Mémoire présenté le : 12 janvier 2023
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Monsieur Selasse SEKLE

Titre :
Provisionnement et rentabilité d'un régime d'assurance chômage pour créateurs et gérants d'entreprise

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☐ 1 an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de la filière : Signature : **Maud Thomas**	Entreprise : Nom : Gan Assurances Signature :
Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires : Signature : **Olivier Lopez** **Jean-Marie Nessi** : excusé Lionel Laurent : visio	Directeur de mémoire en entreprise Nom : CANTAU Blaise-Marie Signature : Invité : Nom : Signature : **Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels** (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité) Signature du responsable entreprise : Signature du candidat :

Résumé

En France, seuls les salariés ayant involontairement perdu leur emploi ont droit au chômage sous certaines conditions à savoir : ne pas atteindre l'âge légal de départ à la retraite, être en capacité physique de travailler, avoir été salarié au moins six mois au cours des 24 derniers mois. C'est le pilier de solidarité mis en place par l'Etat et en charge de Pôle Emploi, l'interlocuteur des demandeurs d'emploi en France, et de l'Unédic, la gestionnaire de l'assurance chômage.

En revanche, les travailleurs non salariés (créateurs et dirigeants d'entreprise, artisans et commerçants) n'étant pas protégés contre le chômage, certaines organisations patronales comme le Medef, CPME, U2P et certaines branches professionnelles ont créé une association à but non lucratif appelée GSC, Garantie Sociale du Chef d'entreprise, en vue de pallier cela. La gestion de cette assurance chômage est confiée aux assureurs dont Gan Assurances est l'apériteur.

Le but de ce mémoire est de décrire l'offre GSC et de présenter les différentes provisions techniques, ainsi que leurs modalités de calcul.

La plus importante provision étant la PSAP, la provision pour sinistre à payer, nous lui accorderons beaucoup d'attention et parlerons des différentes méthodes de provisionnement : de la méthode de Chain Ladder et ses dérivés déterministes qui ne tiennent pas compte de la volatilité de la cadence des règlements des sinistres aux méthodes stochastiques comme la méthode de Mack qui permet d'estimer, à l'ultime, la PRI la provision pour risque et incertitude ou simplement le Risk Margin, qui n'est autre que l'erreur d'estimation de la méthode de Chain Ladder, en passant par les modèles linéaires généralisés GLM et la méthode de rééchantillonnage du Bootstrap.

Nous accorderons aussi une attention particulière à la PRC, la provision pour risque croissant pour tenir compte de l'évolution de la sinistralité en fonction de l'âge, bien que cette provision en assurance chômage soit discutable. Son calcul nous emmènera à construire des tables d'expérience d'entrée en chômage et de radiation d'un affilié du régime GSC. Pour cela nous ferons appel à des notions d'analyse de survie comme la censure, la troncature et des estimateurs comme ceux de Kaplan-Meier et de Nelson-Aalen. Les méthodes de lissage de Whittaker-Henderson et par moyenne mobile nous permettrons de lisser les taux bruts afin de les rendre plus fidèles à la réalité.

Nous vous souhaitons une bonne lecture de ce mémoire qui, nous l'espérons, vous éclairera sur l'assurance chômage privée, la GSC.

Mots clés : GSC, Pôle Emploi, Unédic, assurance chômage, PSAP, Chain Ladder, Mack, GLM, Bootstrap, PRI, PRC, Kaplan-Meier, Nelson-Aalen, Whittaker-Henderson.

Abstract

In France, only employees who have involuntarily lost their jobs are entitled to unemployment benefits under certain conditions, namely : not reaching the legal retirement age, being physically able to work, having been employed for at least six months during the last 24 months. This is the solidarity pillar set up by the State and in charge of Pôle Emploi, the contact point for job seekers in France, and Unédic, the unemployment insurance manager.

On the other hand, since non-salaried workers (entrepreneurs and managers, craftsmen and traders) are not protected against unemployment, some employers' organizations such as Medef, CPME, U2P and some professional branches have created a non-profit association to help them to find work. have created a non-profit association called GSC, Garantie Sociale du Chef d'entreprise. The management of this unemployment insurance is entrusted to insurers of which Gan Assurances is the aperitor.

The purpose of this thesis is to describe the GSC offer and to present the various technical provisions, as well as their calculation methods.

The most important provision being the PSAP, the provision for claims to be paid, we will pay a lot of attention to it and will talk about the different provisioning methods : From the Chain Ladder method and its deterministic derivatives that do not take into account the volatility of the rate of claim settlements to stochastic methods such as Mack's method that estimates, in the ultimate, the PRI the provision for risk and uncertainty or simply the Risk Margin, which is simply the estimation error of the Chain Ladder method, through the generalized linear models and the Bootstrap resampling method.

We will also pay particular attention to the PRC, the provision for increasing risk to take into account the evolution of claims as a function of age, although this provision in unemployment insurance is debatable. Its calculation will lead us to construct tables of experience of entry into unemployment and of cancellation of a member of the GSC scheme. To do this, we will use survival analysis concepts such as censoring, truncation and estimators such as Kaplan-Meier and Nelson-Aalen. The Whittaker-Henderson and moving average smoothing methods will allow us to smooth the raw rates in order to make them more faithful to reality.

We hope you enjoy reading this thesis and that it will shed some light on private unemployment insurance, the GSC.

Keywords : GSC, Pôle Emploi, Unédic, unemployment insurance, PSAP, Chain Ladder, Mack, GLM, Bootstrap, PRI, Kaplan-Meier, Nelson-Aalen, Whittaker-Henderson.

Note de synthèse

Provisionnement et rentabilité d'un régime d'assurance chômage pour créateurs et gérants d'entreprise

Selasse SEKLE (ISUP, Gan Assurances)

Mots clés : GSC, Pôle Emploi, Unédic, assurance chômage, Provisionnement par les GLM, PRC, Kaplan-Meier, Nelson-Aalen.

Problématique :

En France, seuls les salariés ayant involontairement perdu leur emploi ont droit au chômage sous certaines conditions à savoir : ne pas atteindre l'âge légal de départ à la retraite, être en capacité physique de travailler, avoir été salarié au moins six mois au cours des 24 derniers mois, etc. C'est le pilier de solidarité mis en place par l'Etat et en charge de Pôle Emploi, l'interlocuteur des demandeurs d'emploi en France, et de l'Unédic, la gestionnaire de l'assurance chômage.

En revanche, les travailleurs non salariés (créateurs et dirigeants d'entreprise, artisans et commerçants) n'étant pas protégés contre le chômage, certaines organisations patronales comme le Medef, CPME, U2P et certaines branches professionnelles ont créé une association à but non lucratif appelée GSC, Garantie Sociale du Chef d'entreprise, en vue de pallier cela.

Le but de cet article est de décrire l'offre GSC et de présenter le calcul de la PSAP, provision pour sinistre à payer, par la méthode des GLM.

Nous accorderons une attention particulière à la PRC, provision pour risque croissant, pour tenir compte de l'évolution de la sinistralité en fonction de l'âge, bien que cette provision en assurance chômage soit discutable. Nous construirons aussi des graphiques des taux d'entrée en chômage et de radiation d'un affilié du régime GSC en fonction de l'âge, lesquelles vont nous permettre de vérifier l'utilité de la PRC.

Description de l'offre GSC

Le produit d'assurance «Garantie Sociale des Chefs et Dirigeants d'Entreprise» est un contrat d'assurance de groupe (Convention GSC) à adhésion facultative souscrit par l'Association pour la Garantie Sociale des Chefs et Dirigeants d'Entreprise (GSC), auprès de Gan assurances, Allianz IARD, Generali France Assurances Incendie Accidents, S.M.A. BTP, co-assureurs, représentés par Gan assurances intervenant en qualité d'apériteur. Il permet aux dirigeants mandataires sociaux non pris en charge par Pôle emploi et aux dirigeants travailleurs non salariés (TNS) de bénéficier d'un revenu de substitution en cas de perte d'emploi involontaire. L'affiliation de l'entreprise pour le compte de son dirigeant mandataire social ou l'adhésion du travailleur non salarié à la Convention GSC est destinée aux entreprises membres d'une organisation patronale elle-même membre de l'Association GSC et adhérente à la Convention (exception faite pour les créateurs/repreneurs d'entreprise depuis moins de trois ans et ayant opté pour la formule Créateur forfaitaire). Si l'assuré est un TNS (Travailleur non-salarié), il peut bénéficier de la déductibilité fiscale des cotisations de ses revenus professionnels, dans les conditions et limites de la loi Madelin.

La Convention GSC prévoit les couvertures d'assurance suivantes :

- Une garantie «Tout entrepreneur», qui comprend deux formules pour le montant des indemnités journalières :
  – Une « Formule 55 »
  – Une « Formule 70 »
  Cette garantie propose en outre trois durées de versement des indemnités journalières : « Durée 12 mois », « Option de durée 18 mois » et « Option de durée 24 mois ».

- Une garantie dite « Créateur » pour créateur ou repreneur qui prévoit :
  – Une formule pour le montant des indemnités journalières, « Formule Créateur »
  – Une durée de versement des indemnités journalières, « Durée 12 mois »

Lors de sa demande d'affiliation, l'entreprise doit dans tous les cas, indiquer les garanties et les formules retenues.

Provisionnement par les GLM

Les modèles linéaires généralisés sont une généralisation du modèle linéaire gaussien et sont caractérisés par trois composantes :

– Une composante aléatoire c'est-à-dire que les paiements décumulés $X_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et suivent une loi appartenant à la famille des lois exponentielles.

– Une composante systématique déterministe. En effet, la plupart des modèles de provisionnement sont basés sur un prédicteur linéaire

$$\Gamma_{i,j} = c_0 + \alpha_i + \beta_j \quad \text{pour} \quad i, j = 1, \ldots, n$$

– Une fonction g bijective appelée fonction de lien telle que :

$$\Gamma_{i,j} = g(\mu_{i,j}) \quad \text{où} \quad \mu_{i,j} = \mathbb{E}[X_{i,j} \,|\, (i,j)]$$

Les variables explicatives sont l'année de survenance i paramétrée par α_i et le délai de règlement j paramétré par β_j.

En supposant que $X_{i,j}$ suit la loi de Poisson (de paramètre $\alpha_i\beta_j$ par exemple), la fonction de lien g est la fonction log. Dans ce cas on a :

$$g(\mu_{i,j}) = \log(\mu_{i,j}) = c_0 + \alpha_i + \beta_j \quad \text{d'où}$$

$$\mu_{i,j} = \exp(c_0 + \alpha_i + \beta_j)$$

On estime les paramètres c_0, α_i et β_j par la méthode du maximum de vraisemblance. Ainsi,

$$\hat{\mu}_{i,j} = \exp(\hat{c_0} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j) = \hat{X}_{i,j} \quad \text{et}$$

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i} \quad \text{où} \quad \hat{C}_{i,n} = \sum_{j=0}^{n} \hat{X}_{i,j}$$

Validation des modèles GLM

Après le calcul du montant des provisions par les GLM, il faudrait que l'on s'assure qu'ils reflètent la réalité et qu'ils sont valides. Généralement, pour les modèles linéaires, après estimation des paramètres, l'on s'assure que les résidus sont centrés et gaussiens. Dans le cas des modèles linéaires généralisés, on a peu d'information sur les résidus. En particulier, ils n'ont aucune raison d'avoir la même variance et on ne connaît pas leur distribution.

Dans un GLM, pour évaluer la qualité de l'ajustement du modèle aux données, on mesure l'écart Δ entre le modèle et les données. Cet écart appelé : la **déviance** est définie comme deux fois la différence de log-vraisemblance entre le modèle actuel et un modèle saturé (c'est-à-dire un modèle qui s'adapte parfaitement aux données).

$$\Delta = 2\log(\lambda) = 2(\tilde{l} - \hat{l})$$

où $\tilde{l}$ est la vraisemblance du modèle saturé et $\hat{l}$ celle du modèle estimé.

On peut aussi définir Δ comme étant :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \delta_i^2$$

où les δ_i sont des déviances résiduelles et N le nombre d'observations. Nous savons par le théorème de Wilks que si les hypothèses du modèle GLM sont vérifiées, alors :

$$\Delta \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_{N-p}$$

avec p le nombre de paramètres à estimer.
Nous comprenons donc que $\mathbb{E}[\Delta] = N - p$ et nous nous attendons à ce que chaque $\delta_i^2 \simeq \frac{N-p}{N} \simeq 1$. Une valeur de δ_i^2 éloignée de 1 indique que l'observation i contribue au mauvais ajustement. Mais pour les modèles quasi-Familles comme par exemple le modèle quasi-Poisson ce ne sera pas la loi du Chi-deux mais celle de Fisher comme nous allons le voir juste après.

Soient D_1 la Null Deviance avec p_1 degré de liberté et D_2 la Residual Deviance avec p_2 degré de liberté.

Validation du GLM Gamma

Pour valider le GLM Gamma, nous allons faire un test du Chi-deux. La statistique du test W_{χ^2} se calcule comme suit :

$$\boxed{W_{\chi^2} = D_1 - D_2}$$

Nous pouvons donc calculer la p-value du test grâce au code R suivant :

$$\boxed{pchisq(W_{\chi^2}, df = p, \text{lower.tail} = \text{FALSE})}$$

Le modèle est validé si la p-value $< 5\%$.

Validation du GLM quasi-Poisson

Pour valider le GLM quasi-Poisson, nous allons faire un test de Fisher. La statistique du test T_{Fisher} se calcule comme suit :

$$\boxed{T_{Fisher} = \frac{D_1 - D_2}{(p_1 - p_2) \times \phi}}$$

où ϕ est le coefficient de dispersion du modèle. Nous calculons la p-value du test via le code R suivant :

$$\boxed{pf(T_{Fisher}\,,\, p_1 - p_2\,,\, p_2\,,\, \text{lower.tail} = \text{FALSE})}$$

Le modèle est validé si la p-value < 5%.

Provision pour risque croissant PRC

La provision pour risque croissant PRC est par définition une provision « pouvant être exigée [. . .] pour les opérations d'assurance contre les risques de maladie et d'invalidité et égale à la différence des valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés ».

Vous l'aurez compris, au vu de sa définition, *cette provision en assurance chômage est discutable.* Mais pas de panique, nous vous expliquons tout.

Pourquoi la PRC en assurance chômage GSC ?

Cette provision a été créée pour tenir compte de l'accroissement de la fréquence de la sinistralité liée à l'augmentation de l'âge moyen des affiliés en portefeuille.

Son fondement théorique est l'indépendance de la cotisation à l'âge à la souscription et l'absence d'évolution du tarif en fonction de l'âge. En revanche son fondement réglementaire est discutable, dans la mesure où le code des assurances ne mentionne pas explicitement le risque chômage.

Modalité de calcul de la PRC

La provision pour risque croissant relative à un assuré d'âge x est calculée comme étant la différence entre les valeurs actuelles probables des engagements de l'assuré et des engagements de l'assureur.

$$\boxed{\text{PRC}_x = \text{VAP}_{\text{Assureur}} - \text{VAP}_{\text{Assuré}}}$$

$\text{VAP}_{\text{Assureur}}$ est l'ensemble des prestations payées par l'assureur à l'assuré si ce dernier entre en chômage et tant qu'il est encore en portefeuille et $\text{VAP}_{\text{Assuré}}$ est l'ensemble des primes payées par l'assuré à l'assureur tant qu'il est encore en portefeuille.

Considérons un affilié en portefeuille à une date $t = t_i$ non au chômage. Intéressons nous à son statut à la date $t = t_{i+1}$. A cette date, soit il est au chômage, soit il est radié du portefeuille, soit il est toujours en portefeuille mais n'est pas au chômage. Ces informations vont nous permettre de calculer les valeurs actuelles probables de ses engagements et de ceux de son assureur.

Dans la suite nous noterons :

- x l'âge à la souscription de l'assuré
- *Cot*, la cotisation conventionnelle HT
- *Rd(i)* la loi de radiation en fonction de l'âge *i.*
- *Prest(i)* la loi d'entrée en prestation en fonction de l'âge *i.*
- T_{IJ}, le taux d'inflation de l'Indemnité Journalière,
- T_S, le taux moyen d'inflation des salaires retenu,
- T_{Com} le taux de commission sur primes
- T_g le taux de frais de gestion, une fraction du montant de prestation
- τ le taux technique d'actualisation fixé
- R, le montant de la prestation garantie

Avant de calculer les engagements des assuré et assureur, soient ν le facteur d'actualisation et ${}_kP_x^{SC}$ la probabilité qu'un assuré d'âge x à la souscription soit en portefeuille pendant k années sans entrer en chômage.

$$\nu = \frac{1}{1+\tau} \quad \text{et} \quad {}_kP_x^{SC} = \prod_{j=0}^{k} \left[1 - Rd(x+j) - Prest(x+j)\right]$$

Calcul des engagements de l'Assureur

$$\boxed{\text{VAP}_{\text{Assureur}} = R \times (1+T_g) \times \sum_{k=0}^{68-x} {}_kP_x^{SC} \times Prest(x+k) \times (1+T_{IJ})^k \times \nu^{k+\frac{1}{2}}}$$

Calcul des engagements de l'Assuré

$$\boxed{\text{VAP}_{\text{Assuré}} = Cot \times (1-T_{Com}) \times \sum_{k=0}^{68-x} {}_kP_x^{SC} \times (1+T_S)^k \times \nu^{k+\frac{1}{2}}}$$

Il ne nous reste plus qu'à calibrer les lois d'entrée en chômage et de radiation.

Le ratio combiné

C'est un ratio clé qui permet à l'assureur de mesurer la rentabilité de son activité sur une période donnée. Il se calcule comme suit :

$$\boxed{\text{Ratio combiné} = \frac{\text{Charges sinistres ultimes} + \text{frais totaux} + \text{ coût de la réassurance}}{\text{Primes émises}}}$$

Notons que le ratio combiné a vocation à être inférieur à un car un ratio combiné supérieur à un signifie que le portefeuille est déficitaire. En effet, le montant total des sinistres, frais et coût de la réassurance réglé est supérieur aux cotisations encaissées. Le département gestion des risques et pilotage veille à ce que ce scénario ne se produise pas.

Lois de radiation et d'entrée en chômage

Loi de radiation

On voit par le graphique de l'évolution du taux de radiation en fonction de l'âge ci-dessous que, bien que les deux taux bruts soient presque identiques, les taux obtenus par la méthode de Kaplan-Meier sont légèrement supérieurs à ceux obtenus par la méthode de Nelson-Aalen. Par prudence, nous choisissons le taux brut de Kaplan-Meier.

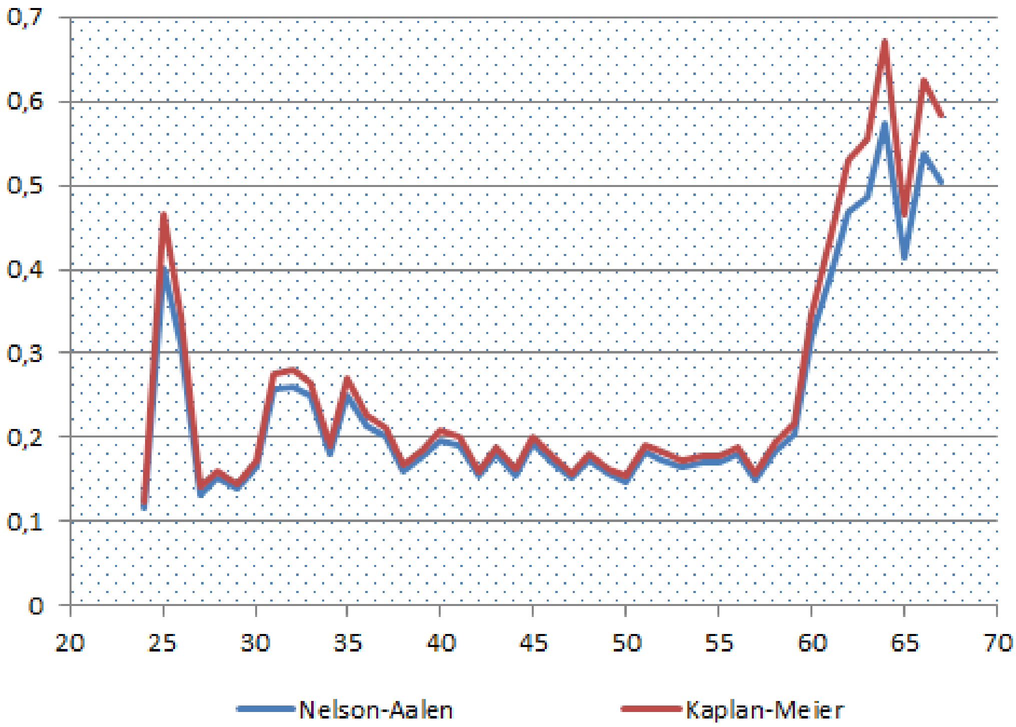


Figure 1 – Graphique des taux bruts de radiation de Kaplan-Meier et Nelson-Aalen

L'augmentation du taux de radiation pour les âges élevés correspond au départ à la retraite des séniors et chez les juniors cela s'explique par le fait que l'entrée en chômage est suivie d'une radiation du portefeuille.

Loi d'entrée en chômage

Le graphique de l'évolution du taux d'entrée en chômage en fonction de l'âge ci-dessous montre qu'il serait plus prudent de travailler avec les taux bruts obtenus par la méthode de Kaplan-Meier que ceux obtenus par la méthode de Nelson-Aalen, bien que les deux taux bruts soient très proches.

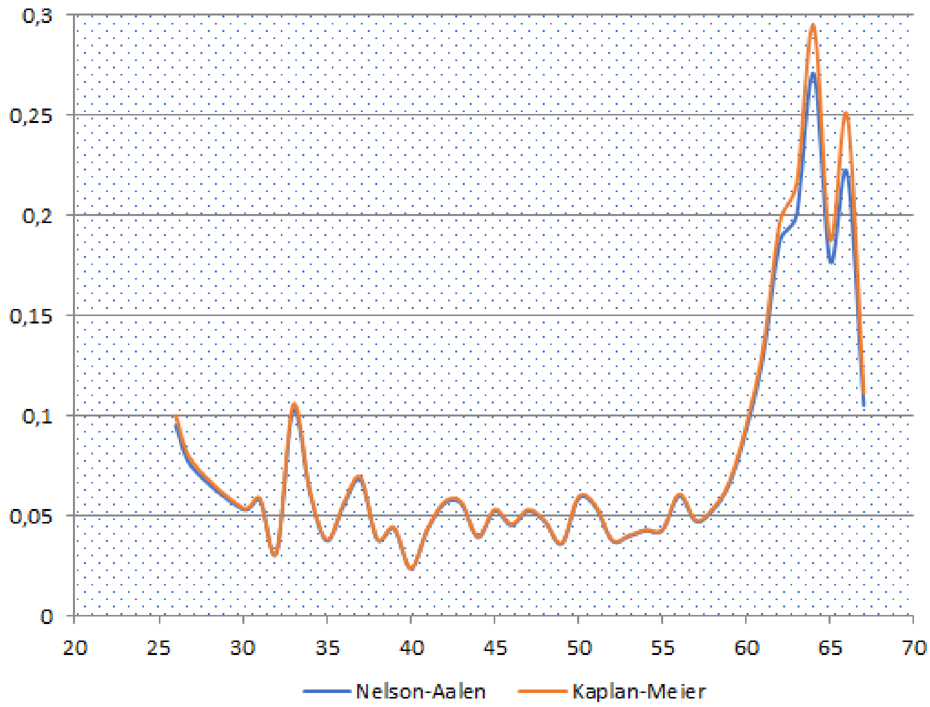


FIGURE 2 – Graphique des taux bruts d'entrée en chômage de Kaplan-Meier et Nelson-Aalen

Les observations montrent que le taux d'entrée en chômage est globalement stable entre 40 et 60 ans avec deux exceptions aux «extrémité». D'une part, les jeunes entrepreneurs ont une probabilité d'entrée en chômage plus élevée du fait du démarrage de leur activité ; d'autre part, les «seniors» en fin de carrière sont plus exposés au risque chômage. Il ne s'agit donc pas d'un «risque croissant» sur le principe de la santé ou de la dépendance.
Par ailleurs, le tarif peut être revu annuellement avec l'accord de l'association GSC, de même que les conditions de souscription (hausse de la durée de carence, ajout d'une surprime).
L'existence d'une Provision pour Risque Croissant n'est donc pas justifiée dans le cadre de ce régime.

Synthesis note

Reserving and profitability of an unemployment insurance scheme for business creators and managers

Selasse SEKLE (ISUP, Gan Assurances)

Key words : GSC, Pôle Emploi, Unédic,unemployment insurance, Reserving by GLM, PRC, Kaplan-Meier, Nelson-Aalen.

Problematic :

In France, only employees who have involuntarily lost their jobs are entitled to unemployment benefits under certain conditions : not reaching legal retirement age, being physically able to work, having been employed for at least six months during the last 24 months, etc. This is the solidarity pillar set up by the State and in charge of Pôle Emploi, the contact person for job seekers in France, and Unédic, the unemployment insurance manager.

On the other hand, since non-salaried workers (entrepreneurs and managers, craftsmen and traders) are not protected against unemployment, some employers' organizations such as Medef, CPME, U2P and some professional branches have created a non-profit association to help them to find work. have created a non-profit association called GSC, Garantie Sociale du Chef d'entreprise, in order to compensate for this.

The purpose of this article is to describe the GSC offer and to present the calculation of the PSAP, provision for claims to be paid, by the GLM method.

We will pay particular attention to the PRC, provision for increasing risk, to take into account the evolution of the claims experience with age, although this provision in unemployment insurance is debatable. We will also construct graphs of the unemployment entry and exit rates of a GSC member as a function of age, which will allow us to verify the usefulness of the PRC.

Description of the GSC offer

The «Garantie Sociale des Chefs et Dirigeants d'Entreprise» insurance product is a group insurance contract (GSC Agreement) with optional membership taken out by the GSC (Garantie Sociale des Chefs et Dirigeants d'Entreprise) Association, with Gan assurances, Allianz IARD, Generali France Assurances Incendie Accidents, S.M.A. BTP, co-insurers, represented by Gan assurances acting as lead insurer. It allows corporate officers who are not covered by Pôle emploi and self-employed managers to benefit from a replacement income in the event of involuntary job loss. The affiliation of the company on behalf of its executive director or the membership of the self-employed person to the GSC Convention is intended for companies that are members of an employers organization that is itself a member of the GSC Association and adheres to the Convention (with the exception of creators/take-overs of a company for less than three years who have opted for the Creator package). If the insured is a TNS (Non-Salaried Worker), he/she can benefit from the tax deductibility of the contributions from his/her professional income, under the conditions and within the limits of the Madelin law. The GSC Convention provides for the following insurance coverage :

- A warranty «Any entrepreneur»,that includes two formulas for the amount of daily allowances :

– A « Formula 55 »
– A « Formula 70 »
This benefit also offers three payment periods of daily benefits : «Duration 12 months», «Duration option 18 months» and «Duration option 24 months».

- A warranty called « Creator » for creators or entrepreneurs which provides for :
  – A formula for the amount of daily benefits, « Creator Formula »
  – A duration of payment of daily allowances, « Duration 12 months »

When applying for membership, the company must, in all cases, indicate the benefits and options formulas selected.

Reserving by GLM

Generalized linear models are a generalization of the Gaussian linear model and are characterized by three components :

– A random component, i.e. the decumulated payments $X_{i,j}$ are independent and identically distributed random variables and follow a law belonging to the family of exponential laws.

– A systematic deterministic component. Indeed, most provisioning models are based on a linear predictor

$$\Gamma_{i,j} = c_0 + \alpha_i + \beta_j \quad \text{for} \quad i, j = 1, \ldots, n$$

– A bijective g function called a link function such that :

$$\Gamma_{i,j} = g(\mu_{i,j}) \quad \text{where} \quad \mu_{i,j} = \mathbb{E}[X_{i,j} \mid (i,j)]$$

The explanatory variables are the year of occurrence i parameterized by α_i and the settlement time j parameterized by β_j.

Assuming that $X_{i,j}$ follows the Poisson distribution (of parameter $\alpha_i \beta_j$ for example), the link function g is the *log* function. In this case we have :

$$g(\mu_{i,j}) = \log(\mu_{i,j}) = c_0 + \alpha_i + \beta_j \quad \text{hence}$$
$$\mu_{i,j} = \exp(c_0 + \alpha_i + \beta_j)$$

We estimate the parameters c_0, α_i and β_j by the maximum likelihood method. Thus,

$$\hat{\mu}_{i,j} = \exp(\hat{c_0} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j) = \hat{X}_{i,j} \quad \text{and}$$

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i} \quad \text{hence} \quad \hat{C}_{i,n} = \sum_{j=0}^{n} \hat{X}_{i,j}$$

Validation of GLM models

After the GLMs have been used to calculate the reserve amount, they should be checked to ensure that they reflect reality and that they are valid. Generally, for linear models, after estimating the parameters, one ensures that the residuals are centered and Gaussian. In the case of generalized linear models, we have little information on the residuals. In particular, they have no reason to have the same variance and their distribution is not known.

In a GLM, to evaluate the goodness of fit of the model to the data, we measure the Δ deviation between the model and the data. This deviation called : the textbfdeviance is defined as twice the difference in log-likelihood between the current model and a saturated model (i.e. a model that fits the data perfectly).

$$\Delta = 2\log(\lambda) = 2(\tilde{l} - \hat{l})$$

where $\tilde{l}$ is the likelihood of the saturated model and $\hat{l}$ that of the estimated model. We can also define Δ as :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \delta_i^2$$

where δ_i are residual deviances and N the number of observations. We know from Wilks' theorem that if the assumptions of the GLM model hold, then :

$$\Delta \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_{N-p}$$

with p the number of parameters to estimate.
So we understand that $\mathbb{E}[\Delta] = N - p$ and we expect that each $\delta_i^2 \simeq \frac{N-p}{N} \simeq 1$.
A value of δ_i^2 far from 1 indicates that the observation i contributes to the bad fit. But for the quasi-Families models like for example the quasi-Poisson model it will not be the Chi-square law but the Fisher's law as we will see just after.

Let D_1 be the Null Deviance with p_1 degree of freedom and D_2 the Residual Deviance with p_2 degree of freedom.

Validation of the GLM Gamma

To validate the GLM Gamma, we will perform a Chi-square test. The test statistic W_{chi^2} is calculated as follows :

$$\boxed{W_{\chi^2} = D_1 - D_2}$$

We can therefore calculate the p-value of the test using the following R code :

$$\boxed{pchisq(W_{\chi^2}, df = p, \text{lower.tail} = \text{FALSE})}$$

The model is validated if the p-value $< 5\%$.

Validation of the quasi-Poisson GLM

To validate the quasi-Poisson GLM, we will perform a Fisher test. The test statistic T_{Fisher} is computed as follows :

$$\boxed{T_{Fisher} = \frac{D_1 - D_2}{(p_1 - p_2) \times \phi}}$$

where ϕ is the dispersion coefficient of the model. We compute the p-value of the test via the following R code :

$$\boxed{pf(T_{Fisher}\ ,\ p_1 - p_2\ ,\ p_2\ ,\ \text{lower.tail} = \text{FALSE})}$$

The model is validated if the p-value $< 5\%$.

Provision for increasing risk (PRC in french)

The provision for increasing risk is by definition a provision that may be required [...] for insurance operations against the risks of sickness and disability and is equal to the difference in the present values of the commitments made by the insurer and the insured respectively.

As you can see, given its definition, *this provision in unemployment insurance is debatable.* But don't panic, we explain it all to you.

Why PRC in unemployment insurance GSC ?

This provision was created to take into account the increase in the frequency of claims due to the increase in the average age of the members in the portfolio.

Its theoretical basis is the independence of the contribution from the age at subscription and the absence of changes in the rate according to age. On the other hand, its regulatory basis is questionable, insofar as the insurance code does not explicitly mention the unemployment risk.

Method of calculating the PRC

The provision for increasing risk for an insured of age x is calculated as the difference between the probable present values of the insured's liabilities and the insurer's liabilities.

$$\boxed{\mathrm{PRC}_x = \mathrm{VAP}_{\mathrm{Insurer}} - \mathrm{VAP}_{\mathrm{Insured}}}$$

$\mathrm{VAP}_{\mathrm{Insurer}}$ is the total benefits paid by the insurer to the insured if the latter becomes unemployed and as long as he is still in the portfolio and $\mathrm{VAP}_{\mathrm{Insured}}$ is the set of premiums paid by the insured to the insurer while he is still in the portfolio.

Let's consider a member in portfolio at a date $t = t_i$ not unemployed. Let's look at his status at date $t = t_{i+1}$. At this date, he is either unemployed, or he is removed from the portfolio, or he is still in the portfolio but is not unemployed. This information will allow us to calculate the probable present values of his liabilities and those of his insurer.

In the following we will note :
- x the age of the insured at subscription
- *Cot*, the conventional contribution excluding VAT
- *Rd(i)* the age-dependent write-off law *i*.
- *Prest(i)* the age-based benefit entry law *i*.
- T_{IJ}, the inflation rate of the Daily Allowance,
- T_S, the average rate of wage inflation used,
- T_{Com} the premium commission rate
- T_g the management fee rate, a fraction of the benefit amount
- τ the technical discount rate set
- R, the amount of the guaranteed benefit

Before calculating the liabilities of the insured and the insurer, let ν be the discount factor and ${}_kP_x^{SC}$ the probability that an insured of age x at enrollment will be in the portfolio for k years without experiencing unemployment.

$$\nu = \frac{1}{1+\tau} \quad \text{et} \quad {}_kP_x^{SC} = \prod_{j=0}^{k} \left[1 - Rd(x+j) - Prest(x+j)\right]$$

Calculation of the Insurer's commitments

$$\boxed{\text{VAP}_{\text{Insurer}} = R \times (1+T_g) \times \sum_{k=0}^{68-x} {}_kP_x^{SC} \times Prest(x+k) \times (1+T_{IJ})^k \times \nu^{k+\frac{1}{2}}}$$

Calculation of the Insured's liabilities

$$\boxed{\text{VAP}_{\text{Insured}} = Cot \times (1-T_{Com}) \times \sum_{k=0}^{68-x} {}_kP_x^{SC} \times (1+T_S)^k \times \nu^{k+\frac{1}{2}}}$$

All that remains is to calibrate the unemployment entry and disenrollment laws.

The combined ratio

This is a key ratio that allows the insurer to measure the profitability of its business over a given period. It is calculated as follows :

$$\boxed{\text{Combined ratio} = \frac{\text{Ultimate loss expenses} + \text{total costs} + \text{ cost of reinsurance}}{\text{Written premiums}}}$$

Note that the combined ratio is intended to be less than one, because a combined ratio greater than one means that the portfolio is in deficit. This is because the total amount of claims, expenses and reinsurance costs paid is greater than the premiums collected. The Risk Management and Control Department ensures that this scenario does not occur.

Disenrollment and unemployment entry laws

Disenrollment law

We see from the graph of the evolution of the debarment rate as a function of age below that, although the two crude rates are nearly identical, the rates obtained by the Kaplan-Meier method are slightly higher than those obtained by the Nelson-Aalen method. To be conservative, we choose the Kaplan-Meier crude rate.

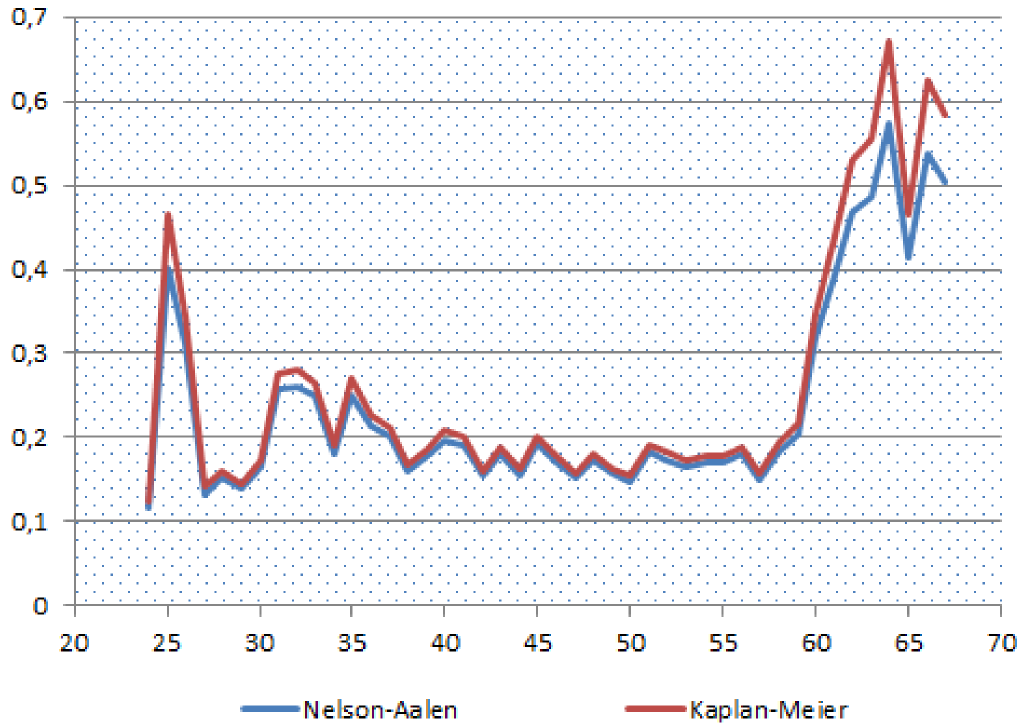


Figure 3 – Graph of Kaplan-Meier and Nelson-Aalen crude disenrollment rates

The increase in the write-off rate for older ages corresponds to the retirement of seniors, and for juniors it is explained by the fact that the entry into unemployment is followed by a delisting from the portfolio.

Unemployment entry law

The graph of the evolution of the unemployment entry rate as a function of age below shows that it would be more prudent to work with the crude rates obtained by the Kaplan-Meier method than those obtained by the Nelson-Aalen method, although the two crude rates are very close.

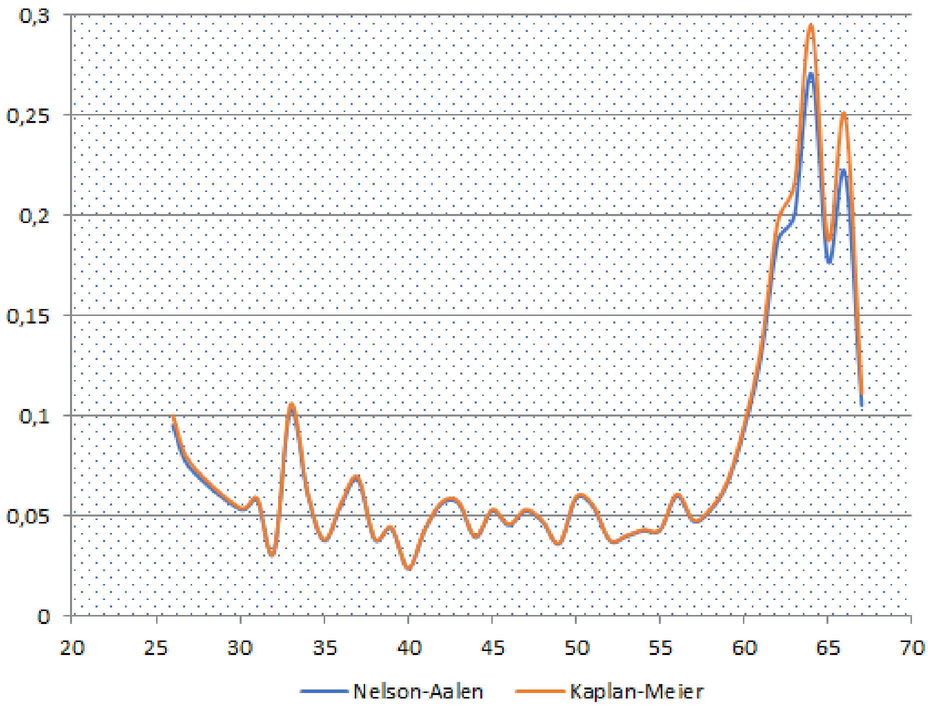


FIGURE 4 – Graph of Kaplan-Meier and Nelson-Aalen gross unemployment entry rates

The observations show that the rate of entry into unemployment is globally stable between the ages of 40 and 60 with two exceptions at the extremes. On the one hand, young entrepreneurs have a higher probability of becoming unemployed because of the start of their activity ; on the other hand, senior entrepreneurs at the end of their career are more exposed to the risk of unemployment. It is therefore not a question of a growing risk based on the principle of health or dependence.
In addition, the rate can be reviewed annually with the agreement of the GSC association, as well as the conditions of subscription (increase in the waiting period, addition of a premium).
The existence of a Provision for Increasing Risk is therefore not justified in the context of this plan.

Remerciements

Je tiens à remercier vivement mon manager monsieur Blaise-Marie CANTAU responsable du pôle actuariat et pilotage de Gan Assurances pour la qualité de sa formation que j'ai eu la chance de recevoir tout au long de mes stage et alternance. Je voudrais lui témoigner ma plus profonde gratitude pour ses conseils et disponibilité pour la rédaction de ce mémoire.

Je remercie mon tuteur pédagogique monsieur Olivier Lopez directeur de l'ISUP pour son suivi et ses précieux conseils tout au long de l'année.

Je remercie toute l'équipe actuariat de Gan Assurances en particulier Sérigne-Saliou NDIAYE, Wiem BOUDOKHANE, David YENGUE, Pierre-Yves SIMON et Mickael ITTAH pour leurs divers conseils et esprit d'équipe. J'ai beaucoup appris d'eux durant ma formation.

Je remercie du fond du coeur le Pére Robert de Prémare curé de la paroisse Saint-Jacques de Mont-Saint-Aignan, monsieur et madame BONNET et monsieur HERON pour leurs divers soutiens tant matériels qu'immatériels.

Merci à ma chère soeur Emilie SEKLE et ses enfants, mon cher cousin Edmond MIHESSO et à toute ma famille pour leur soutien sans faille qui ne m'a jamais manqué.

Table des matières

Introduction

Le chômage est défini comme étant une période d'interruption forcée d'une activité salariée. C'est un sujet de préoccupation majeure dans tous les pays du monde. Dans certains pays, les travailleurs souscrivent une assurance chômage pour se protéger du risque de se retrouver sans travail. En France, l'assurance chômage présente deux piliers d'indemnisation à savoir :

- Le pilier de solidarité mis en place par l'Etat et en charge de Pôle Emploi et l'Union nationale interprofessionnelle pour l'emploi dans l'industrie et le commerce (Unédic).

- et le pilier assurantiel, qui va nous intéresser dans ce mémoire, qui est en fait, l'assurance chômage privée. Ce type d'assurance s'adresse aux entrepreneurs, mandataires sociaux, artisans et commerçants qui n'ont pas droit au chômage. Elle est l'oeuvre de certaines associations comme la GSC, Garantie Sociale du Chef d'entreprise, qui regroupent certaines organisations patronales et certaines branches professionnelles.

Dans un premier temps, nous présenterons l'assurance chômage en France et en particulier l'assurance chômage privée GSC ainsi que la base de calcul de la garantie.

Ensuite, nous parlerons des différentes provisions techniques dont la plus importante est la provision pour sinistre à payer et de leurs modalités de calcul. Le modèle de provisionnement de Chain Ladder et ses modèles dérivés déterministes et stochastiques seront appliqués sur des données GSC légèrement modifiées afin de préserver la confidentialité des données réelles. Nous accorderons une attention particulière à la provision pour risque croissant la PRC, une provision discutable en assurance chômage.

Enfin, nous construirons au travers des outils d'analyse de survie, dont nous ferons un bref rappel, les tables de lois d'entrée en chômage et de radiation d'un affilié du régime GSC, indispensables au calcul de la PRC.

Chapitre 1

L'assurance chômage en France

1.1 Généralité sur le système français d'assurance chômage

1.1.1 Définition de l'assurance chômage

L'assurance chômage, en France, est un système de protection sociale ayant pour but d'indemniser les chômeurs et favoriser leur retour à l'emploi. Elle est obligatoire pour tous les salariés du secteur privé. Le salarié et l'employeur assurent la cotisation qui est proportionnelle au salaire.

Dans le secteur public, même si l'affiliation des agents à l'Unédic (Union nationale interprofessionnelle pour l'emploi dans l'industrie et le commerce) n'est pas obligatoire car ils sont couverts par une garantie d'emploi ou l'auto-assurance, ils ont bien droit au chômage d'après l'article L. 5424-1 du code du travail. Les employeurs du secteur public sont donc tenus d'assurer les agents fonctionnaires et non fonctionnaires de l'Etat et de ses établissements publics et administratifs, les agents non titulaires de droit public ou privé et les stagiaires, contre le risque chômage. Le chômeur, s'il remplit certaines conditions dont nous parlerons juste après, a droit à une partie du salaire de son ancien emploi, sinon, il peut, dans certaines conditions, percevoir une aide de l'Etat comme par exemple le RSA, le Revenu de Solidarité Active.

1.1.2 Pôle Emploi et l'Unédic

1.1.2.1 Qu'est-ce que Pôle Emploi ?

Seul interlocuteur des demandeurs d'emploi en France depuis sa création en 2008, Pôle Emploi est un acteur central des politiques d'emploi dont les missions principales sont :

- Accompagner les personnes à la recherche d'un emploi, d'une formation et de conseils professionnels
- Inscrire et indemniser les demandeurs d'emploi, pour le compte du régime d'assurance chômage et pour le compte de l'Etat
- Assurer le contrôle de la recherche d'emploi
- Identifier les besoins et les profils correspondants
- Informer les recruteurs sur le marché du travail

- Concourir à la sélection des candidats

- Conseiller les recruteurs sur la définition des postes et sur le ciblage des profils ainsi que sur l'adaptation des candidats aux spécificités du poste.

- Proposer des méthodes de recrutement innovantes pour les postes difficiles à pourvoir.

- Informer et mettre en œuvre la formation, les aides à l'embauche et les mesures pour l'emploi.

Pôle Emploi met en œuvre toutes les actions en relation avec sa mission que lui confient l'État, les collectivités territoriales et l'Unédic.

Avec la création de Pôle Emploi les règles de recouvrement des cotisations sont modifiées et sont désormais collectées par les Urssaf (Unions de recouvrement des cotisations de sécurité sociale et d'allocations familiales).

1.1.2.2 Qu'est-ce que l'Unédic ?

Créée en 2008, l'Union nationale interprofessionnelle pour l'emploi dans l'industrie et le commerce (Unédic) est le gestionnaire de l'assurance chômage. C'est un organisme de droit privé chargé d'une mission de service public et dirigé à part égale par des représentants d'organisations syndicales patronales et de salariés. Elle collecte les cotisations chômages et indemnise les demandeurs d'emploi. Avec la création de Pôle Emploi, son action est recentrée sur une activité de pilotage et de gestion des politiques d'assurance chômage au travers de six missions spécifiques.

- Conseiller les partenaires sociaux dans leurs négociations en simulant des changements de règles, analyses juridiques, études des relations entre l'Assurance chômage et le marché du travail, comparatifs européens, étude sur la faisabilité d'une mesure. C'est avec ces informations que l'Unédic aide les partenaires sociaux à prendre des décisions lorsqu'ils négocient les règles de l'Assurance chômage et fixent le taux des cotisations.

- Sécuriser les règles en les inscrivant dans le texte. Une fois les règles définies, l'Unédic formalise les décisions des partenaires sociaux pour qu'elles puissent être appliquées, en lien avec ses opérateurs.

- Sécuriser « le financement pour garantir le versement des allocations ». L'Unédic réalise les travaux de prévision des dépenses et des recettes et peut éventuellement faire appel à des emprunts pour garantir le paiement des allocations.

- Faire comprendre les règles, leur sens et leur évolution. Pour cela, l'Unédic veille à ce que chacun les demandeurs d'emploi, salariés, employeurs, experts du marché du travail ou de la protection sociale, etc. aient accès aux informations dont ils ont besoin.

- Piloter l'indemnisation et les relations avec les opérateurs. Garante de la mise en œuvre de l'Assurance chômage, l'Unédic suit de près l'action des opérateurs à qui elle a confié la collecte des cotisations et le versement des allocations, y compris en région.

- Évaluer les dispositifs créés par les partenaires sociaux. Les mesures prises par les partenaires sociaux doivent pouvoir se confronter à la réalité pour s'ajuster. C'est pourquoi l'Unédic les évalue en permanence avec des indicateurs de suivi, des études, mais aussi via des partenariats de recherche, des analyses et des enquêtes.

1.1.3 Le système d'indemnisation du chômage

Il existe deux piliers d'indemnisation du chômage : le pilier de solidarité et le pilier assurantiel.

1.1.3.1 Le pilier de solidarité

Les prestations de chômages sont dégressives c'est-à-dire que leur montant diminue au cours du temps. Lorsque les demandeurs d'emploi ont épuisé leur droit, ils peuvent cependant bénéficier de dispositifs dits de solidarité gérés par l'État et financés par une part de la CSG comme l'ASS, l'allocation spécifique de solidarité après avoir épuisé leurs droits à l'ARE, l'allocation d'aide au retour à l'emploi, dès qu'ils sont physiquement aptes au travail et recherchent activement un emploi. Ils doivent par ailleurs pouvoir justifier de cinq ans d'activité salariée dans les dix ans précédant la fin du contrat de travail à partir de laquelle ont été ouverts leurs droits aux allocations d'assurance. Cette prestation est par ailleurs soumise sous conditions de ressources, le plafond mensuel à ne pas dépasser étant fixé, à 1183,70 euros pour une personne seule et à 1860,10 euros pour un couple, en 2021.

1.1.3.2 Le pilier assurantiel

C'est parce que le système est contributif et financé par des cotisations au même titre, par exemple, que les autres risques couverts par la Sécurité sociale (maladie, retraite, etc.) que l'on parle d'assurance chômage. Seuls les employeurs versent les contributions d'assurance chômage. En effet, les salariés ne versent plus de cotisations salariales qui sont supprimées au 1er janvier 2019 et remplacées par une participation de l'Etat au financement de l'assurance chômage qui prend la forme d'une part de CSG (Contribution Sociale Généralisée) qui lui est affectée.

Le montant des cotisations et des allocations est plafonné : la part du salaire soumise à cotisation est limitée à quatre fois le PASS (Plafond Annuel de la Sécurité Sociale).

1.1.4 Les conditions pour toucher des allocations de chômage

Pour être bénéficiaire de l'allocation chômage, le chômeur doit remplir certaines conditions :

- Avoir été salarié au moins six mois au cours des 24 derniers mois (36 mois s'il est âgé d'au moins cinquante-trois ans à la date de fin de son dernier contrat de travail), une condition qui peut être remplie avec un ou plusieurs contrats chez différents employeurs.

- Avoir perdu involontairement son emploi ou avoir perdu son emploi dans le cadre d'une rupture conventionnelle ou d'une rupture d'un commun accord.

- Ne pas avoir atteint l'âge légal de départ à la retraite.

- Etre en capacité physique d'exercer un emploi.

- Rechercher un emploi de façon effective et constante

- Etre inscrit à Pôle Emploi dans les 12 mois qui suivent la perte de son travail.

- Résider sur le territoire français

Toutes ces conditions doivent être respectées pour que le chômeur ait droit au chômage.

1.1.5 Les nouvelles règles d'indemnisation du chômage

Depuis le 1er décembre 2021, le gouvernement a proposé quatre séries de mesures qui sont actuellement en vigueur :

- **Dégressivité de l'allocation dès le 7e mois** : Une réduction de 30% maximum de l'allocation peut s'appliquer aux demandeurs d'emploi dont les revenus dépassent un certain seuil et qui ont moins de 57 ans à la date de fin de leur contrat. Depuis le 1er décembre 2021, elle peut s'appliquer à partir du 7emois d'indemnisation (au lieu du 9emois auparavant). Un plafond limite la prise en compte des périodes d'inactivité entre les contrats.

- **Un nouveau calcul pour les allocations chômage** : Elle correspond à la somme des salaires et rémunérations reçus durant la période utilisée pour le calcul de la durée de l'allocation chômage. Ce salaire de référence est ensuite divisé par la durée du droit. Certaines périodes (maladie, temps partiel, etc.) ne correspondant pas à une rémunération normale sont ajustées

- **La durée minimum d'affiliation pour bénéficier du chômage** : Il faut avoir travaillé 130 jours ou 910 heures (soit environ 6 mois) pour pouvoir ouvrir ou recharger des droits à l'assurance chômage.

- **L'introduction d'un bonus-malus sur la contribution chômage des employeurs** Les contributions d'assurance chômage des entreprises de certains secteurs qui ont recours aux contrats courts pourront varier à la hausse ou à la baisse, en fonction du nombre de salariés qui s'inscriront à Pôle emploi. Sont concernées les entreprises de 11 salariés et plus, appartenant à des secteurs d'activité ayant un taux de séparation moyen supérieur à 150% sur une période de 3 ans.

1.2 Marché de l'assurance chômage privée

La plupart des chefs d'entreprise et travailleurs non-salariés (artisans et commerçants) ne dépendent pas du régime classique d'assurance chômage donc n'ont pas droit aux allocations de chômage en cas de perte involontaire de leur emploi. Mais avec la nouvelle loi sur la liberté de choisir son avenir professionnel, l'assurance chômage est étendue aux travailleurs indépendants à partir de 2019 sous certaines conditions :

- Redressement judiciaire à l'encontre de son entreprise,

- Condition de ressources à remplir par le demandeur.

Mais tous les travailleurs non-salariés ne sont pas concernés par la réforme en question et étant donné qu'ils ne sont pas à l'abri d'une perte involontaire de leur emploi, ils peuvent souscrire une assurance chômage privée dans le but de percevoir des revenus compensatoires durant la période de chômage.

D'après l'Observatoire de l'Emploi des Entrepreneurs porté par l'Altares et l'association GSC (dont il sera question dans ce mémoire), en 2020, le nombre de travailleurs indépendants ayant perdu leur emploi à cause d'une liquidation judiciaire est d'un peu plus de 33 000.

C'est donc un petit marché que partagent Groupama-Gan Assurances, Axa, April et l'APPI (Association pour la Protection des Patrons Indépendants).

Les situations couvertes par l'assurance chômage privée sont :

- Une liquidation judiciaire
- Une cession
- Une fusion-absorption
- Un redressement
- Une dissolution anticipée en raison d'une mauvaise santé économique.

1.3 Description de l'offre GSC et enjeux économiques

1.3.1 Qu'est-ce que la GSC ?

La GSC (Garantie sociale des chefs et dirigeants d'entreprise) est une association à but non lucratif créé en 1979 par les syndicats patronaux (Medef, CPME, U2P et certaines branches professionnelles) dont le but est de protéger des travailleurs indépendants contre le chômage. C'est un intermédiaire d'assurance qui permet aux adhérents de percevoir un revenu en cas de perte involontaire d'emploi, les représente auprès des assureurs et défend leurs intérêts.
Son conseil d'administration est composé de chefs d'entreprise impliqués dans la promotion de cette solution dédiée aux entrepreneurs.

1.3.2 Description de l'offre GSC

Le produit d'assurance «Garantie Sociale des Chefs et Dirigeants d'Entreprise» est un contrat d'assurance de groupe (Convention GSC) à adhésion facultative souscrit par l'Association pour la Garantie Sociale des Chefs et Dirigeants d'Entreprise (GSC), auprès de Gan assurances, Allianz IARD, Generali France Assurances Incendie Accidents, S.M.A. BTP, co-assureurs, représentés par Gan assurances intervenant en qualité d'apériteur. Il permet aux dirigeants mandataires sociaux non pris en charge par Pôle emploi et aux dirigeants travailleurs non salariés (TNS) de bénéficier d'un revenu de substitution en cas de perte d'emploi involontaire. L'affiliation de l'entreprise pour le compte de son dirigeant mandataire social ou l'adhésion du travailleur non salarié à la Convention GSC est destinée aux entreprises membres d'une organisation patronale elle-même membre de l'Association GSC et adhérente à la Convention (exception faite pour les créateurs/repreneurs d'entreprise depuis moins de trois ans et ayant opté pour la formule Créateur forfaitaire). Si l'assuré est un TNS (Travailleur non-salarié), il peut bénéficier de la déductibilité fiscale des cotisations de ses revenus professionnels, dans les conditions et limites de la loi Madelin.

La Convention GSC prévoit les couvertures d'assurance suivantes :

- Une garantie «Tout entrepreneur», qui comprend deux formules pour le montant des indemnités journalières :
  – Une « Formule 55 »
  – Une « Formule 70 »
  Cette garantie propose en outre trois durées de versement des indemnités journalières : « Durée 12 mois », « Option de durée 18 mois » et « Option de durée 24 mois ».

- Une garantie dite « Créateur » pour créateur ou repreneur qui prévoit :
  – Une formule pour le montant des indemnités journalières, « Formule Créateur »
  – Une durée de versement des indemnités journalières, « Durée 12 mois »

Lors de sa demande d'affiliation, l'entreprise doit dans tous les cas, indiquer les garanties et les formules retenues.

1.3.2.1 Base de calcul de la garantie

Le Revenu professionnel annuel net imposable de l'exercice précédent, **à l'exclusion de tout dividende**, déclaré à l'Administration fiscale française par l'entreprise au titre de laquelle le Participant est affilié, sert de base au calcul des indemnités journalières et des cotisations. Il sera pris en considération dans la limite de huit fois le salaire plafond annuel de la Sécurité sociale (le PASS) de l'exercice en cours. Ce revenu professionnel est divisé en trois tranches de la façon suivante :

- Tranche A (Tr A) : fraction du revenu limitée au montant du salaire plafond annuel de la Sécurité sociale.

- Tranche B (Tr B) : fraction du revenu supérieure au montant du salaire plafond annuel de la Sécurité sociale, le montant de cette tranche étant limité à 3 fois le montant du salaire plafond annuel de la Sécurité sociale.

- Tranche C (Tr C) : fraction du revenu supérieure à 4 fois le montant du salaire plafond annuel de la Sécurité sociale, le montant de cette tranche étant limité à 4 fois le montant du salaire plafond annuel de la Sécurité sociale.

Le montant du revenu professionnel de l'exercice précédent doit être déclaré chaque année par l'entreprise aux Services GSC avant le 1er avril de chaque exercice. Notons qu'en 2022 le montant du PASS est de 41 136,00€

1.3.2.2 Montant et limites de l'indemnité journalière

Lorsque l'assuré est reconnu en état de perte involontaire d'activité professionnelle (redressement judiciaire s'accompagnant de la perte du mandat social et/ou du licenciement, de la liquidation ou de la cession judiciaire, de la fusion - absorption, de la restructuration profonde, dissolution ou cession à l'amiable, à la suite d'une contrainte économique, de l'entreprise), l'assuré bénéficie à compter de l'expiration de la **période de franchise** (**30 jours** de perte involontaire d'activité professionnelle continue), dans les conditions contractuelles et tant qu'il est effectivement à la recherche d'un emploi au sens des articles L.5421-1 et suivants du Code du travail, du versement d'une indemnité journalière.

Calcul de l'indemnité journalière IJ

L'indemnité journalière est calculée en fonction de la formule souscrite.
Formule 55

$$\boxed{IJ = 55\% \times \frac{\text{tr A} + \text{tr B} + \text{tr C}}{365}}$$

Formule 70

$$\boxed{IJ = \frac{70\% \times (\text{tr A} + \text{tr B}) + 55\% \times \text{tr C}}{365}}$$

Limites

Le montant total des indemnités versées en cas de perte involontaire d'activité professionnelle ne peut en aucun cas excéder 70% du revenu professionnel.

En outre, dans le cas où l'assuré bénéficiera de plusieurs affiliations à la Convention GSC, au titre de plusieurs entreprises, le cumul des indemnités journalières servies, sur une même période, ne peut excéder :

– 70% de la 365ème partie des tranches A et B de la somme des revenus professionnels afférents à chacune de ses affiliations

– 55% de la 365ème partie de la tranche C de la somme des revenus professionnels afférents à chacune de ses affiliations.

La somme des revenus professionnels afférents à chacune des affiliations reste en tout état de cause limitée à 8 fois le montant du salaire plafond annuel de la Sécurité sociale.

1.3.3 Compte technique du régime GSC

Comme tout bilan comptable, le compte technique du régime est composé de produits et de charges.

En produit, nous avons :

- Primes émises
- Provision pour Primes Non Acquises (PPNA) d'ouverture
- Provision pour Sinistre A Payer PSAP d'ouverture
- Autres provisions d'ouverture

En charge, nous avons :

- Règlements
- Provision pour Primes Non Acquises (PPNA) de clôture
- Provision pour Sinistre A Payer PSAP de clôture
- Commissions et autres frais d'acquisition et frais de gestions

- Autres provisions de clôture

Nous aborderons plus en détails ces différentes notions dans le chapitre suivant consacré aux provisions techniques.

Chapitre 2

Provisions techniques : description et modalités de calcul

2.1 Cycle de production dans le secteur de l'assurance

Le cycle de production dans le secteur de l'assurance est dit inversé. En effet, lorsqu'un commerçant ou une entreprise veut se lancer dans la commercialisation d'un produit, il ou elle évalue les dépenses nécessaires à la fabrication du produit et se fixe le prix de vente pouvant lui permettre de faire un bénéfice. Dans le secteur de l'assurance c'est tout l'inverse qui se passe. L'assureur fixe le prix de vente (la prime d'assurance) de sa prestation mais ne sait pas avec certitude combien va lui coûter le contrat qui le lie à l'assuré. Il ne sait même pas si le risque qu'il garantit se réalisera. Il a donc besoin de données et d'outils statistiques adéquats pouvant lui permettre de faire des projections c'est-à-dire de faire des provisions en fonction de sa connaissance de son portefeuille pour pouvoir faire face à ses engagements en cas de survenance de l'évènement garanti, le chômage par exemple. Ce sont certains des différents outils de statistiques couramment utilisés que nous verrons dans ce chapitre. Mais avant d'entrer dans le vif du sujet voyons comment est géré un sinistre en assurance non-vie.

2.2 Gestion d'un sinistre chômage

Vie d'un sinistre

Lorsqu'un chef ou dirigeant d'entreprise entre en chômage, avant son indemnisation, les étapes suivantes sont nécessaires :

- Déclaration à l'assureur du sinistre par l'assuré
- Vérification par l'assureur de la validité du contrat et des conditions de garantie (ex : délai de carence)
- Si la garantie est acquise, l'assureur évalue ses engagements envers l'assuré
- Vient ensuite le règlement du sinistre (indemnité mensuelle dans le cas de la garantie chômage)

On peut distinguer trois différents cas de vie des sinistres.

- Les sinistres survenus, déclarés et clôturés durant l'exercice. Il s'agit là des sinistres connus de l'assureur et clôturés à la fin de l'exercice parce que soit l'assuré a trouvé un emploi soit la durée d'indemnisation souscrite est arrivée à son terme. L'assureur n'ayant plus d'engagement envers l'assuré, il n'est plus nécessaire de provisionner pour ces sinistres.

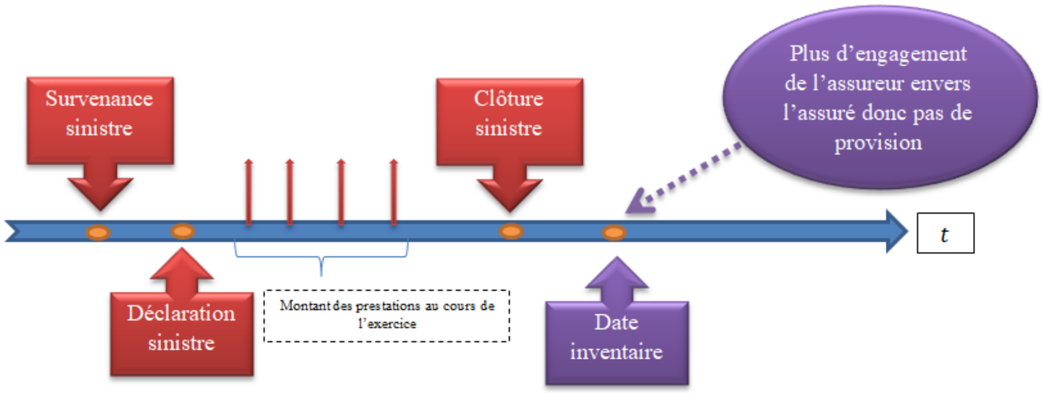


FIGURE 2.1 – Sinistres survenus, déclarés et clôturés durant l'exercice

- Les sinistres survenus, déclarés mais non clôturés à la fin de l'exercice. Il s'agit des sinistres dont l'assureur à connaissance, en cours de règlement même au-delà de l'exercice courant. L'assureur, dans ce cas, a des engagements envers l'assuré donc doit provisionner à la date d'inventaire.

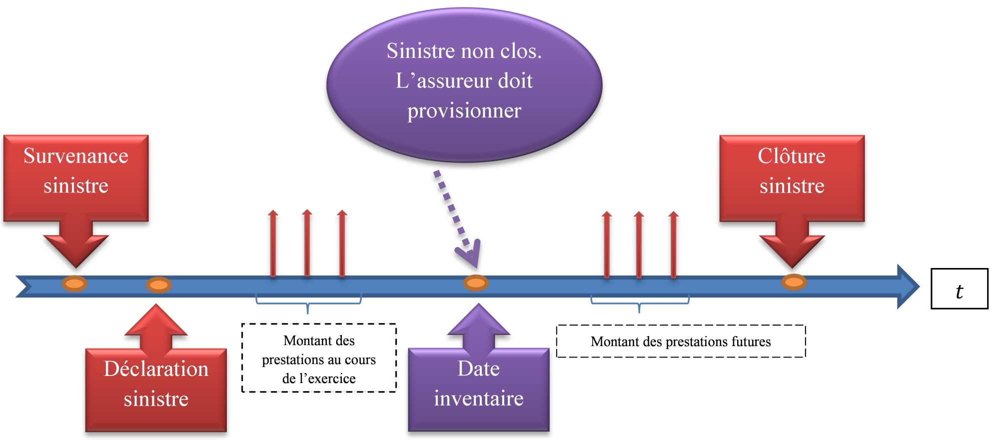


FIGURE 2.2 – Sinistres survenus, déclarés mais non clôturés

- Les sinistres survenus non encore connus de l'assureur. Pour faire face à ses engagements l'assureur doit provisionner.

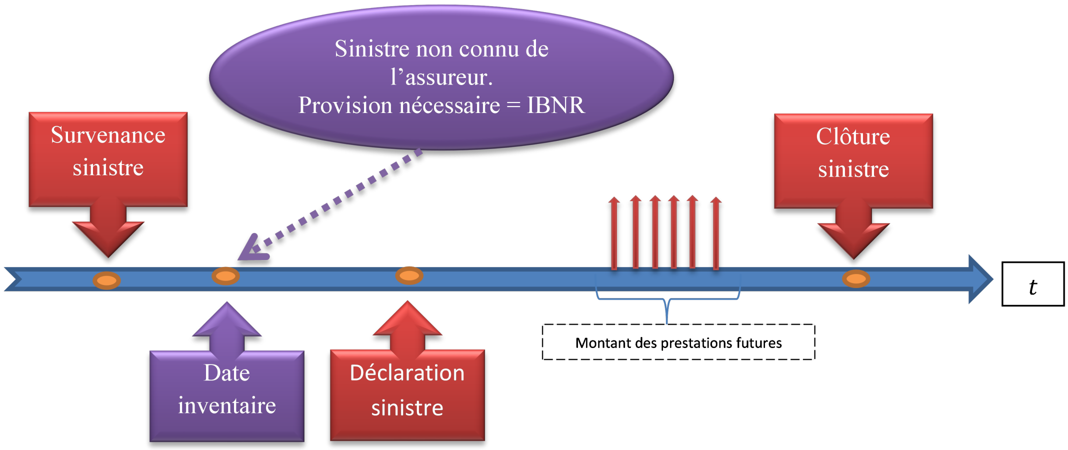


FIGURE 2.3 – Sinistres survenus non encore connus de l'assureur

Dans le dernier cas de gestion des sinistres, le coût final des sinistres est inconnu de l'assureur. La somme des règlements observés et de la provision pour sinistre à payer donne la charge sinistre ultime

2.3 Provision pour sinistre à payer PSAP

La provision pour sinistre à payer PSAP est la principale et la plus importante provision technique en assurance chômage GSC. Voyons ce qu'en dit le code des assurances :

Articles R331-6 alinéa 4 :
« La provision pour sinistre à payer est une valeur estimative des dépenses en principal et en frais, tant internes qu'externes, nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés, y compris les capitaux constitutifs des rentes non encore mises à la charge de l'entreprise »

Articles R331-15 :
« La provision pour sinistres à payer est calculée exercice par exercice. Sans préjudice de l'application des règles spécifiques à certaines branches prévues à la présente section, l'évaluation des sinistres connus est effectuée dossier par dossier, le coût d'un dossier comprenant toutes les charges externes individualisables ; elle est augmentée d'une estimation du coût des sinistres survenus mais non déclarés.

La provision pour sinistres à payer doit toujours être calculée pour son montant brut, sans tenir compte des recours à exercer ; les recours à recevoir font l'objet d'une évaluation distincte.

Par dérogation aux dispositions du deuxième alinéa du présent article, l'entreprise peut, avec l'accord de l'Autorité de contrôle prudentiel, utiliser des méthodes statistiques pour l'estimation des sinistres survenus au cours des deux derniers exercices. »

La PSAP est donc est destinée à permettre à l'assureur de régler les sinistres déjà survenus déclarés ou non. Ainsi,

$$\boxed{\textbf{PSAP} = \textbf{Provision dossier/dossier} + \textbf{IBNR} + \textbf{PFGS}}$$

Provision dossier/dossier : il s'agit de la provision relative à des dossiers ouverts et déjà évalués. Son inventaire est «permanent» et réalisé par les équipes de gestion dans le système de back-office.

IBNR ou Tardifs : il s'agit des provisions relatives à des dossiers déclarés mais non encore ouverts ou survenus mais non encore déclarés ou dont le montant des provisions est jugé insuffisant à la date d'inventaire. Le calcul de ces provisions est périodique (trimestriel) et réalisé sur la base de méthodes statistiques par l'actuaire.

PFGS : est la provision pour frais de gestion des sinistres destinée à couvrir les sinistres déjà survenus.

2.3.1 Méthodes de calcul des PSAP

Il existe différentes méthodes de calcul des PSAP en assurance non-vie. Dans ce mémoire nous parlerons de quelques unes de ces méthodes très utilisées par les actuaires non-vie et qui sont classées en deux catégories : la méthode déterministe et la méthode stochastique qui prend en compte la volatilité liée à la cadence des règlements.

Dans toute la suite, nous noterons :
− i l'année de survenance, soit l'année où le sinistre est survenu ;
− j l'année de développement, c'est-à-dire le nombre d'années après l'année de survenance où un paiement est effectué.

Si i est l'année de survenance et j l'année de développement alors un paiement est effectué l'année calendaire $i + j$;
− $X_{i,j}$ le montant du paiement effectué l'année $(i + j)$ pour tous les sinistres survenus l'année i ;
− $C_{i,j}$ le montant cumulé des paiements effectués pendant j années depuis l'année i pour tous les sinistres survenus l'année i, soit :

$$C_{i,j} = \sum_{h=1}^{j} X_{i,h} \quad \text{et} \quad X_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$$

Le triangle des prestations cumulées se construit à partir de celui du triangle décumulé et vice versa.

Année de survenance i	*Année de développement j*								
	1	2	...	j	...	$n-i$	...	$n-1$	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	$C_{1,j}$	...	$C_{1,n-i}$	...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	...	$C_{2,j}$	...	$C_{2,n-i}$	...	$C_{2,n-1}$	
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$		
i	$C_{i,1}$	$C_{i,2}$	...	$C_{i,j}$	...	$C_{i,n-i}$			
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$				
$n-i$	$C_{n-i,1}$	$C_{n-i,2}$	...	$C_{n-i,j}$					
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$						
$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$							
n	$C_{n,1}$								

TABLE 2.1 – Tableau des paiements cumulés

La valeur de chaque cellule du triangle correspond à $C_{i,j}$ donc au montant cumulé des paiements effectués pendant j années depuis l'année i pour tous les sinistres survenus l'année i. Chaque diagonale représente une année calendaire.

Notons que pour la première année de développement, les montants des prestations décumulées et cumulées sont égaux, c'est-à-dire pour tout i :

$$C_{i,1} = X_{i,1}$$

La différence entre la charge ultime et le paiement cumulé constitue le montant de provision rattaché à l'année de survenance. Ainsi, en additionnant les montants des provisions par année de survenance on détermine le montant total des provisions.

2.3.1.1 La méthode de Chain Ladder

Cette méthode basée sur la bonne vieille règle de trois est incontestablement la plus célèbre des méthodes de provisionnement dans la branche non-vie des compagnies d'assurance.

La philosophie derrière la méthode de Chain Ladder et qui constitue en même temps son inconvénient dont nous parlerons dans la suite de ce mémoire, est la suivante : on suppose que la cadence des règlements futurs des sinistres sera comme celle du passé. Elle permet donc de faire des projections, à partir des paiements cumulés observés, par année de survenance, jusqu'à l'ultime.

- **Avantages** :

  − La méthode de Chain Ladder est une méthode de référence dans la branche non-vie, facile à utiliser et largement utilisée à l'international.

  − Elle peut s'appliquer à de nombreux types de données : règlements, charges sinistres, recours, nombre de sinistres, coût moyen de sinistre et les résultats obtenus sont faciles à comprendre et à interpréter.

- **Limites** :

  La méthode Chain Ladder présente quelques limites :

  − Elle ne tient pas compte de la volatilité de la cadence des règlements des prestations

  − Les hypothèses sous-jacentes, que nous verrons après, sont trop fortes et ne sont pas toujours vérifiées.

  − C'est une méthode qui peut être remise en cause par la présence d'une saisonnalité ou d'un changement du rythme de paiement des prestations.

Hypothèses de la méthode de Chain Ladder

La méthode de Chain Ladder repose sur les hypothèses fortes suivantes :

1. Les rapports $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ appelés facteurs de développement sont supposés indépendants de l'année d'origine i. Cela signifie que pour $j = 1, \ldots, n-1$ fixé et pour tout i,

$$\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} = f_j$$

2. Les montants cumulés par année de survenance sont indépendants c'est-à-dire $(C_{i_1,1}, C_{i_1,2}, ..., C_{i_1,n})$ et $(C_{i_2,1}, C_{i_2,2}, ..., C_{i_2,n})$ sont indépendants pour tout $i_1 \neq i_2$.

La première hypothèse stipule que si approximativement l'on a :

$$\frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} = \frac{C_{2,j+1}}{C_{2,j}} = ... = \frac{C_{n-j-1,j+1}}{C_{n-j-1,j}} = f_j = \text{cste}$$

alors

$$\boxed{f_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}}}$$

Estimer les facteurs de développement revient donc à calculer : $\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}}$, pour tout j. Par ce qui précède, pour la survenance i, pour tout j l'on a :

$$C_{i,j} = f_{i,j-1} \times C_{i,j-1} = \cdots = f_{i,j-1} \times f_{i,j-2} \times \cdots \times f_{i,j-i} \times C_{i,j-i}$$

On peut donc estimer les paiements cumulés futurs pour l'année de survenance i :

$$\hat{C}_{i,j} = \hat{f}_{i,j-1} \times \hat{f}_{i,j-2} \times \cdots \times \hat{f}_{i,j-i} \times C_{i,j-i}$$

L'estimation de la provision $\hat{R}_i^{CL}$ pour la survenance i est :

$$\hat{R}_i^{CL} = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}$$

et le montant total des provisions $\hat{R}^{CL}$ est égal à :

$$\hat{R}^{CL} = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i^{CL}$$

2.3.1.2 Méthode Expected Loss Ratio

La méthode Expected Loss Ratio est basée sur l'estimation du ratio sinistres à primes ultime L_i pour l'année de survenance i.

$$L_i = \frac{S_i}{P_i}$$

avec S_i la somme des prestations réglées et futures et P_i la prime totale émise (celle encaissée et celle à recevoir) pour la survenance i.

L'estimation de la charge sinistre ultime est alors calculée comme suit :

$$\hat{C}_{i,n}^{LR} = \mathbb{E}[C_{i,n}] = \hat{L}_i \times P_i$$

La provision à constituer pour la survenance i est :

$$\hat{R}_i^{LR} = \hat{C}_{i,n}^{LR} - C_{i,n-i}$$

et la provision totale (toute survenance) est :

$$\hat{R}^{LR} = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i^{LR}$$

Cette méthode est simple et rapide d'utilisation et a le mérite de ne dépendre que d'un paramètre exogène $\hat{L}_i$. Son application ne nécessite pas l'utilisation du triangle des prestations. Mais son inconvénient est qu'il faudrait une très bonne connaissance du portefeuille, de plus, l'estimation du ratio attendu n'est pas chose facile.

2.3.1.3 Méthode de Bornhuetter-Ferguson

Cette méthode proposée comme une alternative à la méthode de Chain Ladder par Bornhuetter et Ferguson en 1972 dans « *The Actuary and IBNR*» repose sur les hypothèses suivantes :

1. La somme des règlements futurs c'est-à-dire la provision à constituer est indépendante de la somme des paiements connus pour l'année de survenance i.
   Autrement dit :
   $$C_{i,n} - C_{i,n-i} \quad \text{et} \quad C_{i,n-i} \quad \text{sont indépendants}$$
2. Une estimation a priori de la charge ultime $C_{i,n}$ est déterminée comme suit :
   $$\hat{C}_{i,n}^{LR} = \rho_i \times P_i$$
   avec ρ_i le S/P (ratio sinistres sur primes) attendu pour l'année de survenance i, et P_i le montant de primes acquises relatif à cette même année.

3. Les facteurs de développement $\hat{\eta}_j$ sont tels que :
   $$\hat{\eta}_j = \prod_{k=j}^{n-1} \frac{1}{\hat{f}_k}$$
   où les $\hat{f}_k$ sont les facteurs de développement de Chain Ladder

L'estimation de la charge ultime par la méthode de Bornhuetter-Ferguson $\hat{C}_{i,n}^{FB}$ est alors calculée comme suit :

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{i,n}^{FB} &= C_{i,n-i} + (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times \hat{C}_{i,n}^{LR} \\
&= \hat{\eta}_{n-i} \times \frac{C_{i,n-i}}{\hat{\eta}_{n-i}} + (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times \hat{C}_{i,n}^{LR} \\
\hat{C}_{i,n}^{FB} &= \hat{\eta}_{n-i} \times \prod_{k=n-i}^{n-1} \hat{f}_k \times C_{i,n-i} + (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times \hat{C}_{i,n}^{LR}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{C}_{i,n}^{FB} = \hat{\eta}_{n-i} \times \hat{C}_{i,n}^{CL} + (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times \hat{C}_{i,n}^{LR}}$$

Ainsi, l'estimation de la charge ultime par la méthode de Bornhuetter-Ferguson correspond à une pondération entre une estimation Chain Ladder et la charge de sinistres ultimes supposée connue via un S/P ultime défini a priori. En d'autres termes, la charge ultime par la méthode de Bornhuetter-Ferguson est une combinaison linéaire convexe de la charge ultime calculée par la méthode de Chain Ladder et celle calculée via un *avis d'expert*.

La provision $\hat{R}_i^{FB}$ à constituer pour l'année de survenance i se déduit :

$$\hat{R}_i^{FB} = \hat{C}_{i,n}^{FB} - C_{i,n-i} = (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times \hat{C}_{i,n}^{LR}$$

et la provision totale (toute survenance) est :

$$\hat{R}^{BF} = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i^{FB}$$

L'**avantage** de la methode BF est qu'on peut l'appliquer à des triangles des prestations instables car elle permet d'améliorer la stabilité en prenant en compte des informations exogènes aux triangles.

L'**inconvénient** est qu'elle utilise un loss ratio attendu (défini par avis d'expert) qui n'est pas toujours connu et comme on vient de le voir la charge sinistre ultime en dépend.

2.3.1.4 La méthode Benktander

Cette méthode s'inscrit dans la même logique que la méthode de Bornhuetter-Ferguson. Cette fois c'est la charge ultime estimée a priori $\hat{C}_{i,n}^{LR}$ qui est remplacée par celle estimée par la méthode de Bornhuetter-ferguson $\hat{C}_{i,n}^{BF}$. La charge ultime estimée par la méthode de Benktander $\hat{C}_{i,n}^{B}$ est :

$$\hat{C}_{i,n}^{B} = C_{i,n-i} + (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times \hat{C}_{i,n}^{BF}$$

La provision $\hat{R}_i^B$ à constituer pour l'année de survenance i se déduit :

$$\hat{R}_i^B = \hat{C}_{i,n}^{B} - C_{i,n-i} = (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times \hat{C}_{i,n}^{BF}$$

et la provision totale (toute survenance) est :

$$\hat{R}^B = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i^B$$

Cette approche s'avère intéressante. En effet,

$$\begin{aligned}
\hat{R}_i^B &= (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times \hat{C}_{i,n}^{BF} \\
&= (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times (C_{i,n-i} + \hat{R}_i^{FB}) \\
&= (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times C_{i,n-i} + (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times \hat{R}_i^{FB} \\
&= \left(1 - \prod_{k=n-i}^{n-1} \frac{1}{\hat{f}_k}\right) \times C_{i,n-i} + (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times \hat{R}_i^{FB} \\
&= \frac{\prod_{k=n-i}^{n-1} \hat{f}_k \times C_{i,n-i} - C_{i,n-i}}{\prod_{k=n-i}^{n-1} \hat{f}_k} + (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times \hat{R}_i^{FB} \\
\hat{R}_i^B &= \hat{\eta}_{n-i} \times (\hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}) + (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times \hat{R}_i^{FB}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{R}_i^B = \hat{\eta}_{n-i} \times \hat{R}_i^{CL} + (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times \hat{R}_i^{FB}}$$

On voit que la provision à constituer par la méthode Benktander $\hat{R}_i^B$ est une combinaison linéaire convexe des provisions calculées par la méthode Chain Ladder $\hat{R}_i^{CL}$ et celle calculée par la méthode de Bornhuetter-Ferguson $\hat{R}_i^{BF}$, ce qui rend cette méthode plus précise selon Mack.

2.3.1.5 Méthode *Cape Cod*

Cette méthode est très similaire à celle de Bornhuetter-Ferguson. L'idée est d'écrire la charge sinistre ultime $C_{i,n}$, pour la survenance i, sous la forme :

$$C_{i,n} = C_{i,n-i} + \left(1 - \frac{C_{i,n-i}}{C_{i,n}}\right) \times C_{i,n}$$

L'estimateur de la charge sinistre ultime $\hat{C}_{i,n}^{CC}$ par la méthode de Cape Cod est :

$$\hat{C}_{i,n}^{CC} = C_{i,n-i} + (1 - \hat{\pi}_{n-i}) \times \hat{C}_{i,n} \quad \text{où}$$

- $\hat{C}_{i,n} = \rho_i \times P_i$, ρ_i étant le P/S attendu pour la survenance i et correspondant à un avis d'expert, et P_i la prime émise pour cette même survenance.

- $\hat{\pi}_{n-i}$ est une cadence de paiement pouvant être estimée par la méthode de Chain Ladder. On peut aussi proposer un même ratio S/P cible pour plusieurs années de survenance. On posera alors :
$$\hat{C}_{i,n}^{CC} = C_{i,n-i} + (1 - \hat{\pi}_{n-i}) \times \rho_{\mathcal{A}} \times P_i,$$
pour tout $i \in \mathcal{A} = \{1, 2, \dots, n\}$, où
$$\rho_{\mathcal{A}} = \frac{\sum_{k \in \mathcal{A}} C_{n,n-k}}{\sum_{k \in \mathcal{A}} \pi_{n-k} P_k}$$
et
$$\hat{\pi}_{n-i} = \frac{C_{i,n-i}}{C_{i,n}}$$
Dans ce cas, $C_{i,n}$ représente la charge ultime prédite par la méthode de Chain Ladder et $C_{i,n-i}$ la charge sinistre totale connue pour la survenance i.

La provision à constituer pour la survenance i est :
$$\hat{R}_i^{CC} = \hat{C}_{i,n}^{CC} - C_{i,n} = (1 - \hat{\pi}_{n-i}) \times \rho_{\mathcal{A}} \times P_i$$
et la provision totale (toute survenance) est :
$$\hat{R}^{CC} = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i^{CC}$$

Nous voyons que la seule différence entre cette méthode et celle de Bornhuetter-Ferguson est au niveau du calcul de la cadence des paiements.

2.3.1.6 Provision pour Risque et Incertitude PRI ou le Risk Margin

La provision pour risque et incertitude PRI n'est rien d'autre qu'une estimation de l'erreur commise lors du calcul des provisions par la méthode Chain Ladder, par la méthode de Mack. En effet, Thomas Mack a introduit en 1932 et 1993 une version stochastique non paramétrique de la méthode de Chain Ladder permettant d'estimer l'erreur de provisionnement à l'ultime. Pour cela, il s'est basé sur la méthode de Chain Ladder en y ajoutant des indicateurs de risque comme espérance et variance conditionnelle.

Le Risk Margin peut être ajouté aux PSAP pour avoir une marge de prudence explicite versus le Best Estimate (marge basée sur la volatilité observée des données sinistres).

$$\boxed{\text{PRI} = \text{IBNR(Mack)} - \text{IBNR(Chain Ladder)}}$$

Les hypothèses du modèle de Mack

Le modèle de Mack repose sur les trois hypothèses suivantes :

1. On suppose qu'il y a indépendance entre les années de survenance c'est-à-dire que les vecteurs $(C_{i_1,j})_{j=1,\dots,n}$ et $(C_{i_2,j})_{j=1,\dots,n}$ sont indépendants pour $i_1 \neq i_2$. Cela signifie que les montants cumulés du triangle des prestations sont indépendantes pour chaque année de survenance.
2. Il existe des paramètres f_j tels que pour tout i :
$$\mathbb{E}[C_{i,j+1} | C_{i,j}, C_{i,j-1}, \dots, C_{i,1}] = f_j C_{i,j}$$
3. Pour tous i et j :
$$\text{Var}[C_{i,j+1} | C_{i,j}, C_{i,j-1}, \dots, C_{i,1}] = \sigma_j^2 C_{i,j}$$

2.3.1.7 Théorème

Sous les hypothèses ci-dessus on a :

1. $$\mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}] = \prod_{j=n-i}^{n-1} f_j C_{i,n-i}$$

   où $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par l'ensemble des $C_{i,j}$ tels que $i + j \leq n$ (c'est-à-dire que ceux qui sont observés).

2. Les facteurs de développement $\hat{f}_j$ sont des estimateurs sans biais et non corrélés des f_j. Autrement dit,

   $$\mathbb{E}[\hat{f}_j] = f_j \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\hat{f}_j \times \hat{f}_k] = \mathbb{E}[\hat{f}_j] \times \mathbb{E}[\hat{f}_k] \quad \text{pour tout} \quad j \neq k.$$

3. Pour $1 \leq j \leq n-2$

   $$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2$$

   est un estimateur sans biais de σ_j^2. Autrement dit, $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_j^2] = \sigma_j^2$.

   Dans le cas où $\hat{f}_{n-1} \neq 1$ et que $\frac{\hat{\sigma}_{j-3}^2}{\hat{\sigma}_{j-2}^2} = \frac{\hat{\sigma}_{j-2}^2}{\hat{\sigma}_{j-1}^2}$, il est possible d'extrapoler $\hat{\sigma}_j^2$ pour obtenir $\hat{\sigma}_{n-1}^2$:

   $$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left[\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2) \right]$$

Ainsi une estimation de la charge ultime relative à la survenance i est donc :

$$\hat{C}_{i,n} = \hat{f}_{n-1} \dots \hat{f}_{n-i} C_{i,n-i}$$

L'erreur moyenne quadratique (en anglais Mean Square Error) de l'estimateur $\hat{C}_{i,n}$ est par définition :

$$\widehat{MSE}(\hat{C}_{i,n}) = \mathbb{E}\left[(\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2 \mid \mathcal{F} \right]$$

qui peut être décomposée en :

$$\widehat{MSE}(\hat{C}_{i,n}) = \mathrm{Var}[\hat{C}_{i,n} \mid \mathcal{F}] + (\hat{C}_{i,n} - \mathbb{E}[C_{i,n} \mid \mathcal{F}])^2 \quad \text{où :}$$

– $\mathrm{Var}[\hat{C}_{i,n} \mid \mathcal{F}]$ est l'erreur de processus. Elle est aléatoire et mesure la variabilité propre à la variable aléatoire $\hat{C}_{i,n}$.

– $(\hat{C}_{i,n} - \mathbb{E}[C_{i,n} \mid \mathcal{F}])^2$ est le carré de l'erreur d'estimation de $C_{i,n}$ c'est-à-dire le carré de l'écart entre $C_{i,n}$ et sa valeur estimée.

L'erreur moyenne quadratique relative à la charge ultime de la survenance i est donc :

$$\widehat{MSE}[\hat{R}_i] = \widehat{MSE}[\hat{C}_{i,n}] = \hat{C}_{i,n} \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-j-1} C_{k,j}} \right)$$

L'égalité $\widehat{MSE}[\hat{R}_i] = \widehat{MSE}[\hat{C}_{i,n}]$ vient du fait que $\hat{R}_i - R_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n}$ car $R_i = C_{i,n} - C_{i,n-i}$.

L'estimateur de l'erreur sur la provision totale R est donc :

$$\widehat{MSE}[\hat{R}] = \sum_i \left[\widehat{MSE}[\hat{R}_i] + \hat{C}_{i,n} \left(\sum_{k=i+1}^{n} \hat{C}_{k,n} \right) \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}^2}{\hat{f}_j^2 \sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right]$$

La méthode de Mack permet d'estimer l'erreur moyenne quadratique (la M.S.E) des charges ultimes par année de survenance et de la charge ultime totale toutes survenances confondues.

Mais avec quelle loi calibrer les règlements ? C'est ce que nous verrons dans la prochaine sous-section.

Loi de distribution des provisions

Dans la section précédente, nous avons calculé les erreurs moyennes quadratiques des provisions par année de survenance et de la provision totale. Afin de pouvoir calculer ces différentes provisions, il nous faudrait une loi de distribution pour calibrer la cadence des règlements futurs. Pour cela, la loi à retenir doit être positive et disposant d'une queue fine parce que les règlements futurs seront positifs et il faudrait les surestimer un petit peu par prudence. Sur ce, nous retenons la loi Log-normale.

Petit focus sur la loi Log-normale

Une variable aléatoire X suit une loi Log-normale si la variable aléatoire $Y = \ln(X)$ suit une loi normale. La loi Log-normale d'espérance μ et d'écart type σ a pour densité de probabilité :

$$f_Y(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) = \frac{1}{x} f_X(\ln x, \mu, \sigma) \text{ pour tout } x > 0.$$

Sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left[\frac{\ln x - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right]$$

où erf est la fonction d'erreur définie par :

$$\mathrm{erf}(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v e^{-t^2}\, dt$$

L'espérance et la variance de X sont respectivement :

$$\mathbb{E}[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$
$$\mathrm{Var}[X] = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$$

Par les deux égalités ci-dessus, on a :

$$\frac{\mathrm{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]^2} = e^{\sigma^2} - 1$$

d'où

$$\mu = \ln(\mathbb{E}[X]) - \frac{1}{2}\sigma^2$$
$$\sigma^2 = \ln\left(1 + \frac{\mathrm{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]^2} \right)$$

La loi Log-normale est une loi positive, asymétrique qui modélise bien la sinistralité et recommandée par Mack comme loi de distribution des provisions. C'est aussi la loi qu'utilise l'Autorité Européenne des Assurances et des Pensions Professionnelles AEAPP (en anglais European Insurance and Occupational Pensions Authority, EIOPA) pour calculer le quantile 99,95% du risque de réserve et de prime.

Nous supposons dans la suite que la provision suit une loi Log-normale de paramètres μ et σ i.e. $\log(R) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Nous déduisons de ce qui précède qu'estimer $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$ revient à estimer $\mathbb{E}[R]$ et $\mathrm{Var}[R]$. La méthode de Chain Ladder nous donne l'estimation de $\mathbb{E}[R]$ et celle de Mack nous donne l'estimation de $\mathrm{Var}[R]$. En effet, on a :

- $\widehat{\mathbb{E}[R]} = PSAP_{totale}$
- $\widehat{\mathrm{Var}[R]} = \widehat{MSE}[\hat{R}]$

Nous pouvons donc estimer μ et σ^2 par :

$$\hat{\mu} = \ln(\widehat{\mathbb{E}[R]}) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2$$
$$\hat{\sigma}^2 = \ln\left(1 + \frac{\widehat{\mathrm{Var}[R]}}{\widehat{\mathbb{E}[R]}^2}\right)$$

Il nous reste à choisir une probabilité pour que la provision totale soit en dessous d'un certain seuil appelé la VaR. En effet, la VaR (Value at Risque) d'ordre $1-\alpha$ est par définition :

$$\mathrm{VaR}_\alpha = \inf\{x : \mathbb{P}[R \leq x] = 1 - \alpha\}.$$

C'est un outil de gestion des risques, un instrument d'analyse des risques permettant de déterminer la perte maximale d'un portefeuille sur une période donnée avec une probabilité donnée. Elle n'est pas une prévision mais une estimation des risques sur une position déjà en portefeuille. Ainsi, la VaR d'ordre 70% correspondant à $\alpha = 30\%$ signifie que la provision est suffisante pour couvrir les règlements futurs dans 70% des cas. Dans ce cas, on a une PRI qui correspond à l'écart entre le Best Estimate et la Var à 50%, soit 20%.

On peut donc déterminer l'intervalle de confiance à 95% de la provision totale R :

$$IC_{95\%}\left[\log(R)\right] = [\hat{\mu} - 1,96\hat{\sigma}\,,\ \hat{\mu} + 1,96\hat{\sigma}] \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{IC_{95\%}(R) = [\exp(\hat{\mu} - 1,96\hat{\sigma})\,,\ \exp(\hat{\mu} + 1,96\hat{\sigma})]}$$

2.3.1.8 Méthode de provisionnement par les GLM

Famille de lois exponentielles

Un modèle statistique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_{\theta,\phi})_{\theta\in\Theta,\phi>0})$ est appelé famille exponentielle si les probabilités $\mathbb{P}_{\theta,\phi}$ admettent une densité f par rapport à une mesure dominante ν (Lebesgue ou mesure de comptage le plus souvent) avec :

$$f_{\theta,\phi}(y) = c_\phi(y)\exp\left(\frac{y\theta - a(\theta)}{\phi}\right)$$

θ est un paramètre canonique, ϕ est un paramètre de dispersion souvent considéré comme un paramètre de nuisance, $a(\theta)$ est une fonction de classe C^2 et convexe et c_ϕ est une fonction ne dépendant pas de θ. Si Y est une variable aléatoire suivant une loi de la famille exponentielle alors :

$$\mathbb{E}[Y] = a^{'}(\theta) \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(Y) = \phi a^{''}(\theta)$$

C'est l'exemple des lois normale, de Bernoulli, de Poisson, Gamma, Binomiale négative, etc ...

Provisionnement par les GLM

Les modèles linéaires généralisés sont une généralisation du modèle linéaire gaussien et sont caractérisés par trois composantes :

– Une composante aléatoire c'est-à-dire que les paiements décumulés $X_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et suivent une loi appartenant à la famille des lois exponentielles dont venons de parler.

– Une composante systématique déterministe. En effet, la plupart des modèles de provisionnement sont basés sur un prédicteur linéaire

$$\Gamma_{i,j} = c_0 + \alpha_i + \beta_j \quad \text{pour} \quad i, j = 1, \dots, n$$

– Une fonction g bijective appelée fonction de lien telle que :

$$\Gamma_{i,j} = g(\mu_{i,j}) \quad \text{où} \quad \mu_{i,j} = \mathbb{E}[X_{i,j} \,|\, (i,j)]$$

Les variables explicatives sont l'année de survenance i paramétrée par α_i et le délai de règlement j paramétré par β_j.

En supposant que $X_{i,j}$ suit la loi de Poisson (de paramètre $\alpha_i\beta_j$ par exemple), la fonction de lien g est la fonction log. Dans ce cas on a :

$$g(\mu_{i,j}) = \log(\mu_{i,j}) = c_0 + \alpha_i + \beta_j \quad \text{d'où}$$
$$\mu_{i,j} = \exp(c_0 + \alpha_i + \beta_j)$$

On estime les paramètres c_0, α_i et β_j par la méthode du maximum de vraisemblance. Ainsi,

$$\hat{\mu}_{i,j} = \exp(\hat{c_0} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j) = \hat{X}_{i,j} \quad \text{et}$$

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i} \quad \text{où} \quad \hat{C}_{i,n} = \sum_{j=0}^{n} \hat{X}_{i,j}$$

Comme pour le modèle de Mack, on peut déduire de la loi asymptotique des paramètres celle de $\hat{R}_i$ et donc de construire des intervalles de confiance.

2.3.1.9 Provisionnement par la méthode Bootstrap

Principe général du bootstrap

Le principe du bootstrap consiste, à partir d'un échantillon initial dont les éléments sont indépendants et identiquement distribués (iid), à simuler un grand nombre d'échantillons de taille n, en tirant aléatoirement avec remise n observations à partir de l'échantillon initial.

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires iid et $\hat{\theta} = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un estimateur d'un paramètre θ inconnu, où f est une fonction quelconque.

A partir de cet échantillon nous allons suivre les étapes suivantes :

1. Générer un échantillon bootstrap $X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$ en effectuant n tirages successifs avec remise parmi les n éléments de l'échantillon initial.

2. A partir de l'échantillon bootstrap, estimer le paramètre θ par :
$$\hat{\theta}_1^* = f(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$$

3. Répéter B fois ($B \in \mathbb{N}$ assez grand, 10.000 par exemple) les étapes 1 et 2 . On obtient un échantillon :
$$\left(\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_B^*\right)$$

4. Estimer, à partir de l'échantillon composé des B estimateurs de θ calculés à partir des B échantillons bootstrap, les moyenne et variance empiriques ainsi que la distribution empirique de θ :
$$\overline{\hat{\theta}^*} = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} \hat{\theta}_b^* \quad , \quad \widehat{\text{Var}}_\theta^* = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\left(\hat{\theta}_b^* - \overline{\hat{\theta}^*}\right)^2 \quad \text{et} \quad G_B^*(y) = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} \mathbb{1}_{\hat{\theta}_b^* \leq y}$$

Calcul des provisions par la méthode Bootstrap

Comme nous venons de le voir, l'utilisation du bootstrap suppose que les éléments de l'échantillon initial soient indépendants et identiquement distribués (iid). Les variables $(X_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ ne sont en général pas identiquement distribuées c'est pourquoi il est préférable d'avoir recours aux résidus du modèle, en particulier les résidus de Pearson car plus simples à calculer.
La démarche à suivre est la suivante :

1. On commence par calculer les facteurs de développement par la méthode de Chain Ladder à partir du triangle des prestations cumulées.
2. A partir des données de la diagonale du triangle des prestations cumulées et des facteurs de développement de l'étape 1, construire un nouveau triangle des prestations cumulées que l'on notera $(T_{i,j})$ en procédant de manière récursive arrière :
$$T_{i,j} = \frac{T_{i,j+1}}{\hat{f}_j} = \frac{T_{i,n-i}}{\prod_{k=j}^{n-i} \hat{f}_k} \quad \text{avec} \quad T_{i,n-i} = C_{i,n-i} \quad \text{et} \quad i + j \leq n$$
3. Calculer les résidus de Pearson (pour une régression de Poisson) indépendants et identiquement distribués comme suit :
$$r_{i,j} = \frac{X_{i,j} - X'_{i,j}}{\sqrt{X'_{i,j}}} \quad \text{où} \quad X_{i,j} = C_{i,j+1} - C_{i,j} \quad \text{et} \quad X'_{i,j} = T_{i,j+1} - T_{i,j}$$
Afin d'avoir une variance unitaire, ces résidus ont besoin d'être ajustés. Classiquement, on considère :
$$r_{i,j} = \sqrt{\frac{N}{N-k}} \times \frac{X_{i,j} - X'_{i,j}}{\sqrt{X'_{i,j}}}$$
où N représente le nombre d'observations et $k = n_{col} + n_{lig}$ est le nombre de paramètres, n_{col} et n_{lig} étant les nombres de colonnes et de lignes du triangle des prestations.
Notons que $X_{i,1} = C_{i,1}$ et $X'_{i,1} = T_{i,1}$. Les résidus nuls seront exclus du ré-échantillonnage.
4. Faire du bootstrap et construire un pseudo-triangle à partir de l'échantillon constitué des résidus calculés.

5. Des résidus bootstrapés $(r^*_{i,j})$, déduire du pseudo-triangle bootstrap, les triangles bootstraps des prestations décumulées et cumulées comme suit :

$$X^*_{i,j} = X'_{i,j} + r^*_{i,j} \times \sqrt{X'_{i,j}} \quad \text{et} \quad C^*_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} X^*_{i,j}$$

6. Calculer par la méthode de Chain Ladder (via le triangle bootstrap cumulé), un montant de provision bootstrap $\hat{R}^*$.

7. Répéter B fois ($B \in \mathbb{N}$ assez grand, 10.000 par exemple) les étapes 3, 4 et 5 pour avoir un échantillon bootstrap de B éléments de la provision R

$$\left(\hat{R}^*_1, \hat{R}^*_2, \ldots, \hat{R}^*_B\right)$$

Construction d'un intervalle de confiance

A partir de l'échantillon ci-dessus, nous pouvons calculer les moyenne et l'écart type non-biaisé empiriques du montant de la provision R :

$$\bar{R} = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} \hat{R}^*_b \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_R = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{b=1}^{B}\left(\hat{R}^*_b - \bar{R}\right)^2}$$

Nous pouvons donc construire un intervalle de confiance, l'échantillon $\left(\hat{R}^*_1, \hat{R}^*_2, \ldots, \hat{R}^*_B\right)$ suivant une loi normale. Par le Théorème Central Limite, B étant suffisamment grand, on a comme intervalle de confiance :

$$IC_\alpha = \left[\bar{R} - q_{1-\alpha/2} \times \hat{\sigma}_R\,;\, \bar{R} + q_{1-\alpha/2} \times \hat{\sigma}_R\right]$$

avec $q_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale centrée réduite.

2.3.2 Applications numériques

2.3.2.1 Présentation des données

Les données avec lesquelles nous appliquerons les différentes méthodes de provisionnement que nous avons vues dans ce mémoire, sont dans le tableau ci-dessous. Ce sont des données du portefeuille GSC légèrement modifiées pour préserver la confidentialité des données réelles. Les données du triangle supérieur du tableau sont les montants des prestations cumulées et la survenance couvre la période de 2014 à 2021 avec huit années de développement.

Pour l'instant, le triangle inférieur (la partie grise) est vide. Les différentes méthodes statistiques dont nous avons parlées nous permettront de faire des projections et ainsi d'estimer les montants des prestations futures c'est-à-dire estimer les données du triangle inférieur. Pour cela, nous supposerons que la première ligne de notre triangle est close c'est-à-dire il n'y a plus de sinistres ouverts, et donc le montant de provision pour l'année de survenance 2014 est nul. Cette ligne servira de base pour tous les développements ultérieurs.

	Triangles des paiements, montants cumulés (K€)	Années de développement j							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Années de survenance i	2014	10 141	36 145	45 493	46 539	46 569	46 590	46 612	46 699
	2015	10 823	35 860	46 166	47 073	47 244	47 260	47 282	
	2016	11 572	36 495	46 151	47 254	47 282	47 313		
	2017	11 243	35 210	44 155	45 025	45 158			
	2018	10 735	34 176	42 536	43 749				
	2019	11 988	39 001	48 278					
	2020	11 138	36 037						
	2021	9 548							

FIGURE 2.4 – Triangle des prestations

2.3.2.2 Méthode de Chain-Ladder

Avant d'appliquer la méthode de Chain Ladder, il faudrait que l'on vérifie ses hypothèses. En effet, cette vérification nous permettra d'être dans la logique du modèle et de faire une bonne projection dans le cas où les hypothèses seraient vérifiées.

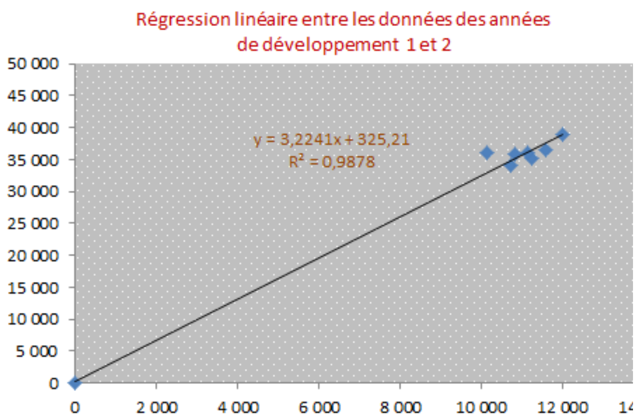
Vérification des hypothèses du modèle

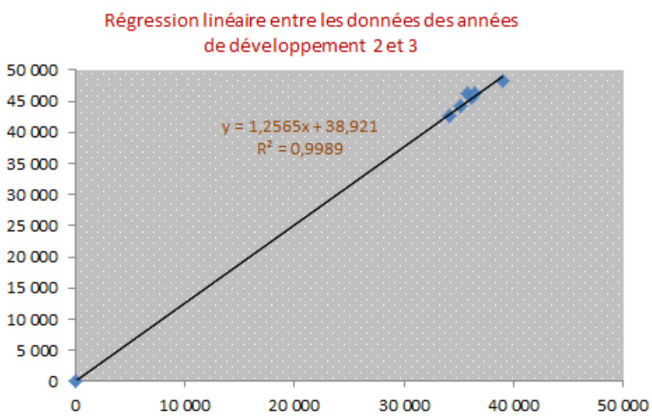
Rappelons que l'hypothèse phare du modèle est que les facteurs de développement sont supposés indépendants de l'année d'origine i c'est-à-dire pour $j = 1, 2, \ldots, n-1$ fixé,

$$\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} = f_j = cste \quad \text{pour tout } i$$

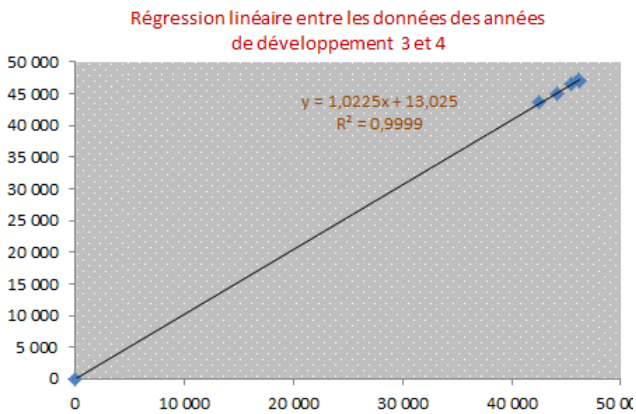
Cette hypothèse n'est vérifiée que si les points de coordonnées $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_{i=1,\ldots,n-j-1}$ sont alignés sur une droite passant par l'origine, d'après l'égalité ci-dessus.

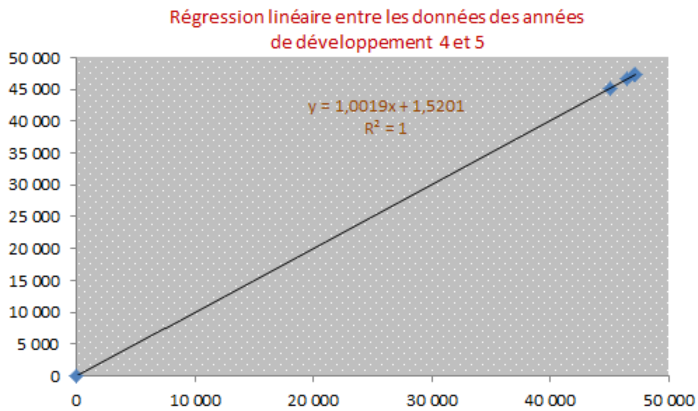
Nous avons tracé des droites de régression, avec les données des années de développement 1 à 5. Tous les points ne sont pas alignés sur les droites de régression qui passe par l'origine et ne s'en éloignent pas trop ; les données des deux premières années de développement présentent un peu de volatilité mais acceptable.





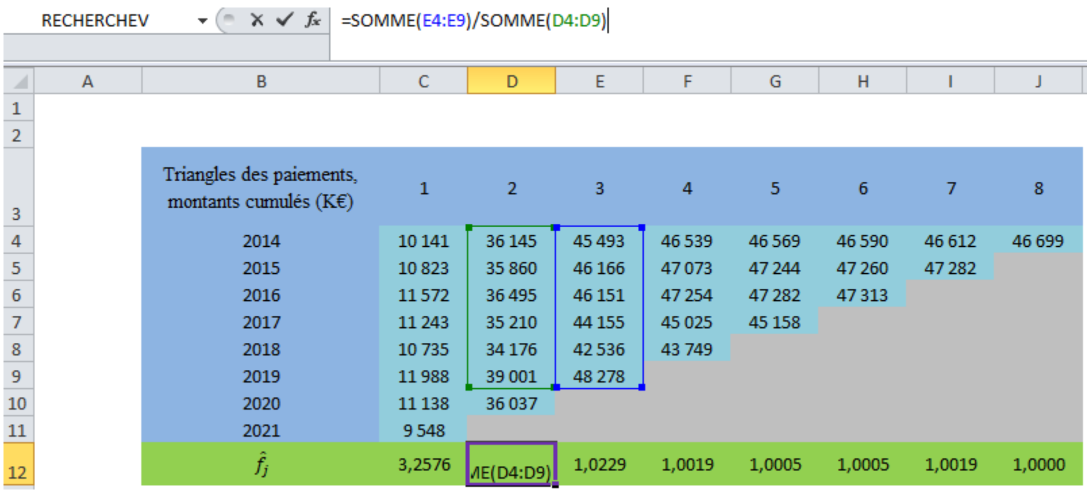
En négligeant les ordonnées à l'origine des équations des droites de régression devant les plusieurs dizaines de million d'euros de charges ultimes et au vu des R^2 très proches de 1, on peut affirmer que les hypothèses du modèle sont vérifiées.





Calcul des facteurs de développement

Une fois les hypothèses validées, la deuxième étape consiste à calculer les facteurs de développement $\hat{f}_j$.



RECHERCHEV =SOMME(E4:E9)/SOMME(D4:D9)

Triangles des paiements, montants cumulés (K€)	1	2	3	4	5	6	7	8
2014	10 141	36 145	45 493	46 539	46 569	46 590	46 612	46 699
2015	10 823	35 860	46 166	47 073	47 244	47 260	47 282	
2016	11 572	36 495	46 151	47 254	47 282	47 313		
2017	11 243	35 210	44 155	45 025	45 158			
2018	10 735	34 176	42 536	43 749				
2019	11 988	39 001	48 278					
2020	11 138	36 037						
2021	9 548							
$\hat{f}_j$	3,2576	ME(D4:D9)	1,0229	1,0019	1,0005	1,0005	1,0019	1,0000

FIGURE 2.5 – Méthode de calcul des facteurs de développement

On peut voir sur la figure ci-dessus que le calcul est conforme à ce qu'on avait dit. Par exemple, pour calculer le facteur de développement relatif à la deuxième année de développement, on divise la somme des prestations observées à la troisème année de développement par la somme des prestations observées à la deuxième année de développement sans la dernière c'est-à-dire celle de 2020.

Le facteur de développment de la dernière année de développement vaut 1 car nous avons supposé que la première ligne de notre triangle est close c'est-à-dire il n'y a plus de sinistres ouverts.

Calcul des charges ultimes

Nous pouvons donc commencer à estimer les montants des prestations futures, par année de survenance. Par exemple, pour estimer le montant des prestations cumulées à la cinquième année de développement, pour la survenance de 2018, il suffit de multiplier le montant de la diagonale du triangle 43 749 K€ par le facteur de développement relatif à la quatrième année de développement 1,0019. Le montant des charges sinistres ultimes sont dans la dernière colonne du tableau ci-dessous. Par exemple, pour la survenance de 2021, le montant des charges sinistres ultimes estimées est de 40 206 K€.

RECHERCHEV =F8*F12

Triangles des paiements, montants cumulés (K€)	1	2	3	4	5	6	7	8
2014	10 141	36 145	45 493	46 539	46 569	46 590	46 612	46 699
2015	10 823	35 860	46 166	47 073	47 244	47 260	47 282	47 371
2016	11 572	36 495	46 151	47 254	47 282	47 313	47 335	47 424
2017	11 243	35 210	44 155	45 025	45 158	45 179	45 200	45 286
2018	10 735	34 176	42 536	43 749	=F8*F12	43 855	43 875	43 958
2019	11 988	39 001	48 278	49 384	49 480	49 503	49 526	49 620
2020	11 138	36 037	45 324	46 361	46 451	46 474	46 495	46 583
2021	9 548	31 103	39 119	40 015	40 092	40 112	40 130	40 206
$\hat{f}_j$	3,2576	1,2577	1,0229	1,0019	1,0005	1,0005	1,0019	1,0000

FIGURE 2.6 – Estimation des prestations futures

Calcul des provisions

La dernière étape consiste à calculer le montant des provisions. Comme on l'a vu, la provision est la différence entre la charge ultime estimée et le dernier paiement connu. Rappelons que les charges sinistres ultimes estimées sont les montants de la dernière colonne du tableau ci-dessus.

Avec la méthode de Chain Ladder, le montant total des provisions estimées s'élève à 43 082 K€.

Survenances	Paiements effectués	Charges ultimes	Montant des provisions CL
2014	46 699	46 699	0
2015	47 282	47 371	89
2016	47 313	47 424	111
2017	45 158	45 286	128
2018	43 749	43 958	209
2019	48 278	49 620	1 341
2020	36 037	46 583	10 546
2021	9 548	40 206	30 658
Total			43 082

FIGURE 2.7 – Provisions par année de survenance par la méthode de Chain Ladder

2.3.2.3 Méthode Expected Loss Ratio

Nous disions que l'application de cette méthode nécessite une très bonne connaissance du portefeuille pour définir les S/P attendus. Les ratios sinistres à primes que nous attendons nous permettent de provisionner 44 889 K€ légèrement supérieur aux 43 082K€ de provision obtenue par la méthode de Chain Ladder.

Survenances	S/P ultimes attendus	Montant des primes (K€)	Charges ultimes attendues	Paiements effectués	Montant des provisions LR
2014	84,4%	55 356	46 699	46 699	0
2015	83,5%	56 832	47 454	47 282	173
2016	83,2%	57 003	47 424	47 313	111
2017	80,2%	56 457	45 286	45 158	128
2018	80,0%	55 541	44 433	43 749	684
2019	88,9%	55 797	49 620	48 278	1 341
2020	85,7%	54 366	46 583	36 037	10 546
2021	82,0%	50 554	41 454	9 548	31 906
Total					44 889

FIGURE 2.8 – Provisions par année de survenance par la méthode Expected Loss Ratio

2.3.2.4 Méthode de Bornhuetter-Ferguson

Les charges ultimes calculées via la méthode Loss Ratio sont connues. Il ne nous reste qu'à calculer les facteurs de développement du modèle pour pouvoir calculer les provisions.

Rapellons que :

$$\hat{R}_i^{FB} = (1 - \hat{\eta}_{n-i}) \times \hat{C}_{i,n}^{LR}$$

Les résultats du calcul sont dans le tableau ci-dessous.

Survenances	Charges ultimes attendues via Loss Ratio	Les coefficients de développement BF	Montant des provisions BF
2014	46 699	1,0000	0
2015	47 454	0,9981	89
2016	47 424	0,9977	111
2017	45 286	0,9972	128
2018	44 433	0,9952	211
2019	49 620	0,9730	1 341
2020	46 583	0,7736	10 546
2021	41 454	0,2375	31 610
Total			44 037

FIGURE 2.9 – Provisions par année de survenance par la méthode de Bornhuetter-Ferguson

Le montant total des provisions s'élève à 44 037 K€, un montant supérieur aux 43 082 K€ du modèle Chain Ladder mais un peu inférieur à celui obtenu par Loss Ratio.

2.3.2.5 Méthode Benktander

Les résultats du calcul des provisions par la méthode Benktander sont dans le tableau ci-dessous. Rapellons que cette provision est une combinaison linéaire convexe des provisions calculées par les méthodes de Chain Ladder et de Bonrhuetter-Ferguson. Les facteurs de développement sont ceux de la méthode BF.

Survenance	Facteurs de développement	Montant des provisions CL	Montant des provisions BF	Montant des provisions B
2014	1,0000	0	0	0
2015	0,9981	89	89	89
2016	0,9977	111	111	111
2017	0,9972	128	128	128
2018	0,9952	209	211	209
2019	0,9730	1 341	1 341	1 341
2020	0,7736	10 546	10 546	10 546
2021	0,2375	30 658	31 610	31 384
Total		43 082	44 037	43 808

FIGURE 2.10 – Provisions par année de survenance par la méthode de Benktander

Le montant total des provisions s'élève à 43 808 K€

2.3.2.6 Méthode *Cape Cod*

Les cadences de règlement sont calculées comme on l'a vu. Le ratio sinistres à primes est calculé comme suit :

$$LR = \mathbb{E}\left[\frac{\text{Ultime}_i}{\text{Prime}_i}\right]$$

Survenance	Cadence de paiement	Montant des primes (K€)	Montant des provisions CC
2014	1,0000	55 356	0
2015	0,9981	56 832	89
2016	0,9977	57 003	111
2017	0,9972	56 457	132
2018	0,9952	55 541	219
2019	0,9730	55 797	1 253
2020	0,7736	54 366	10 222
2021	0,2375	50 554	32 015
Total			44 041

FIGURE 2.11 – Provisions par année de survenance par la méthode de Cape Cod

Le montant total des provisions obtenu 44 041 K€ est inférieur à celui de Chain Ladder.

2.3.2.7 Méthode de Mack

Vérification des hypothèses du modèle

La principale hypothèse que nous allons vérifier dans cette partie est la troisième, les deux premières étant les hypothèses de la méthode Chain Ladder que nous avons déjà vérifiées. Pour cela nous allons analyser le graphe des résidus normalisés

$$\epsilon_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j C_{i,j}}{\sqrt{\sigma_j^2 C_{i,j}}}$$

Nous avons vérifié les hypothèses du modèle de Mack et calculé le montant des provisions via la fonction «MackChainLadder» du package «ChainLadder» du logiciel R.

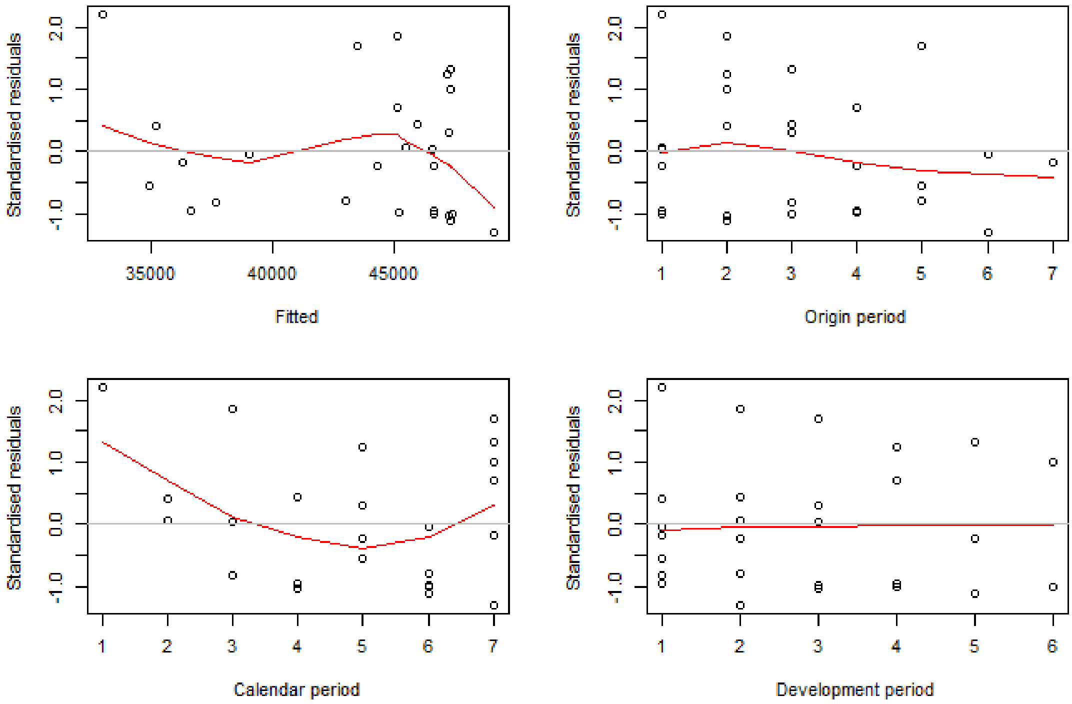


FIGURE 2.12 – Analyse des résidus standardisés

Les graphes ne présentent aucune structure non aléatoire, en particulier pas de tendance. Cela nous fait valider les hypothèses du modèle.

Calcul des provisions

Dans la sortie *R*, les nombres sont en format anglais.

```
MackChainLadder(Triangle = Donnees)

  Latest Dev.To.Date Ultimate   IBNR  Mack.S.E CV(IBNR)
1 46,699       1.000   46,699      0     0.000      NaN
2 47,282       0.998   47,371     89     0.072 0.000809
3 47,313       0.998   47,424    111     0.105 0.000949
4 45,158       0.997   45,286    128     8.669 0.067835
5 43,749       0.995   43,958    209    79.529 0.380362
6 48,278       0.973   49,620  1,341   204.236 0.152279
7 36,037       0.774   46,583 10,546   725.942 0.068834
8  9,548       0.237   40,206 30,658 2,118.154 0.069090

              Totals
Latest:   324,063.78
Dev:            0.88
Ultimate: 367,146.15
IBNR:      43,082.37
Mack.S.E    2,286.42
CV(IBNR):       0.05
```

Dans le tableau ci-dessous, nous avons travaillé la sortie R pour avoir les nombres en format français.

Survenance	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	Mack.S.E	CV(IBNR)
2014	46 699	1,000	46 699	0	0,000	NaN
2015	47 282	0,998	47 371	89	0,072	0,001
2016	47 313	0,998	47 424	111	0,105	0,001
2017	45 158	0,997	45 286	128	8,669	0,068
2018	43 749	0,995	43 958	209	79,529	0,380
2019	48 278	0,973	4 962	1 341	204,236	0,152
2020	36 037	0,774	46 583	10 546	725,942	0,069
2021	9 548	0,237	40 206	30 658	2 118,154	0,069

	Totals
Latest:	324 063,78
Dev:	0,88
Ultimate:	367 146,15
IBNR:	43 082,37
Mack.S.E	2 286,42
CV(IBNR):	0,05

Commentaire du résultat

Dans la colonne « Latest » nous avons les montants des derniers paiements connus c'est-à-dire les données de la diagonale du triangle des prestations.

Dans la colonne « Dev.To.Date » nous avons les cadences de règlement de la méthode Bornhuetter-Ferguson. Rappelons que le produit de l'inverse de ces cadences par les données de la diagonale du triangle des prestations nous donne les charges ultimes calculées par la méthode de Chain Ladder que nous avons dans la colonne «Ultimate».

Les provisions (les IBNR), comme on peut le constater, sont égales à la différence entre les charges sinistres ultimes (Ultimate) et les derniers paiements connus (Latest). Ces montants de provision correspondent exactement à ceux qu'on avait obtenus par la méthode de Chain Ladder.

Nous avons dans la colonne « Mack.S.E » la Standard Error de Mack ou encore la **root mean square error of prediction** (RMSEP) qui n'est rien d'autres que la $\sqrt{MSEP}$ où MSEP est l'erreur moyenne quadratique de prédiction des provisions dont on avait parlé. En d'autres termes, c'est l'écart type de la loi de distribution des provisions.

Dans la colonne «**CV(IBNR)**» parfois noté **CoV(IBNR)** nous avons le **Reserve Coefficient of Variation** le coefficient de variation de la provision.

Ainsi, pour la survenance i,

$$CV(\text{IBNR}_i) = \frac{\sqrt{\text{Var}(R_i)}}{\mathbb{E}[R_i]}$$

ou encore

$$CV(\text{IBNR}_i) = \frac{\sqrt{\text{MSEP}_i}}{\text{IBNR}_i} = \frac{Mack.S.E_i}{\text{IBNR}_i}$$

Notons que la somme des Mack.S.E (respectivement des CV(IBNR)), par année de survenance, n'est pas égale à la Mack.S.E (respectivement la CV(IBNR)) totale, car la Standard Error n'est pas additive. La Mack.S.E (respectivement la CV(IBNR)) totale est, en fait, l'écart type de la distribution (respectivement le coefficient de variation) de la **provision totale** toutes survenances confondues.

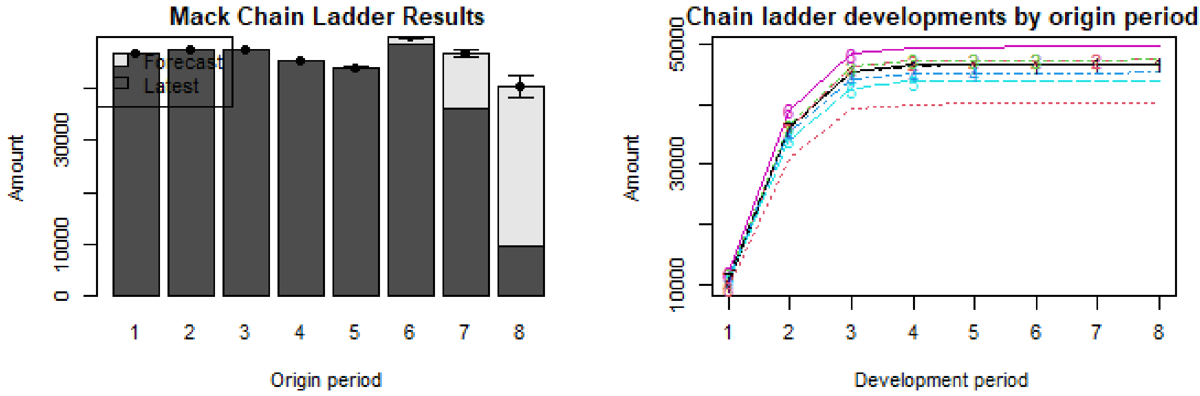


FIGURE 2.13 – Evolution des prestations par années de survenance et de développement

Calcul de la PRI provision pour risque et incertitude ou le Risk Margin

Nous avons à présent une estimation des moyenne et variance de la loi de distribution des provisions choisie qui est la loi Log-normale. Nous pouvons donc calculer les montants des provisions et donc les PRI par année de survenance dont la somme ne sera pas égale à la PRI totale toute survenance confondue comme nous venons de le voir.

$$\boxed{\mathrm{IBNR}_i(\mathrm{Mack}) = \text{Log-}\mathcal{N}^{-1}\left(q_{1-\alpha}\,;\,\ln(\mathrm{IBNR}_i) - \frac{1}{2}\ln\left[1+\mathrm{CV}(\mathrm{IBNR}_i)^2\right]\,;\,\sqrt{\ln\left[1+\mathrm{CV}(\mathrm{IBNR}_i)^2\right]}\right)}$$

où $q_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ retenu.

Enfin, pour la survenance i,

$$\boxed{\mathrm{PRI}_i = \mathrm{IBNR}_i(\mathrm{Mack}) - \mathrm{IBNR}_i(\text{Chain Ladder})}$$

Survenance	Provisions par Mack	IBNR	PRI ou RISK MARGIN	PRI recalculé
2014	0	0	0	0
2015	89	89	0	0
2016	111	111	0	0
2017	132	128	4	3
2018	237	209	28	20
2019	1 435	1 341	94	67
2020	10 907	10 546	361	255
2021	31 712	30 658	1 054	744
Total	44 624	43 082	1 542	1 089

FIGURE 2.14 – Calcul du risk margin

Nous ne provisionnerons pas avec la somme des PRI calculées par année de survenance mais plutôt avec celle calculée à partir des données de la colonne «Totals» de la sortie R.

$$\boxed{\text{IBNR(Mack)} = \text{Log-}\mathcal{N}^{-1}\left(q_{1-\alpha}\,;\, \ln(\text{IBNR}) - \frac{1}{2}\ln\left[1+\text{CV}(\text{IBNR})^2\right]\,;\, \sqrt{\ln\left[1+\text{CV}(\text{IBNR})^2\right]}\right)}$$

Nous avons travaillé avec $q_{1-\alpha} = 70\%$. Et la PRI globale est calculée comme suit :

$$\boxed{\text{PRI globale} = \text{IBNR(Mack)} - \text{IBNR(Chain Ladder)}}$$

La PRI globale calculée vaut 1089 K€ bien inférieure à la somme des PRI toutes survenances confondues qui est de 1542 K€ comme on s'y attendait. Nous avons donc recalculé la PRI par année de survenance au prorata temporis de la PRI globale comme suit :

$$\boxed{\text{PRI}_i' = \frac{\text{PRI}_i}{\sum_i \text{PRI}_i} \times \text{PRI globale}}$$

2.3.2.8 Méthodes de provisionnement GLM

Nous allons appliquer deux modèles GLM à savoir les GLM Gamma et quasi-Poisson sur le triangle des prestations décumulées pour calculer le montant des provisions sans oublier de les valider. Les calculs sont faits sous le logiciel R.

GLM Gamma et quasi-Poisson

```
Call:
glm(formula = Y ~ lig + col, family = Gamma(link = "log"))

Deviance Residuals:
     Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.91797  -0.09638   0.00304   0.08527   0.67056

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  9.18403    0.17787  51.635  < 2e-16 ***
lig2         0.20839    0.17527   1.189 0.247725
lig3         0.09037    0.18590   0.486 0.631907
lig4         0.18588    0.19834   0.937 0.359315
lig5         0.11950    0.21461   0.557 0.583548
lig6         0.17930    0.23835   0.752 0.460243
lig7         0.12801    0.27877   0.459 0.650812
lig8        -0.01995    0.37303  -0.053 0.957845
col2         0.81664    0.17527   4.659 0.000134 ***
col3        -0.17337    0.18590  -0.933 0.361627
col4        -2.36203    0.19834 -11.909 8.38e-11 ***
col5        -4.85254    0.21461 -22.611 3.18e-16 ***
col6        -6.15356    0.23835 -25.818  < 2e-16 ***
col7        -6.20183    0.27877 -22.247 4.42e-16 ***
col8        -4.70921    0.37303 -12.624 2.84e-11 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 0.1075163)

    Null deviance: 112.9022  on 35  degrees of freedom
Residual deviance:   2.7088  on 21  degrees of freedom
  (28 observations effacées parce que manquantes)
AIC: 584.15
```

Figure 2.15 – Modèle GLM Gamma

```
Call:
glm(formula = Y ~ lig + col, family = quasipoisson(link = "log"))

Deviance Residuals:
   Min       1Q   Median       3Q      Max
-9.140   -2.491   0.000    2.177    8.735

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  9.31379    0.03058 304.621  < 2e-16 ***
lig2         0.01428    0.03559   0.401   0.6924
lig3         0.01541    0.03559   0.433   0.6694
lig4        -0.03074    0.03601  -0.854   0.4028
lig5        -0.06050    0.03630  -1.666   0.1105
lig6         0.06066    0.03546   1.711   0.1019
lig7        -0.00250    0.03866  -0.065   0.9491
lig8        -0.14972    0.06363  -2.353   0.0284 *
col2         0.81431    0.02351  34.642  < 2e-16 ***
col3        -0.17491    0.03057  -5.722 1.11e-05 ***
col4        -2.36669    0.07881 -30.030  < 2e-16 ***
col5        -4.81021    0.28764 -16.723 1.30e-13 ***
col6        -6.20629    0.66276  -9.364 6.04e-09 ***
col7        -6.23903    0.82614  -7.552 2.05e-07 ***
col8        -4.83898    0.58278  -8.303 4.51e-08 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for quasipoisson family taken to be 29.73074)

    Null deviance: 369279.4  on 35  degrees of freedom
Residual deviance:    636.6  on 21  degrees of freedom
  (28 observations effacées parce que manquantes)
AIC: NA

Number of Fisher Scoring iterations: 5
```

FIGURE 2.16 – Modèle GLM quasi-Poisson

Interprétation des sorties

Call : C'est notre modèle linéaire généralisé.

Deviance residuals : des statistiques sur la déviance résiduelle.

Coefficients : *Estimate* les estimateurs des coefficients obtenus par le maximum de vraisemblance, *std. Error* c'est l'erreur standard qui nous donne une idée de la variabilité associée aux coefficients estimés, *t value* le quotient du coefficient estimé par l'erreur standard (exemple pour le modèle Gamma, $\frac{9.18403}{0.17787} = 51.635$), Pr(>|t|) nous indique essentiellement dans quelle mesure chaque variable prédictive est capable de prédire la valeur de la variable d'intérêt dans le modèle.

Nous avons aussi dans les sorties R les valeurs des paramètres de dispersion ϕ définis par :

$$\text{Variance} = \phi \times \text{Espérance}$$

En effet, la variance n'est généralement pas égale à l'espérance. C'est la raison pour laquelle nous avons opté pour le modèle quasi-Poisson et non celui de Poisson dans lequel la variance et l'espérance sont égales. Dans la sortie GLM quasi-Poisson, par exemple, $\phi = 29,73074$.

Null deviance, la déviance nulle nous montre comment notre variable d'intérêt pourrait être expliquée si on avait seulement l'intercept dans le modèle.

Residual deviance la déviance résiduelle nous montre comment notre variable d'intèrêt pourrait être expliquer par le modèle spécifique que nous ajustons avec toutes les variables explicatives. Plus elle est faible, meilleur est notre modèle.

AIC Le critère d'information d'Akaike (AIC) est une mesure utilisée pour comparer l'ajustement de différents modèles de régression. Plus la valeur est faible, mieux le modèle de régression est capable de s'adapter aux données.

Après calcul, avec le modèle quasi-Poisson nous obtenons un montant de provision exactement égal à celui obtenu par le modèle de Chain Ladder c'est-à-dire 43082,37 K€ et 43270,19 K€ avec le modèle Gamma.

Validation des modèles GLM

Après le calcul du montant des provisions par les modèles GLM quasi-Poisson et Gamma, il faudrait que l'on s'assure qu'ils reflètent la réalité et qu'ils sont valides. Généralement, pour les modèles linéaires, après estimation des paramètres, l'on s'assure que les résidus sont centrés et gaussiens. Dans le cas des modèles linéaires généralisés, on a peu d'information sur les résidus. En particulier, ils n'ont aucune raison d'avoir la même variance et on ne connaît pas leur distribution.

Dans un GLM, pour évaluer la qualité de l'ajustement du modèle aux données, on mesure l'écart Δ entre le modèle et les données. Cet écart appelé : la **déviance** est définie comme deux fois la différence de log-vraisemblance entre le modèle actuel et un modèle saturé (c'est-à-dire un modèle qui s'adapte parfaitement aux données).

$$\Delta = 2\log(\lambda) = 2(\tilde{l} - \hat{l})$$

où $\tilde{l}$ est la vraisemblance du modèle saturé et $\hat{l}$ celle du modèle estimé.

On peut aussi définir Δ comme étant :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \delta_i^2$$

où les δ_i sont des déviances résiduelles et N le nombre d'observations. Nous savons par le théorème de Wilks que si les hypothèses du modèle GLM sont vérifiées, alors :

$$\Delta \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_{N-p}$$

avec p le nombre de paramètres à estimer.
Nous comprenons donc que $\mathbb{E}[\Delta] = N - p$ et nous nous attendons à ce que chaque $\delta_i^2 \simeq \frac{N-p}{N} \simeq 1$. Une valeur de δ_i^2 éloignée de 1 indique que l'observation i contribue au mauvais ajustement. Mais pour les modèles quasi-Familles comme par exemple le modèle quasi-Poisson ce ne sera pas la loi du Chi-deux mais celle de Fisher comme nous allons le voir juste après.

Soient D_1 la Null Deviance avec p_1 degré de liberté et D_2 la Residual Deviance avec p_2 degré de liberté.

Validation du GLM Gamma

Pour valider le GLM Gamma, nous allons faire un test du Chi-deux. La statistique du test W_{χ^2} se calcule comme suit :

$$\boxed{W_{\chi^2} = D_1 - D_2}$$

On a $W_{\chi^2} = 110.1934$ et $p = p_1 - p_2 = 35 - 21 = 14$ degrés de liberté. Nous pouvons donc calculer la p-value du test grâce au code R suivant :

$$\boxed{pchisq(W_{\chi^2}, df = p, \text{lower.tail} = \text{FALSE})}$$

La p-value $= 5,131778 \times 10^{-17} < 5\%$. Nous validons donc le modèle.

Validation du GLM quasi-Poisson

Pour valider le GLM quasi-Poisson, nous allons faire un test de Fisher. La statistique du test T_{Fisher} se calcule comme suit :

$$\boxed{T_{Fisher} = \frac{D_1 - D_2}{(p_1 - p_2) \times \phi}}$$

où ϕ est le coefficient de dispersion du modèle. Nous calculons la p-value du test via le code R suivant :

$$\boxed{pf(T_{Fisher}\,,\, p_1 - p_2\,,\, p_2\,,\, \text{lower.tail} = \text{FALSE})}$$

La p-value $= 7,774151 \times 10^{-26} < 5\%$. Nous validons donc le modèle.

Toutefois, par prudence, nous optons pour la provision calculée par le GLM Gamma dont le montant de provision est relativement supérieur à celui du GLM quasi-Poisson qui n'est autre que la méthode de Chain Ladder comme nous venons de le voir.

2.3.2.9 Modèle Bootstrap

Au lieu de suivre toutes les étapes vues, nous avons calculé le montant des provisions sous le logiciel R via une fonction qui fait bien l'affaire, la fonction « BootChainLadder » du package «ChainLadder».

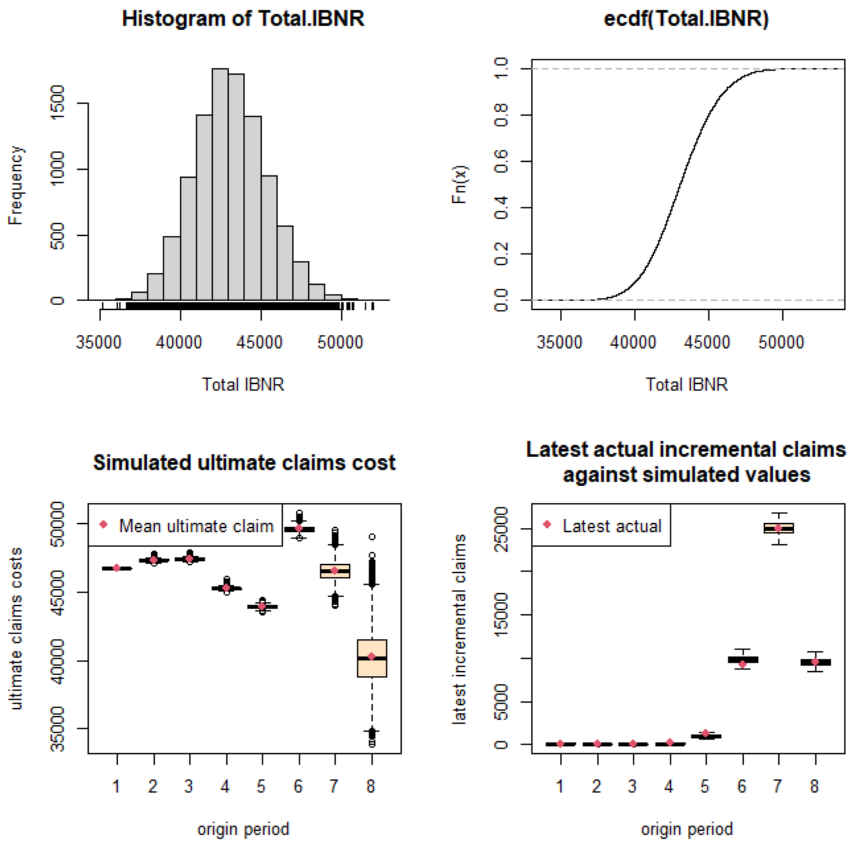


FIGURE 2.17 – Statistiques sur les provisions et les charges sinistres ultimes

```
BootChainLadder(Triangle = Donnees, R = 10000, process.distr = "gamma")

  Latest Mean Ultimate Mean IBNR IBNR.S.E IBNR 75% IBNR 95%
1 46,699        46,699       0.0      0.0        0        0
2 47,282        47,371      88.8     74.2      129      232
3 47,313        47,425     111.9     81.5      158      266
4 45,158        45,285     127.3     82.2      174      280
5 43,749        43,957     208.3     99.4      268      387
6 48,278        49,619   1,340.9    224.7    1,486    1,725
7 36,037        46,589  10,552.8    695.0   11,008   11,712
8  9,548        40,245  30,697.1  2,042.4   31,998   34,208

                 Totals
Latest:         324,064
Mean Ultimate:  367,191
Mean IBNR:       43,127
IBNR.S.E          2,232
Total IBNR 75%:  44,593
Total IBNR 95%:  46,938
```

Figure 2.18 – Sortie R via la fonction BootChainLadder

La fonction plot() donne les graphiques ci-dessus (Fig 2.17) qui illustrent bien les résultats obtenus. La loi de distribution des provisions retenue est la loi Gamma.

Sur le triangle des prestations nous avons effectué $B = 10000$ tirages successifs avec remise. Donc 10000 provisions bootstraps ont été calculées.

Les résultats sont consignés dans la sortie R ci-dessus et le tableau ci-dessous. La somme des montants de provision par année de survenance n'est pas égale au montant de provision total comme on peut s'y attendre.

IBNR 95% = 46 937, 53 K€ est le montant nécessaire que l'assureur doit provisionner pour couvrir 95% de la réalisation de la sinistralité.

La p-value = 0 < 5%.

	Montant de provision en K€
Moyenne des charges ultimes	367 191
Moyenne des provisions	43 127
RMSEP(R)	2 232
IBNR 75%	44 593,43
IBNR 95%	46 937,53
IBNR 99%	48 512,06
IBNR 99.5%	49 120,72

L'intervalle de confiance à 95% de la provision totale (K€) :

$$IC_{95\%}(\text{IBNR}) = [38\,752, 28\,; 47\,501, 72]$$

2.4 Indicateurs de rentabilité et de solvabilité

2.4.1 Le ratio sinistres à primes S/P

Il s'agit du rapport entre la charge sinistre ultime et le montant de prime émise (acquise et à recevoir) sur les contrats d'assurance, la GSC en particulier.

Survenances	Charges ultimes	Montant des primes (K€)	S/P ultimes
2014	46 699	55 356	84%
2015	47 371	56 832	83%
2016	47 424	57 003	83%
2017	45 286	56 457	80%
2018	43 958	55 541	79%
2019	49 620	55 797	89%
2020	46 583	54 366	86%
2021	40 206	50 554	80%

FIGURE 2.19 – Calcul des S/P ultimes par année de survenance

Les S/P des années 2019 et 2020 sont nettement supérieurs aux autres. Cela pourrait s'expliquer par une baisse des primes et une hausse de la sinistralité en 2019 et par la crise de la Covid 19 qui a occasionné des confinements en 2020.

Mais c'est tout le contraire en 2021. En effet, avec un S/P de 77% nous pouvons dire que 2021 est une année relativement bonne. Cela pourrait s'expliquer par le soutien massif de l'Etat aux entreprises, le fameux « Quoi qu'il en coûte ».

2.4.2 Le ratio combiné

C'est un ratio clé qui permet à l'assureur de mesurer la rentabilité de son activité sur une période donnée. Il se calcule comme suit :

$$\boxed{\text{Ratio combiné} = \frac{\text{Charges sinistres ultimes} + \text{frais totaux} + \text{ coût de la réassurance}}{\text{Primes émises}}}$$

Notons que le ratio combiné a vocation à être inférieur à un car un ratio combiné supérieur à un signifie que le portefeuille est déficitaire. En effet, le montant total des sinistres, frais et coût de la réassurance réglé est supérieur aux cotisations encaissées. Le département gestion des risques et pilotage veille à ce que ce scénario ne se produise pas.

2.4.3 Calcul de Boni/Mali

En assurance, provisionner c'est non seulement prédire un montant de provision pour pouvoir faire face à ses engagements vis à vis des assurés en tenant compte des informations disponibles mais aussi étudier la loi conditionnelle de la charge ultime par année de survenance afin de quantifier l'incertitude associée à cette prédiction. Pour l'année de survenance i, nous cherchons à prédire la charge sinistre ultime $C_{i,n}$ dont l'estimateur est :

$$\hat{C}_{i,n}^{(n-i)} = \mathbb{E}[C_{i,n} \,|\, C_{i,1} \dots C_{i,n-i}]$$

Le montant de provision à constituer, relatif à la survenance i, est donc :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n}^{(n-i)} - C_{i,n-i}$$

Comme nous venons de le dire, c'est l'incertitude liée à cette provision qui est la grande inconnue.

La nouvelle directive européenne Solvabilité 2 demande de mesurer une incertitude dite à *un an*. Pour cela, pour la survenance i, l'estimateur de la charge ultime à l'horizon *un an* est :

$$\hat{C}_{i,n}^{(n-i+1)} = \mathbb{E}[C_{i,n} \,|\, C_{i,1} \ldots C_{i,n-i+1}].$$

Intéressons nous à la variation de l'estimation de la charge ultime entre les dates $n-i$ et $n-i+1$ notée $\widehat{CDR}_i^{(n-i+1)}$ (CDR pour *claims development result*) et définie par :

$$\boxed{\widehat{CDR}_i^{(n-i+1)} = \hat{C}_{i,n}^{(n-i)} - \hat{C}_{i,n}^{(n-i+1)}}$$

$\widehat{CDR}_i^{(n-i+1)}$ aussi appelé : boni/mali sur antérieur peut être interprété comme le résultat comptable sur antérieur. Son calcul hors PRI permet à l'assureur de porter un jugement sur ses méthodes de provisionnement. Ainsi,

- si $\widehat{CDR}_i^{(n-i+1)} < 0$ on parle de mali car il s'agit d'un sous-provisionnement, l'assureur a mal évalué ses engagements. Il va devoir gonfler sa provision pour être solvable dans le futur.

- si $\widehat{CDR}_i^{(n-i+1)} > 0$ on parle de boni, l'assureur a bien évalué ses engagements à *un an*. Notons qu'un boni très élevé n'est pas souhaitable parce que cela pourrait, fiscalement, devenir problématique.

En raison de la volatilité du portefeuille d'assurance et des erreurs d'estimation liée au modèle, il est quasi-impossible d'espérer avoir $\widehat{CDR}_i^{(n-i+1)} = 0$. Le travail de l'actuaire consiste à limiter les volatilités par des méthodes statistiques et sa connaissance du portefeuille.

2.4.4 Incertitude à *un an* par la méthode de Merz et Wüthrich

La méthode de Mack dont nous venons d'évoquer permet de mesurer l'incertitude à l'ultime. Mais la nouvelle directive européenne Solvabilité 2 demande de la mesurer à horizon dit à *un an* c'est-à-dire de calculer $\mathrm{Var}[CDR_i^{(n-i+1)} \,|\, \mathcal{F}_{i,n-i}]$ avec $\mathcal{F}_{i,n-i}$ l'information disponible pour la survenance i c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}_{i,n-i} = \{C_{i,1}, \ldots, C_{i,n-i}\}$$

C'est ce qu'ont fait Merz et Wüthrich en 2008 dans l'article «*Modelling the Claims Development Result for Solvency Purposes*». Dans cet article, ils ont étudié la variation du boni/mali (CDR, claims development result) c'est-à-dire la variation de la charge sinistre totale d'une année sur l'autre. En effet, la charge ultime prédite varie presque sûrement d'année en année. Cette vision dite à *court-terme* proposée par Merz et Wüthrich est importante pour plusieurs raisons :

– Elle est pertinente pour la prise des décisions de gestion régulières. Les compagnies d'assurance travaillent généralement sur une base annuelle. Il s'agit par exemple des clôtures des comptes, de la tarification des produits d'assurance, des ajustements de primes, etc.

– Si la vision à *court-terme* n'est pas prometteuse, l'entreprise ne peut simplement pas atteindre le *long-terme*, car elle sera déclarée insolvable avant d'atteindre le *long terme*.

– La performance à *court-terme* de l'entreprise, vu au travers de ses états financiers et ses rapports annuels, intéresse et importe ses clients, le régulateur, les investisseurs et les agences de notations. Il en va de sa réputation sur le marché de l'assurance.

2.4.4.1 Les hypothèses du modèle de Merz et Wüthrich

Les hypothèses du modèle proposé par Merz et Wüthrich sont les suivantes :

- Les paiements cumulés des différentes années de survenance i sont indépendants

- Il existe des constantes $f_j > 0$ et $\sigma_j > 0$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, les paiements cumulés $(C_{i,j})_{j>0}$ vérifient :

  $$C_{i,j+1} = f_j C_{i,j} + \sigma_j \sqrt{C_{i,j}} \times \epsilon_{i,j+1} \quad \text{avec} \quad \mathbb{E}[\epsilon_{i,j+1} \,|\, \mathcal{F}_{i,n-i}] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\epsilon_{i,j+1}^2 \,|\, \mathcal{F}_{i,n-i}] = 1.$$

  Par conséquent,

  $$\mathbb{E}[C_{i,j+1} \,|\, C_{i,j}] = f_j C_{i,j} \quad \text{et} \quad \text{Var}[C_{i,j+1} \,|\, C_{i,j}] = \sigma_j^2 C_{i,j}$$

Sous la deuxième hypothèse, $\mathbb{E}[\widehat{CDR}_i^{(n-i+1)} \,|\, \mathcal{F}_{i,n-i}] = 0$ c'est-à-dire que pour la survenance i, entre deux années calendaires successives, on ne peut espérer faire ni de boni ni de mali en moyenne. Rappelons que, pour la survenance i, le boni/mali entre les dates $t = n-i$ et $t = n-i+1$ est :

$$\widehat{CDR}_i^{(n-i+1)} = \hat{C}_{i,n}^{(n-i)} - \hat{C}_{i,n}^{(n-i+1)}$$

où $\hat{C}_{i,n}^{(n-i)}$ est la charge sinistre ultime estimée en fonction des informations disponibles à la date $t = n-i$ et $\hat{C}_{i,n}^{(n-i+1)}$ celle estimée un an plus tard.

Si on ne peut espérer faire ni de boni ni de mali, quelle est la déviation du $\widehat{CDR}_i^{(n-i+1)}$ autour de 0 (c'est la vision prospective de l'erreur) ? et quelle est sa déviation autour de la vraie valeur $CDR_i^{(n-i+1)}$ (c'est la vision rétrospective) ?

En d'autres termes, que valent :

$$MSEP_{\widehat{CDR}_i^{(n-i+1)} \,|\, \mathcal{F}_{i,n-i}}(0) = \mathbb{E}\left[\left(\widehat{CDR}_i^{(n-i+1)} - 0\right)^2 \,|\, \mathcal{F}_{i,n-i}\right]$$

et

$$MSEP_{CDR_i^{(n-i+1)} \,|\, \mathcal{F}_{i,n-i}}\left(\widehat{CDR}_i^{(n-i+1)}\right) = \mathbb{E}\left[\left(CDR_i^{(n-i+1)} - \widehat{CDR}_i^{(n-i+1)}\right)^2 \,|\, \mathcal{F}_{i,n-i}\right]$$

où $MSEP$ est la Mean Square Error of Prédiction (l'erreur quadratique moyenne de prédiction) ? Cette dernière égalité (vision retrospective) n'étant pas intéressante dans le cadre de l'évaluation de la solvabilité de l'assureur, nous nous intéresserons dans ce mémoire qu'à la vision prospective où dans la marge de solvabilité, il faudrait détenir du capital-risque pour d'éventuelles déviations négatives du boni/mali $CDR_i^{(n-i+1)}$ par rapport à 0.

Ainsi, pour l'année de survenance i,

$$\boxed{\widehat{MSEP}_{\widehat{CDR}_i^{(n-i+1)} \,|\, \mathcal{F}_{i,n-i}}(0) = \left(\hat{C}_{i,n}^{(n-i)}\right)^2 \left(\hat{\Gamma}_{i,n}^{(n-i)} + \hat{\Delta}_{i,n}^{(n-i)}\right)}$$

où :

$$\hat{\Delta}_{i,n}^{(n-i)} = \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / \left(\widehat{f_{n-i}^{(n-i)}}\right)^2}{S_{n-i}^{(n-i)}} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{(n-i+1)}}\right)^2 \times \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \left(\widehat{f_j^{(n-i)}}\right)^2}{S_j^{(n-i)}}$$

et

$$\hat{\Gamma}_{i,n}^{(n-i)} = \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{(n-i+1)}} \right)^2 \times \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \left(\widehat{f_j^{(n-i)}} \right)^2}{C_{n-j,j}} + \frac{\widehat{\sigma}_{n-i}^2 / \left(\widehat{f_{n-i}^{(n-i)}} \right)^2}{C_{i,n-i}}$$

avec

$$S_j^{(n-i)} = \sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j} \quad \text{et} \quad \widehat{f_j^{(n-i)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}}$$

et pour toutes survenances confondues, on a :

$$\boxed{\widehat{MSEP}_{\sum_{i=1}^{n} \widehat{CDR}_i^{(n-i+1)} \mid \mathcal{F}_{i,n-i}}(0) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{MSEP}_{\widehat{CDR}_i^{(n-i+1)} \mid \mathcal{F}_{i,n-i}}(0) + 2 \sum_{k>i>1} \hat{C}_{i,n}^{(n-i)} \hat{C}_{k,n}^{(n-i)} \left(\hat{\Upsilon}_{i,n}^{(n-i)} + \hat{\Lambda}_{i,n}^{(n-i)} \right)}$$

avec :

$$\hat{\Lambda}_{i,n}^{(n-i)} = \frac{C_{i,n-i}}{S_{n-i}^{(n-i+1)}} \times \frac{\widehat{\sigma}_{n-i}^2 / \left(\widehat{f_{n-i}^{(n-i)}} \right)^2}{S_{n-i}^{(n-i)}} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{(n-i+1)}} \right)^2 \times \frac{\widehat{\sigma}_j^2 / \left(\widehat{f_j^{(n-i)}} \right)^2}{C_{n-j,j}}$$

et

$$\hat{\Upsilon}_{i,n}^{(n-1)} = \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{(n-i+1)}} \right)^2 \times \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \left(\widehat{f_j^{(n-i)}} \right)^2}{C_{n-j,j}} + \frac{\widehat{\sigma}_{n-i}^2 / \left(\widehat{f_{n-i}^{(n-i)}} \right)^2}{S_{n-i}^{(n-i+1)}}$$

Nous avons calculé la déviation standard ou l'écart type du Claims Development Result par année de développement et en fonction des années de survenance via la fonction CDR du package ChainLadder sous le logiciel R. Ci-dessous le résultat.

Survenance	IBNR	CDR(1)S.E.	CDR(2)S.E.	CDR(3)S.E.	CDR(4)S.E.	CDR(5)S.E.	CDR(6)S.E.	CDR(7)S.E.	CDR(8)S.E.	Mack.S.E.
2 014	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2 015	89,04	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,07
2 016	111,12	0,09	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,11
2 017	127,80	8,67	0,07	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	8,67
2 018	209,09	79,10	8,26	0,07	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	79,53
2 019	1 341,19	186,26	83,34	8,71	0,07	0,06	0,00	0,00	0,00	204,24
2 020	10 546,21	699,63	176,60	79,10	8,26	0,07	0,05	0,00	0,00	725,94
2 021	30 657,92	2 012,22	637,53	160,80	72,11	7,53	0,06	0,05	0,00	2 118,15
Total	43 082,37	2 175,22	676,01	183,79	72,70	7,53	0,09	0,05	0,00	2 286,42

Figure 2.20 – Déviation standard du Claims Development Result

Notons que dans le tableau ci-dessus, CDR.SE = 0,00 ne signifie pas que l'erreur standard est nulle mais plutôt est égale à une valeur très proche de 0.

Pour la premier année de développement, par exemple, l'écart type du boni/mali total (toutes survenances confondues) est de 2175 K€ environ et à la huitième année de développement tous les écarts types des bonis/malis par survenance sont très proches de 0. Nous retrouvons aussi dans la sortie, le montant des provisions par la méthode de Chain Ladder et la Root Mean Square Error of Prediction du modèle de Mack (le modèle correspondant aux charges sinistres ultimes).

2.5 Provision d'équilibre

La provision d'équilibre est une provision dont le principe est d'assurer l'équilibre financier de l'ensemble du régime. Le montant de provision à constituer doit tendre à atteindre un plafond de 100% du montant des cotisations contractuelles, nettes de taxes, calculées chaque année à la fin de l'exercice, pour l'ensemble des Contrats d'assurance collective.

2.5.1 Reprise sur la Provision d'équilibre

Financement des taux d'appel sur cotisations

Il peut être décidé, d'un commun accord entre les Parties, dans le cadre de la Commission paritaire, de fixer un taux d'appel sur les cotisations contractuelles d'un exercice donné pour tout ou partie des Contrats d'assurance collective. La part des cotisations non appelées est financée d'un commun accord entre les Parties par prélèvement sur la Provision d'équilibre.

Financement des résultats déficitaires

Lorsque le solde d'un compte de résultat d'un Contrat d'assurance collective est débiteur, l'Assureur prélève sur la Provision d'équilibre les sommes nécessaires à l'ajustement du compte de résultat, dans la limite des sommes disponibles. En cas de résultats déficitaires sur plusieurs Contrats d'assurance collective, la Provision d'équilibre sera reprise prioritairement selon l'ordre du Contrat d'assurance collective le plus ancien pour ajuster les résultats déficitaires. La Provision d'équilibre constitue l'unique provision susceptible de permettre le financement des éventuels résultats déficitaires.

2.5.2 Dispositif de rajeunissement de la Provision d'équilibre

Les sommes dotées à la Provision d'équilibre sont suivies par millésime de constitution. Si en $N+10$ après la dotation de provision d'équilibre au titre de l'exercice N, le solde de cette provision constituée au titre de l'exercice N est supérieur à zéro, celui-ci est repris et partagé de manière définitive entre l'Assureur et l'Association contractante de la manière suivante :

- 97% en dotation aux comptes et résultats globaux de l'Assureur ;
- 3% à titre de retour bénéficiaire à l'Association contractante.

2.5.3 Plafond de la Provision d'équilibre

Lorsque la Provision d'équilibre rattachée à la Convention atteint le plafond de 100% du montant des cotisations contractuelles nettes de taxes, l'excédent dépassant ce plafond (après prise en compte du mécanisme de « rajeunissement » de la Provision exposé précédemment), est partagé de manière définitive entre l'Assureur et l'Association contractante de la manière suivante :

- 97% en dotation aux comptes et résultats globaux de l'Assureur ;
- 3% à titre de retour bénéficiaire à l'Association contractante.

2.6 Provision pour Prime Non Acquise PPNA

La provision pour prime non acquise (la PPNA) est définie comme «la fraction de primes qui correspond à la durée restant à couvrir pour un contrat ou un ensemble de contrats après la clôture de l'exercice considéré et jusqu'au terme de la garantie»

En assurance chômage GSC, la plupart des contrats couvrent la période du 01 janvier au 31 décembre, soit un an. Pour ces contrats, à la clôture de l'exercice courant, l'actuaire ne calcule pas de PPNA.

Considérons le contrat souscrit pour une durée d'un an et qui débute, par exemple, le 01 avril de l'exercice courant pour une prime P. Au 31 décembre, c'est seulement $\frac{9 \text{ mois}}{12 \text{ mois}}$ de la période garantie qui est écoulée. A la date d'inventaire (31/12/N), la prime payée par l'assuré sera fractionnée en deux :

– une partie qui représente $\frac{9 \text{ mois}}{12 \text{ mois}} \times P$ est appelée «prime acquise » et enregistrée au bilan par la comptabilité au compte des produits.

– l'autre partie qui représente $\frac{3 \text{ mois}}{12 \text{ mois}} \times P$ appelée «prime non acquise » servira à couvrir le risque pendant encore 3 mois et est enregistrée au bilan sous l'intitulé Provision pour Prime Non Acquise PPNA.

Notons que la PPNA se calcule contrat par contrat et la réglementation impose le choix d'une règle de répartition des primes entre partie acquise et non acquise au prorata temporis comme nous venons de le faire.

$$\boxed{\text{PPNA}_{\text{Clôture}} - \text{PPNA}_{\text{Ouverture}} = \text{Primes émises} - \text{Primes acquises}}$$

où les primes émises sont des primes correspondant à des contrats en cours de validité.

2.7 Provision pour maintien des garanties PMG

Les assureurs peuvent constituer des provisions pour la garantie donnée aux assurés lorsque les charges prévisibles liées à cette garantie résultent d'une obligation et qu'elles sont nettement précisées quant à leur nature et à leur montant.

Le contrat qui lie l'association GSC, l'assureur apériteur Gan Assurances et les coassureurs peut être vu comme un contrat de prévoyance collective. La loi Evin peut donc être appliquée c'est-à-dire le maintien de la couverture pour les « prestations à naître ». La couverture du risque chômage inclut une clause de maintien de la garantie sur laquelle la résiliation ou le non-renouvellement du contrat est sans effet.

2.7.1 Garantie accordée

En cas de résiliation du contrat entre l'Assureur et l'association, quelque soit la partie à l'origine de la résiliation, les garanties souscrites par les adhérents sont maintenues pour une durée de 9 mois, sans aucun versement de primes. Cette provision est non-déductible.

2.7.2 Calcul de la PMG GSC

L'association et les assureur et co-assureurs en charge de l'assurance chômage GSC ont proposé de calculer la PMG de la manière suivante :

$$\boxed{PMG = CA \times S/P \times (1 + \theta_{PASS}) \times \Theta_{PA}} \quad \text{où}$$

- CA : est le chiffre d'affaire prévisionnel net de frais de gestion
- S/P : est le ratio sinistres à primes attendu
- θ_{PASS} : est le taux d'évolution du PASS
- Θ_{PA} : la part de primes appelées qui est de 75% en 2022

Rappelons que la prime appelée représente un pourcentage (par exemple 75% ou 80%) de la prime conventionnelle c'est-à-dire de la prime théorique que l'assuré est censé payer pour être couvert.

2.8 Provision pour risque croissant PRC

La provision pour risque croissant PRC est par définition une provision « pouvant être exigée [. . .] pour les opérations d'assurance contre les risques de maladie et d'invalidité et égale à la différence des valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés ».

Vous l'aurez compris, au vu de sa définition, *cette provision en assurance chômage est discutable.* Mais pas de panique, nous vous expliquons tout.

2.8.1 But de la PRC

Lorsque la prime d'assurance n'est pas une fonction croissante du risque c'est-à-dire lorsqu'elle est lissée, la PRC correspond à la mise de côté de la part de prime excessive par rapport au coût du risque de l'année sur le coût du risque des années suivantes. Les principales applications de la PRC sont dans les contrats temporaires décès, ou en contrat emprunteur.

Si les assurés payent une prime trop importante pour le risque de l'année et que cela correspond à un risque futur, il serait déplacé que la différence produise un résultat technique et soit ensuite imposée et distribuée ou incorporée aux fonds propres alors qu'en fait, par la suite, on va connaître un risque pour lequel on ne recevra pas de prime, et qui va donc dégager dans ce contexte une perte technique future que rien ne pourra amortir.

2.8.2 Pourquoi la PRC en assurance chômage GSC ?

Cette provision a été créée pour tenir compte de l'accroissement de la fréquence de la sinistralité liée à l'augmentation de l'âge moyen des affiliés en portefeuille.

Son fondement théorique est l'indépendance de la cotisation à l'âge à la souscription et l'absence d'évolution du tarif en fonction de l'âge. En revanche son fondement réglementaire est discutable, dans la mesure où le code des assurances ne mentionne pas explicitement le risque chômage.

2.8.3 Modalité de calcul de la PRC

La provision pour risque croissant relative à un assuré d'âge x est calculée comme étant la différence entre les valeurs actuelles probables des engagements de l'assuré et des engagements de l'assureur.

$$\boxed{\mathrm{PRC}_x = \mathrm{VAP}_{\mathrm{Assureur}} - \mathrm{VAP}_{\mathrm{Assuré}}}$$

$\mathrm{VAP}_{\mathrm{Assureur}}$ est l'ensemble des prestations payées par l'assureur à l'assuré si ce dernier entre en chômage et tant qu'il est encore en portefeuille et $\mathrm{VAP}_{\mathrm{Assuré}}$ est l'ensemble des primes payées par l'assuré à l'assureur tant qu'il est encore en portefeuille.

Considérons un affilié en portefeuille à une date $t = t_i$ non au chômage. Intéressons nous à son statut à la date $t = t_{i+1}$. A cette date, soit il est au chômage, soit il est radié du portefeuille, soit il est toujours en portefeuille mais n'est pas au chômage. Ces informations vont nous permettre de calculer les valeurs actuelles probables de ses engagements et de ceux de son assureur.

Dans la suite nous noterons :

− x l'âge à la souscription de l'assuré
− *Cot*, la cotisation conventionnelle HT

- *Rd(i)* la loi de radiation en fonction de l'âge i.
- *Prest(i)* la loi d'entrée en prestation en fonction de l'âge i.
- T_{IJ}, le taux d'inflation de l'Indemnité Journalière,
- T_S, le taux moyen d'inflation des salaires retenu,
- T_{Com} le taux de commission sur primes
- T_g le taux de frais de gestion, une fraction du montant de prestation
- τ le taux technique d'actualisation fixé
- R, le montant de la prestation garantie

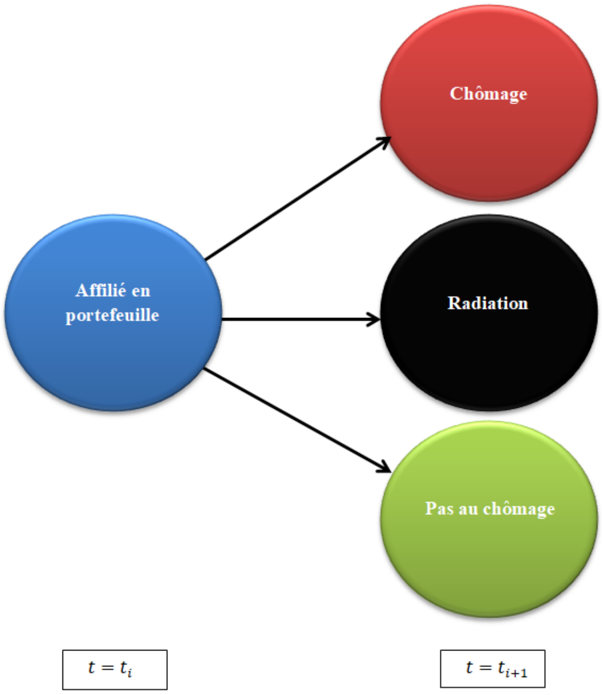


FIGURE 2.21 – Les différents états d'un affilié entre deux dates

Avant de calculer les engagements des assuré et assureur, soient ν le facteur d'actualisation et ${}_kP_x^{SC}$ la probabilité qu'un assuré d'âge x à la souscription soit en portefeuille pendant k années sans entrer en chômage.

$$\nu = \frac{1}{1+\tau} \quad \text{et} \quad {}_kP_x^{SC} = \prod_{j=0}^{k} [1 - Rd(x+j) - Prest(x+j)]$$

Calcul des engagements de l'Assureur

$$\boxed{\text{VAP}_{\text{Assureur}} = R \times (1+T_g) \times \sum_{k=0}^{68-x} {}_kP_x^{SC} \times Prest(x+k) \times (1+T_{IJ})^k \times \nu^{k+\frac{1}{2}}}$$

Calcul des engagements de l'Assuré

$$\boxed{\text{VAP}_{\text{Assuré}} = Cot \times (1 - T_{Com}) \times \sum_{k=0}^{68-x} {}_kP_x^{SC} \times (1 + T_S)^k \times \nu^{k+\frac{1}{2}}}$$

Il ne nous reste plus qu'à calibrer les lois d'entrée en chômage et de radiation. C'est ce que nous allons voir dans le chapitre suivant.

2.9 Pilotage technique et économique du régime GSC

Il s'agit du pilotage de la marge future générée par le régime. En effet, des actions techniques peuvent être menées pour piloter le niveau de rentabilité. Il s'agit par exemple de la politique tarifaire (majorations) ou des règles de souscription (interdits de souscription, risques aggravés).

La politique de souscription est le pilotage des risques que l'assureur accepte de prendre. Par exemple, un grand patron du CAC40 affilié du régime qui gagne plusieurs millions d'euros par an, serait très coûteux au régime s'il venait à être au chômage. Il serait donc judicieux de limiter les indemnisations. En contrat GSC l'indemnisation est limitée à huit fois le PASS, le Plafond Annuel de la Sécurité Sociale.

Le risque d'assurer un créateur d'entreprise dont l'entreprise a moins d'un an n'est pas à sous-estimer non plus, c'est pourquoi il serait mieux de n'accepter que ceux dont l'entreprise existait depuis au moins quelques années, trois ans en contrat GSC.

La politique tarifaire du régime GSC se pilote via la taux d'appel.

$$\boxed{\text{Taux d'appel} = \frac{\text{Prime appelée}}{\text{Prime conventionnelle}}}$$

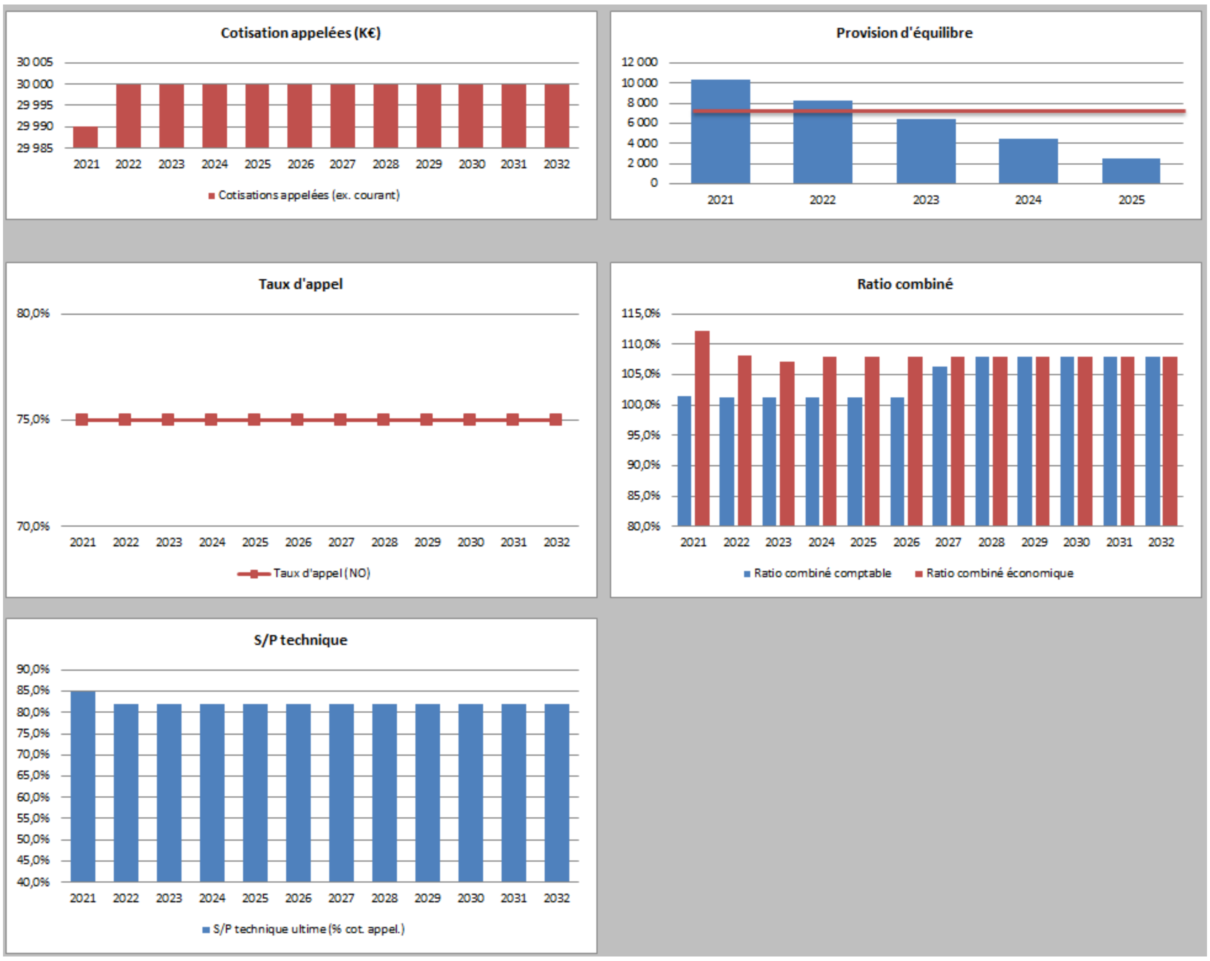
où la prime appelée est la prime réellement facturée au client et la prime conventionnelle correspond au tarif initial au moment du lancement du produit.

Le taux d'appel est passé de 100% à 75% compte tenu des bons résultats techniques du régime. En fonction des résultats actuels et anticipés, ce taux peut être revu à la hausse ou à la baisse en accord avec l'association GSC.

Pour piloter le régime, il faut établir un modèle prospectif qui représente le compte de résultat du régime et qui évolue en fonction des hypothèses utilisées dans le modèle. Les hypothèses retenues sont : le chiffre d'affaire, le taux d'appel, le S/P ultime et les frais généraux.

Première trajectoire

Sur cette première simulation, sur les dix prochaines années, on ne change pas de politique tarifaire, on garde le statu quo : le taux d'appel est constant et égal à 75%, le S/P ultime est constant égal à 82% et le ratio combiné économique est égal à 108% et comme on peut s'y attendre, très rapidement la provision d'équilibre s'épuise. Ce scénario n'est pas envisageable.

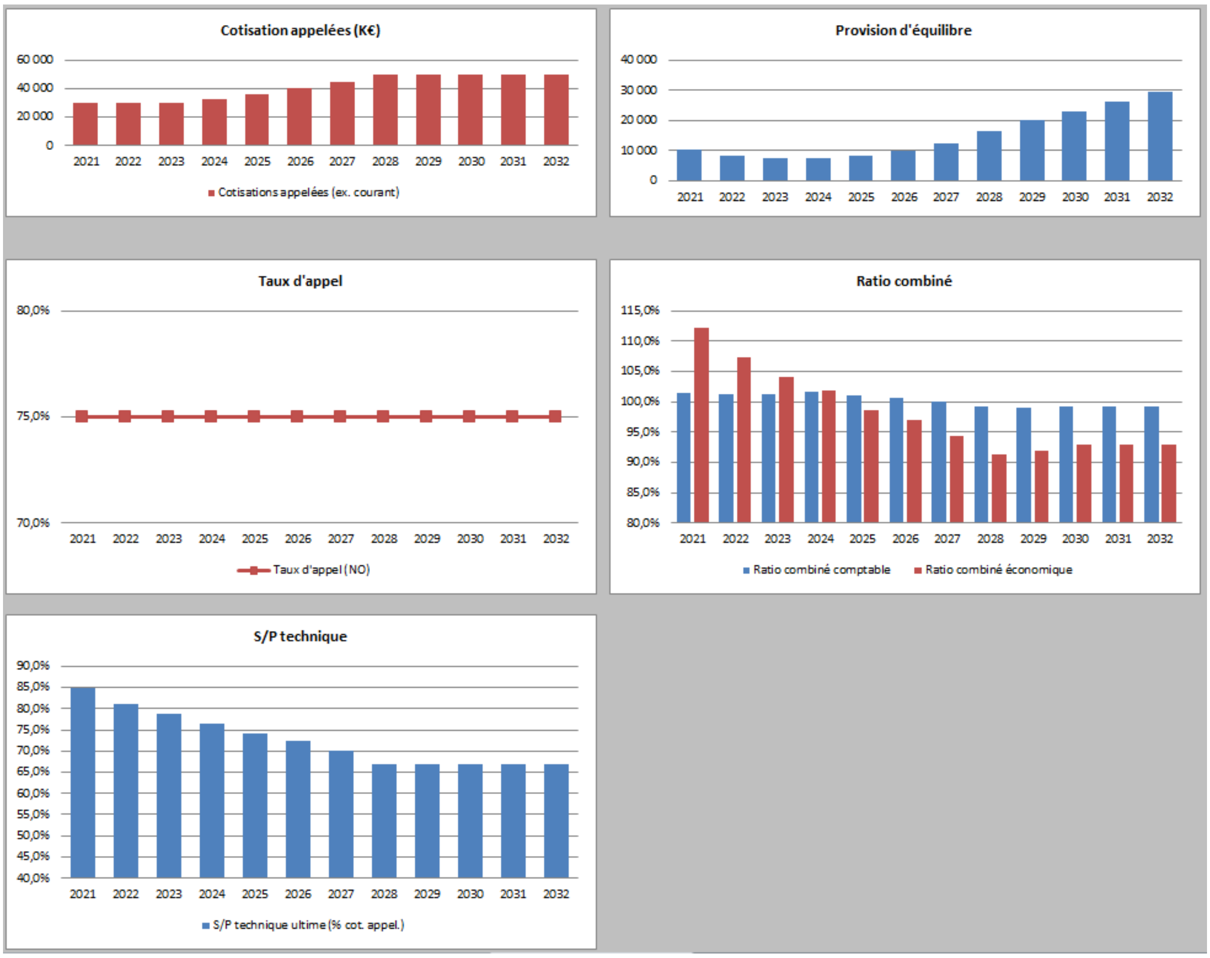


Deuxième trajectoire

Pour cette deuxième trajectoire, sur les dix prochaines années, le taux d'appel passe de 75% à 80% en deux ans puis reste égal à 80% sur les huit années suivantes. Le S/P technique diminue en conséquent de 82% en 2022 à 76,9% en 2023 puis se stabilise à 72,4% jusqu'à 2032. Le ratio combiné économique diminue lui aussi de 112,2% à 98,3%. Ces hypothèses permettent d'avoir la provision d'équilibre en croissance comme on peut le voir sur la figure.

Troisième trajectoire

Pour cette troisième trajectoire, on lance une nouvelle offre qui a une meilleur rentabilité que l'offre actuelle avec un S/P cible à 67% au lieu de 82%. Cette nouvelle offre appelée *offre 2022* remplace progressivement l'offre actuelle au fur et à mesure du renouvellement du portefeuille. Le taux d'appel du portefeuille historique est constant et égal à 75% et le ratio combiné à 99,2%. Sous ces hypothèses, la provision d'équilibre est en croissance.



Chapitre 3

Lois d'entrée en chômage et de radiation d'un affilié du régime GSC

Dans ce chapitre nous allons construire deux tables, une table de loi d'entrée en chômage et une table de loi de radiation ou loi de chute d'un affilié, en nous servant des données disponibles. Mais avant de commencer il serait utile que l'on se rappelle de quelques notions d'analyse de survie indispensables.

Dans toute la suite, le terme de durée de survie désigne le temps écoulé jusqu'à la survenue d'un événement précis (dans notre cas l'entrée en chômage ou la radiation d'un affilié).

3.1 Quelques rappels d'analyse de survie

On considère une population d'assurés dont la durée de survie est décrite par une variable aléatoire T positive ou nulle et absolument continue.

3.1.1 Fonction de survie

La fonction de survie est, pour t fixé, la probabilité de survivre jusqu'à l'instant t, c'est-à-dire :

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t) \quad , \quad t \geq 0$$

3.1.2 Fonction de répartition

La fonction de répartition de la variable aléatoire T est, pour t fixé, la probabilité d'entrée en chômage ou de radiation avant l'instant t c'est-à-dire :

$$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = 1 - S(t)$$

3.1.3 Densité de probabilité f

La densité de probabilité f est telle que, pour tout $t \geq 0$,

$$F(t) = \int_0^t f(u)\, du$$

Si la fonction de répartition F admet une dérivée au point t alors :

$$f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t+h)}{h} = F^{'}(t) = -S^{'}(t)$$

Pour t fixé, la densité de probabilité représente la probabilité d'entrée en chômage ou de radiation dans un petit intervalle de temps après l'instant t.

3.1.4 Fonction de hasard

La fonction de hasard ou taux instantané d'entrée en chômage ou de radiation est la probabilité d'entrée en chômage ou de radiation dans un temps infinitésimal sachant que l'on était en activité à l'instant t.

Elle est définie par :

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} \ln S(t)$$

On en déduit la relation suivante :

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \mu(y)\, dy\right)$$

et le taux instantané cumulé est défini par :

$$\Psi(t) = \int_0^t \mu(y)\, dy$$

3.1.5 Notion de données complètes, censurées et tronquées

Il est courant d'avoir des données incomplètes dans une base de données c'est-à-dire des données qui ne sont pas complètement informatives. Dans le cas de l'assurance chômage qui nous intéresse, on se donne une période d'observation, l'intervalle $[t_i\,,\, t_f]$ où t_i est la date de début de l'observation et t_f sa date de fin.
Pour un assuré i, soit T_i son temps de survie, C_i son temps de censure, Y_i la durée réellement observée.

3.1.5.1 Données complètes

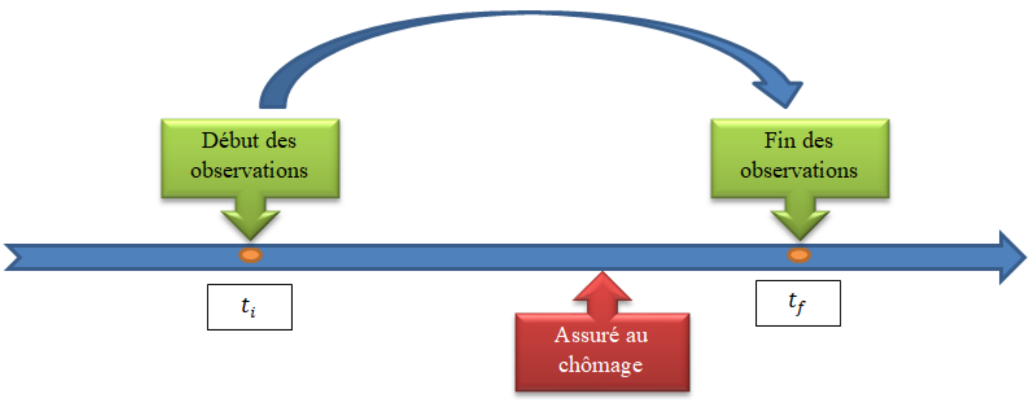


FIGURE 3.1 – Donnée complète d'un affilié

Nous nous intéressons à l'entrée en chômage dans la figure ci-dessus.
Les données relatives aux affiliés en portefeuille entre les dates t_i et t_f et qui sont entrés en chômage ou radiés entre ces deux dates, sont des données complètes. Ce sont des données qui

livrent toutes les informations attendues.
La durée réellement observée est donc :

$$Y_i = T_i$$

3.1.5.2 Notion de censure

Censure à droite

La durée de vie est dite censurée à droite si l'individu n'a pas subi l'événement à sa dernière observation. En présence de censure à droite, les durées de vie ne sont pas toutes observées ; pour certaines d'entre elles, on sait seulement qu'elles sont supérieures à une certaine valeur connue.

Les données relatives aux affiliés en portefeuille au début de l'observation c'est-à-dire à la date t_i mais qui ne sont pas entrés en chômage (respectivement ne sont pas radiés) avant la date t_f, sont des données incomplètes. Il s'agit dans ce cas d'une censure à droite.

Nous nous interessons à l'entrée en chômage dans la figure ci-dessous.

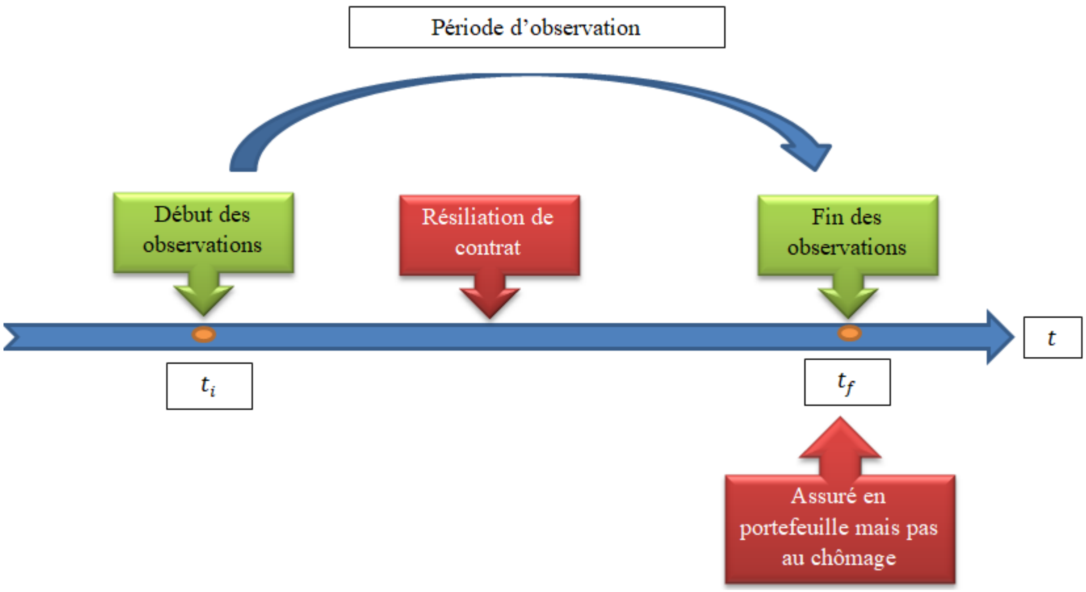


FIGURE 3.2 – Donnée d'un affilié censurée à droite

La durée réellement observée est donc :

$$Y_i = \min(T_i, C_i)$$

Censure à gauche

La censure à gauche correspond au cas où l'individu a déjà subi l'événement avant que l'individu soit observé. On sait uniquement que la date de l'événement est inférieure à une certaine date connue. C'est le cas des affiliés entrés en chômage (respectivement radiés) avant la date de début des observations.

Dans ce cas, la durée réellement observée est :

$$Y_i = \max(T_i, C_i)$$

Nous nous interessons à l'entrée en chômage dans la figure ci-dessous.

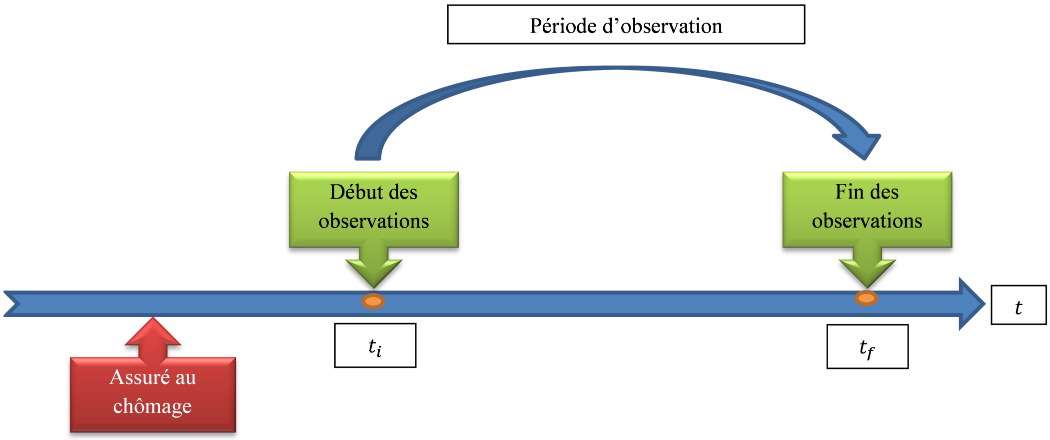


FIGURE 3.3 – Donnée d'un affilié censurée à gauche

3.1.5.3 Notion de troncature

Il y a une différence entre censure et troncature. Les troncatures diffèrent des censures au sens où elles concernent l'échantillonnage lui même. S'il y a troncature, une partie des assurés ne sont pas observables et l'on n'étudie qu'un sous-échantillon (problème d'échantillonnage).

C'est l'exemple des affiliés qui étaient en portefeuille mais n'y sont plus avant le début des observations. Parmi eux il y en avait qui étaient au chômage (respectivement radiés) d'autres non. On a aucune information les concernant. Les données relatives à ces affiliés sont des données non-observables.

3.2 Estimation des taux bruts

3.2.1 Estimateur de Kaplan-Meier

L'un des estimateurs non paramétriques des taux bruts très utilisés en actuariat qui prend en compte les notions de censure et de troncature est l'estimateur de Kaplan-Meier.

La méthode d'estimation de Kaplan Meier (KM) est aussi appelée par les statisticiens anglosaxons Product Limit Estimations (PLE). Le point central de cette méthode est l'estimation de la distribution de la fonction de survie $S(t)$, c'est-à-dire, la distribution au cours du temps de la probabilité de ne pas avoir subi l'événement étudié. En d'autres termes, l'intérêt porte plus sur le fait de rester dans une situation que sur la transition vers une autre situation.

3.2.1.1 Principe et Présentation de l'estimateur

Le but est de construire une fonction de survie avec l'idée selon laquelle être au chômage (respectivement être radié) à l'instant t, c'est être en activité (respectivement ne pas être radié) jusqu'à cet instant.

Pour l'intervalle d'âge $[x\,;x+1[$ soient :

- S_x la loi discrète de la forme (t_i, s_i) où s_i est la valeur prise par S_x en t_i.
- T_x la durée de vie résiduelle d'un affilié d'âge x qui n'a pas subi l'évènement

- q_x la probabilité d'être au chômage (respectivement radié) en t_i
- n_i le nombre d'affiliés en activité (respectivement non radiés) à l'instant t_i
- d_i le nombre d'affiliés au chômage (respectivement radiés) à l'instant t_i
- c_{i-1} le nombre d'affiliés censurés sur $[t_{i-1}\,;t_i[$

Ainsi, pour un affilié d'âge x, par la formule de Bayes, pour tout $t > t_i > t_{i-1} > \cdots > t_2 > t_1$, on a :

$$
\begin{aligned}
S_x(t) &= \mathbb{P}[T_x > t] = \mathbb{P}[T_x > t\,,\, T_x > t_i] = \mathbb{P}[T_x > t \,|\, T_x > t_i] \times \mathbb{P}[T_x > t_i] \\
&= \mathbb{P}[T_x > t \,|\, T_x > t_i] \times S_x(t_i) \\
&= \mathbb{P}[T_x > t \,|\, T_x > t_i] \times \mathbb{P}[T_x > t_i \,|\, T_x > t_{i-1}] \times \mathbb{P}[T_x > t_{i-1}] \\
&= \mathbb{P}[T_x > t \,|\, T_x > t_i] \times \mathbb{P}[T_x > t_i \,|\, T_x > t_{i-1}] \times S_x(t_{i-1}) \\
&= \vdots \\
S_x(t) &= \mathbb{P}[T_x > t \,|\, T_x > t_i] \times \ldots \mathbb{P}[T_x > t_2 \,|\, T_x > t_1] \times S_x(t_0)
\end{aligned}
$$

où $t_0 = 0$ et donc $S_x(t_0) = \mathbb{P}[T_x > 0] = 1$

Soit $p_i = \mathbb{P}[T_x > t_i \,|\, T_x > t_{i-1}]$. Le but est d'estimer $p_i = 1 - q_i$.

Un estimateur naturel de q_i est :

$$\hat{q}_i = \frac{d_i}{n_i} \quad \text{où} \quad n_i = n_{i-1} - d_{i-1} - c_{i-1}$$

L'estimateur de la fonction de survie est donc :

$$\hat{S}_x(t) = \prod_{i/t_i<t} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)$$

d'où l'estimateur du taux brut de l'intervalle d'âge $[x\,;x+1[$:

$$\boxed{\hat{q}_x = 1 - \prod_{i/t_i<t} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)}$$

3.2.1.2 Propriété de l'estimateur de Kaplan-Meier

D'après le lemme de Fleming et Harrington, $\hat{S}_x$ est un estimateur sans biais c'est-à-dire que :

$$\mathbb{E}[\hat{S}(t)] = S(t)$$

et par la formule de Greenwood on a :

$$\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{S}(t)] = \hat{S}(t)^2 \times \sum_{i/t_i<t} \frac{d_i}{n_i(n_i - d_i)}$$

On peut donc construire un intervalle de confiance à 95% de l'estimateur de Kaplan-Meier de la fonction de survie :

$$\boxed{IC_{95\%}[\hat{S}(t)] = \left[\hat{S}(t) - 1.96 * \sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{S}(t)]}\ ;\ \hat{S}(t) + 1.96 * \sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{S}(t)]}\right]}$$

3.2.2 Estimateur de Nelson-Aalen

L'estimateur de Nelson-Aalen est un estimateur non-paramétrique qui peut être utilisé, dans le cas des données de survie censurées et tronquées, pour estimer le taux instantané cumulé. Il est étroitement lié à la théorie des processus de comptage, représentant le nombre attendu d'événements dans l'intervalle (0,t] pour une unité à risque permanent. Cette interprétation est particulièrement utile pour les événements récurrents.

Dans toute la suite, les notations sont celles de la sous-section précedente.

3.2.2.1 Construction de l'estimateur

Considérons la situation des données de chômage ou de radiation, où nous voulons étudier le temps jusqu'au chômage ou à la radiation pour une population homogène d'affiliés du régime avec une fonction de taux de hasard $\mu(t)$ et une fonction de taux de hasard cumulé

$$A(t) = \int_0^t \mu(y)\, dy$$

L'estimateur de Nelson-Aalen de la fonction de taux de hasard cumulé, pour un affilié d'âge x, est de la forme :

$$\widehat{A}_x(t) = \sum_{i/t_i<t} \frac{d_i}{n_i}$$

où n_i est la population sous risque et d_i le nombre d'affiliés au chômage (respectivement radiés).

Ainsi, l'estimateur de Nelson-Aalen est une fonction en escalier croissante et continue à droite avec des incréments $\frac{d_i}{n_i}$ aux temps de défaillance observés.

L'estimateur de la fonction de survie est donc :

$$\hat{S}_x(t) = \exp\left[-\widehat{A}_x(t)\right]$$

d'où l'estimateur du taux brut de l'intervalle d'âge $[x; x+1[$:

$$\boxed{\hat{q}_x = 1 - \exp\left[-\widehat{A}_x(t)\right]}$$

3.2.2.2 Propriété de l'estimateur de Nelson-Aalen

L'estimateur de Nelson-Aalen $\widehat{A}_x(t)$ est un estimateur sans biais :

$$\mathbb{E}[\widehat{A}_x(t)] = A_x(t)$$

et sa variance peut être estimée par :

$$\widehat{\mathrm{Var}}[\widehat{A}_x(t)] = \sum_{i/t_i<t} \frac{d_i(n_i-d_i)}{n_i^2(n_i-1)}$$

et est aussi sans biais.

3.2.2.3 Intervalle de confiance de l'estimateur

Pour n_i suffisamment grand, par le Théorème Central Limite, on a :

$$\frac{\widehat{A}_x(t) - A_x(t)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}[\widehat{A}_x(t)]}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Nous pouvons donc déterminer l'intervalle de confiance de $A_x(t)$ puis celui de S_x :

$$A_x(t) \in \left[\widehat{A}_x(t) - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}[\widehat{A}_x(t)]}\,;\,\widehat{A}_x(t) + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}[\widehat{A}_x(t)]}\right]$$

et

$$S_x(t) \in \left[\exp\left(-\widehat{A}_x(t) + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}[\widehat{A}_x(t)]}\right)\,;\,\exp\left(-\widehat{A}_x(t) - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}[\widehat{A}_x(t)]}\right)\right]$$

où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le $1-\frac{\alpha}{2}$ quantile de la loi normale centrée réduite.

3.2.3 Comparaison des taux bruts et choix de l'estimateur

3.2.3.1 Loi de radiation

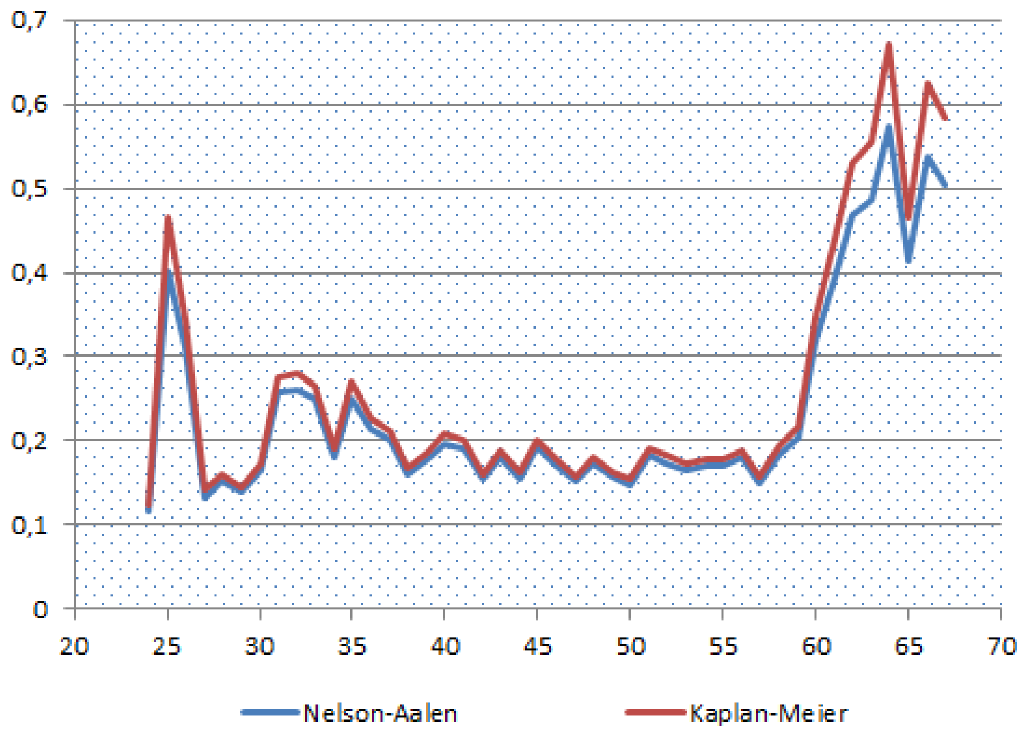


FIGURE 3.4 – Graphique des taux bruts de radiation de Kaplan-Meier et Nelson-Aalen

On voit par le graphique que, bien que les deux taux bruts soient presque identiques, les taux obtenus par la méthode de Kaplan-Meier sont légèrement supérieurs à ceux obtenus par la méthode de Nelson-Aalen. Par prudence, nous choisissons le taux brut de Kaplan-Meier.

L'augmentation du taux de radiation pour les âges élevés correspond au départ à la retraite des séniors.

3.2.3.2 Loi d'entrée en chômage

Les graphiques des taux bruts montrent qu'avant 40 ans et au-delà de 60 ans le risque d'entrée en chômage est beaucoup plus important, surtout pour les plus de 60 ans où le taux d'entrée en chômage explose. Le taux relativement stable entre 40 et 60 ans pourrait s'expliquer par le fait qu' à ces âges l'on acquiert une expérience professionelle relativement solide et prenne des décisions prudentes beaucoup moins risquées pour l'entreprise.

Le graphique montre, comme c'est le cas du graphique de la loi de radiation, qu'il serait plus prudent de travailler avec les taux bruts obtenus par la méthode de Kaplan-Meier que ceux obtenus par la méthode de Nelson-Aalen, bien que les deux taux bruts soient très proches.

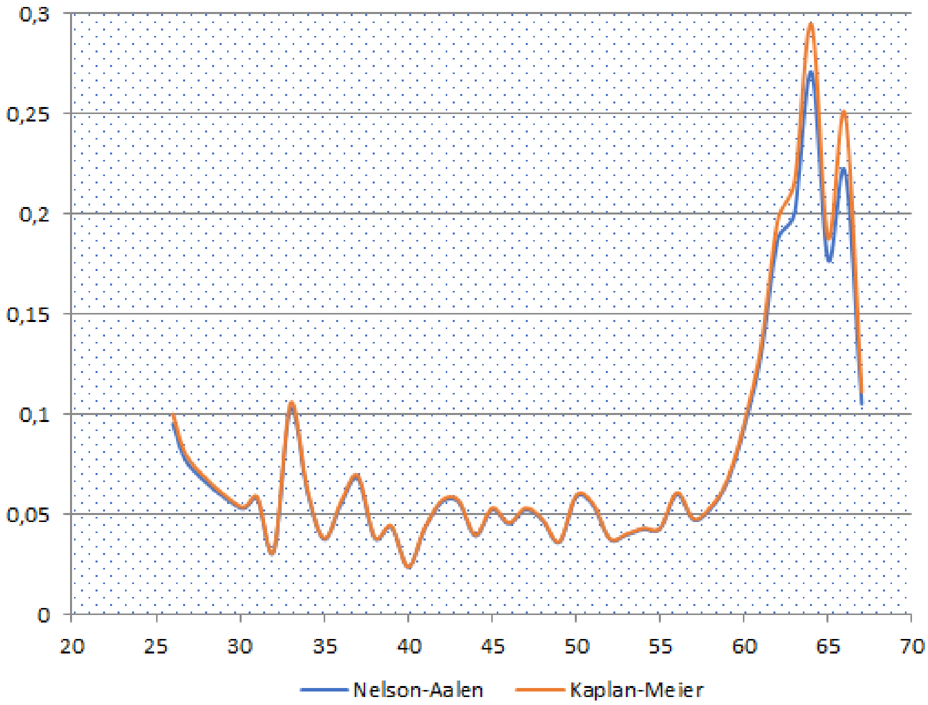


FIGURE 3.5 – Graphique des taux bruts d'entrée en chômage de Kaplan-Meier et Nelson-Aalen

Nous voyons aussi par le graphique que le risque n'est pas croissant avec l'âge. L'on peut se poser la question de savoir si le calcul d'une PRC dans ce cas est nécéssaire et la réponse est non. Il faudrait simplement ne pas accepter les risques à partir d'un certains âge, 60 ans par exemple.

3.3 Lissage et ajustement des taux bruts

Les taux bruts que nous venons de calculer par les méthodes de Kaplan-Meier et Nelson-Aalen présentent un comportement érratique dû généralement au manque de données. Il serait donc important de les lisser par d'autres méthodes statistiques afin de les rendre plus fidèles à la réalité. Il existe plusieurs méthodes de lissage. Dans ce mémoire nous choisissons de ne travailler qu'avec deux d'entre elles à savoir les méthodes non-paramétriques de Whittaker-Henderson et par moyenne mobile.

Notons que la méthode non-paramétrique ne prend en compte que les données disponibles sans faire d'hypothèse a priori sur l'allure de la courbe.

3.3.1 Méthode de lissage de Whittaker-Henderson

Le lissage de Whittaker-Henderson est une méthode dont le but est de trouver un compromis entre **fidélité** des taux lissés aux taux bruts et **régularité** de la courbe des taux lissés. Le but sera de minimiser la combinaison linéaire :

$$M = F + h \times S$$

où F est le critère de fidélité, S le critère de régularité et h un paramètre réel positif du modèle pouvant être vu comme le compromis entre la fidélité et la régularité. On peut donc dire que la régularité est une fonction croissante de h . En effet, si $h \to 0$ la fidélité l'emporte et si $h \to \infty$ la régularité l'emporte.

3.3.1.1 Critère de fidélité

Le critère de fidélité F s'écrit comme suit :

$$F = \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} w_x(\hat{q}_x - q_x)^2 = (\hat{q} - q)^{'} W(\hat{q} - q)$$

où

– w_x représente les poids strictement positifs que l'on attribue à chaque âge. La méthode où l'on attribue le même poids à tous les âges ($\forall\ x,\ w_x = 1$) est appelée méthode de type A et celle où w_x est attribué en fonction de l'âge est appelée méthode de type B.
Pour cette dernière méthode, il est fréquent d'utiliser une pondération par l'effectif à l'âge x sur l'effectif moyen :

$$w_x = \frac{n_x}{\bar{n}} \quad \text{où} \quad \bar{n} = \frac{\sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} n_x}{x_{max} - x_{min} + 1}$$

Ce choix permet de limiter le poids donné aux réalisations statistiques dont la probabilité d'être observées est très faible. Il permet également d'avoir deux propriétés intéressantes : on obtient le même nombre total de chômage (resp de radiation) et le même âge moyen au chômage (resp à la radiation) avec les taux bruts et les taux lissés.

– $W = diag(w_x)$ la matrice diagonale des poids.

– $\hat{q}$ la matrice colonne des taux bruts et q la matrice colonne des taux lissés.

3.3.1.2 Critère de régularité

Le critère de régularité s'écrit comme suit :

$$S = \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}-z} (\Delta^z q_x)^2 = (\Delta^z q)^{'}(\Delta^z q) = q^{'} K_z^{'} K_z q \quad \text{où}$$

– $\Delta^z q_x = \sum_{j=0}^{z} C_z^j (-1)^{z-j} q_{x+j}$ est l'opérateur différence d'ordre z.
Rappelons que : $\Delta^z q_x = \Delta^{z-1} q_{x+1} - \Delta^{z-1} q_x$ pour $z > 0$; $\Delta^0 q_x = q_x$.

– z est un paramètre réel positif permetant de jauger la régularité du lissage.

– K_z est telle que : $K_z q = \Delta^z q$

3.3.1.3 Calcul du vecteur des taux ajustés

Nous pouvons donc écrire M sous la forme :

$$M = (\hat{q} - q)^{'} W(\hat{q} - q) + h \times q^{'} K_z^{'} K_z q = \hat{q}^{'} W \hat{q} - 2q^{'} W \hat{q} + q^{'} W q + h \times q^{'} K_z^{'} K_z q$$

Minimiser M revient à déterminer le vecteur q telle que :

$$\frac{\partial M}{\partial q} = 2[(W + h \times K_z^{'} K_z) q - W \hat{q}] = 0$$

La matrice $W + h \times K_z^{'} K_z$ est définie positive donc inversible. D'où :

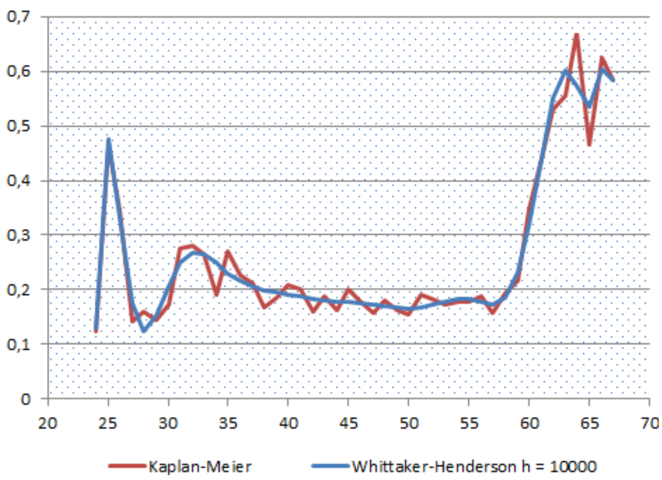
$$\boxed{q = (W + h \times K_z^{'} K_z)^{-1} W \hat{q}}$$

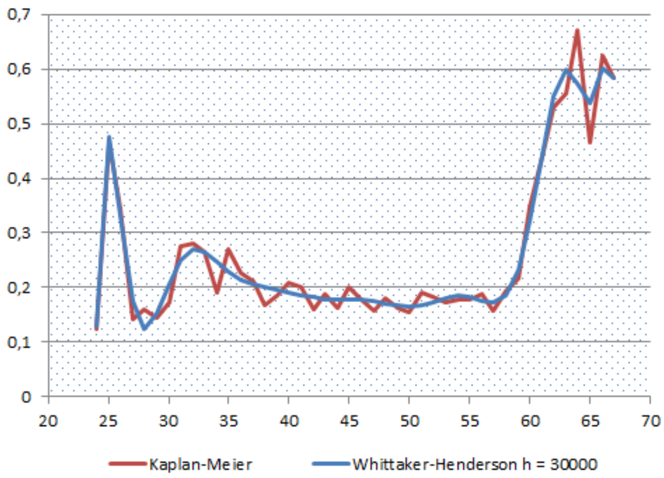
3.3.1.4 Application

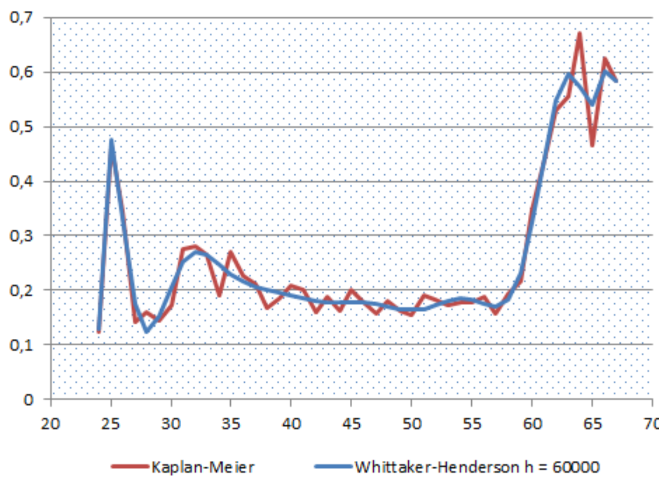
Nous avons représenté graphiquement les différents taux lissés par la méthode Whittaker-Henderson en fonction des paramètres h et z. Ci-dessous les graphiques.

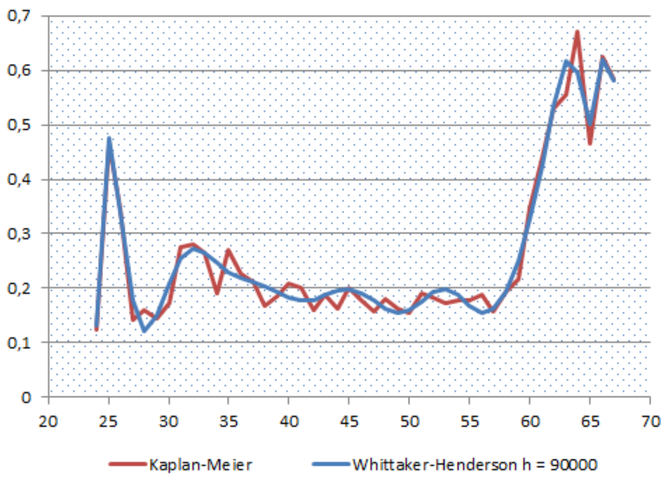
Loi de radiation

Afin de jauger la régularité du lissage, la valeur de z retenue est de 14. Les courbes sont tracées pour des valeurs de $h = 10000, 30000, 60000, 90000$. Comme on peut le voir, ce sont les taux obtenus avec $h = 90000$ qui lissent mieux les taux bruts.



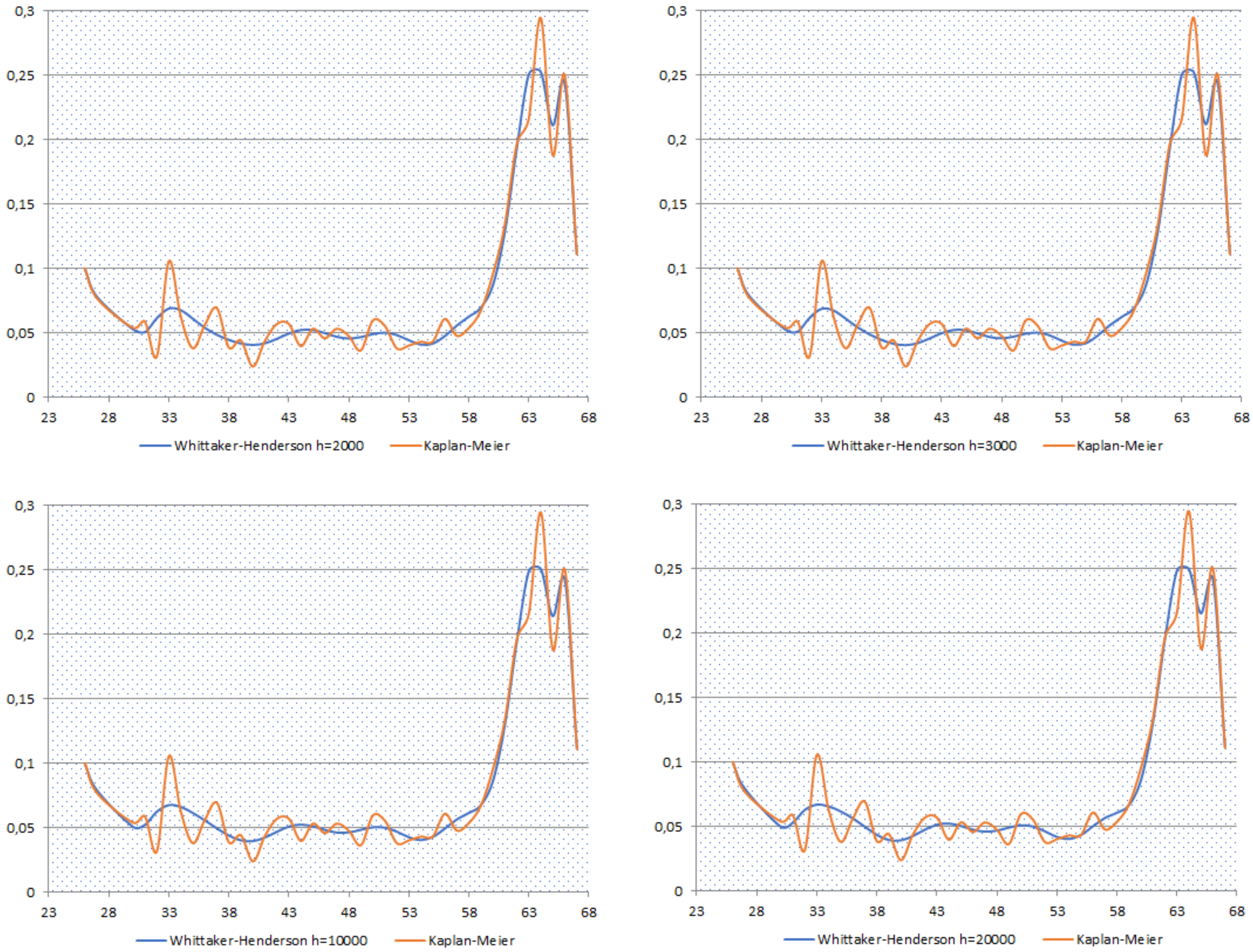






Loi d'entrée en chômage

Pour tracer les graphiques ci-dessous, la valeur de z retenus est de 16. Les différentes valeurs de h avec lesquelles nous avont travailler sont : 2000, 3000, 10000 et 20000. Nous pouvons dire, au vu des courbes de lissage que c'est celle obtenue pour $h = 2000$ qui semble mieux lissée les taux bruts. Donc c'est avec elle que nous allons travailler dans toute la suite de ce mémoire dans les parties consacrée à la loi d'entrée en chômage.



3.3.2 Méthode de lissage par moyenne mobile

La moyenne mobile (MA pour Moving Average en anglais) permet de lisser directement les taux bruts sans faire d'hypothèse sur le modèle sous-jacent. Cette méthode de lissage, le plus souvent utilisée en série temporelle, permet d'analyser des séries ordonnées de données en supprimant les fluctuations transitoires de façon à en souligner les tendances à plus long terme. Les taux lissés sont, par cette méthode, calculés comme suit :

$$q_x = \frac{1}{2h+1} \sum_{j=-h}^{h} \hat{q}_{x+j}$$

En d'autres termes, à chaque âge x, le taux lissé est une moyenne arithmétique des taux ; $\hat{q}_{x-h}, \ldots, \hat{q}_{x-1}, \hat{q}_x, \hat{q}_{x+1} \ldots \hat{q}_{x+h}$ où h est un paramètre entier naturel tel que :

$$x_{min} \leqslant x - h \leqslant x + h \leqslant x_{max}$$

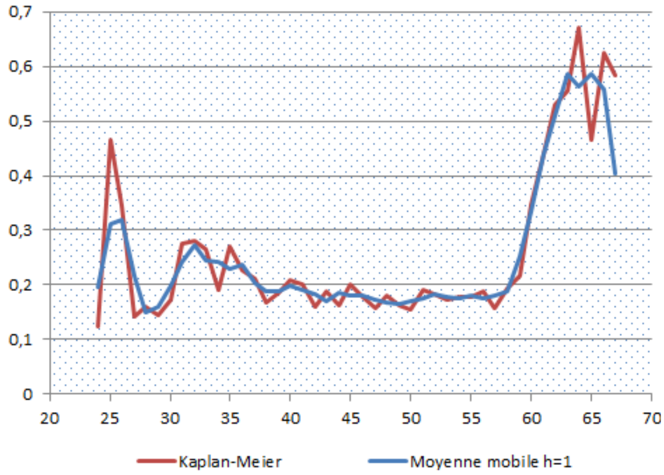
L'avantage de cette méthode est qu'elle est simple à mettre en œuvre et met en évidence l'allure de la tendance en supprimant les fluctuations transitoires et en atténuant le bruit.

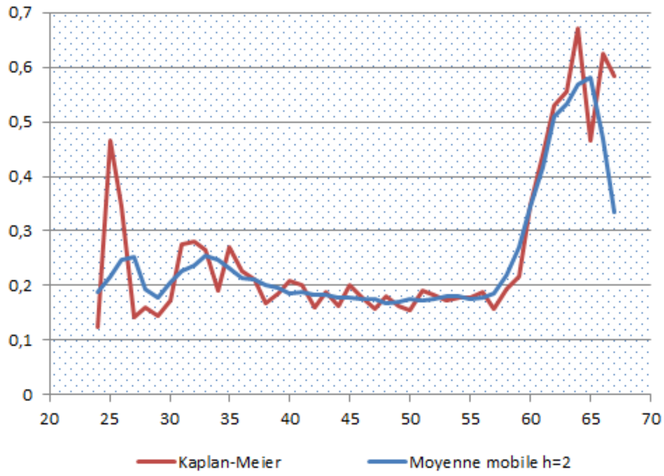
Son inconvénient tient à l'impossibilité de calculer les valeurs lissées aux extrémités de la plage d'âge étudiée. En effet, la formule étant centrée autour de l'âge x, la plus petite et la plus grande valeur lissées obtenues par moyenne mobile ne seront pas $q_{x_{min}}$ et $q_{x_{max}}$ mais plutôt $q_{x_{min}+h}$ et $q_{x_{max}-h}$.

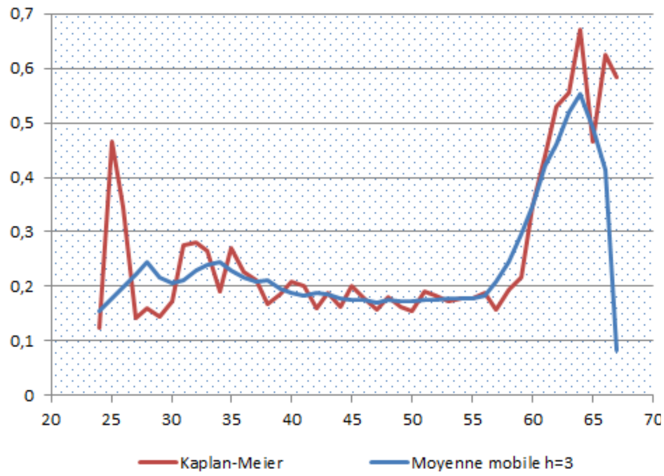
3.3.2.1 Applications

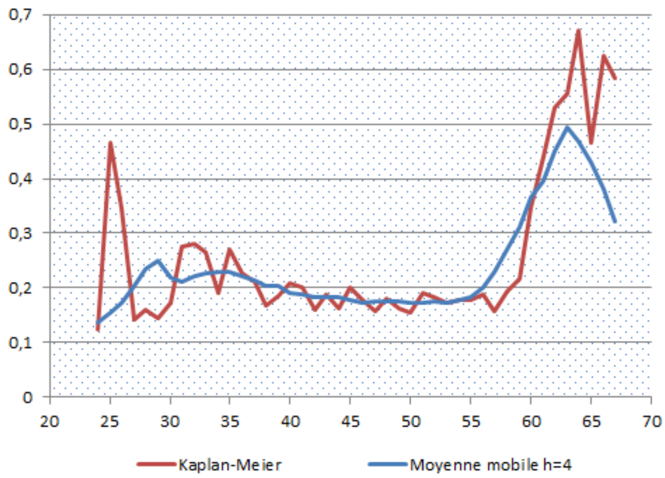
Nous avons appliqué la méthode de lissage par moyenne mobile pour différente valeurs de h : 1, 2, 3 et 4.

Loi de radiation





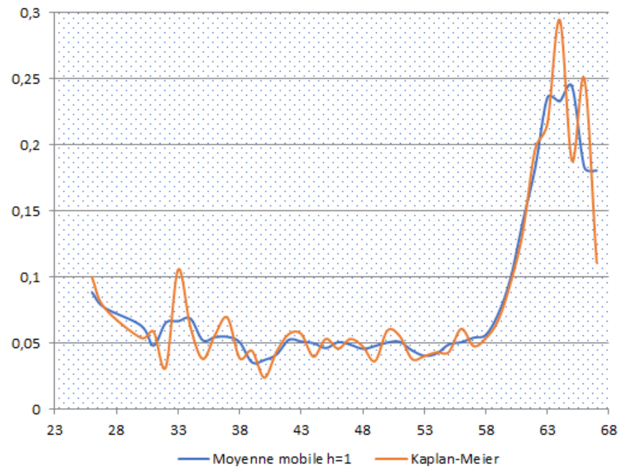


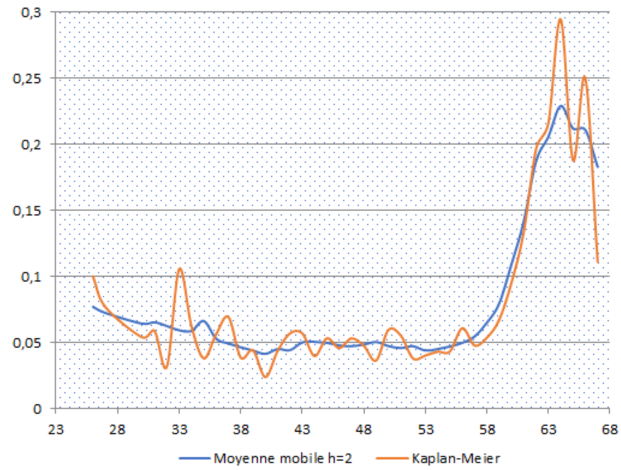


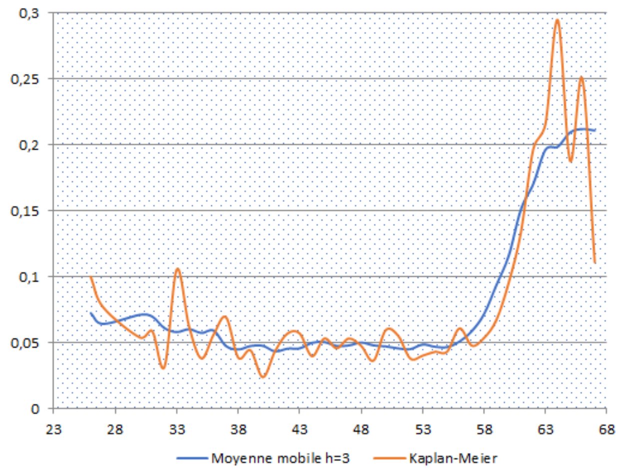
L'inconvenient de cette méthode que nous avions évoqué plus haut fait qu'aux extrémités des graphiques il y a un écart plus ou moins significatif entre les taux bruts et les taux lissés. Comme on peut le voir, ce sont les taux lissés obtenus pour $h = 1$ qui semblent plus proches des taux bruts.

Loi d'entrée en chômage

D'après le graphique, le lissage des taux bruts par moyenne mobile n'est pas adapté pour les grandes valeurs de h comme c'est le cas de la loi de radiation. Même pour $h = 1$, les taux lissés obtenus ne sont pas très bien proches des taux bruts pour les mêmes raisons que précédemment.







3.3.3 Comparaison des méthodes de lissage

Loi de radiation

Par le graphique, les taux lissés obtenus par la méthode de Whittaker-Henderson nous parait mieux adaptés aux taux bruts que ceux obtenus par moyenne mobile. En effet, les taux lissés par moyenne mobile sont beaucoup plus écartés des taux bruts que les taux lissés de Whittaker-Henderson, surtout pour les affiliés du régime de moins de 30 ans et ceux de plus de 60 ans.

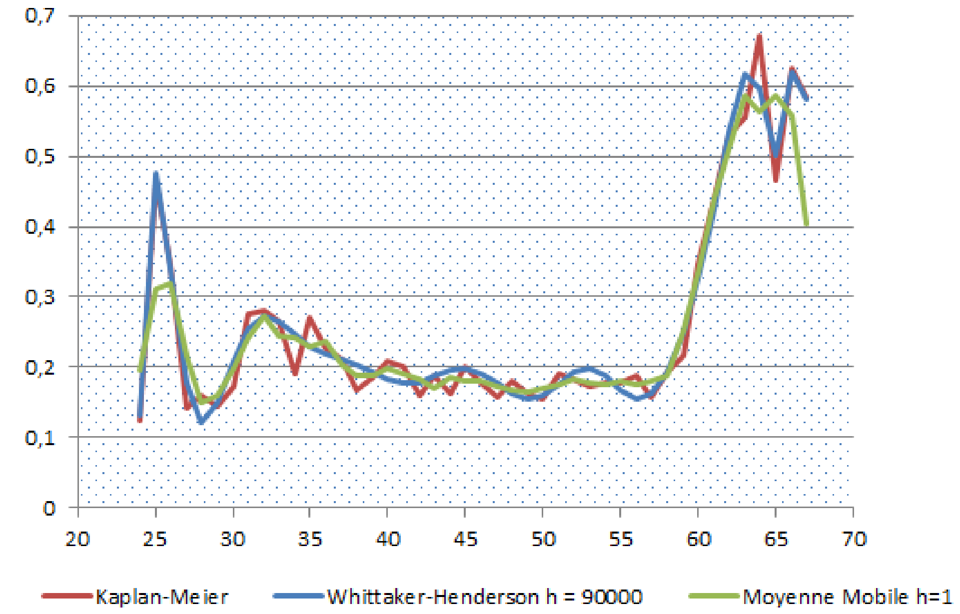


FIGURE 3.6 – Comparaison des taux lissés de radiation de Whittaker-Henderson et par moyenne mobile

Loi d'entrée en chômage

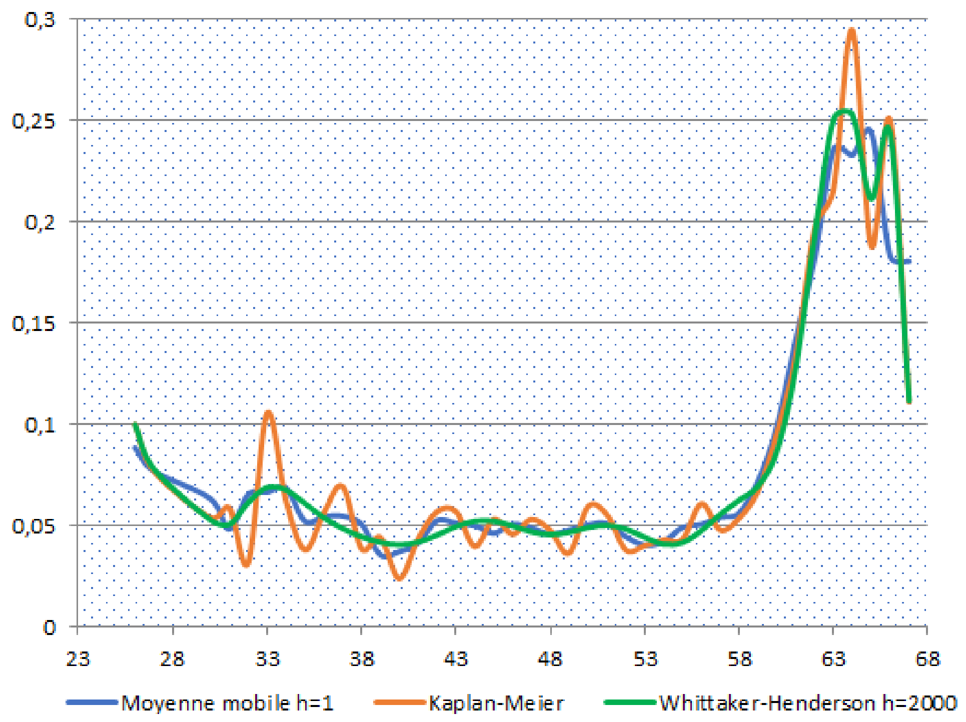


FIGURE 3.7 – Comparaison des taux lissés d'entrée en chômage de Whittaker-Henderson et par moyenne mobile

Nous nous posons la question de savoir : quel taux lissé reflète mieux la réalité ?
D'après le graphique, aucun taux lissé ne lisse très bien les taux bruts mais s'il fallait choisir un taux lissé, nous choisirions celui obtenu par la méthode de Whittaker-Henderson. En effet, l'entrée en chômage est beaucoup plus significative pour les âges élevés et pour ces âges, les taux lissés de whittaker-Henderson sont légèrement supérieurs à ceux obtenus par moyenne mobile.

3.3.4 Test d'ajustement du Khi-deux

Le test d'ajustement du khi-deux permet de mesurer la distance entre les taux bruts et les taux lissés. La statistique du test est :

$$T = \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} \frac{(n_x \hat{q}_x - n_x q_x)^2}{n_x q_x}$$

$T \sim \chi^2_{1-\alpha,\nu}$ où α est le risque de première espèce et ν le degré de liberté.
Nous testons :

– l'hypothèse H_0 : « Les taux lissés ne sont pas éloignés des taux bruts » contre
– l'hypothèse H_1 : « Les taux lissés sont éloignés des taux bruts »

avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$.

Notons que dans le cas de la méthode de lissage de Wittaker-Henderson, la détermination du degré de liberté ν est un peu compliquée. Pour cette raison et sans entrer dans les détails, pour faire le test nous prendrons ν assez grand égal à 150 par exemple.

Le test consiste à comparer T calculé comme ci-dessus à $F^{-1}_{\chi^2(150)}(95\%)$ une valeur seuil qui correspond à la distribution asymptotique de la statistique du test.
Si $T < F^{-1}_{\chi^2(150)}(95\%)$, on accepte l'hypothèse H_0 avec une probabilité de 95%.

3.3.4.1 Applications

Loi de radiation

Nous avons calculé la statistique de test T et le quantile d'ordre 95% de la loi du Khi-deux à 150 degrés de liberté. On a comme résultat : $T = 26,048$ et $F^{-1}_{\chi^2(150)}(95\%) = 179,580$. T est donc bien inférieur au quantile d'ordre 95% de la loi du Khi-deux à 150 degrés de liberté. Nous acceptons donc l'hypothèse H_0 selon laquelle les taux lissés ne sont pas éloignés des taux bruts.

Loi d'entrée en chômage

La statistique de test est égale à $T = 21,01$ inférieure à $F^{-1}_{\chi^2(150)}(95\%) = 179,580$. Les taux lissés ne sont donc pas éloignés des taux bruts c'est-à-dire que nous acceptons l'hypothèse H_0.

3.3.5 Test de fidélité des taux lissés aux taux bruts

Le test de fidélité des taux lissés aux taux bruts consiste à calculer la somme des écarts entre les taux lissés et les taux bruts selon chaque âge. Si la somme

$$S = \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} |\hat{q}_x - q_x| \to 0$$

alors les taux lissés sont très proches des taux bruts c'est-à-dire ils reflètent la réalité.

3.3.5.1 Applications

Loi de radiation

L'application du test nous donne $S = 0,849$ bien proche de 0. Nous validons aussi le test de fidélité.

Loi d'entrée en chômage

L'application du test de fidélité donne $S = 0,4$ très proche de 0. Nous validons donc le test.

Conclusion

Dans la première partie, nous avons présenté les principes de l'assurance chômage, les différents acteurs qui interviennent sur ce segment (Pôle Emploi, Unédic, assureurs). Nous avons également détaillé le rôle et le fonctionnement du régime d'assurance chômage GSC, qui vise à couvrir les entrepreneurs, mandataires, artisans, commerçants, peu ou mal couverts par le régime général.

Dans la deuxième partie, il était question des différentes provisions techniques du régime GSC, dont la plus importante est la Provision pour Sinistre A Payer (PSAP). Nous avons présenté les différentes méthodes de provisionnement : méthode Chain Ladder et ses dérivés déterministes - plus aisées à mettre en oeuvre et donc couramment employées par les actuaires - et méthodes stochastiques. Nous avons également présenté les méthodes de Mack et autres méthodes stochastiques, qui permettent de tenir compte de la volatilité des données historiques afin par exemple de rendre le provisionnement plus robuste.
Toujours dans cette deuxième partie, nous avons montré l'importance pour l'actuaire en charge du provisionnement de porter un jugement critique sur ses méthodes de provisionnement et d'évaluer la rentabilité du portefeuille, en s'appuyant à la fois sur l'analyse des boni et mali réalisés et sur des modèles prospectifs permettant de juger de l'impact des différents paramètres dans le pilotage technique du régime.

Dans la dernière partie, il était question d'évaluer la pertinence d'une provision pour risques croissants, une provision dont le principe est de compenser une augmentation du risque en fonction de l'âge. Pour cela, nous avons calibré des lois de radiation et d'entrée en chômage. Les observations ont montré que le taux d'entrée en chômage est globalement stable entre 40 et 60 ans avec deux exceptions aux «extrémité». D'une part, les jeunes entrepreneurs ont une probabilité d'entrée en chômage plus élevée du fait du démarrage de leur activité ; d'autre part, les «seniors» en fin de carrière sont plus exposés au risque chômage. Il ne s'agit donc pas d'un «risque croissant» sur le principe de la santé ou de la dépendance.
Par ailleurs, le tarif peut être revu annuellement avec l'accord de l'association GSC, de même que les conditions de souscription (hausse de la durée de carence, ajout d'une surprime).
L'existence d'une Provision pour Risque Croissant n'est donc pas justifiée dans le cadre de ce régime.

Bibliographie

Articles et documents

[1] Gilles Nezosi, *La protection sociale*, La documentation Française, 2^e ÉDITION, 2021

[2] Thomas Mack, *Munich Re, Munich, Distribution-Free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates* Miinchener Riickversicherungs-Gesellschaft, K6niginstrasse 107, D-80791 Miinchen.

[3] Michel Denuit et Arthur Charpentier, *Mathématiques de l'Assurance Non-Vie*, Tome I : Principes Fondamentaux de Théorie du Risque, 31 mars 2004.

[4] Greg Taylor and Gràinne McGuire, *Stochastic Loss Reserving using Generalized Linear Models*, Casualty Actuarial Society, 2016

[5] Mario V. Wüthrich and Michael Merz, *Stochastic Claims Reserving Manual : Advances in Dynamic Modeling*, Version August 21, 2015

[6] S Triana, M Novita and S F Sari, *The Benktander claim reserving method, combining chain ladder method and Bornhuetter-Ferguson method using optimal credibility* , Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences (FMIPA), Universitas Indonesia, Depok 16424, Indonesia

[7] Lee Giesecke, Defense Manpower Data Center, *Use of the Chi-Square Statistic to set Whittaker-Henderson Smoothing Coefficients*

[8] Mario V. Wüthrich, Michael Merz and Natalia Lysenko, *Uncertainty of the Claims Development Result in the Chain Ladder Method*

[9] Thomas Mack, *The Prediction Error of Bornhuetter/Ferguson*, 2008

[10] Alessandro Carrato MSc FIA IOA, Gráinne McGuire PhD FIAA, Robert Scarth PhD, *A Practitioner's Introduction to Stochastic Reserving*, 2016-02-29

[11] Michael J. Crawley, *The R Book*, Second Edition, Imperial College London at Silwood Park, UK http ://www.bio.ic.ac.uk/research/mjcraw/therbook/index.htm, 2013

[12] Erasmus Gerigk, *The Mack-Method and Analysis of Variability*, stitute of Actuaries of Australia, Accident Compensation Seminar 28 November to 1 December 2004.

[13] E. L. KAPLAN and Paul MEIER , *NonParametric Estimation From Incomplete Observations*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 53, No. 282 (Jun., 1958), pp. 457-481

[14] ØRNULF BORGAN, *Kaplan–Meier Estimator*

[15] Frédéric PLANCHET, *Modèles de durée*, Support de cours 2021-2022

[16] F. PLANCHET et P. THEROND, *Modélisation statistique des phénomènes de durée* , Application actuarielles, Economica, 2011

Mémoires de l'Institut des Actuaires

[17] Etienne Busson, *Evaluation du risque de provisionnement à 1 an : Adaptation de la méthode de Merz et Wutrich à des cas non standards*, 5 Octobre 2012

[18] Joachim LEMAIRE, *Impacts du provisionnement en norme actuelle et en norme Solvabilité II*

[19] Thomas GUILLON VERNE, *Construction de tables de mortalité d'expérience sur de petits échantillons pour l'estimation de la sinistralité décès*, 8 juillet 2015

[20] Philippe Saint Pierre, *Introduction à l'analyse des durées de survie*, Avril 2021

[21] Nadir KHALDI , *« Construction de tables de mortalité fonctionnaire et impacts tarifaires sur le produit obsèques*, 2017

[22] Yannick NANDJOU, *Impact de la table de mortalité d'expérience sur le calcul de la provision pour risque croissant et la tarification d'un contrat obsèque*, septembre 2021

[23] Annaël LUZON, *Mise à jour de la loi d'incidence et de maintien d'un contrat dépendance et Impacts sur le provisionnement*, 31 Janvier 2019

Sites Internets

[24] https ://stats.stackexchange.com/questions/428120/

[25] https ://sscc.wisc.edu/sscc/pubs/glm-r/index.html

[26] https ://bookdown.org/roback/bookdown-BeyondMLR/ch-poissonreg.html

[27] https ://www.geeksforgeeks.org/how-to-calculate-the-p-value-of-a-chi-square-statistic-in-r/

[28] https ://www.r-bloggers.com/2022/05/calculate-the-p-value-from-chi-square-statistic-in-r/

[29] https ://stats.stackexchange.com/questions/250819/

[30] https ://www.statology.org/interpret-glm-output-in-r/

[31] https ://katrienantonio.github.io/Risk-modelling-in-insurance/glms.html

[32] https ://cran.rstudio.com/web/packages/ChainLadder/vignettes/ChainLadder.html

[33] https ://reassurez-moi.fr/guide/assurance-chomage/dirigeant

[34] https ://www.assurup.com/assurance-professionnelle/chomage-du-dirigeant

[35] https ://www.pole-emploi.fr/

[36] https ://www.gsc.asso.fr/

Chapitre 4

Annexes

4.1 Loi Evin

Lorsque des salariés sont garantis collectivement, dans les conditions prévues à l'article 2 de la présente loi, en vue d'obtenir le remboursement ou l'indemnisation des frais occasionnés par une maladie, une maternité ou un accident, le contrat ou la convention doit prévoir, sans condition de période probatoire ni d'examen ou de questionnaire médicaux, les modalités et les conditions tarifaires des nouveaux contrats ou conventions par lesquels l'organisme maintient cette couverture :

1° Au profit des anciens salariés bénéficiaires d'une rente d'incapacité ou d'invalidité, d'une pension de retraite ou, s'ils sont privés d'emploi, d'un revenu de remplacement, sans condition de durée, sous réserve que les intéressés en fassent la demande dans les six mois qui suivent la rupture de leur contrat de travail ou, le cas échéant, dans les six mois suivant l'expiration de la période durant laquelle ils bénéficient à titre temporaire du maintien de ces garanties. L'organisme adresse la proposition de maintien de la couverture à ces anciens salariés au plus tard dans le délai de deux mois à compter de la date de la cessation du contrat de travail ou de la fin de la période du maintien des garanties à titre temporaire ;

2° Au profit des personnes garanties du chef de l'assuré décédé, pendant une durée minimale de douze mois à compter du décès, sous réserve que les intéressés en fassent la demande dans les six mois suivant le décès. L'employeur en informe l'organisme, qui adresse la proposition de maintien de la couverture à ces personnes dans le délai de deux mois à compter du décès.

Le nouveau contrat ou la nouvelle convention doit prévoir que la garantie prend effet, au plus tard, au lendemain de la demande.

Les tarifs applicables aux personnes visées par le présent article peuvent être supérieurs aux tarifs globaux applicables aux salariés actifs dans des conditions fixées par décret.

4.2 Exemples de GLM et fonctions de lien associées

Loi	Nom du lien	Fonction de lien
Bernoulli/Binomiale	lien logit	$g(\mu) = \text{logit}(\mu) = \log(\frac{\mu}{1-\mu})$
Poisson	lien log	$g(\mu) = \log(\mu)$
Normale	lien identité	$g(\mu) = \mu$
Gamma	lien réciproque	$g(\mu) = -\frac{1}{\mu}$

Table 4.1 – Fonctions de lien des GLM

4.3 Estimateur de la moyenne et de la variance de *S(t)*

Nous supposerons que le nombre d'affilié entrée en chômage ou radié d'âge x suit une loi binomiale :

$$d_x \sim \mathcal{B}_{in}(n_x, q_x)$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\hat{S}(t)] &= \text{Var}\left[\prod_{j=1}^{i}\left(1-\frac{d_j}{n_j}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{i}\left(1-\frac{d_j}{n_j}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{i}\left(1-\frac{d_j}{n_j}\right)\right]^2
\end{aligned}$$

par indépendance des évènements, l'égalité ci-dessus devient,

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\hat{S}(t)] &= \prod_{j=1}^{i}\mathbb{E}\left[\left(1-\frac{d_j}{n_j}\right)^2\right] - \prod_{j=1}^{i}\mathbb{E}^2\left[\left(1-\frac{d_j}{n_j}\right)\right] \\
&= \prod_{j=1}^{i}\left[\text{Var}\left(1-\frac{d_j}{n_j}\right) + \mathbb{E}^2\left(1-\frac{d_j}{n_j}\right)\right] - \prod_{j=1}^{i}p_j^2 \\
&= \prod_{j=1}^{i}\left(\frac{p_j \times (1-p_j)}{n_j} + p_j^2\right) - \prod_{j=1}^{i}p_j^2 \\
&= \prod_{j=1}^{i}p_j^2\left(\frac{1-p_j}{p_j n_j} + 1\right) - \prod_{j=1}^{i}p_j^2 \quad \text{or} \quad S(t) = \prod_{j=1}^{i}p_j \quad \text{donc} \\
&= S^2(t) \times \prod_{j=1}^{i}\left(\frac{1-p_j}{p_j n_j} + 1\right) - S^2(t)
\end{aligned}$$

en prenant le log et par un calcul de développement limité, on a

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\hat{S}(t)] &\approx S^2(t) \times \sum_{j=1}^{i}\left(\frac{1-p_j}{p_j n_j}\right) \\
&\approx \hat{S}^2(t) \times \sum_{j=1}^{i}\left(\frac{1-\hat{p}_j}{\hat{p}_j n_j}\right) \\
\text{Var}[\hat{S}(t)] &\approx \hat{S}^2(t) \times \sum_{j=1}^{i}\frac{d_j}{n_j(n_j-d_j)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{S}(t)] &= \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{i}\left(1-\frac{d_j}{n_j}\right)\right] \\
&= \prod_{j=1}^{i}\mathbb{E}\left[\left(1-\frac{d_j}{n_j}\right)\right] \\
&= \prod_{j=1}^{i}\left(1-\frac{\mathbb{E}[d_j]}{n_j}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{i}\left(1-\frac{n_j q_j}{n_j}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{i}\left(1-q_j\right) \\
&= \prod_{j=1}^{i} p_j \\
\mathbb{E}[\hat{S}(t)] &= S(t)
\end{aligned}
$$

4.4 Preuve du théorème

1.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}] &= \mathbb{E}[C_{i,n}|C_{i,n-i},\ldots,C_{i,1}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[C_{i,n}|C_{i,n-1},\ldots,C_{i,1}]|C_{i,n-i},\ldots,C_{i,1}] \\
&= \mathbb{E}[f_{n-1}C_{i,n-1}|C_{i,n-i},\ldots,C_{i,1}] \\
&= f_{n-1}\mathbb{E}[C_{i,n-1}|C_{i,n-i},\ldots,C_{i,1}] \\
&= f_{n-1}f_{n-2}\mathbb{E}[C_{i,n-2}|C_{i,n-i},\ldots,C_{i,1}] \\
&= \vdots \\
&= f_{n-1}f_{n-2}\ldots f_{n-i}C_{i,n-i}
\end{aligned}
$$

2. Soit $\mathcal{B}_k = \{C_{i,j}|j \leq k, i+j \leq n\}$.
   $\mathbb{E}[C_{i,k+1}|\mathcal{B}_k] = \mathbb{E}[C_{i,k+1}|C_{i,k},\ldots,C_{i,1}] = f_k C_{i,k}$ d'après les hypothèses 1 et 2. Donc :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{f}_k|\mathcal{B}_k] &= \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n-k-1}C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k-1}C_{i,k}}|\mathcal{B}_k\right] \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-k-1}\mathbb{E}[C_{i,k+1}|\mathcal{B}_k]}{\sum_{i=1}^{n-k-1}C_{i,k}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-k-1}f_k C_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n-k-1}C_{i,k}} \\
&= f_k \times \frac{\sum_{i=1}^{n-k-1}C_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n-k-1}C_{i,k}} \\
\mathbb{E}[\hat{f}_k|\mathcal{B}_k] &= f_k
\end{aligned}
$$

De plus, pour $j < k$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{f}_j \hat{f}_k] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\hat{f}_j \hat{f}_k | \mathcal{B}_k]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\hat{f}_j \times \mathbb{E}[\hat{f}_k | \mathcal{B}_k]\right] \\
&= \mathbb{E}[\hat{f}_j \times f_k] \\
&= \mathbb{E}[\hat{f}_j] \times f_k \\
&= \mathbb{E}[\hat{f}_j] \times \mathbb{E}[\hat{f}_k]
\end{aligned}
$$

3. $\forall\, 1 \leq j \leq n-2$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\sigma}_j^2 | \mathcal{B}_j] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j\right)^2 |\, \mathcal{B}_j\right] \\
&= \frac{1}{n-j-1} \times \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n-j} \left(\frac{C_{i,j+1}^2}{C_{i,j}} - 2 \times C_{i,j+1} \times \hat{f}_j + C_{i,j} \times \hat{f}_j^2\right) |\, \mathcal{B}_j\right] \\
&= \frac{1}{n-j-1} \times \sum_{i=1}^{n-j} \mathbb{E}\left[\left(\frac{C_{i,j+1}^2}{C_{i,j}} - 2 \times C_{i,j+1} \times \hat{f}_j + C_{i,j} \times \hat{f}_j^2\right) |\, \mathcal{B}_j\right] \\
&= \frac{1}{n-j-1} \times \sum_{i=1}^{n-j} \left(\frac{\mathbb{E}[C_{i,j+1}^2 |\, \mathcal{D}_j]}{C_{i,j}} - 2 \times C_{i,j} \times \mathbb{E}[\hat{f}_j^2 |\, \mathcal{D}_j] + C_{i,j} \times \mathbb{E}[\hat{f}_j^2 |\, \mathcal{D}_j]\right) \\
&= \frac{1}{n-j-1} \times \sum_{i=1}^{n-j} \left(\frac{\mathbb{E}[C_{i,j+1}^2 |\, \mathcal{D}_j]}{C_{i,j}} - C_{i,j} \times \left[\mathrm{Var}[\hat{f}_j |\, \mathcal{D}_j] + \mathbb{E}[\hat{f}_j |\, \mathcal{D}_j]^2\right]\right) \\
&= \frac{1}{n-j-1} \times \sum_{i=1}^{n-j} \left(\frac{\mathbb{E}[C_{i,j+1}^2 |\, \mathcal{D}_j]}{C_{i,j}} - C_{i,j} \times \left[\frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} + f_j^2\right]\right) \\
&= \frac{1}{n-j-1} \times \sum_{i=1}^{n-j} \left(\frac{\mathrm{Var}[C_{i,j+1} |\, \mathcal{D}_j] + (\mathbb{E}[C_{i,j+1} |\, \mathcal{D}_j])^2}{C_{i,j}} - C_{i,j} \times \left[\frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j}} + f_j^2\right]\right) \\
&= \frac{1}{n-j-1} \times \sum_{i=1}^{n-j} \left(\frac{\sigma_j^2 \times C_{i,j} + f_j^2 \times C_{i,j}^2}{C_{i,j}} - C_{i,j} \times \left[\frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} + f_j^2\right]\right) \\
&= \frac{1}{n-j-1} \times \left(\sum_{i=1}^{n-j} \left(\sigma_j^2 + f_j^2 \times C_{i,j}\right) - \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \times \left[\frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j}} + f_j^2\right]\right) \\
\mathbb{E}[\hat{\sigma}_j^2 | \mathcal{D}_j] &= \sigma_j^2 \\
\mathbb{E}[\hat{\sigma}_j^2] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\hat{\sigma}_j^2 | \mathcal{D}_j]\right] \\
\mathbb{E}[\hat{\sigma}_j^2] &= \sigma_j^2
\end{aligned}
$$

En effet,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\hat{f}_j | \mathcal{D}_j] &= \mathrm{Var}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} | \mathcal{D}_j\right] \\
&= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}\right)^2} \times \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1} | \mathcal{D}_j\right] \\
&= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}\right)^2} \times \sum_{i=1}^{n-j} \mathrm{Var}\left[C_{i,j+1} | \mathcal{D}_j\right] \\
&= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}\right)^2} \times \sum_{i=1}^{n-j} \sigma_j^2 \times C_{i,j} \\
\mathrm{Var}[\hat{f}_j | \mathcal{D}_j] &= \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}
\end{aligned}
$$

4.5 Articles L.5421-1 et suivants du Code du travail

Article L5421-1

En complément des mesures tendant à faciliter leur reclassement ou leur conversion, les travailleurs involontairement privés d'emploi ou dont le contrat de travail a été rompu conventionnellement selon les modalités prévues aux articles L. 1237-11 et suivants, aptes au travail et recherchant un emploi, ont droit à un revenu de remplacement dans les conditions fixées au présent titre.

Article L5421-2

Le revenu de remplacement prend, selon le cas, la forme :
1° D'une allocation d'assurance, prévue au chapitre II ;
2° Des allocations de solidarité, prévues au chapitre III ;
3° D'allocations et d'indemnités régies par les régimes particuliers, prévus au chapitre IV.

Article L5421-3

La condition de recherche d'emploi requise pour bénéficier d'un revenu de remplacement est satisfaite dès lors que les intéressés sont inscrits comme demandeurs d'emploi et accomplissent, à leur initiative ou sur proposition de l'un des organismes mentionnés à l'article L. 5311-2, des actes positifs et répétés en vue de retrouver un emploi, de créer ou de reprendre une entreprise.

Un décret en Conseil d'Etat détermine les mesures d'application du présent article.

Article L5421-4

Le revenu de remplacement cesse d'être versé :

1° Aux allocataires ayant atteint l'âge prévu à l'article L. 161-17-2 du code de la sécurité sociale justifiant de la durée d'assurance, définie au deuxième alinéa de l'article L. 351-1 du code de la sécurité sociale, requise pour l'ouverture du droit à une pension de vieillesse à taux plein ;

2° Aux allocataires atteignant l'âge prévu à l'article L. 161-17-2 du même code augmenté de cinq ans.

4.6 Article L. 5424-1 du code du travail

Ont droit à une allocation d'assurance, lorsque leur privation d'emploi est involontaire ou assimilée à une privation involontaire ou en cas de cessation d'un commun accord de leur relation de travail avec leur employeur, et lorsqu'ils satisfont à des conditions d'âge et d'activité antérieure, dans les conditions prévues aux articles L. 5422-2 et L. 5422-3 :

1° Les agents fonctionnaires et non fonctionnaires de l'Etat et de ses établissements publics administratifs, les agents titulaires des collectivités territoriales ainsi que les agents statutaires des autres établissements publics administratifs ainsi que les militaires ;

2° Les agents non titulaires des collectivités territoriales et les agents non statutaires des établissements publics administratifs autres que ceux de l'Etat et ceux mentionnés au 4° ainsi que les agents non statutaires des groupements d'intérêt public ;

3° Les salariés des entreprises inscrites au répertoire national des entreprises contrôlées majoritairement par l'Etat, les salariés relevant soit des établissements publics à caractère industriel et commercial des collectivités territoriales, soit des sociétés d'économie mixte dans lesquelles ces collectivités ont une participation majoritaire ;

4° Les salariés non statutaires des chambres de métiers, des chambres d'agriculture, ainsi que les salariés des établissements et services d'utilité agricole de ces chambres ;

4° bis Les personnels des chambres de commerce et d'industrie ;

5° Les fonctionnaires de France Télécom placés hors de la position d'activité dans leurs corps en vue d'assurer des fonctions soit dans l'entreprise, en application du cinquième alinéa de l'article 29 de la loi n° 90-568 du 2 juillet 1990 relative à l'organisation du service public de la poste et des télécommunications, soit dans l'une de ses filiales ;

6° Les salariés des entreprises de la branche professionnelle des industries électriques et gazières soumis au statut national du personnel des industries électriques et gazières ;

7° Dans le cas où l'Etat ne détiendrait plus la majorité du capital de La Poste, les personnels de la société anonyme La Poste.

4.7 Facteurs de développment de Chain Ladder

$$f_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}} &= \frac{C_{1,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}} + \frac{C_{2,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}} + ... + \frac{C_{n-j-1,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}} \\
&= \frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} \times \frac{C_{1,j}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}} + \frac{C_{2,j+1}}{C_{1,j}} \times \frac{C_{1,j}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}} + ... + \frac{C_{n-j-1,j+1}}{C_{n-j-1,j}} \times \frac{C_{n-j-1,j}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}} \\
&= f_j \times \frac{C_{1,j}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}} + f_j \times \frac{C_{1,j}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}} + ... + f_j \times \frac{C_{n-j-1,j}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}} \\
&= f_j \left(\frac{C_{1,j}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}} + \frac{C_{2,j}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}} + ... + \frac{C_{n-j-1,j}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}} \right) \\
&= f_j \times \frac{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}} \\
&= f_j
\end{aligned}$$

Compte prospectif GSC (K€)					
	2021	2022	2023	2024	2025
	Réel	*Prévisionnel*	*Prévisionnel*	*Prévisionnel*	*Prévisionnel*
Compte technique brut - Offre actuelle					
Cotisations conventionnelles	39 987	40 000	40 000	40 000	40 000
S/P technique ultime (% cot. conv.)	63,7%	61,5%	61,5%	61,5%	61,5%
Taux d'appel (NO)	75,0%	75,0%	75,0%	75,0%	75,0%
Cotisations appelées (ex. courant)	**29 990**	**30 000**	**30 000**	**30 000**	**30 000**
B/M de primes	**-2 290**	**0**	**0**	**0**	**0**
S/P technique ultime (% cot. appel.)	**85,0%**	**82,0%**	**82,0%**	**82,0%**	**82,0%**
Compte de frais contractuels (en % des cot. appel.)					
Commissions	9,73%	9,73%	9,73%	9,73%	9,73%
Frais de diffusion	3,0%	3,0%	3,0%	3,0%	3,0%
Frais de fonctionnement	2,2%	2,22%	2,22%	2,22%	2,22%
Frais de gestion (11%% du CA appelé N-1)	12,2%	11,3%	10,2%	11,0%	11,0%
TOTAL frais	**27,2%**	**26,2%**	**25,1%**	**26,0%**	**26,0%**
Compte contractuel prov. équilibre					
Cotisations appelées	27 700	30 000	30 000	30 000	30 000
Charge des prestations (ex. courant, y/c PRI)	87,3%	84,3%	84,3%	84,3%	84,3%
B/M et autres provisions techniques	-7,2%	-2,3%	-2,3%	-2,3%	-2,3%
Commissions	9,7%	9,7%	9,7%	9,7%	9,7%
Frais de diffusion	3,0%	3,0%	3,0%	3,0%	3,0%
Frais de fonctionnement	2,2%	2,2%	2,2%	2,2%	2,2%
Frais de gestion	12,2%	11,3%	10,2%	11,0%	11,0%
Ratio combiné compte contractuel	**107,2%**	**108,2%**	**107,1%**	**108,0%**	**108,0%**
Produits financiers	406	400	400	400	400
Résultat contractuel	**-1 600**	**-2 071**	**-1 738**	**-1 990**	**-1 990**
Prov. équilibre ouverture	11 872	10 272	8 200	6 463	4 472
Plancher	6 925	7 500	7 500	7 500	7 500
Plafond	27 700	30 000	30 000	30 000	30 000
Prov. équilibre clôture	**10 272**	**8 200**	**6 463**	**4 472**	**2 482**
Compte technique comptable					
Cotisations (K€)	27 700	30 000	30 000	30 000	30 000
S/P courant	87,3%	84,3%	84,3%	84,3%	84,3%
B/M et autres provisions techniques	-7,2%	-2,3%	-2,3%	-2,3%	-2,3%
Ratio de frais	27,2%	26,2%	25,1%	26,0%	26,0%
Provision d'équilibre	-5,8%	-6,9%	-5,8%	-6,6%	-6,6%
Ratio combiné comptable	**101,5%**	**101,3%**	**101,3%**	**101,3%**	**101,3%**

FIGURE 4.1 – Présentation d'un compte prospectif GSC

4.8 Taux bruts et lissés des lois d'entrée en chômage et de radiation

Age	Taux bruts	Taux lissés
26	0,1	0,09981252
27	0,076923077	0,07807095
30	0,053954176	0,05281773
31	0,058823529	0,05053093
32	0,031621553	0,06139986
33	0,105555556	0,06888225
34	0,062275986	0,0675593
35	0,038002774	0,06096565
36	0,056213018	0,05391233
37	0,069352869	0,04848422
38	0,038617886	0,04454469
39	0,044151697	0,04177053
40	0,023802243	0,04064702
41	0,043575311	0,04189341
42	0,056886814	0,04533546
43	0,056983992	0,04947407
44	0,039686774	0,0522127
45	0,053218634	0,05220939
46	0,045810056	0,04982804
47	0,053111679	0,04694181
48	0,047534073	0,04564707
49	0,03635458	0,04673504
50	0,059523774	0,04901874
51	0,05537158	0,0501195
52	0,037949309	0,04832634
53	0,040157773	0,04425455
54	0,04303317	0,04090383
55	0,043238565	0,04166238
56	0,060896153	0,04746475
57	0,047713949	0,05563081
58	0,05366901	0,06254341
59	0,06720434	0,06950048
60	0,095403033	0,08672923
61	0,133905904	0,12805035
62	0,196790571	0,19326883
63	0,216310093	0,25076014
64	0,294741494	0,2529386
65	0,187983343	0,21127528
66	0,25	0,2435052
67	0,111111111	0,11185007

FIGURE 4.2 – Loi d'entrée en chômage

Age	Taux bruts	Taux lissés
24	0,125	0,1332667
25	0,466666667	0,4751703
26	0,345454545	0,3389707
27	0,142857143	0,1780408
28	0,159722222	0,1208107
29	0,145	0,1496398
30	0,173126615	0,2088691
31	0,275192604	0,2552734
32	0,279503106	0,2722887
33	0,266096866	0,2648099
34	0,19001548	0,2467905
35	0,269279393	0,2301127
36	0,227966387	0,2192241
37	0,211952026	0,2120029
38	0,167963753	0,2042586
39	0,186684783	0,1941754
40	0,207849949	0,1839422
41	0,202024291	0,1779951
42	0,160526598	0,1794377
43	0,188958219	0,1872023
44	0,162740864	0,1959439
45	0,202156334	0,1989204
46	0,178551275	0,1922177
47	0,158879212	0,1776969
48	0,181154117	0,1625926
49	0,163480442	0,1555742
50	0,154028233	0,1613118
51	0,191320874	0,1768685
52	0,182299825	0,1926083
53	0,173683459	0,1978037
54	0,177857085	0,187972
55	0,177760729	0,169168
56	0,18903946	0,155688
57	0,156481279	0,1619704
58	0,193357792	0,1944832
59	0,215921193	0,2507779
60	0,347125921	0,3270528
61	0,438501001	0,4240827
62	0,530525005	0,5350872
63	0,5552	0,6167591
64	0,670588235	0,5959435
65	0,464705882	0,5012007
66	0,625	0,6187613
67	0,584415584	0,5812431

FIGURE 4.3 – Loi de radiation