analyse des résidus du *Vasicek-HMM*. La ligne 1 correspond au modèle global, tandis que les lignes 2 à 4 se rapportent respectivement aux états 2, 3 et 4 du *Vasicek-HMM*. La première colonne correspond au graphique des résidus, avec des lignes horizontales à 0, $\pm 1,96$ (intervalle de confiance à 95 %) et à $\pm 2,58$ (intervalle de confiance à 99 %). La deuxième colonne présente l’histogramme des résidus. La troisième colonne montre le diagramme quantile-quantile des résidus, avec les quantiles théoriques sur l’axe horizontal. La dernière colonne illustre la fonction d’autocorrélation des résidus.

Chapitre 4

Comparaison des modèles

Ce chapitre aborde la structure de dépendance du modèle, la méthode de projection, ainsi qu'une validation croisée des modèles d'inflation pour tester et comparer la robustesse de ces derniers.

4.1 Projection des modèles d'inflation

Dans la section suivante, l'étude se concentre sur les différentes structures de dépendance modélisées dans ce mémoire ainsi que sur la projection des actifs.

La méthodologie de projection des actifs repose sur plusieurs principes.

- Les projections sont basées sur la dynamique propre à chaque actif, introduite dans la section 3.3, et tiennent compte de la corrélation entre les bruits blancs étudiée précédemment.
- Chaque actif est projeté selon trois scénarios distincts, correspondant aux trois différentes structures de dépendance des modèles d'inflation.
- Pour chaque actif et chaque structure de dépendance, 20000 projections sont réalisées sur un horizon mensuel de 30 ans (ce qui donne 4×3 ensembles de $20000 \times 30 \times 12$ bruits corrélés).

4.1.1 Structure de dépendance

Etant donné l'utilisation de trois modèles d'inflation, trois structures de dépendance distinctes doivent être présentées, dont la complexité varie en fonction du modèle.

- Pour le modèle de Vasicek, une structure de dépendance simple est utilisée. La matrice de corrélation linéaire est calculée à partir des résidus du modèle, puis la décomposition de Cholesky de cette matrice est appliquée aux bruits blancs afin d'obtenir des bruits corrélés.
- Pour les **modèles à changements d'états**, une structure de dépendance plus complexe est introduite. Une **matrice de corrélation** est calculée sur les résidus **pour chaque état du modèle**. Pour chaque simulation, une séquence d'états est générée selon la matrice de probabilité de transition. A chaque pas de temps, en fonction de l'état correspondant, le bruit blanc est multiplié par la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation spécifique à cet état.

Pour ce faire, il est nécessaire d'estimer les coefficients de corrélation linéaire entre chacun des

actifs. L'estimateur du coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre les variables X et Y est donné par :

$$\hat{r} = \frac{\hat{\sigma}_{XY}}{\sqrt{\hat{\sigma}_X^2 \hat{\sigma}_Y^2}},$$

avec

$$\hat{\sigma}_{XY} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

l'estimateur corrigé de la covariance entre X et Y , et

$$\hat{\sigma}_X = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_Y = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$$

les estimateurs corrigés de l'écart-type des variables X et Y .

La matrice de corrélation linéaire estimée sur les résidus du modèle d'inflation de Vasicek est donnée dans la figure 4.1.

	Inflation	Action	Immobilier	Taux long	Spread
Inflation	1	-0.056	-0.21	0.243	-0.23
Action	-0.056	1	0.504	-0.065	0.11
Immobilier	-0.21	0.504	1	-0.039	0.179
Taux long	0.243	-0.065	-0.039	1	0.048
Spread	-0.23	0.11	0.179	0.048	1

FIGURE 4.1 – Matrice de corrélation des résidus pour le modèle Vasicek

Sur l'historique étudié, seul le lien de dépendance entre les actions et l'immobilier est remarquable, ce qui est cohérent avec ce qui est observé dans les analyses de marché, où ces deux actifs montrent une tendance à évoluer de manière relativement synchronisée.

Les matrices de corrélation linéaires estimées sur les résidus des différents états du *Normal-HMM* d'inflation sont données ci-dessous :

Les matrices de probabilité de transition montrent des structures de dépendance remarquables entre les actifs :

- Une **corrélacion notable entre les actions et l'immobilier** est présente dans tous les états, ce qui est cohérent avec la corrélation historique observée pour le modèle d'inflation de Vasicek.

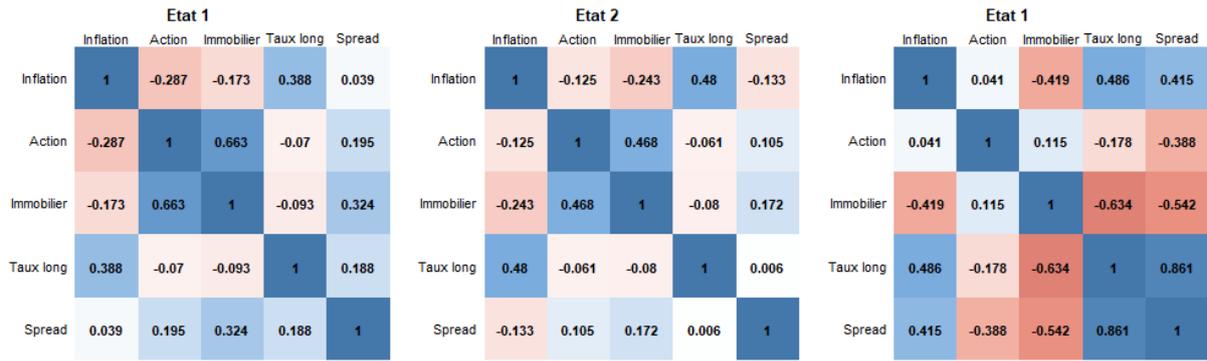
FIGURE 4.2 – Matrices de corrélation des résidus pour les 6 états du *Normal-HMM*

- Pour les états 1 et 2, où l'inflation est faible, la forte **corrélation entre le *spread* et les taux longs** est cohérente avec l'idée que, dans des environnements de faible inflation, les marchés sont moins volatils et reflètent plus fidèlement les tendances à long terme, comme le suggèrent les taux longs.
- Pour les états 5 et 6, où l'inflation est élevée, les matrices de corrélation affichent une **corrélation négative marquée entre le *spread* et les taux longs**, ainsi que des **corrélations significatives entre le *spread*, les actions et l'immobilier**. Cependant, cette dernière conclusion doit être interprétée avec prudence en raison du nombre limité de données disponibles pour ces états, respectivement 15 et 23 observations.

Les matrices de corrélation linéaires estimées sur les résidus des différents états du *Vasicek-HMM* d'inflation sont données ci-dessous :

De la même manière que pour le *Normal-HMM*, les matrices de corrélations présentent des structures de dépendance remarquables :

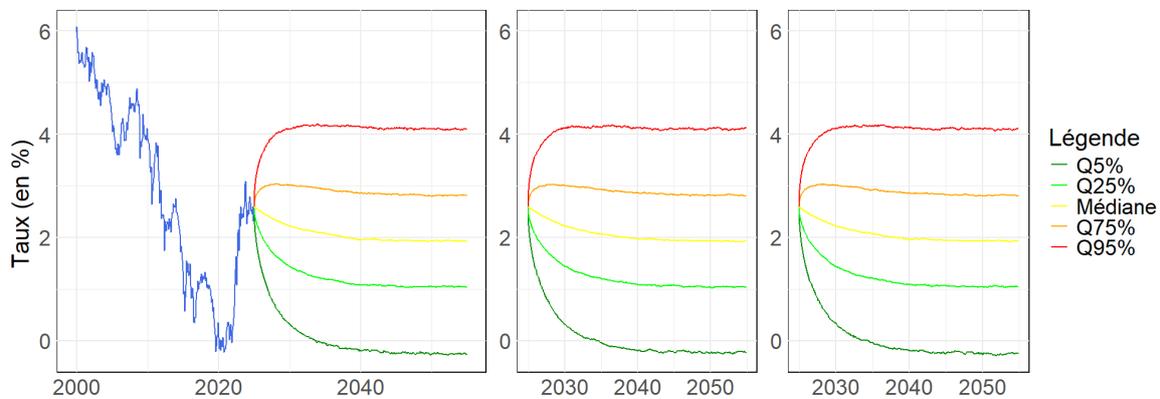
- Une **corrélation significative entre les actions et l'immobilier** est observée dans les deux premiers états.
- Des corrélations notables entre plusieurs actifs sont présentes dans l'état 3 ; toutefois, ces résultats doivent être interprétés avec prudence en raison du nombre limité d'observations (23) pour cet état.

FIGURE 4.3 – Matrices de corrélation des résidus pour les 3 états du *Vasicek-HMM*

4.1.2 Projection des composantes fixes

Dans cette section, la projection des composantes fixes, à savoir le modèle de taux, les actions et l'immobilier, est examinée. Il convient de noter que, bien que les modèles puissent être optimisés davantage, ce n'est pas l'objet de ce mémoire. L'objectif est de fournir un cadre interprétable et cohérent pour comparer les différents modèles d'inflation.

Taux d'intérêt nominaux

FIGURE 4.4 – Projection à 30 ans du taux long, selon les bruits corrélés issus respectivement du modèle Vasicek, *Normal-HMM* et *Vasicek-HMM*

Pour ce qui est des projections à 30 ans des taux longs, celles-ci suivent la tendance déterministe du modèle. Cette approche ne prend pas en compte le fait que les valeurs élevées des dernières années pourraient être exceptionnelles. Néanmoins, au regard de la tendance générale de la courbe, les projections semblent cohérentes avec cette tendance.

Pour ce qui est de la projection à 30 ans du *spread*, la valeur de départ de la projection, étant particulièrement basse, donne l'impression d'introduire un biais et de donner moins de poids aux valeurs extrêmes élevées. Les quantiles moyens semblent également trop resserrés par rapport à la tendance historique.

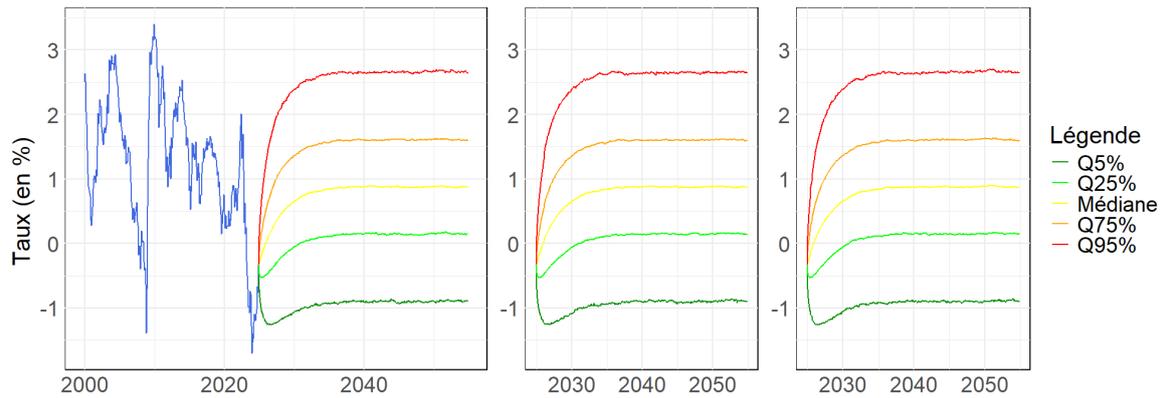


FIGURE 4.5 – Projection à 30 ans du *spread* taux court / taux long, selon les bruits corrélés issus respectivement du modèle Vasicek, *Normal-HMM* et *Vasicek-HMM*

Action et immobilier

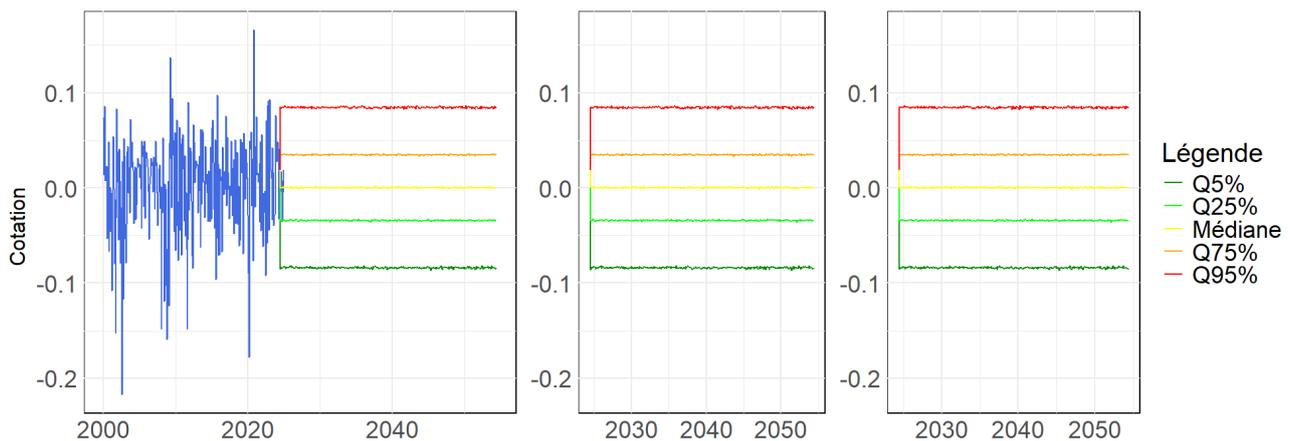


FIGURE 4.6 – Projection à 30 ans des log-rendements de l'action, selon les bruits corrélés issus respectivement du modèle Vasicek, *Normal-HMM* et *Vasicek-HMM*

En ce qui concerne la projection, les modèles actions et immobilier montrent une tendance à sous-estimer les événements extrêmes, ce qui vient appuyer les hypothèses formulées précédemment à partir des diagrammes Q-Q.

Néanmoins, le premier quartile, le troisième quartile ainsi que la moyenne des projections pour ces deux actifs semblent cohérents avec la dynamique observée des log-rendements et des cours des actions et de l'immobilier. Cela est visible dans les figures 4.6 et 4.7 pour les log-rendements.

4.1.3 Projection des modèles d'inflation

Dans cette section, la projection de la composante variable du modèle est étudiée.

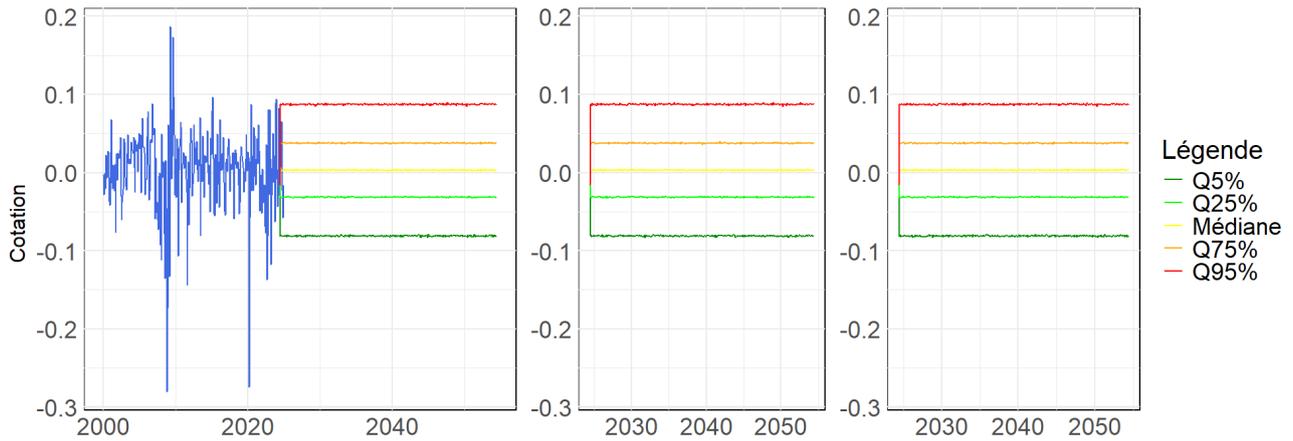


FIGURE 4.7 – Projection à 30 ans des log-rendements de l’immobilier, selon les bruits corrélés issus respectivement du modèle Vasicek, *Normal-HMM* et *Vasicek-HMM*

Modèle de Vasicek

Ci-dessous, la projection de l’inflation sur un horizon de 30 ans, selon le modèle de Vasicek :

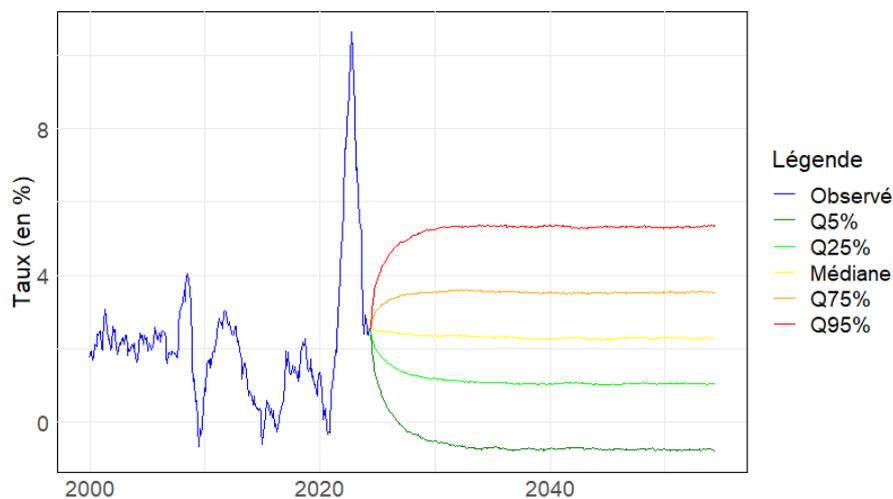


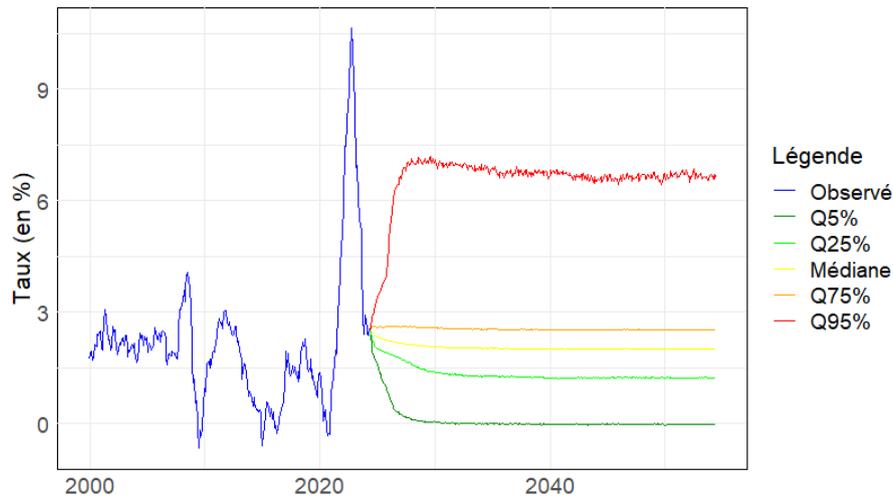
FIGURE 4.8 – Projection à 30 ans de l’inflation avec le modèle Vasicek

Le modèle semble simplement suivre la tendance long-terme historique de la courbe d’inflation. Toutefois, il sous-estime les scénarios défavorables en cas de hausse, ce qui est en accord avec les observations faites précédemment lors des tests d’adéquation.

Normal-HMM

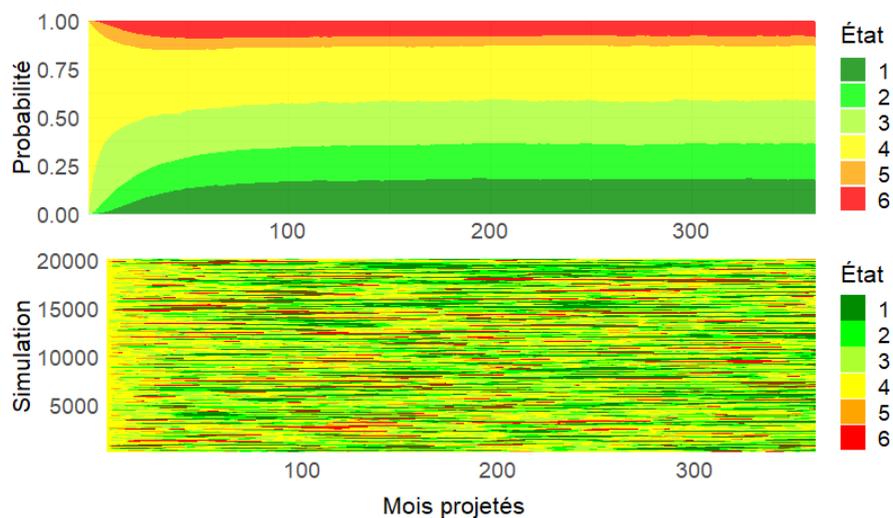
Ci-dessous, la projection de l’inflation sur un horizon de 30 ans, selon le modèle de *Normal-HMM* :

Les projections d’inflation obtenues avec le modèle *Normal-HMM* apparaissent satisfaisantes. Les valeurs centrales de ces projections sont resserrées par rapport aux quantiles extrêmes et sont en

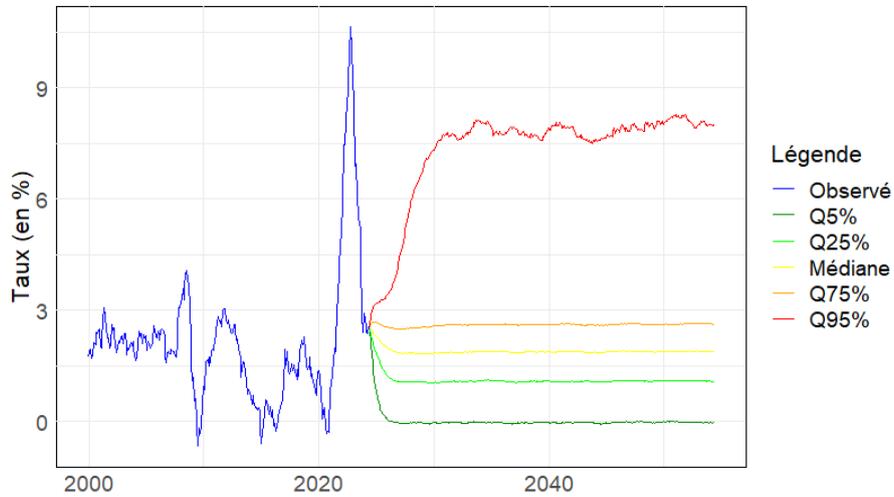
FIGURE 4.9 – Projection à 30 ans de l'inflation avec le *Normal-HMM*

accord avec les tendances observées dans les données d'inflation réelles. Le quantile à 95 % se détache davantage que le quantile à 5 % et semble beaucoup plus volatil que les autres projections, ce qui s'explique par la moyenne élevée (7,26 %) et la forte volatilité (1,89 %) de l'état de forte inflation du *Normal-HMM*.

Au-delà des projections des valeurs d'inflation, il est également intéressant d'examiner la projection des états de l'inflation selon le *Normal-HMM* :

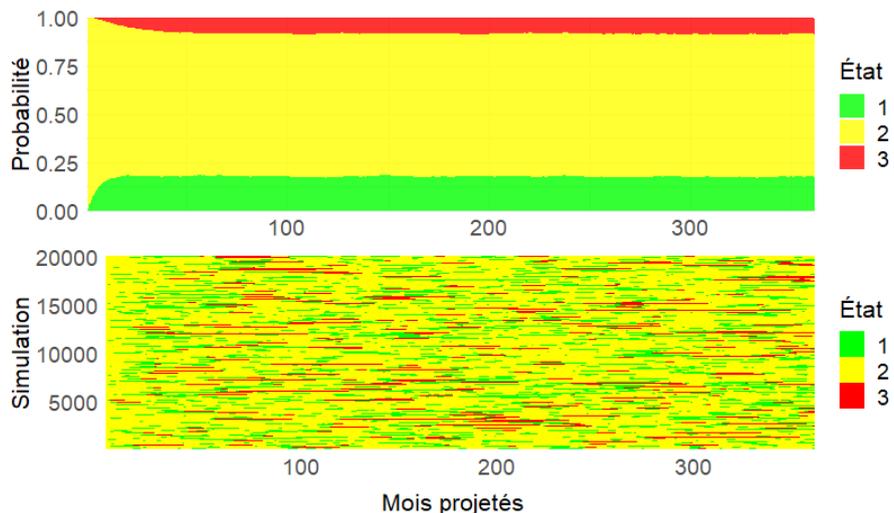
FIGURE 4.10 – Probabilité et évolution des états projetés sur 30 ans avec le *Normal-HMM*

Les états 2, 3 et 4 sont les plus fréquents, représentant facilement 70 % des états observés au fil des mois projetés. L'état de forte inflation est moins représenté que l'état de faible inflation. Étonnamment, l'état 5, associé à l'état d'inflation, est le moins représenté de tous, probablement en raison de la faible probabilité de transition pour y parvenir depuis les autres états (voir figure 3.7).

Vasicek-HMMFIGURE 4.11 – Projection à 30 ans de l'inflation avec le *Vasicek-HMM*

Les mêmes remarques faites pour le *Normal-HMM* s'appliquent au *Vasicek-HMM*. Les projections sont en accord avec la distribution réelle de l'inflation, bien que le quantile à 95 % des projections du *Vasicek-HMM* soit à la fois plus élevé et plus volatil que celui du *Normal-HMM*. Cela s'explique par le fait que la moyenne et la volatilité de l'état de forte inflation du *Vasicek-HMM* sont significativement plus élevées que celles du *Normal-HMM*.

Ci-dessous la projection des états de l'inflation, selon le *Vasicek-HMM* :

FIGURE 4.12 – Probabilité et évolution des états projetés sur 30 ans avec le *Vasicek-HMM*

Comme pour le *Normal-HMM*, l'état stable représente l'état le plus fréquemment observé parmi les différentes projections au fil des mois projetés. L'état de forte inflation est moins représenté que l'état de faible inflation, précisément parce que le seul moyen d'atteindre l'état de forte inflation est de passer d'abord par l'état de faible inflation.

4.1.4 Comparaison des projections

Il est à présent intéressant de comparer les projections de ces trois modèles en s'appuyant sur le graphe 4.13 et le tableau 4.1. Deux conclusions principales émergent :

1. Modèle de Vasicek vs *HMM*

Le modèle de Vasicek se révèle très rudimentaire par rapport aux deux *HMM*. En conséquence, les quantiles obtenus avec le modèle de Vasicek (à l'exception du quantile à 25 %), semblent dissociés de ceux des *HMM*, qui sont plus proches des quantiles de la distribution réelle. Plus précisément, le modèle de Vasicek tend à surestimer les valeurs centrales tout en sous-estimant les valeurs extrêmes, tandis que les *HMM* semblent, eux, surestimer les valeurs extrêmes hautes, bien que dans une moindre mesure.

2. *Normal-HMM* vs *Vasicek-HMM*

En ce qui concerne les projections effectuées par les deux *HMM*, les moyennes et les quantiles (sauf quantile à 95 %) sont globalement en accord. Cependant, une divergence notable apparaît au niveau du quantile à 95 %. Le quantile à 95 % du *Normal-HMM* suit une tendance plus basse que celui du *Vasicek-HMM*.

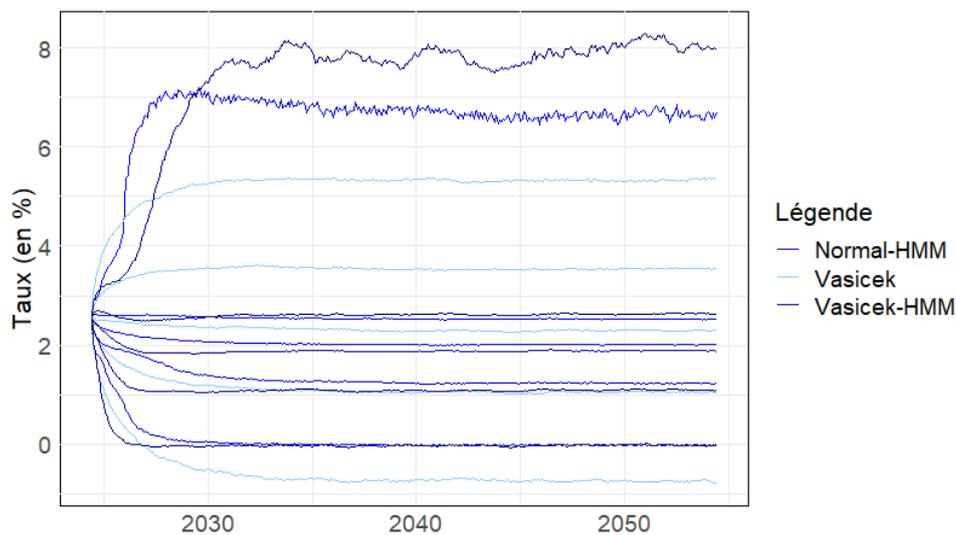


FIGURE 4.13 – Comparaison des quantiles des projections à 30 ans des différents modèles d'inflation

Modèle	Moyenne	Quantile 5 %	Quantile 25 %	Médiane	Quantile 75 %	Quantile 95 %
Données d'inflation	2,14 %	-0,11 %	1,22 %	1,98 %	2,46 %	5,94 %
Modèle de Vasicek	2,35 %	-0,41 %	1,20 %	2,35 %	3,47 %	5,14 %
<i>Normal-HMM</i>	2,20 %	0,09 %	1,29 %	2,05 %	2,53 %	6,43 %
<i>Vasicek-HMM</i>	2,39 %	0,02 %	1,12 %	1,90 %	2,58 %	7,20 %

TABLE 4.1 – Comparaison des quantiles et de la moyenne dans les projections des différents modèles d'inflation

Il s'agit maintenant de déterminer si la différence entre ces deux modèles à changements d'états se traduit par une meilleure prise en compte d'une crise financière aiguë. Cette question est explorée dans la section suivante.

4.2 Comportement des modèles d'inflation en période de crise

Dans le cadre des modèles de Markov cachés, il est intéressant d'étudier le comportement du modèle durant une période de crise. Pour cela, les modèles sont testés sur l'historique à différentes périodes : avant le pic d'inflation et après le pic d'inflation.

Les comportements des trois modèles d'inflation sont comparés. Pour cela, les paramètres des différents modèles sont utilisés pour projeter l'inflation à partir de la période étudiée. En ce qui concerne les *HMM*, les états sont projetés, puis les valeurs de l'inflation sont projetées.

4.2.1 Avant le pic d'inflation



FIGURE 4.14 – Comportement des modèles à l'approche du pic d'inflation

Pour la projection des modèles peu avant le pic d'inflation, les modèles se comportent très différemment. Le modèle de Vasicek reste trop rudimentaire, tandis que les modèles de Markov cachés se révèlent particulièrement satisfaisants dans ce contexte. En effet, pour le *Normal-HMM*, la tendance historique est contenue dans les quantiles de projections et est assez proche de la moyenne attendue. Cependant, le *Vasicek-HMM* semble offrir une meilleure adéquation dans le contexte actuel. Il prolonge la durée de la crise dans ses quantiles extrêmes, ce qui n'est pas le cas pour le *Normal-HMM*.

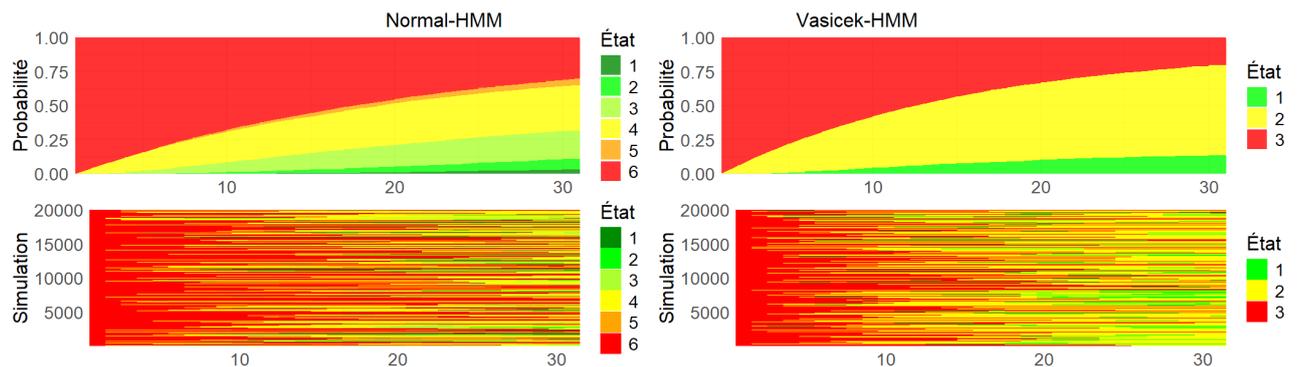


FIGURE 4.15 – Proportion des états à chaque pas de temps et évolution de chaque simulation sur la période projetée pour chacun des *HMM*, de mi-2022 (avant le pic d'inflation) à fin 2024

L'évolution de la proportion d'états de forte inflation dans les projections à chaque pas de temps est presque identique pour les deux modèles. La raison pour laquelle le *Vasicek-HMM* prolonge la crise réside dans le fait que la moyenne de l'état de forte inflation est nettement plus élevée que celle du *Normal-HMM*.

4.2.2 Après le pic d'inflation

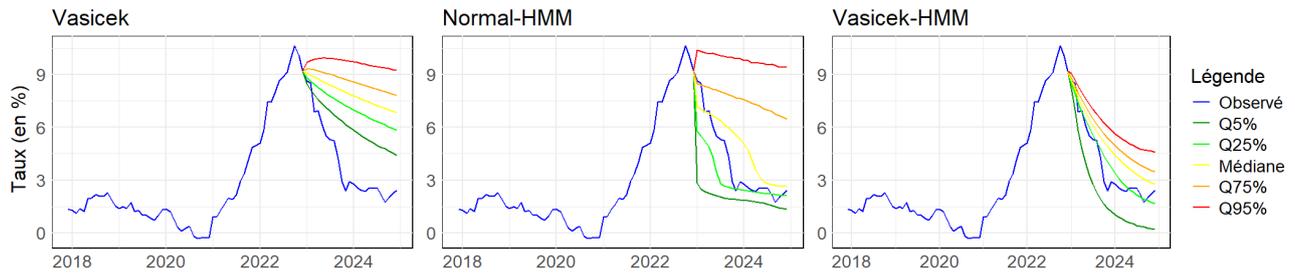


FIGURE 4.16 – Comportement des modèles après le pic d'inflation

Le modèle de Vasicek et le *Normal-HMM* présentent le même comportement avant et après le pic d'inflation. Le modèle de Vasicek est trop rudimentaire et ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants, tandis que le *Normal-HMM* prend en compte le fait que le système entre dans une période de désinflation ou que la crise peut stagner. En ce qui concerne le *Vasicek-HMM*, il suppose que, lorsque le pic est passé, l'inflation reviendra à la normale vers une moyenne à long terme, y compris dans ses quantiles extrêmes. Cela est vrai dans ce contexte, mais ce n'est pas toujours le cas, ce qui ne laisse pas suffisamment de variabilité.

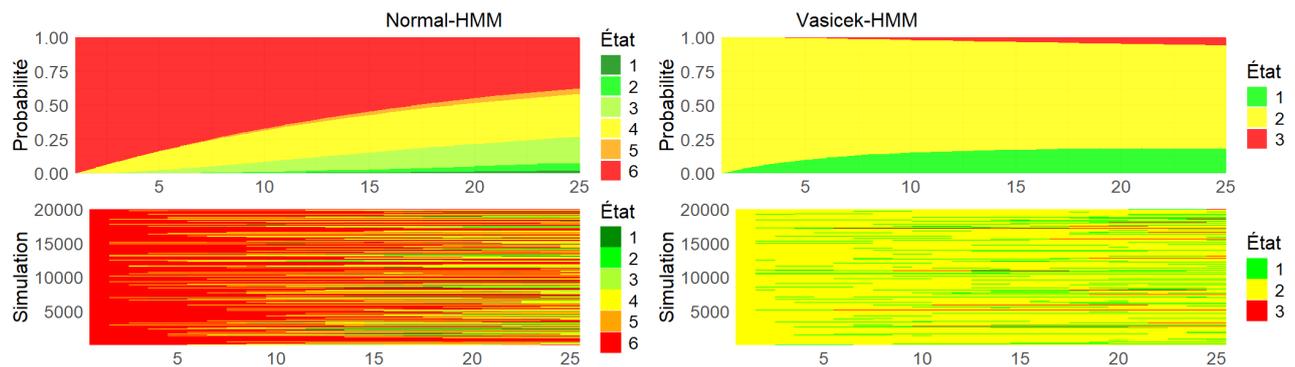


FIGURE 4.17 – Proportion des états à chaque pas de temps et évolution de chaque simulation sur la période projetée pour chacun des *HMM*, de fin 2022 (après le pic d'inflation) à fin 2024

Le fait que le *Vasicek-HMM* considère que le système va se désinflater s'explique par le fait que le modèle part du principe que l'état est initialement en période stable d'inflation, comme on peut le voir sur la figure 4.17. Il considère être dans cet état stable d'inflation, étant donné que les données historiques de la dernière période étudiée étaient en train de décroître.

4.3 Validation croisée

Maintenant que les différents modèles ont été sélectionnés et paramétrés, l'objectif de cette section est de tester et de comparer la robustesse de ces modèles. Pour ce faire, l'une des méthodes les plus utilisées est le *backtesting*. Cette méthode consiste à diviser l'historique étudié puis de réestimer les paramètres sur un ensemble d'entraînement et de prédire les données sur un ensemble de test. Pour ce faire, la méthode utilisée est celle de la validation croisée pour les séries temporelles.

4.3.1 La validation croisée pour les séries temporelles

De manière générale, la validation croisée est une méthode statistique utilisée pour évaluer la performance d'un modèle en subdivisant les données en plusieurs ensembles d'entraînement et de test, permettant ainsi d'effectuer un *backtesting* sur plusieurs périodes de l'historique.

Dans le cas des séries temporelles, la validation croisée doit respecter l'ordre chronologique des données afin d'éviter d'utiliser des informations futures lors de la prévision. Pour ce faire, plusieurs méthodes existent ; la méthode sélectionnée dans cette étude est la validation croisée où l'ensemble d'entraînement et l'ensemble de test coulissent, comme présenté dans la figure 4.18. La validation croisée utilisée dans cette étude s'inspire des travaux de [Hyndman & Athanasopoulos \(2018\)](#).

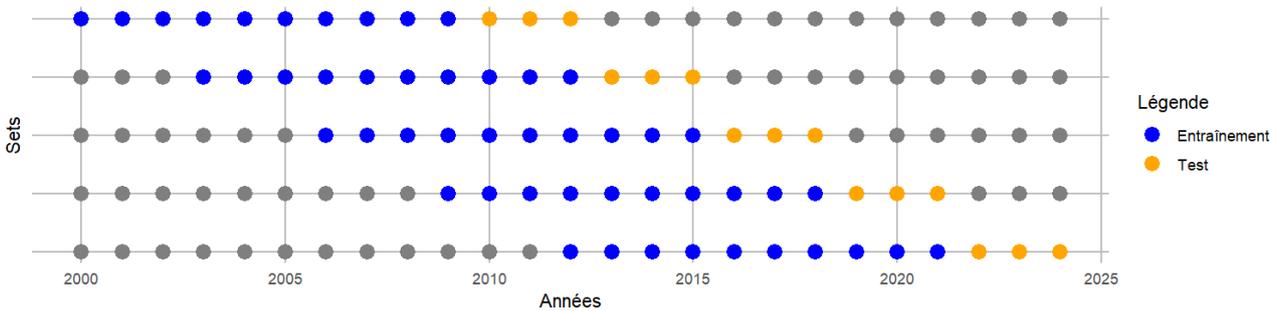


FIGURE 4.18 – Les différents *sets* de test pour la validation croisée

Dans le cadre de cette étude, la validation croisée est appliquée sur l'historique étudié, soit début 2000 à fin 2024, en utilisant un ensemble d'entraînement de 10 années et un ensemble de test de 3 années. Ainsi, en procédant de cette manière, 5 *sets* sont utilisés.

4.3.2 Résultats de la validation croisée

Pour chaque *set* de *backtesting* de la validation croisée, les paramètres des différents modèles d'inflation sont réestimés en respectant les étapes décrites dans la section 3.3.3 sur l'ensemble d'entraînement de chaque *set*.

Les trois modèles d'inflation associés à chaque *set* sont testés sur la période de test correspondante. Les résultats de la validation croisée sont présentés dans la figure 4.19. Les *MAE* et *MSE* moyens de chaque *set* pour chaque modèle, calculés sur la tendance moyenne des projections, sont présentés dans le tableau 4.2.

Modèle	MAE	MSE
Vasicek	1,36	3,30
<i>Normal-HMM</i>	1,32	3,18
<i>Vasicek-HMM</i>	0,98	2,79

TABLE 4.2 – Résultats de la validation croisée. *MAE* et *MSE* moyens des trois modèles d'inflation

De manière générale, les différents *backtestings* présentés dans la figure 4.19 et les résultats affichés dans le tableau 4.2 montrent que le *Vasicek-HMM* surpasse les deux autres modèles en termes de précision des prévisions. Il affiche des *MAE* et *MSE* nettement inférieurs à ceux des autres modèles, ainsi que des projections plus satisfaisantes.

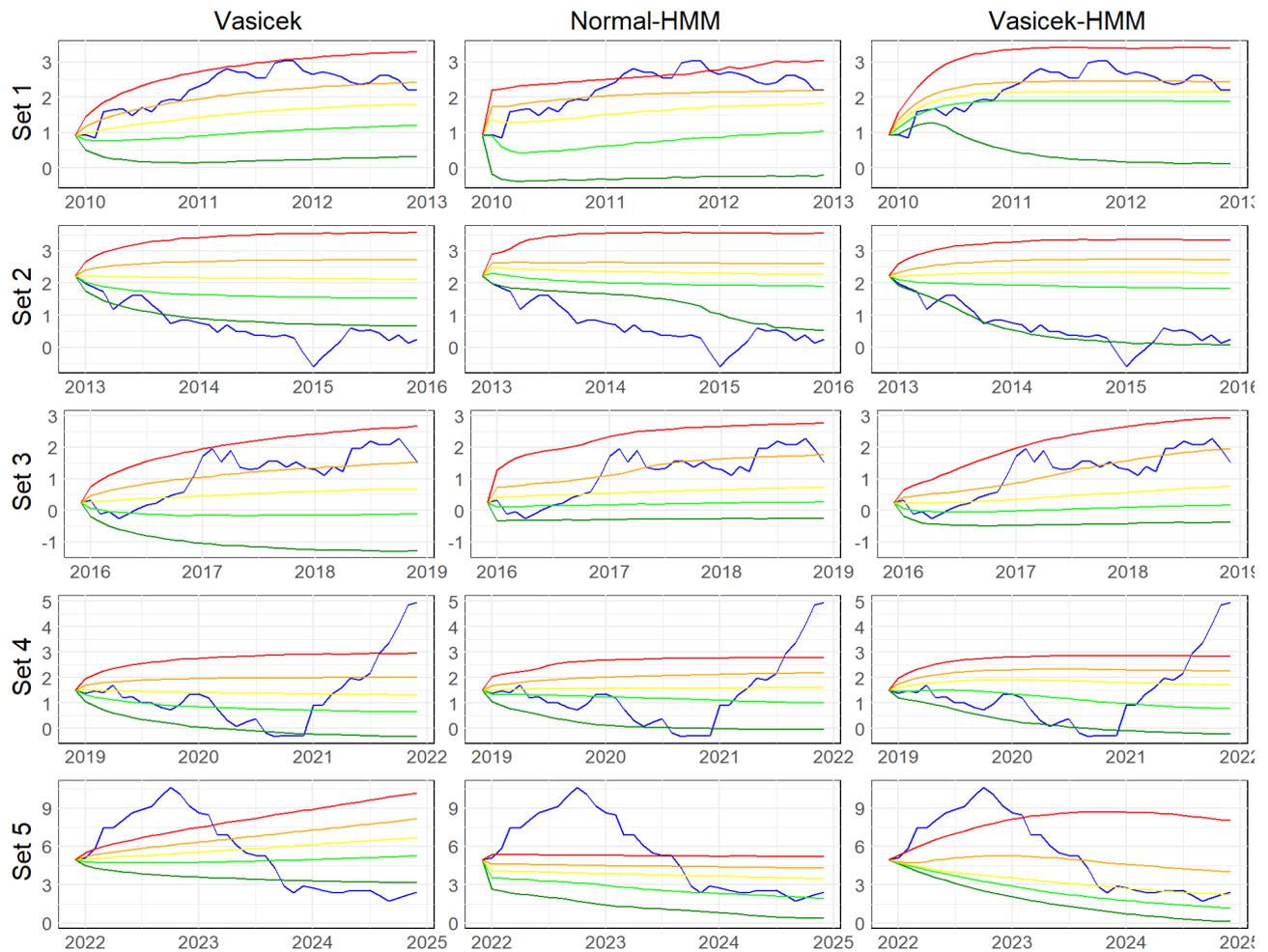


FIGURE 4.19 – Résultats de la validation croisée. Les colonnes 1 à 3 se rapportent respectivement aux résultats du modèle de Vasicek, du *Normal-HMM* et du *Vasicek-HMM*. Les lignes 1 à 5 représentent les cinq différents *backtestings* relatifs à la figure 4.18. Les quantiles représentés par les courbes colorées, du bas vers le haut, correspondent respectivement aux quantiles à 5 %, 25 %, à la médiane, ainsi qu'aux quantiles à 75 % et 95 %.

Plus spécifiquement,

- Le **backtesting sur la période 2010-2012** se révèle plus satisfaisant pour les *HMM*, avec une moyenne à long terme plus proche de l'historique testé. Notamment, le *Vasicek-HMM* affiche un *MSE* de 0,18, contre 0,71 pour le modèle de Vasicek et 0,64 pour le *Normal-HMM*.
- Le **backtesting sur la période 2013-2015**, à l'exception du quantile à 5 %, présente des quantiles assez équivalents, même si le *MSE* du modèle de Vasicek est de 2,49, contre 3,05 pour le *Normal-HMM* et 2,71 pour le *Vasicek-HMM*. Cependant, le *Vasicek-HMM* se distingue par son quantile à 5 %, qui parvient à couvrir les données historiques.
- Le **backtesting sur la période 2016-2018** révèle des conclusions similaires à celles du *backtesting* de 2010-2012, avec des *MSE* de 0,83 pour le modèle de Vasicek, 0,78 pour le *Normal-HMM* et 0,38 pour le *Vasicek-HMM*.
- Le **backtesting sur la période 2019-2021** ne révèle rien de particulier, les quantiles étant assez similaires. Les *MSE* sont respectivement de 1,69, 1,68 et 1,77 pour le modèle de Vasicek, le *Normal-HMM* et le *Vasicek-HMM*. Les quantiles sont satisfaisants, même si la période inflationniste n'est pas prise en compte, ce qui s'explique par le fait que la période sur laquelle les modèles sont entraînés ne contient pas de crise équivalente.
- Le **backtesting sur la période 2022-2024** se révèle plus satisfaisant pour le *Vasicek-HMM*, avec un *MSE* de 8,90, en raison de son alignement plus proche de la moyenne pour la période la plus récente et de ses quantiles plus satisfaisants. Le *MSE* du modèle de Vasicek est de 10,76 et celui *Normal-HMM* est de 8,90.

4.4 Comparaison des densités de distribution ds différents modèles

Un autre critère de validation des modèles est leur capacité à reproduire fidèlement les comportements observés dans la réalité. En comparant les densités de distribution des taux d'inflation simulés par les modèles avec celles des taux d'inflation historiques, il est possible d'évaluer dans quelle mesure ces modèles capturent la dynamique, la variabilité et la structure probabiliste des phénomènes réels.

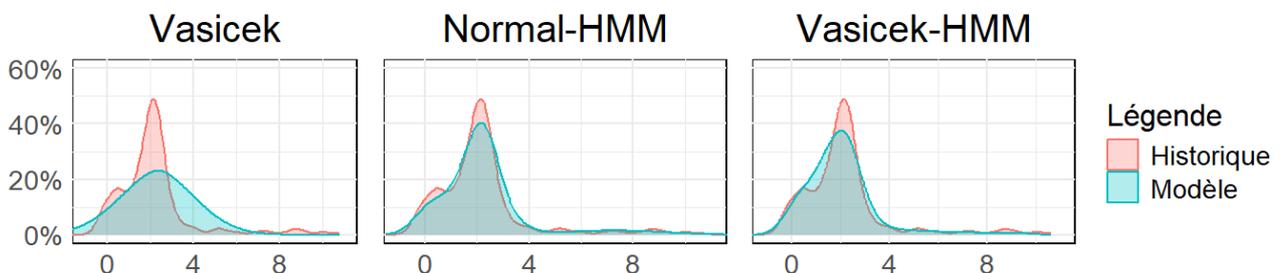


FIGURE 4.20 – Comparaison des densités de distribution. Les densités en rouge dans les graphiques correspondent à celles des taux d'inflation historiques, tandis que celles en bleu représentent respectivement celles des modèles de Vasicek, du *Normal-HMM* et du *Vasicek-HMM*. L'axe des abscisses est limité à l'intervalle $[-1, 10]$.

La densité de distribution du modèle de Vasicek apparaît la moins conforme à celle de l'historique ; elle ne s'adapte pas suffisamment à la forme de la densité et ne prend pas en compte le mode de la distribution historique. En revanche, les densités issues des *HMM* semblent mieux s'ajuster à la distribution historique, notamment celle du *Normal-HMM*, qui reproduit plus fidèlement le mode de la densité.

Ci-dessous, dans le tableau 4.3, les principales statistiques des différents modèles utilisés dans ce mémoire :

Modèle	Moyenne	Ecart-type	<i>Skewness</i>	<i>Kurtosis</i>	Autocorrélation Lag 1
Données d'inflation	2,14 %	1,82 %	2,19	9,39	0,98
Modèle de Vasicek	2,35 %	1,75 %	-0,01	3,12	0,98
<i>Normal-HMM</i>	2,20 %	1,79 %	2,20	9,60	0,86
<i>Vasicek-HMM</i>	2,39 %	3,08 %	4,98	39,24	0,99

TABLE 4.3 – Comparaison des principales statistiques : moyenne, écart-type, *skewness*, *kurtosis* et autocorrélation au *lag* 1

Comme pour la forme de la densité, le *Normal-HMM* apparaît comme le modèle le plus satisfaisant, avec des statistiques très proches des valeurs d'inflation historique.

Cependant, les statistiques principales du *Vasicek-HMM* sont biaisées par des valeurs élevées de l'inflation modélisées par le 6ème état. En limitant l'historique à des valeurs d'inflation maximales de 16 %, valeur maximale modélisée par le *Normal-HMM*, les statistiques du *Vasicek-HMM* deviennent respectivement : 2,19 %, 2,02 %, 2,51, 12,24 et 0,99 pour la moyenne, l'écart-type, le *skewness*, le *kurtosis* et l'autocorrélation au lag 1.

Ainsi, ces observations suggèrent que les modèles intégrant une composante de Markov caché, en particulier le *Normal-HMM*, offrent une approximation plus fidèle de la distribution empirique.

Il est à noter que la stationnarité de la série historique des taux d'inflation a été préalablement vérifiée à l'aide du test de Dickey-Fuller augmenté. La *p-value* étant inférieure à 5 %, l'hypothèse nulle de racine unitaire peut être rejetée, ce qui indique que la série est stationnaire.

4.5 Synthèse

L'analyse des différents modèles a finalement permis de mettre en lumière leurs forces et leurs faiblesses.

Le modèle de Vasicek se distingue par sa simplicité : il est facile à comprendre et à implémenter. Cependant, cette simplicité devient un inconvénient dans le contexte de ce mémoire. En effet, le modèle est trop rudimentaire, notamment en raison de ses paramètres constants dans le temps et de sa faible capacité à représenter les événements extrêmes.

A l'inverse, les *HMM* sont dynamiques et mieux adaptés pour capturer les différents régimes ou états du marché, ce qui permet de représenter plus fidèlement les variations économiques et financières complexes. Leur flexibilité permet également d'intégrer des avis d'experts ou des hypothèses sur les comportements futurs. Ils présentent également une meilleure adéquation aux données, comme l'a démontré l'analyse des résidus présentée dans la section 3.3.3.

Cependant, les *HMM* présentent une plus grande complexité. Le nombre élevé de paramètres peut compliquer leur implémentation et leur interprétation, augmentant ainsi le risque de surparamétrisation. De plus, les *HMM* sont très sensibles à la quantité de données historiques disponibles : avec un volume de données insuffisant et un nombre d'états élevé, les estimations de paramètres risquent de se baser sur des périodes trop limitées, conduisant le modèle à estimer les paramètres d'un état en s'appuyant sur peu de périodes.

L'un des points forts du *Normal-HMM* réside dans son implémentation et sa complexité réduite par rapport au *Vasicek-HMM*, bien que son comportement en période de crise et son backtesting soient moins satisfaisants que ceux du *Vasicek-HMM*.

Enfin, le *Vasicek-HMM* offre une capacité accrue à intégrer des situations de crise extrême et surpasse également les autres modèles étudiés en termes de comportement en période de crise et de *backtesting*.

Ces idées sont regroupées dans le tableau suivant :

	Modèle de Vasicek	<i>HMM</i>
Avantages	<ul style="list-style-type: none"> — Facile à comprendre — Facile à mettre en œuvre 	<ul style="list-style-type: none"> — Permet de modéliser et capturer les différents régimes ou états de l'économie — Bonne adéquation aux données — Plus dynamique et flexible — Implémentation et complexité raisonnables (<i>Normal-HMM</i>) — Meilleure prise en compte des crises extrêmes (<i>Vasicek-HMM</i>)
Inconvénients	<ul style="list-style-type: none"> — Trop rudimentaire 	<ul style="list-style-type: none"> — Modèle complexe — Sensibilité aux données historiques

TABLE 4.4 – Avantages et inconvénients du modèle de Vasicek, du *Normal-HMM* et du *Vasicek-HMM*

Conclusion

Ce mémoire avait pour objectif de comparer plusieurs modèles d'inflation afin d'identifier celui le plus adapté pour prendre en compte des périodes inflationnistes dans un générateur de scénarios économiques.

L'implémentation des modèles de Markov cachés a montré que, bien qu'ils soient plus complexes tant dans leur mise en œuvre que dans leur interprétation, et qu'ils présentent une certaine sensibilité aux données historiques, ils se révèlent nettement plus efficaces que les modèles standards. Ces derniers, en effet, ne captent pas les différents régimes de l'inflation et offrent une moindre précision dans les scénarios centraux. Les modèles de Markov cachés se distinguent ainsi par leur flexibilité et leur meilleure adéquation aux données historiques.

Tandis que le *Normal-HMM* se distingue par son implémentation et sa complexité raisonnables, le *Vasicek-HMM* s'est avéré le plus adapté à la problématique de ce mémoire. En effet, le *Vasicek-HMM* permet une prise en compte plus pertinente des périodes inflationnistes passées, tout en offrant des projections plus cohérentes avec l'évolution future de l'inflation dans le cadre de cette étude.

Cependant, il convient de noter certaines limites de cette étude, susceptibles d'améliorations.

Premièrement, bien que l'objectif principal était la comparaison des modèles d'inflation ; la construction des modèles de taux, d'actions et d'immobilier est restée relativement simple. Des modèles plus complexes, tels que le modèle de Black-Scholes-Merton pour l'action et l'immobilier, ou même l'usage de modèles de Markov cachés spécifiques à chacun des actifs, pourraient améliorer les résultats.

La deuxième limite concerne la gestion de la corrélation. Bien que la corrélation modélisée soit dynamique dans le temps et permette de prendre en compte la corrélation entre les actifs en fonction de l'état de l'inflation, elle ne permet pas de modéliser l'impact direct de l'inflation sur ces actifs, ni l'inverse. L'intégration de corrélations avec décalage temporel (ou *lag*) entre l'inflation, les actions, l'immobilier et les taux d'intérêt permettrait de mieux modéliser les interactions entre ces variables.

Troisièmement, le calibrage du modèle *Vasicek-HMM* s'est révélé complexe, en raison des maximums locaux dans la fonction de vraisemblance de l'algorithme de Baum-Welch. Un calibrage plus approfondi pourrait améliorer les performances du modèle en facilitant le choix de paramètres plus adéquats ou en augmentant le nombre d'états modélisés.

Ensuite, il est intéressant de se demander si l'utilisation d'un modèle de Markov caché, dont les observations suivent des dynamiques de Vasicek, est cohérente. En effet, coupler un état de forte inflation à un modèle de Vasicek paraît peu adapté au comportement très soudain et abrupt observé en période inflationniste. La propriété de retour à la moyenne semble peu compatible avec des crises qui sont intenses et ne durent pas dans le temps, à l'image de la moyenne à long terme du *Vasicek-HMM*, qui est très élevée pour tenter de s'ajuster au mieux aux données. L'une des solutions serait d'introduire un *HMM* composite, plus difficile à implémenter, mais qui permettrait d'utiliser différents

modèles pour les divers états de l'inflation.

Enfin, l'inclusion de variables explicatives, telles que les taux directeurs ou la masse monétaire, comme discuté dans la section 1.1.2, serait intéressante pour mieux étudier la dynamique de l'inflation, qui est fortement corrélée à ces variables. Cela pourrait être réalisé en incorporant les variables explicatives dans la modélisation de la corrélation. Plus spécifiquement, elles pourraient également être introduites dans un *HMM* pour des séries multivariées, dont les premiers éléments peuvent être trouvés dans le livre de [Zucchini et al. \(2016\)](#).

Bibliographie

- Aas, K. & Haff, I. H. (2006), ‘The generalized hyperbolic skew student’s t-distribution’, *Journal of Financial Econometrics* **4**(2), 275–309.
- Ahlgrim, K. C., D’arcy, S. P. & Gorvett, R. W. (2005), ‘Modeling financial scenarios : A framework for the actuarial profession’, *Proceedings* pp. 177–238.
- Baum, L. E. (1972), ‘An inequality and associated maximization technique in statistical estimation for probabilistic functions of markov processes’, *Inequalities* **3**, 1–8.
- Baum, L. E., Petrie, T., Soules, G. & Weiss, N. (1970), ‘A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of markov chains’, *The Annals of Mathematical Statistics* **41**(1), 164–171.
- Brigo, D. & Mercurio, F. (2006), *Interest Rate Models - Theory and Practice*, 2nd edn, Springer.
- Cousin, A. (2024), Modèles financiers en assurance. Support de cours, DUAS, UFR de Mathématiques, Strasbourg.
- Deacon, M., Derry, A. & Mirfendereski, D. (2004), *Inflation-indexed Securities : Bonds, Swaps and Other Derivatives*, 2nd edn, John Wiley & Sons.
- Dempster, A. P., Laird, N. M. & Rubin, D. B. (1977), ‘Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm’, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* **39**(1), 1–38.
- Fabre, T. (2020), Extension du longstaff-mithal-neis : Application à la diffusion des prix en univers monde réel dans un cadre arbitrage-free, Master’s thesis, ISFA, Univ. Claude Bernard Lyon 1, Lyon.
- Fisher, I. (1896), ‘Appreciation and interest’, *Publications of the American Economic Association* **XI**(4), 331–442.
- Fraysse, H. (2012), Construction d’un générateur de scénarios économiques à sauts permettant la pris en compte de scénario de crises, Master’s thesis, ISUP, Sorbonne Université, Paris.
- Gillot, G. (2019), Générateur de scénarios économiques en monde réel : approche par markov switching, Master’s thesis, ISFA, Univ. Claude Bernard Lyon 1, Lyon.
- Hardy, M. R., Freeland, R. K. & Till, M. C. (2006), ‘Validation of long-term equity return models for equity-linked guarantees’, *North American Actuarial Journal* **10**(4).
- Hibbert, J., Mowbray, P. & Turnbull, C. (2001), A stochastic asset model and calibration for long-term financial planning. Rapport d’une conférence en Finance et Investissement.
- Hyndman, R. J. & Athanasopoulos, G. (2018), *Forecasting : principles and practice*, 2nd edn, Otexts.

- Mear, R. (2016), Modèles de prévisions de l'inflation : application à la zone euro, Master's thesis, EURIA, Université de Bretagne Occidentale, Brest.
- Milin, K. (2017), Modélisation de l'inflation en France par une approche macrosectorielle, Série des documents de travail de la direction des Études et synthèses Économiques, Département des Études Économiques. Document de travail pour l'INSEE.
- Moulin, B. (2024), Un générateur de scénarios économiques pour évaluer l'impact de la titre conjoncture inflationniste sur le capital des assureurs non-vie, Master's thesis, ISFA, Univ. Claude Bernard Lyon 1, Lyon.
- Payen, A. (2016), Générateur de scénarios économiques risque réel dans le cadre d'une problématique eurocroissance, Master's thesis, ISUP, Sorbonne Université, Paris.
- Rajasundram, C. (2010), Développement d'un générateur de scénarios économiques dans le cadre de solvabilité ii, Master's thesis, ISFA, Univ. Claude Bernard Lyon 1, Lyon.
- Rosspopoff, B. (2013), Modèles historique et risque neutre de taux et d'inflation pour l'assurance, Master's thesis, ISFA, Univ. Claude Bernard Lyon 1, Lyon.
- Welch, L. R. (2003), 'Hidden markov models and the baum-welch algorithm', *IEEE Information Theory Society Newsletter* **53**(4).
- Zucchini, W. (2000), 'An introduction to model selection', *Journal of Mathematical Psychology* **44**(1), 41–61.
- Zucchini, W., MacDonald, I. L. & Langrock, R. (2016), *Hidden Markov Model for Time Series : An Introduction Using R*, 2nd edn, Chapman and Hall / CRC.

Annexes

Annexe A

Démonstrations relatives aux modèles

A.1 Modèle de Black & Scholes

Sous la probabilité historique \mathbb{P} , la dynamique du modèle de Black & Scholes s'écrit :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma d\mathcal{W}_t.$$

En posant le changement de variable $Y_t = \log S_t (= f(t, S_t))$ et en appliquant le lemme d'Itô :

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t}(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}(t, S_t) d\langle r, r \rangle_t \\ &= 0dt + \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{S_t^2} \right) S_t^2 \sigma^2 dt \\ &= (\mu dt + \sigma d\mathcal{W}_t) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \end{aligned}$$

$$\implies dY_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma d\mathcal{W}_t.$$

En intégrant entre t et $t + \delta_t$:

$$\begin{aligned} Y_{t+\delta_t} - Y_t &= \int_t^{t+\delta_t} dY_s \\ &= \int_t^{t+\delta_t} \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \sigma d\mathcal{W}_s \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \int_t^{t+\delta_t} ds + \sigma \int_t^{t+\delta_t} d\mathcal{W}_s, \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable introduit plus tôt,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \log S_{t+\delta_t} - \log S_t &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \int_t^{t+\delta_t} ds + \sigma \int_t^{t+\delta_t} d\mathcal{W}_s \\ \Leftrightarrow \log \frac{S_{t+\delta_t}}{S_t} &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \delta_t + \sigma (\mathcal{W}_{t+\delta_t} - \mathcal{W}_t). \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{W}_{t+\delta_t}$ et \mathcal{W}_t sont deux processus de Wiener, alors $\sigma (\mathcal{W}_{t+\delta_t} - \mathcal{W}_t)$ suit une loi normale centrée de variance $\sigma^2 \delta_t$. Dès lors :

$$\boxed{S_{t+\delta_t} = S_t \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \delta_t + \sigma \sqrt{\delta_t} \epsilon_t \right\}},$$

où ϵ_t suit une loi normale centrée réduite, et δ_t correspond au pas de discrétisation.

A noter que dans le modèle de Black-Scholes, le prix de l'actif suit une loi log-normale, et par extension, le log-rendement de l'actif suit une loi normale. Les paramètres sont donc :

$$\text{Var} \left(\log \frac{S_{t+\delta_t}}{S_t} \right) = \sigma^2 \delta_t \Leftrightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\delta_t} \text{Var} \left(\log \frac{S_{t+\delta_t}}{S_t} \right)},$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\log \frac{S_{t+\delta_t}}{S_t} \right] &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \delta_t \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{\delta_t} \mathbb{E} \left[\log \frac{S_{t+\delta_t}}{S_t} \right] + \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \Leftrightarrow \hat{\mu} &= \frac{1}{\delta_t} \left(\mathbb{E} \left[\log \frac{S_{t+\delta_t}}{S_t} \right] + \frac{1}{2} \text{Var} \left(\log \frac{S_{t+\delta_t}}{S_t} \right) \right). \end{aligned}$$

A.2 Estimation des paramètres d'un *Vasicek-HMM* via la maximisation du terme de la *CDLL* associé aux paramètres

Pour rappel, la log-vraisemblance des données complètes (*CDLL*) se divise en trois termes, chacun étant respectivement associé à la distribution initiale $\boldsymbol{\delta}$, à la matrice de probabilité de transition $\boldsymbol{\Gamma}$ et aux paramètres, dépendant de chaque état j , $\boldsymbol{\theta}_j = (\boldsymbol{\mu}_j, \boldsymbol{\kappa}_j, \boldsymbol{\sigma}_j^2)$.

Cette partie se concentre sur le troisième terme de la *CDLL*, celui associé aux paramètres. L'objectif est d'appliquer la méthode du maximum de vraisemblance à la *CDLL*, afin d'estimer mathématiquement chaque paramètre du modèle. Ce troisième terme, noté L_C , est défini comme suit :

$$L_C(\boldsymbol{\theta}_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) \log p_j(o_t). \quad (\text{A.1})$$

A.2. ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UN VASICEK-HMM VIA LA MAXIMISATION DU TERME DE LA

Dans le contexte d'un processus de Vasicek markovien, comme les observations $o_{t+1} - e^{-\kappa_j} o_t$ suivent la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu_j(1 - e^{-\kappa_j}), \sigma_j^2 \frac{(1 - e^{-2\kappa_j})}{2\kappa_j}\right)$, la densité dépendante de l'état est de la forme :

$$p_j(o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2 \frac{(1 - e^{-2\kappa_j})}{2\kappa_j}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(o_{t+1} - e^{-\kappa_j} o_t - \mu_j(1 - e^{-\kappa_j}))^2}{\sigma_j^2 \frac{(1 - e^{-2\kappa_j})}{2\kappa_j}} \right\}.$$

Avant de commencer à maximiser les estimateurs des paramètres du modèle de Vasicek à partir du terme de vraisemblance de l'algorithme EM relatif aux paramètres, il est judicieux de simplifier le modèle de Vasicek en posant :

$$\begin{aligned} A &= e^{-\kappa_j}, \\ B &= \mu_j(1 - e^{-\kappa_j}), \\ C &= \sigma_j^2 \frac{(1 - e^{-2\kappa_j})}{2\kappa_j}. \end{aligned}$$

En supposant j quelconque, l'équation A.1 peut se réécrire

$$L_C(\theta_j) = \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) \log \frac{1}{\sqrt{2\pi C}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(o_{t+1} - A o_t - B)^2}{C} \right\},$$

puis en développant et en simplifiant l'équation, elle devient :

$$L_C(\theta_j) = \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) \left(-\frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log C - \frac{1}{2C} (o_{t+1} - A o_t - B)^2 \right). \quad (\text{A.2})$$

A.2.1 Estimation pour σ_j^2

Comme A et B ne dépendent pas de σ_j^2 , il est pertinent de dériver seulement C . Ainsi, en dérivant l'équation A.2, on obtient :

$$\frac{\partial L_C(\theta_j)}{\partial \sigma_j^2} = \left(-\frac{1}{2C} \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) + \frac{1}{2C^2} \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - A o_t - B)^2 \right) \frac{\partial C}{\partial \sigma_j^2}.$$

Comme $\frac{\partial C}{\partial \sigma_j^2} = \frac{1 - e^{-2\kappa_j}}{2\kappa_j}$ et que, par définition du modèle de Vasicek, $\kappa_j \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_C(\theta_j)}{\partial \sigma_j^2} = 0 &\iff \frac{1}{2C^2} \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - A o_t - B)^2 = \frac{1}{2C} \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) \\ &\implies C = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - A o_t - B)^2}{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t)}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Comme $C = \sigma_j^2 \frac{(1 - e^{-2\kappa_j})}{2\kappa_j}$, cela implique que

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{2\hat{\kappa}_j}{1 - e^{-2\hat{\kappa}_j}} \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - e^{-\hat{\kappa}_j} o_t - \hat{\mu}_j(1 - e^{-\hat{\kappa}_j}))^2}{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t)}.$$

A.2.2 Estimation pour μ_j

De la même manière que pour σ_j^2 , il n'y a que B qui dépend du paramètre μ_j . Par conséquent, la même logique que pour σ_j^2 est appliquée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_C(\theta_j)}{\partial \mu_j} &= \left(-\frac{1}{2C} \sum_{t=1}^{T-1} (-2) \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - A o_t - B) \right) \frac{\partial B}{\partial \mu_j} \\ &= \frac{1 - e^{-\kappa_j}}{C} \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - A o_t - B). \end{aligned}$$

Comme $1 - e^{-\kappa_j} \neq 0$,

$$\frac{\partial L_C(\theta_j)}{\partial \mu_j} = 0 \implies \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - A o_t - B) = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\iff \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) B = \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - A o_t)$$

$$\implies B = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - A o_t)}{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t)}. \quad (\text{A.5})$$

Comme $B = \mu_j (1 - e^{-\kappa_j})$ et que $1 - e^{-\kappa_j} \neq 0$, l'équation A.5 devient finalement :

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{1 - e^{-\hat{\kappa}_j}} \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - e^{-\hat{\kappa}_j} o_t)}{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t)}.$$

A.2.3 Estimation pour κ_j

Quant à κ_j , tous les termes dépendent de lui, il faut donc dériver chaque terme, comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_C(\theta_j)}{\partial \kappa_j} &= -\frac{1}{2C} \left(\sum_{t=1}^{T-1} (-2o_t) \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - Ao_t - B) \right) \frac{\partial A}{\partial \kappa_j} \\
&\quad - \frac{1}{2C} \left(\sum_{t=1}^{T-1} (-2) \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - Ao_t - B) \right) \frac{\partial B}{\partial \kappa_j} \\
&\quad + \frac{1}{2C^2} \left(\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - Ao_t - B)^2 \right) \frac{\partial C}{\partial \kappa_j} \\
&\quad - \frac{1}{2C} \left(\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) \right) \frac{\partial C}{\partial \kappa_j} \\
\iff \frac{\partial L_C(\theta_j)}{\partial \kappa_j} &= \left(\frac{-e^{-\kappa_j}}{C} \right) \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_t(o_{t+1} - B) - Ao_t^2) \\
&\quad + \left(\frac{1}{C} \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - Ao_t - B) \right) \frac{\partial B}{\partial \kappa_j} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2C^2} \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - Ao_t - B)^2 - \frac{1}{2C} \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) \right) \frac{\partial C}{\partial \kappa_j}
\end{aligned}$$

En utilisant les equations A.3 et A.4, cela nous permet d'éliminer le deuxième et le troisième terme de l'équation. De plus, le fait que κ_j soit différent de 0 implique :

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_t(o_{t+1} - B) - Ao_t^2) = 0 \\
\iff \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_{t+1} o_t &= B \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t + A \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t^2.
\end{aligned}$$

Puis, dans le but d'avoir une expression pour A , et, par extension, κ_j , il faut remplacer B par l'équation A.5 :

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_{t+1} o_t &= \left(\frac{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) (o_{t+1} - Ao_t)}{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t)} \right) \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t + A \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t^2 \\
\iff \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_{t+1} o_t - \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_{t+1} \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t}{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t)} &= A \left(\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t \right)^2}{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t)} \right) \\
\implies A &= \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_{t+1} o_t - \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_{t+1} \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t}{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t \right)^2}.
\end{aligned}$$

Comme on a $A = e^{-\kappa_j}$, cela implique :

$$\hat{\kappa}_j = -\log \left(\frac{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_{t+1} o_t - \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_{t+1} \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t}{\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) \sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{T-1} \hat{u}_j(t) o_t \right)^2} \right).$$

A.3 Estimation des paramètres d'un *Normal-HMM* via la maximisation du terme de la *CDLL* associé aux paramètres

La démonstration pour l'estimation des paramètres d'un *Normal-HMM* utilise le même développement, c'est-à-dire d'appliquer la méthode du maximum de vraisemblance au troisième terme de la *CDLL*, afin d'estimer mathématiquement chaque paramètre du modèle.

Dans le contexte d'un *Normal-HMM*, puisque $o_t | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$ la densité dépendante de l'état est de la forme :

$$p_j(o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(o_t - \mu_j)^2}{\sigma_j^2} \right\}.$$

En supposant j quelconque, l'équation A.1 peut se réécrire

$$L_C(\theta_j) = \sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(o_t - \mu_j)^2}{\sigma_j^2} \right\} \right),$$

puis en développant et en simplifiant l'équation, elle devient :

$$L_C(\theta_j) = \sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) \left(-\log \sqrt{2\pi\sigma_j^2} - \frac{1}{2} \frac{(o_t - \mu_j)^2}{\sigma_j^2} \right) \quad (\text{A.6})$$

A.3.1 Estimation pour μ_j

En dérivant l'équation A.6 par rapport à μ_j ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_C(\theta_j)}{\partial \mu_j} = 0 &\iff \sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) \left(-\frac{1}{2\sigma_j^2} (-2o_t + 2\mu_j) \right) = 0 \\ &\iff \sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) \left(-\frac{1}{2\sigma_j^2} (-o_t + \mu_j) \right) = 0 \\ &\iff \mu_j \sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) = \sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) o_t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{\mu}_j = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) o_t}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t)}.$$

A.3.2 Estimation pour σ_j^2

En dérivant A.6 par rapport à σ_j^2 ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_C(\theta_j)}{\partial \sigma_j^2} = 0 &\iff \sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) \left(-\frac{1}{\sigma_j} + \frac{1}{\sigma_j^3} (o_t - \mu_j)^2 \right) = 0 \\ &\iff \frac{1}{\sigma_j^3} \sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) (o_t - \mu_j)^2 = \frac{1}{\sigma_j} \sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_j^2 = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t) (o_t - \hat{\mu}_j)^2}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_j(t)}.$$

Annexe B

Informations complémentaires pour l'étude des modèles

B.1 Définition et analyse des résidus selon [Hardy et al. \(2006\)](#)

En ce qui concerne les résidus, ce modèle s'inspire de la publication de [Hardy et al. \(2006\)](#), qui propose une étude des résidus en fournissant l'expression de ceux-ci pour des modèles stochastiques, ainsi que pour des modèles à changement de régime. En s'appuyant sur leur définition du résidu, il est expliqué que pour chacun des modèles, il existe une séquence de résidus (ou une combinaison de résidus pour les modèles à changement de régime) qui devrait constituer un échantillon i.i.d. distribué normalement, conformément aux hypothèses du modèle. L'examen des résidus montrant un écart par rapport au modèle normal constitue un signal que l'ajustement n'est pas adéquat.

Ci-dessous, la définition des résidus des différents modèles qui composent ce mémoire.

Pour le modèle de Black & Scholes, le résidu de l'observation des log-rendements $t = 1, 2, \dots, T$ correspond à

$$e_t = \frac{o_t - (\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)}{\hat{\sigma}}.$$

Pour le modèle de Vasicek, le résidu de l'observation $t = 2, 3, \dots, T$ correspond à

$$e_t = \frac{o_t - e^{-\hat{\kappa}}o_{t-1} - \hat{\mu}(1 - e^{-\hat{\kappa}})}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1 - e^{-2\hat{\kappa}}}{2\hat{\kappa}}}}.$$

Pour un Normal-HMM, le résidu de l'observation pour $t = 1, 2, \dots, T$ correspond à

$$e_t = \frac{o_t - \hat{\mu}_j}{\hat{\sigma}_j}.$$

dépend de $\hat{\mu}_j$, la moyenne de la distribution normale associée à l'état j , lorsque $o_t | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}(\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j^2)$.

Pour un Vasicek-HMM, le résidu de l'observation pour $t = 2, 3, \dots, T$ correspond à

$$e_t = \frac{o_t - e^{-\hat{\kappa}_j} o_{t-1} - \hat{\mu}_j (1 - e^{-\hat{\kappa}_j})}{\hat{\sigma}_j \sqrt{\frac{1 - e^{-2\hat{\kappa}_j}}{2\hat{\kappa}_j}}}.$$

où $\hat{\mu}_j$ et $\hat{\kappa}_j$ sont respectivement les paramètres de la moyenne et du taux de réversion à la moyenne du modèle de Vasicek pour l'état j , lorsque $o_{t+1} - e^{-\hat{\kappa}_j} o_t | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}\left(\hat{\mu}_j(1 - e^{-\hat{\kappa}_j}), \hat{\sigma}_j^2 \frac{(1 - e^{-2\hat{\kappa}_j})}{2\hat{\kappa}_j}\right)$.

A noter que \mathcal{F}_t représente toute l'information disponible jusqu'au temps t , également appelée la filtration ou la tribu.

Pour ce qui est de l'étude des résidus d'un modèle, ils expliquent qu'il y a deux étapes.

1. D'une part l'analyse du diagramme Q-Q : si les hypothèses du modèle sont respectées, les résidus devraient, grossièrement, se situer sur la diagonale centrale.
2. Le deuxième élément est le test de normalité de Jarque-Bera, un test statistique souvent utilisé pour l'analyse des résidus. Un échec de ce test indique que les résidus ne sont pas normaux, ce qui suggère que le modèle n'est pas cohérent avec les données.

B.2 Différence entre décodage local et décodage global pour un *HMM*

La différence théorique et mathématique entre le décodage global et le décodage local a été expliquée dans ce mémoire. Ici, l'objectif est uniquement démonstratif : il s'agit d'illustrer concrètement la différence entre ces deux méthodes de décodage pour les différents modèles.

Ci-dessous sont présentés les deux différents décodages pour le *Normal-HMM* à 6 états :



FIGURE B.1 – Décodage global d'un *Normal-HMM* à 6 états à l'aide de l'algorithme de Viterbi

Les différences entre les deux décodages pour le *Normal-HMM* sont peu visibles, avec seulement quelques zones d'états légèrement plus larges. Concernant le *Vasicek-HMM*, bien que les différences soient également légères, elles sont plus perceptibles que pour le *Normal-HMM*. Ainsi, comme mentionné précédemment dans ce mémoire, la distinction entre les deux décodages reste subtile, bien qu'elle existe.

B.2. DIFFÉRENCE ENTRE DÉCODAGE LOCAL ET DÉCODAGE GLOBAL POUR UN HMM109



FIGURE B.2 – Décodage local d'un *Normal-HMM* à 6 états à l'aide de l'algorithme de Viterbi



FIGURE B.3 – Décodage global d'un *Vasicek-HMM* à 3 états à l'aide de l'algorithme de Viterbi



FIGURE B.4 – Décodage local d'un *Vasicek-HMM* à 3 états à l'aide de l'algorithme de Viterbi