



Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du
Diplôme d'Actuaire EURIA
et de l'admission à l'Institut des Actuaire

le 6 Septembre 2023

Par : Guillaume GAUTIER DE LA PLAINE

Titre : Valorisation d'un fonds de titrisation de dettes subordonnées : prise en compte des retours d'expérience.

Confidentialité : Non

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

**Membre présent du jury de l'Institut
des Actuaire :**

Dominique ABGRALL

Faris ROUCHATI

Signature :

Entreprise :

Prim'Act

Signature :

Membres présents du jury de l'EURIA : Directeur de mémoire en entreprise :

Rainer BUCKDAHNS

M. Frédéric PLANCHET

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion
de documents actuariels**

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

Résumé

Au 1^{er} janvier 2016, la mise en vigueur du système prudentiel Solvabilité II s'est traduite par une augmentation des capitaux requis pour les compagnies d'assurance. Un moyen commun à toutes les compagnies pour couvrir une partie de ces capitaux a été l'émission de dettes subordonnées car ce type de dettes sont assimilables à des fonds propres par les autorités de contrôle. Cependant, pour certains organismes cette émission peut être rendue compliquée à cause de leur taille ou de leur structure juridique. L'intérêt de passer par un fonds de titrisation est alors clair, car il permet de regrouper plusieurs titres subordonnés d'émetteurs différents.

Le modèle permettant de valoriser ces titres utilisé jusqu'à ce jour ne permettait pas de prendre en compte qu'une entité du fonds puisse avoir émis plusieurs titres de dette. De plus, la méthode générale de valorisation, et en particulier l'actualisation à l'aide d'un *spread* d'ajustement et l'intégration d'un impact de marché, contenait quelques manques.

On se propose d'articuler ce mémoire autour de plusieurs éléments. Tout d'abord, étudier ce que sont les passifs subordonnés, la législation autour et ce qu'ils représentent pour les compagnies d'assurance (chapitre 1). Ensuite, le modèle de valorisation sera vu de manière théorique (chapitre 2), et arrangé (chapitre 3) pour prendre en compte les trois aspects précédemment évoqués. Dans le modèle de projection, seuls les éléments utiles pour la compréhension du sujet sont abordés, le reste est omis. Enfin, une analyse des variations entre les deux méthodologies est menée (chapitre 4), en se basant sur un bilan caractéristique d'une compagnie d'assurance non-vie. La distribution des instants de défaut entre les deux méthodes est particulièrement analysée.

Mots clefs: Actuariat, Passifs subordonnés, Solvabilité II, Fonds Commun de Titrisation, Valorisation, Retour d'expérience, Implémentation de modèles

Abstract

On January 1st, 2016, the introduction of the Solvency II prudential system resulted in an increase in capital requirements for insurance companies. A common way for all companies to cover at least part of this required capital has been to issue subordinated debt, which is treated as equity by the supervisory authorities. However, for some insurers this can be complicated by their size or legal structure, hence the interest of using a securitization fund, binding together several subordinated securities from different issuers.

The model used up until today to value these securities does not allow for the fact that one entity in the fund may have issued several debt securities. In addition, the general valuation method, and in particular the discounting using an adjustment spread and the integration of a market impact, contained a number of shortcomings.

We propose to structure this dissertation around several elements. Firstly, what subordinated liabilities are, the legislation surrounding them and what they represent for insurance companies (chapter 1). Next, the valuation model will be examined theoretically (chapter 2), and arranged (chapter 3) to take account of the three aspects mentioned above. In the projection model, only the elements that are useful for understanding the subject are discussed; the rest is omitted. Finally, an analysis of the variations between the two methodologies is carried out (chapter 4), based on a typical balance sheet of a non-life insurance company. In particular, the distribution of default times between the two methods is analysed.

Keywords: Actuarial Science, Solvency II, Valuation of Subordinated Liabilities, Securitisation Fund, Feedbacks, Model implementation

Remerciements

Ce mémoire a été réalisé au sein du cabinet de conseil Prim'Act, où j'ai eu la chance de pouvoir faire mon alternance.

Je souhaite en premier lieu remercier Frédéric Planchet pour ce sujet particulièrement intéressant ainsi que pour toutes les explications fournies, Maxime Leroueil et Mathilde Clément pour toutes les explications pratiques, ainsi que Inès Burr et Hadi El Marzkioui pour leur patience et leur vigilance lors de la relecture de ce mémoire. De même, mes collègues Alva, Matthieu, Zohra, Paul, Clément et Quentin ont leurs places dans ces remerciements pour la bonne ambiance et les quelques relectures tout au long de ce travail.

Je remercie également très chaleureusement Domenico Sapone pour les nombreuses réponses détaillées qu'il a pu me fournir à propos de ce sujet.

Je souhaite remercier Monsieur Laurent Imbert de travailler au développement de la majeure actuariat de l'ESILV.

Un grand merci à Monsieur Rainer Buckdahn, professeur à l'EURIA, d'avoir encadré et conseillé la réalisation de ce travail.

Enfin, mes remerciements vont également à l'ensemble des professeurs et du personnel de l'EURIA pour l'excellente qualité des enseignements reçus aussi bien en Master 1 qu'en Master 2, et tout particulièrement Monsieur Franck Vermet, directeur de l'EURIA, pour sa disponibilité et son dévouement tout au long de ces deux années.

Note de synthèse

Présentation du contexte

La dernière grande norme prudentielle arrivée dans le secteur de l'assurance en Europe est Solvabilité II, mise en vigueur le 1^{er} janvier 2016. En pratique, cette norme s'est traduit par une augmentation des besoins en fonds propres pour suffisamment couvrir les capitaux requis, le *SCR* et le *MCR*. La réglementation autorise de couvrir ces capitaux requis avec plusieurs catégories de fonds propres. En particulier, les titres obligataires subordonnés peuvent, sous certaines conditions, être considérés comme des fonds propres.

En Europe, les plus gros acteurs sont connus des marchés financiers, et n'ont dans l'ensemble pas de difficulté à émettre ces titres : ils disposent d'un accès aux marchés, de cotations publiques sur leur risque de défaut, et ont en général besoin de montants conséquents.

Il n'en va pas de même pour les acteurs les plus petits. Un Fonds Commun de Titrisation de droit français a été créé en 2015 avec pour objectif de fournir un accès aux marchés à ces acteurs, et en particulier leur permettre d'émettre des titres obligataires subordonnés. Depuis, le fonds a grossi progressivement jusqu'à former trois compartiments d'emprunts subordonnés non cotés, émis en grande majorité par des organismes d'assurance non-vie ou santé européens. Dans le même temps, un modèle de projection et de valorisation ([Bonnin *et al.*, 2015]) a été développé et implémenté, permettant de valoriser ce fonds. La nécessité de ce modèle spécifique provient principalement de l'absence de données de marché permettant d'anticiper le risque de défaut des entités émettrices.

Problématique

Le premier objectif du travail fourni est de dresser un état des lieux de ce que représentent les dettes subordonnées pour les compagnies d'assurance européennes, ainsi que de discuter de l'organisation sous forme de fonds commun de titrisation.

Le fonds évoluant, il est nécessaire de garantir que le modèle de valorisation utilisé soit cohérent avec la structure du fonds. Or, certaines entités du fonds ont émis plusieurs dettes. Si l'une de ces entités se trouve en défaut, toutes ses dettes sont impactées. C'est un aspect qui n'était pas intégré dans le modèle d'origine. Sa prise en compte dans le cadre d'une implémentation efficace et utilisation récurrente est le deuxième objectif de ce mémoire.

Enfin, dans le modèle originel, l'actualisation des flux de chaque dette dépendait d'un *spread* d'ajustement servant à quantifier certains risques et garantissant l'absence d'opportunité d'arbitrage à l'émission. Aujourd'hui, presque une dizaine d'années après la création du fonds, il a été constaté que ce *spread* peut créer des incohérences au niveau de la valorisation pour les dettes proches de leurs échéances, et pour les entités ayant émis plusieurs dettes. Travailler sur ce *spread* et en corriger les problèmes est le troisième objectif de ce mémoire. De plus, un sujet annexe lié à ce *spread* a été de revoir la façon dont un indice de marché est intégré à la valorisation modèle¹.

Les passifs subordonnés

Tout d'abord, peu de mémoires d'actuariat traitent en profondeur des titres obligataires subordonnés, et encore moins de leur valorisation dans le cadre d'un fonds de titrisation. On trouve tout de même quelques mémoires sur des sujets proches. Par exemple [Lautrette, 2016] introduit les obligations contingentes convertibles en s'inspirant du secteur bancaire, et [de Barros et Delignon, 2009] présente entre autres la titrisation de risques d'assurance. Il apparaît donc utile de rappeler quelques aspects des titres obligataires subordonnés (abrégé en TS par la suite).

Leur utilisation

Les passifs subordonnés sont amplement abordés dans les textes réglementaires de Solvabilité II. Ils sont inclus en fonds propres de base, dont le *Tier* est déterminé selon les caractéristiques du passif. Pour les TS, la maturité, les obligations contractuelles de remboursement et la clause de subordination sont des critères spécialement regardés. La subordination doit être à la discrétion de l'émetteur, et doit être valable tant que la situation l'exige. Seule l'autorité de contrôle en place a le pouvoir d'autoriser la reprise des flux. Des limites quantitatives de chaque *Tier* sont imposées par l'EIOPA pour l'utilisation des passifs subordonnés en couverture des capitaux requis. En terme de limitation, une société française souhaitant émettre un titre subordonné doit au préalable obtenir l'accord de l'ACPR suite au dépôt d'un dossier, prouvant la cohérence et l'efficacité de l'émission. Enfin, on peut relever la clause transitoire de *grandfathering* qui prendra fin au 1^{er} janvier 2026, impliquant de remplacer les anciennes obligations subordonnées "grand-pères" restantes par de nouvelles émissions entièrement conformes aux principes de Solvabilité II.

En ce qui concerne la place qu'ont les dettes subordonnées dans les bilans prudentiels, on retrouve quelques constantes valables à échelle européenne. Ces données sont présentées ci-dessous, et issues de [EIOPA, 2022], les bases de données publiques de l'EIOPA. On tire trois principaux constats de ce tableau : la quasi totalité (99%) des dettes subordonnées sont effectivement utilisées pour couvrir les capitaux requis, entre 7% et 10%

1. Préalablement à ce mémoire, l'indice de marché était intégré à travers une valorisation fictive de l'obligation, qui était impactée par la variation de la valorisation modèle. Bien que cette méthode soit compréhensible, elle ne se justifiait pas vraiment.

des fonds propres sont représentés par des dettes subordonnées (en France, ce chiffre est par exemple à 9%), et c'est en moyenne entre 18% et 20% du SCR qui est couvert par les dettes subordonnées. Une étude un peu plus approfondie montre que ce dernier pourcentage a par ailleurs tendance à être d'autant plus élevé que l'organisme est petit.

	2021
Montant de DS incluses en FP	121
Part des DS incluses en FP dans le total des DS	99%
FP admis en couverture du SCR	1 750
Part des FP représentés en DS	7%
SCR	679
Taux de couverture du SCR	258%
Part du SCR couverte par les DS	18%

"DS" : dettes subordonnées ; "FP" : Fonds Propres.

Les montants sont exprimés en milliards d'euros, tous types d'assurances confondues.

TABLE 1 – Données synthétiques de bilan, échelle européenne

Les TS ont également un profil particulier d'investisseurs. En effet, ils correspondent à des investissements de grande maturité (pour pouvoir être classés en *Tier*), et sont très illiquides. Ils constituent donc un moyen de diversifier ses investissements tout en cherchant un peu plus de rendement. Ils sont donc un outil d'investissement particulièrement bien adapté pour les assureurs vie ou fonds de pension. Ces derniers ont en effet besoin d'investissements long termes pour être en adéquation avec leurs passifs, et ne sont que rarement dans une logique de revente.

L'organisation sous forme de fonds

Lorsqu'on s'intéresse à des TS émis par des petits organismes n'ayant pas d'accès aux marchés, l'organisation sous forme de fonds est presque forcée, du fait des montants demandés trop faibles (en comparaison aux montants usuellement émis). Passer par un fonds est donc presque une étape obligatoire. Néanmoins, ce regroupement offre quelques avantages. Un fonds peut regrouper des émissions de plusieurs devises, et d'émetteurs basés dans différents pays. Il est donc en mesure de diversifier le risque intrinsèque aux titres subordonnés, pour une rémunération souvent plus intéressante qu'un titre obligataire classique (du fait du risque de ne jamais recouvrer son investissement initial).

Méthodologie de la nouvelle valorisation

Trois modifications ont été apportées au modèle : la prise en compte du défaut commun à plusieurs dettes, une modification d'un *spread* d'ajustement utilisé pour l'actualisation des flux, et un changement de méthode pour l'intégration d'un indice de marché. Les résultats théoriques de ces modifications sont synthétisés ici.

Nous considérons une entité ayant émis d dettes, de nominaux (N_1, \dots, N_d) , de maturités (T_1, \dots, T_d) , et de rémunération (p_1, \dots, p_d) . Le nominal total à un instant t est alors défini par $\widetilde{N}(t) := \sum_{l=1}^d N_l \times \mathbb{1}_{\{t \leq T_l\}}$. Dans cette situation, on note $\widetilde{I}_{t,l}$ le flux réellement causé par la l^e dette à l'instant t , et \widetilde{I}_t le flux total de dette, naturellement défini par $\widetilde{I}_t = \sum_{l=1}^d \widetilde{I}_{t,l}$.

Prendre en compte le défaut commun à plusieurs dettes impacte directement les flux associés à chaque dette, qui sont reçus par le fonds lorsqu'ils ont lieu. La définition de ces flux dépend donc naturellement de l'instant de défaut, et de la perte en cas de défaut. L'instant de défaut est noté τ et défini comme le premier instant où l'entité ne couvre plus son SCR :

$$\tau := \min \left\{ t \in \llbracket 1, T \rrbracket / \frac{NAV_t}{SCR_t} < 1 \right\}$$

Cet instant de défaut est celui auquel l'investisseur subordonné perd ses droits de créance, parce que le SCR n'est plus couvert. Il ne doit donc pas être confondu avec l'instant de ruine économique. Puisque toutes les dettes en présence sont des *Tier 2*, il n'existe pas de règle de subordination entre deux dettes d'une même entité. Le taux de perte en cas de défaut est unique et doit être appliqué à toutes les émissions. Le règlement délégué propose un plancher de 50% pour ce taux, qui est alors défini par :

$$\widetilde{LGD}(t) := \max \left\{ 50\%; 1 - \frac{\max\{0; NAV_t\}}{\sum_{l=1}^d N_l \times \mathbb{1}_{\{t \leq T_l\}}} \right\}$$

Ces deux variables permettent de définir le flux de dette prenant en compte le défaut :

$$\widetilde{I}_{t,l} := N_l \times (r_t + p_l) \times d_p \times \mathbb{1}_{\{t \leq T_l \wedge \tau\}} + N_l \times \mathbb{1}_{\{t = T_l \wedge \tau\}} \times \left(1 - \widetilde{LGD}(t) \times \mathbb{1}_{\{\tau \leq T_l\}} \right)$$

Puis, en actualisant ces flux pour chaque instant, nous pouvons obtenir une valorisation de chacune des dettes, en prenant en compte le défaut. Cette valorisation est obtenue à la date t_0 par simulation, sur un jeu de $n = 10\,000$ trajectoires :

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_l \times & \left[d_p \times \sum_{t \leq T_l \wedge \tau^{(k)}} \delta_{x_2(T_l) + \Delta_{idx}(t_0, T_l)}^{(k)}(t) (p_l + r_t^{(k)}) \right. \\ & \left. + \delta_{x_2(T_l) + \Delta_{idx}(t_0, T_l)}^{(k)}(T_l \wedge \tau^{(k)}) (1 - \widetilde{LGD}^{(k)}(T_l \wedge \tau^{(k)}) \times \mathbb{1}_{\{\tau^{(k)} \leq T_l\}}) \right] \end{aligned}$$

Dans cette formule, $\delta_{x_2(T_l) + \Delta_{idx}(t_0, T_l)}^{(k)}(t)$ désigne la k^e simulation du facteur d'actualisation de l'instant t , pour un *spread* $x_2(T_l)$, et une variation d'indice de marché égale à $\Delta_{idx}(t_0, T_l)$. Ces deux éléments sont ajoutés au taux sans risque dans le facteur d'actualisation, et sont explicités ci-après.

La solution proposée est de calibrer, à chaque émission, une structure par terme de ce *spread* d'ajustement. Puis, à la maturité T_l , la valeur de $x_2(T_l)$ utilisée dans l'actualisation

est celle issue de la structure par terme. À cette valeur est ajoutée la variation d'un indice de marché, $\Delta_{idx}(t_0, T_l)$, issu de cotations *CDS*, permettant de repérer les tendances d'anticipation des marchés en matière de défaut des compagnies d'assurance à la date t_0 et à horizon T_l .

Résultats

L'ensemble des calculs a été fait en partant d'un bilan fictif présenté dans le tableau ci-dessous, se voulant représentatif d'une compagnie d'assurance non-vie. Cette entité a émis deux dettes, la plus courte de maturité 3 ans et de nominal 15 millions d'euros, la seconde de maturité 7 ans et de nominal 10 millions d'euros. Toutes deux sont à coupons variables indexés sur l'EURIBOR 3 mois, augmenté respectivement de 6% et 7%.

Nom de la variable	Valeur	Nom de la variable	Valeur
Valeur de marché de l'Actif	962 000 000	Montant des cotisations perçues	100 000 000
Taux de croissance de l'Actif (historique)	1%	Taux de croissance des cotisations	1%
Volatilité de l'Actif	4%	Volatilité des cotisations	2%
Best Estimate Liabilities - BEL	650 000 000	Ratio combiné réalisé initial	100%
Volatilité du BEL	15%	Ratio combiné cible	100%
Quote-part des réserves servies en prestations	10%	Volatilité du ratio combiné	2%
Duration du Passif	5	Fonds propres	267 000 000
SCR	150 000 000	Taux de couverture du SCR	178%

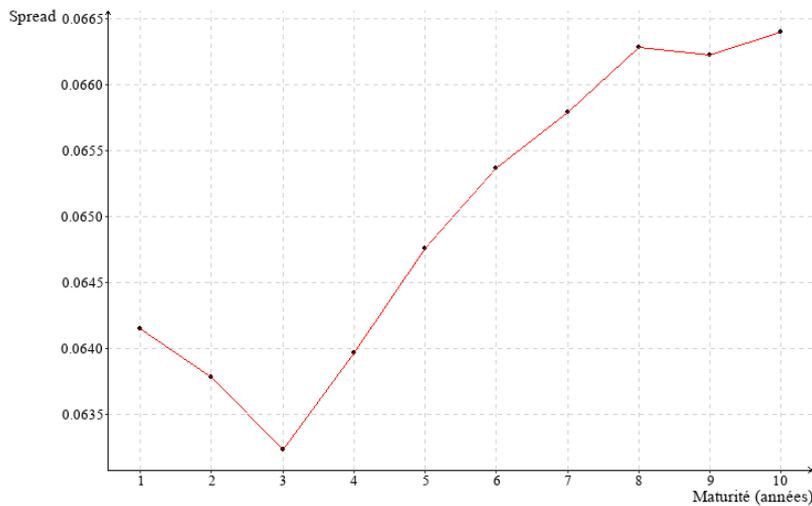


FIGURE 1 – Structure par terme du *spread* d'ajustement

La structure par terme a été calibrée avec le même bilan, et est présentée ci-contre pour les maturités de 1 à 10 ans. Son allure s'explique par des arguments qualitatifs sur les phénomènes impactant le plus sur le calcul de x_2 . En l'occurrence, la maturité de 3 ans fait apparaître un creux, et correspond au moment où le calcul du *spread* à ajouter au taux sans risque pour retrouver le nominal est moins impacté par la baisse du nombre de défauts simulés que par la baisse du nombre de flux à actualiser (avec la maturité décroissante).

En matière de défauts, plusieurs observations sont à faire. À maturité de chacune des dettes, prendre en compte le défaut commun induit un nombre de défauts légèrement plus élevé. Par exemple, la projection solo de la seconde dette aboutit à 331 défauts simulés de l'entité, au bout de 7 ans, alors que la projection commune aboutit à 369 défauts simulés de l'entité, sur la même durée. Cette augmentation du nombre de défauts n'est cependant pas suffisante pour déformer de façon significative la distribution du nombre de défauts à chaque instant. Cette distribution semble d'ailleurs suivre une loi binomiale négative dans les deux projections, comme montré sur le graphique suivant.

Ce graphique permet également de mettre en lumière un phénomène intéressant. Au 12^e trimestre (3 ans) a lieu le remboursement de la première dette. Du point de vue de l'entité, ceci est un flux sortant de 15 millions d'euros venant directement impacter les fonds propres. On constate que dans la projection commune, ce flux provoque un certain nombre de défauts en plus à ce trimestre particulier et pour les trimestres qui suivent. Au total, prendre en compte plusieurs dettes dans la projection a tendance à augmenter et à anticiper légèrement le nombre de défauts, sans pour autant modifier significativement la courbe de défauts. Le taux de perte en cas de défaut ne présente pas de changement particulier est n'est donc pas exposé ici.

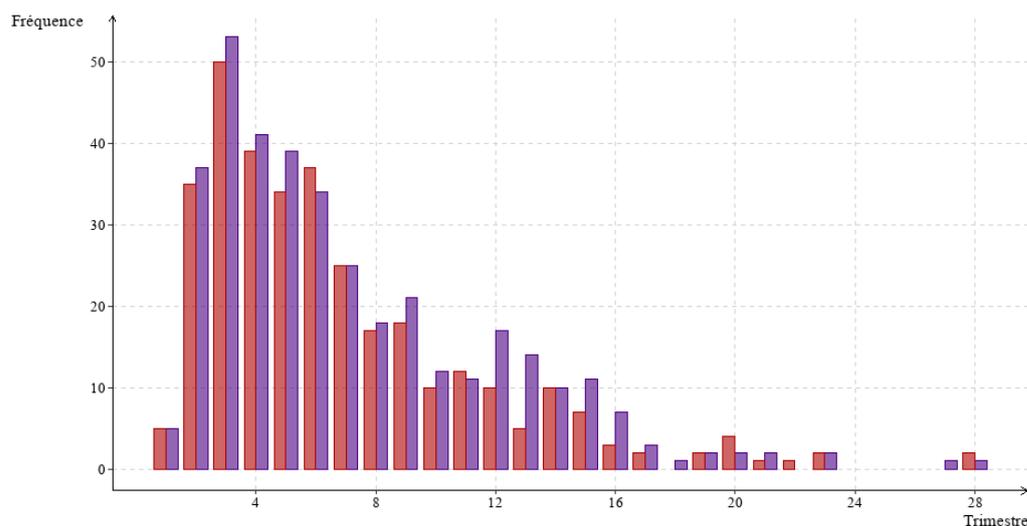


FIGURE 2 – Défauts subis à chaque instant par chaque dette entre les cadres mono-dette (rouge) et multi-dette (violet)

Le tableau ci-dessous fait une synthèse de l'ensemble des variations, entre deux étapes au sein d'une même projection, et entre les deux méthodes de projection. Comme on peut le lire sur ce tableau, la légère modification du nombre de défauts n'a qu'un impact limité (-0,13% et -0,15%) sur la valeur même de chaque dette. En revanche, pour cet exemple particulier, la structure par terme a donné lieu à un taux d'actualisation nettement plus faible que celui calculé à l'émission de la dette 2 (supposé être de 7,60%), entraînant une

augmentation de 3,30% dans la valorisation modèle.

	Dette 1			Dette 2		
	Projection mono-dette	Projection multi-dette	Variation par changement de projection	Projection mono-dette	Projection multi-dette	Variation par changement de projection
Nombre de défauts à maturité	289	292	1,04%	331	369	11,48%
Distribution des défauts	-	-	très peu déformée	-	-	très peu déformée
Perte en cas de défaut	-	-	légèrement plus élevée	-	-	légèrement plus élevée
Valorisation modèle	14 156 008	14 137 638	-0,13%	9 497 116	9 482 962	-0,15%
Valorisation modèle avec structure par terme	-	14 623 026	3,30%	-	9 987 430	5,16%
Valorisation marché	15 132 936	14 673 268	-3,04%	9 952 276	10 044 340	0,93%
Impact marché	6,90%	0,34%	-	4,79%	0,57%	-
Valorisation finale	14 928 360	14 673 268	-1,71%	9 845 617	10 044 340	2,02%
Impact modèle & marché	5,46%	0,34%	-	3,67%	0,57%	-
Prix	99,5%	97,82%	-1,71%	98,46%	100,44%	2,02%
Spread de la dette	6,18%	-	-	7,29%	-	-

Conclusion et ouverture

Les titres subordonnés sont assimilables à des quasi-fonds propres en référentiel Solvabilité II, et servent en moyenne à couvrir 18% du SCR des organismes d'assurance européens. Ils sont, à ce titre, fortement encadrés par des limites quantitatives et des règles d'émission, tout en proposant une certaine facilité de gestion. L'organisation sous forme de fonds regroupant plusieurs titres subordonnés de petites entités permet d'offrir une diversification aux investisseurs. Ces derniers ont des profils intéressés par des investissements de long termes, typiquement des assureurs vie ou des fonds de pension.

Pour les entités de ce fonds ayant émis plusieurs dettes, la valorisation de ces dettes est désormais cohérente. La nouvelle méthode de valorisation aboutit à une augmentation en fréquence et en rapidité des instants de défauts, sans modifier significativement leur distribution. La structure par terme pour le *spread* d'ajustement est une méthode ayant le mérite de corriger les incohérences inhérentes à un *spread* d'ajustement unique. Enfin, l'indice de marché est désormais intégré de façon claire, explicable et justifiable. De la même manière, l'implémentation du modèle a été quelque peu clarifiée, rendue plus rapide et plus simple d'utilisation.

Quelques points de vigilance sont à relever. Les plus importants sont notamment que les impacts du changement de modèle dépendent du bilan projeté, et que le modèle ne prend pas en compte qu'une dette arrivant à maturité est en pratique souvent remplacée par une autre dette de même nominal annulant le flux sortant. Il ne prend pas non plus en compte le caractère parfois partiel de l'amortissement d'un titre subordonné. Bien que répondant aux objectifs demandés, la solution de la structure par terme n'apparaît pas être la plus simple, est relativement compliquée à comprendre et est un peu coûteuse à

mettre en place. Elle pourrait être calibrée autrement afin d'inclure le possible écart de coupon, ou alors de la remplacer par une forme paramétrique dépendante du bilan, et satisfaisant par construction les conditions posées.

Ces remarques introduisent d'autres questions, mais mettent en valeur les limites de la valorisation effectuée, et ouvrent de nouvelles possibilités d'optimisation.

Mots clefs: Actuariat, Passifs subordonnés, Solvabilité II, Fonds Commun de Titrisation, Valorisation, Retour d'expérience, implémentation de modèles

Synthesis note

Background information

The latest major prudential standard to arrive in the European insurance sector was Solvency II, which came into force on January 1st, 2016. In practice, this standard has resulted in an increase in capital requirements, to sufficiently cover the required capital, the *SCR* and the *MCR*. The regulations allow these capital requirements to be covered by several categories of own funds. In particular, subordinated bonds can, under certain conditions, be considered as equity capital.

In Europe, the largest players are well known to the financial markets, and on the whole have no difficulty in issuing these securities : they have access to the markets, public quotations on their default risk, and generally require substantial amounts.

The same cannot be said for smaller players. A Fonds Commun de Titrisation (a securitisation fund) under French law was set up in 2015 with the aim of providing these players with access to the markets, and in particular enabling them to issue subordinated bonds. Since then, the fund has grown progressively to form three sub-funds of unlisted subordinated debt, issued for the most part by European non-life or health insurers. At the same time, a projection and valuation model ([Bonnin *et al.*, 2015]) was developed and implemented, enabling the fund to be valued. The need for this specific model stems mainly from the absence of market data enabling the default risk of the issuing entities to be anticipated.

Research question

The first objective of the work carried out is to draw up an inventory of what subordinated debt represents for European insurance companies, and to discuss the organisation in the form of a securitisation fund.

As the fund evolves, it is necessary to ensure that the valuation model used is consistent with the fund's structure. Some of the fund's entities have issued several debts. If one of these entities defaults, all its debts are affected. This is an aspect that was not included in the original model. Taking it into account as part of an efficient implementation and recurring use is the second objective of this thesis.

Finally, in the original model, the discounting of the flows of each debt depended

on an adjustment spread used to quantify certain risks and guarantee the absence of arbitrage opportunities at the time of issue. Today, almost ten years after the creation of the fund, it has been observed that this spread can create arbitrage opportunities for debts close to maturity, and also contains some inconsistencies for entities that have issued several debts. Working on this spread and correcting the problems is the third objective of this thesis. Furthermore, an ancillary subject related to this spread was to review the way in which a market index is integrated into the model valuation².

Subordinated Liabilities

First of all, few actuarial dissertations deal in depth with subordinated bonds, and even fewer with their valuation in the context of a securitisation fund. There are, however, a few dissertations on related subjects. For example, [Lautrette, 2016] introduces contingent convertible bonds by drawing inspiration from the banking sector, and [de Barros et Delignon, 2009] presents, among other things, the securitisation of insurance risks. It therefore seems useful to recall a few aspects of subordinated bonds (abbreviated as SL in the following).

Use of subordinated liabilities

Subordinated liabilities are dealt with extensively in the Solvency II regulations. They are included in core capital, the Tier of which is determined according to the characteristics of the liability. For SL, maturity, contractual repayment obligations and the subordination clause are specially considered criteria. Subordination must be at the issuer's discretion, and must be valid for as long as the situation requires. Only the supervisory authority in place has the power to authorise the resumption of flows. Quantitative limits for each Tier are imposed by EIOPA for the use of subordinated liabilities to cover required capital. In terms of limitations, a French company wishing to issue a subordinated security must first obtain the agreement of the ACPR following the submission of a file proving the coherence and effectiveness of the issue. Lastly, there is a transitional grandfathering clause that will expire on January 1st, 2026, meaning that the remaining 'grandfathered' subordinated bonds will have to be replaced by new issues that comply fully with the principles of Solvency II.

With regard to the place of subordinated debt in prudential balance sheets, there are a number of constants that are valid on a European scale. These data are presented below, and come from [EIOPA, 2022], EIOPA's public databases. Three main conclusions can be drawn from this table : almost all (99%) of subordinated debt is actually used to cover capital requirements, between 7% and 10% of equity capital is represented by subordinated debt (in France, for example, this figure is 9%), and on average between

2. Prior to this thesis, the market index was integrated through a fictitious valuation of the bond, which was impacted by the variation in the model valuation. Although this method is understandable, it was not really justified

18% and 20% of the SCR is covered by subordinated debt. A slightly more detailed study shows that this percentage tends to be higher the smaller the organisation.

	2021
Amount of SL included in OF	121
Share of SL included in OF, amongst total of SL	99%
OF admitted as SCR coverage	1 750
Share of OF represented by SL	7%
SCR	679
SCR coverage ratio	258%
Share of SCR covered by SL	18%

"SL" : Subordinated Liabilities ; "OF" : Own Funds Propres.

Amounts are expressed in billions of euros, all types of insurance included.

TABLE 2 – Summary balance sheet data, European scale

SL also have a special investor profile. They correspond to very mature investments (so that they can be classified as Tier), and are highly illiquid. They are therefore a way of diversifying investments while seeking a little more yield. They are therefore a particularly well-suited investment tool for life insurers and pension funds. The latter need long-term investments to match their liabilities, and are rarely in a position to resell.

The benefits of using a fund

When we are interested in SL issued by small organisations with no access to the markets, organisation in the form of a fund is almost forced, because the amounts requested are too low (compared with the amounts usually issued). So there is often little choice. Nevertheless, there are a number of advantages to grouping issues in this way. A fund can pool issues in several currencies and from issuers based in different countries. It is therefore able to diversify the intrinsic risk of subordinated securities, for a return that is often more attractive than a traditional bond (because of the risk of never recovering its initial investment).

Methodology of the new valuation

Three modifications have been made to the model : taking into account the default common to several debts, a modification of an adjustment spread used for the discounting of flows, and a change of method for the integration of a market index. The theoretical results of these changes are summarised below.

We consider an entity which has issued d debts, with nominal values (N_1, \dots, N_d) , of maturities (T_1, \dots, T_d) , and remuneration (p_1, \dots, p_d) . The total nominal at a time t is then defined by $\widetilde{N}(t) := \sum_{l=1}^d N_l \times \mathbb{1}_{\{t \leq T_l\}}$. In this situation, $\widetilde{I}_{t,l}$ is defined as the

cashflow actually caused by the l^{th} debt at time t , and \widetilde{I}_t the total flow of debt, obviously defined by $\widetilde{I}_t = \sum_{l=1}^d \widetilde{I}_{t,l}$.

Taking into account a default common to several debts has a direct impact on the flows associated with each debt, which are received by the fund when they occur. The definition of these flows naturally depends on the time of default and the loss in the event of default. The time of default is denoted τ and defined as the first time at which the entity no longer covers its SCR :

$$\tau := \min \left\{ t \in \llbracket 1, T \rrbracket / \frac{NAV_t}{SCR_t} < 1 \right\}$$

This moment of default is the one at which the subordinated investor loses his claim rights, because the SCR is no longer covered. It should therefore not be confused with the moment of economic ruin. Since all the debts involved are Tier 2, there is no subordination rule between two debts of the same entity. The loss given default rate is unique and must be applied to all issues. The delegated regulation introduces a floor of 50% for this rate, which is then defined by :

$$\widetilde{LGD}(t) := \max \left\{ 50\%; 1 - \frac{\max \{0; NAV_t\}}{\sum_{l=1}^d N_l \times \mathbb{1}_{\{t \leq T_l\}}} \right\}$$

These two variables are used to define the flow of debt taking the default into account :

$$\widetilde{I}_{t,l} := N_l \times (r_t + p_l) \times d_p \times \mathbb{1}_{\{t \leq T_l \wedge \tau\}} + N_l \times \mathbb{1}_{\{t = T_l \wedge \tau\}} \times \left(1 - \widetilde{LGD}(t) \times \mathbb{1}_{\{\tau \leq T_l\}} \right)$$

Then, by discounting these flows for each point in time, we can obtain a valuation for each of the debts, taking default into account. This valuation is obtained at date t_0 by simulation, on a set of $n = 10,000$ trajectories :

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_l \times & \left[d_p \times \sum_{t \leq T_l \wedge \tau^{(k)}} \delta_{x_2(T_l) + \Delta_{idx}(t_0, T_l)}^{(k)}(t) (p_l + r_t^{(k)}) \right. \\ & \left. + \delta_{x_2(T_l) + \Delta_{idx}(t_0, T_l)}^{(k)}(T_l \wedge \tau^{(k)}) (1 - \widetilde{LGD}^{(k)}(T_l \wedge \tau^{(k)}) \times \mathbb{1}_{\{\tau^{(k)} \leq T_l\}}) \right] \end{aligned}$$

In this formula, $\delta_{x_2(T_l) + \Delta_{idx}(t_0, T_l)}^{(k)}(t)$ denotes the k^{th} simulation of the discount factor at time t , for a spread $x_2(T_l)$, and a market index variation equal to $\Delta_{idx}(t_0, T_l)$. These two elements are added to the risk-free rate in the discount factor, and are explained below.

Initially, the adjustment spread, denoted x_2 , was calculated when a debt was issued, to guarantee the AOA. However, it gave rise to certain inconsistencies for debts close to maturity, as well as for debts that were not issued on their own. The proposed solution is to calibrate, at each issue, a term structure of this adjustment spread. Then, at maturity

T_l , the value of $x_2(T_l)$ used in the discounting is that derived from the term structure. To this value is added the variation in a market index, $\Delta_{idx}(t_0, T_l)$, derived from quotations CDS, making it possible to identify market anticipation trends in terms of insurance company default at date t_0 and over time T_l .

Results

All the calculations were based on a fictitious balance sheet presented in the table below, intended to be representative of a non-life insurance company. This entity has issued two debts, the shorter with a maturity of 3 years and a nominal value of 15 million euros, and the second with a maturity of 7 years and a nominal value of 10 million euros. Both have a variable coupon indexed to 3-month EURIBOR, plus 6% and 7% respectively.

Variable	Value	Variable	Value
Assets Market Value	962 000 000	Earned Premiums	100 000 000
Growth rate of assets	1%	Premiums growth rate	1%
Assets volatility	4%	Premiums volatility	2%
Best Estimate Liabilities - BEL	650 000 000	Net combined ratio	100%
BEL volatility	15%	Targeted net combined ratio	100%
Share of Reserves transformed into claims paid	10%	Net combined ratio volatility	2%
Liabilities Duration	5	Own Funds	267 000 000
SCR	150 000 000	SCR Coverage	178%

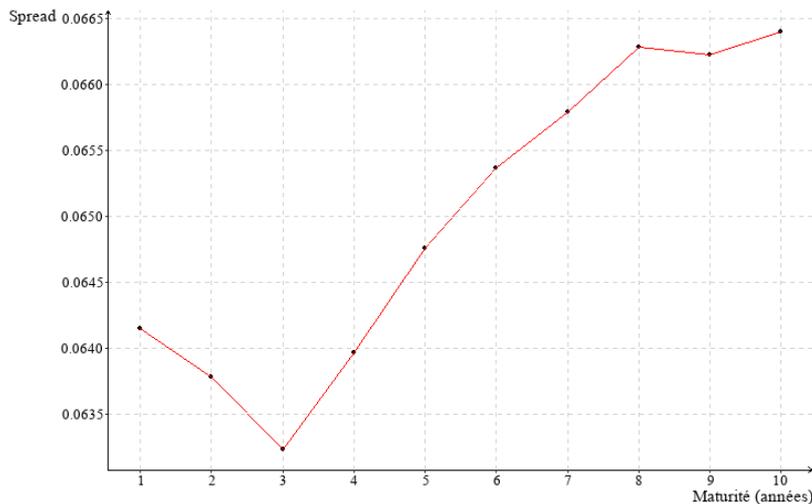


FIGURE 3 – Term structure of adjustment spread

The risk-free rate to recover the nominal is less impacted by the fall in the number of simu-

The term structure has been calibrated using the same balance sheet, and is shown opposite for maturities from 1 to 10 years. There are two main reasons for its appearance. Its limit value is naturally close to the interest rate above EURIBOR. The trough at a maturity of 3 years corresponds to the moment when the calculation of the spread to be added to the

lated defaults than by the fall in the number of flows to be discounted (with decreasing maturity).

A number of observations can be made regarding defaults. At the maturity of each of the debts, taking into account the joint default leads to a slightly higher number of defaults. For example, the solo projection of the second debt results in 331 simulated defaults by the entity after 7 years, whereas the joint projection results in 369 simulated defaults by the entity over the same period. However, this increase in the number of defects is not sufficient to significantly distort the distribution of the number of defects at each point in time. In fact, this distribution appears to follow a negative binomial distribution in both projections, as shown in the graph below.

This graph also highlights an interesting phenomenon. In the 12th quarter (3rd year), the first debt is repaid. From the entity's point of view, this represents an outflow of 15 million euros, which has a direct impact on shareholders' equity. We can see that in the joint projection, this flow causes a certain number of additional defaults in this particular quarter and in the quarters that follow. Overall, taking several debts into account in the projection tends to increase and slightly anticipate the number of defaults, without significantly modifying the default curve. The loss given default rate does not show any particular change and is therefore not presented here.

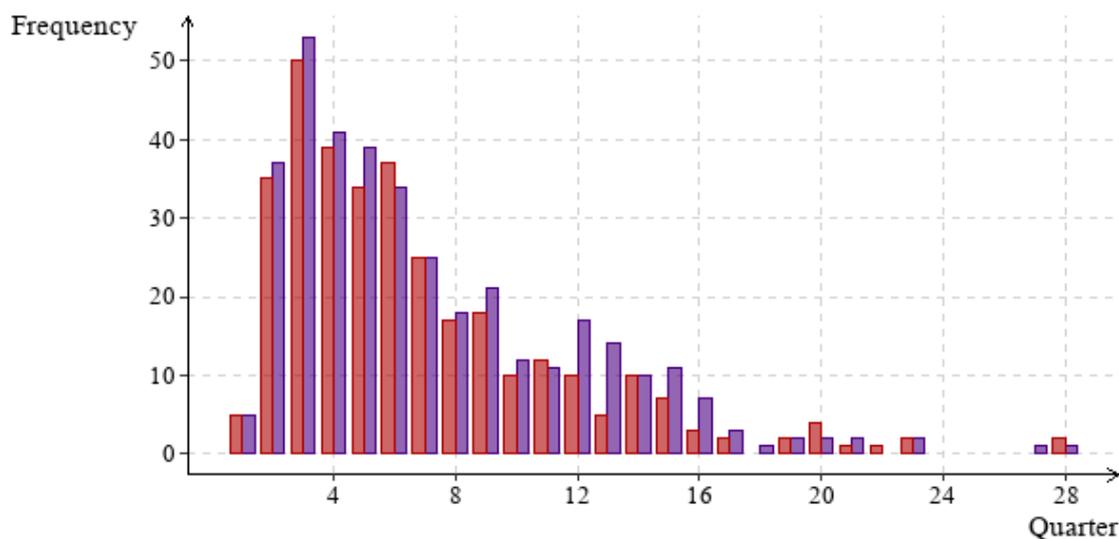


FIGURE 4 – Number of simulated defaults between single-debt projection (red) and multi-debt projection (purple)

The table below summarises all the variations, between two stages within the same projection, and between the two projection methods. As can be seen from this table, the slight change in the number of defaults has only a limited impact (-0.13% and -0.15%) on the value of each debt. On the other hand, for this particular example, the term structure

has resulted in a significantly lower discount rate than that calculated when debt 2 was issued (assumed to be 7.60%), leading to a 3.30% increase in the model valuation.

	Debt 1			Debt 2		
	Single-debt projection	Multi-debt projection	Variation caused by projection changing	Single-debt projection	Multi-debt projection	Variation caused by projection changing
Number of defaults at maturity	289	292	1.04%	331	369	11.48%
Defaults distribution	-	-	Slight distortion	-	-	Slight distortion
Loss Given Default	-	-	slightly higher	-	-	slightly higher
Model valuation	14 156 008	14 137 638	-0.13%	9 497 116	9 482 962	-0.15%
Model valuation including term structure	-	14 623 026	3.30%	-	9 987 430	5.16%
Market valuation	15 132 936	14 673 268	-3.04%	9 952 276	10 044 340	0.93%
Market impact	6.90%	0.34%	-	4.79%	0.57%	-
Final Valuation	14 928 360	14 673 268	-1.71%	9 845 617	10 044 340	2.02%
Model and Market Impact	5.46%	0.34%	-	3.67%	0.57%	-
Price	99.5%	97.82%	-1.71%	98.46%	100.44%	2.02%
Debt's spread	6.18%	-	-	7.29%	-	-

Conclusion and opening

Subordinated securities are equivalent to quasi-equity under Solvency II, and are used on average to cover 18As such, they are subject to strict quantitative limits and issuing rules, while offering a certain ease of management. The fact that they are organised in the form of funds comprising a number of subordinated securities issued by small entities means that investors can diversify their portfolios. These investors have profiles interested in long-term investments, typically life insurers or pension funds.

For entities in this fund that have issued several debts, the valuation of these debts is now consistent. The new valuation method results in an increase in the frequency and speed of default events, without significantly altering their distribution. The term structure for the adjustment spread is a method that has the merit of correcting the inconsistencies inherent in a single adjustment spread. Finally, the market index is now integrated in a clear, explainable and justifiable way. Similarly, the implementation of the model has been somewhat clarified, made faster and easier to use.

A number of points need to be borne in mind. The most important are that the impact of the change of model depends on the projected balance sheet, and that the model does not take into account the fact that a debt reaching maturity is in practice often replaced by another debt of the same nominal value, cancelling out the outflow. Nor does it take into account the sometimes partial nature of the amortisation of subordinated debt. Although it meets the required objectives, the term structure solution does not appear to be the simplest, is relatively complicated to understand and is somewhat costly to implement. It could be calibrated differently to include the possible coupon spread, or replaced by a parametric form dependent on the balance sheet, and satisfying by construction the conditions laid down.

These remarks raise other questions, but highlight the limitations of the valuation we have carried out, and open up new possibilities for optimisation.

Keywords: Actuarial Science, Solvency II, Valuation of Subordinated Liabilities, Securitisation Fund, Feedbacks, Model implementation

Table des matières

Introduction	1
1 Contexte général	3
1.1 Contexte réglementaire et interprétations de la norme	3
1.1.1 La directive "Solvabilité II" et ses grands principes	3
1.1.2 Les articles d'intérêts	5
1.2 Les passifs subordonnés	9
1.2.1 Différents types de titres subordonnés	9
1.2.2 Les titres subordonnés comme outils prudentiels pour les assu- rances	10
1.2.3 Comparaison avec d'autres outils à disposition des assurances . . .	13
1.2.4 Un cas historique	16
1.3 Présentation du fonds et des dettes présentes	16
1.3.1 Le fonds	16
1.3.2 Le fonctionnement du fonds	17
1.3.3 Les dettes et entités présentes	17
1.4 Synthèse du contexte général	19
2 Modèle actuel	23
2.1 La nécessité d'un modèle spécifique	23
2.2 Le modèle	24
2.2.1 Les données disponibles	24
2.2.2 La logique générale	24
2.2.3 Notations et nomenclatures utilisées par la suite	26
2.2.4 Définition du défaut	26
2.2.5 Le modèle de taux	28
2.3 Valorisation du fonds	29
2.3.1 Hors prise en compte du défaut	29
2.3.2 Avec prise en compte du défaut	30
2.4 Expression du risque de crédit sous forme de <i>spread</i>	30
2.4.1 Réconciliation des valeurs avec et sans défaut	31
2.4.2 Réconciliation avec la valeur nominale	31
2.4.3 Égalisation de la valorisation sans défaut avec la valeur nominale .	32

2.5	Prix final communiqué	32
2.5.1	Ajout d'un impact de marché	32
2.5.2	Construction de l'indice	33
2.5.3	Intégration de l'indice dans la valorisation	34
2.6	L'implémentation	34
2.7	Exemple d'un déroulé complet de valorisation, avant modifications	36
2.7.1	Présentation de l'entité	37
2.7.2	Recalcul de certaines variables	38
2.7.3	Valorisation modèle	38
2.7.4	Impact marché	39
2.7.5	Valorisation finale	39
2.7.6	Commentaires	39
2.8	Retour d'expérience critique sur le modèle actuel	43
2.8.1	Les hypothèses générales	43
2.8.2	La valorisation et son implémentation	44
3	Le nouveau modèle	47
3.1	Les quelques conventions propres à ce chapitre	47
3.2	La valorisation multiple	48
3.2.1	Préambule	48
3.2.2	La Net Asset Value et l'instant de défaut	48
3.2.3	La perte en cas de défaut	50
3.2.4	Les flux sortants	53
3.3	Le <i>spread</i> d'ajustement	57
3.4	L'indice de marché	59
3.5	L'implémentation	59
3.6	Conclusion des modifications	60
4	Résultats	63
4.1	Préambule	64
4.1.1	Rappel du bilan et des dettes projetées	64
4.1.2	Rappel des résultats de la valorisation mono-dette	65
4.1.3	Nomenclature et représentation	65
4.1.4	Commentaire sur la génération des aléas	65
4.2	Impacts sur le défaut	66
4.2.1	Les instants de défaut	66
4.2.2	Évolution de la probabilité de défaut	71
4.2.3	Évolution de la perte en cas de défaut	72
4.3	La valorisation modèle	74
4.3.1	Les flux	74
4.3.2	La distribution des valorisations modèle	76
4.3.3	La valorisation modèle finale	77
4.4	Structure par terme et impact marché	77
4.4.1	La structure par terme	77

4.4.2	L'indice de marché	81
4.5	Synthèse des résultats successifs	82
4.6	Retour critique sur ces modifications	83
Conclusion		85
Bibliographie		88
A Données synthétiques de bilans solos		92
B Compléments juridiques		96
C Données accessibles		98
C.1	Courbe des taux	98
C.2	Données bilancielle	99
C.3	Indice de marché	100
C.4	Étude sur l'indice de marché	105
D Résultats		106
E Notations mathématiques		107

Introduction

Avec l'entrée en vigueur de la réglementation "Solvabilité II" le 1^{er} janvier 2016, de nouvelles exigences en capital sont apparues pour les entreprises d'assurance ou de réassurance européennes, notamment avec les notions de *Minimum Solvency Requirement* et de *Solvency Capital Requirement*. Sous ce référentiel normatif, le calcul de ces exigences en capital est désormais basé sur l'étude du profil de risque et du bilan de l'entité en valeur de marché, aujourd'hui et dans un an. Avec l'introduction de l'ORSA, le respect des exigences doit également être satisfait sur l'horizon de projection. Pour beaucoup d'acteurs, le passage à Solvabilité II a donné lieu à des exigences en capital plus importantes que celles du régime Solvabilité I. En pratique, ceci s'est traduit par une augmentation du besoin en fonds propres pour maintenir le ratio de couverture suffisamment élevé, que ce soit à des fins strictement prudentielles, ou simplement pour le pilotage de la société.

L'un des leviers disponibles pour répondre à ces objectifs a été l'émission de titres obligataires subordonnés. Bien que globalement connus, les passifs subordonnés sont assez peu développés dans les mémoires d'actuariat. Il est cependant possible de trouver quelques mémoires traitant de sujets proches.

Les titres subordonnés contribuent à la solvabilité des organismes d'assurance. Ces titres étant en effet assimilables à des fonds propres pour les autorités de contrôle, ils étaient et sont toujours un dispositif particulièrement intéressant. Pourtant, quand l'émetteur est une société de taille modeste, le titre subordonné correspondant à ses besoins pris tout seul constitue un investissement relativement peu intéressant : d'une part à cause d'un montant nominal faible au vu des frais engagés et des montants habituels des marchés obligataires, d'autre part à cause de l'absence de données de marché permettant d'anticiper le risque de défaut des entités émettrices.

En 2015, la création d'un fonds commun de titrisation (présenté en chapitre 1) et d'un modèle de valorisation associé (présenté en chapitre 2, ci-après dénommé "modèle actuel") a permis de limiter ces problèmes, rendant les titres obligataires considérés ici plus intéressants pour les investisseurs et possibles pour les émetteurs. En somme, l'idée de ce fonds a été de fournir un accès aux marchés financiers à des acteurs n'ayant pas la structure nécessaire pour l'avoir naturellement. Cet accès est de plus accompagné d'une méthode de valorisation publique. Depuis la création de ce fonds, quelques entités ont émis un deuxième voire un troisième titre dans ce fonds. Ce point n'est pas pris en compte dans le modèle actuel, et peut amener à masquer une partie de la réalité, ou bien poser des problèmes de cohérence.

D'une part, avec le modèle actuel, chaque dette présente est valorisée indépendamment des autres, ce qui constitue une hypothèse audacieuse lorsque deux dettes correspondent au même émetteur. D'autre part, un moyen courant d'exprimer le risque de crédit de chaque entité émettrice est de calculer le *spread* à ajouter au taux sans risque pour réconcilier les valeurs des dettes avec défaut ou sans défaut et le nominal. Ces *spreads* permettent notamment de capter le risque de défaut en lui-même, mais également les autres risques non directement modélisés. Là encore, l'existence de deux dettes peut mener à des difficultés de cohérence ou d'interprétation, notamment pour les dettes de maturités les plus courtes.

Enfin, ce modèle est relativement peu documenté, et porte sur un sujet très spécifique. Un des défis qui se pose donc naturellement est son implémentation. Cette dernière doit être faite aux fins d'une utilisation régulière, les résultats devant être robustes et cohérents, puisqu'ils servent à justifier de la valeur du fonds aux investisseurs.

L'objet de ce mémoire est ainsi de revoir le modèle actuel, tant dans sa théorie que dans son implémentation pratique, afin de mieux prendre en compte les nouvelles émissions et les risques associés lors de la valorisation du fonds. Le point de vue exposé dans ce mémoire est donc indépendant à la fois de l'investisseur et des entités émettrices, et en interaction avec le gestionnaire du fonds pour les retours d'expérience.

Chapitre 1

Présentation du fonds, des dettes subordonnées et du cadre réglementaire

Comme évoqué en introduction, c'est en référentiel Solvabilité II, que ce travail se situe. Dans ce chapitre, nous allons effectuer un panorama complet de ce que sont les titres subordonnés, les aspects réglementaires qui s'y rattachent, l'organisation sous forme de fonds, et les dettes et bilans des entités présentes dans le fonds. Le cadre réglementaire et législatif utile à ce mémoire sera traité en premier lieu, viendra ensuite une présentation des titres subordonnés de manière générale, puis une présentation du fonds commun de titrisation et des dettes étudiées.

1.1 Contexte réglementaire et interprétations de la norme

1.1.1 La directive "Solvabilité II" et ses grands principes

Entrée en vigueur en 2016, la réforme Solvabilité II s'articule en textes de plusieurs niveaux. Le texte dit "de niveau 1" est la directive 2009/138 de la Commission Européenne du 25 novembre 2009, qui en présente les grands principes. Viennent ensuite les textes dits "de niveau 2", qui sont les règlements délégués¹. Enfin, les textes de niveau 1 et 2 sont complétés par les textes de niveau 3, correspondant à des normes techniques d'exécution ou à des orientations communiqués par l'EIOPA. Ces textes de niveaux 3 correspondent pour beaucoup à des réponses à des questions précises d'implémentation ou d'interprétation.

La directive SII s'articule autour de 3 piliers : un premier pilier d'exigences quantitatives, un second pilier d'exigences qualitatives, et un troisième et dernier pilier d'exigences de transparence. Au sein du pilier 1, ce sont principalement les postes du bilan

1. Le plus connu et le plus conséquent concernant Solvabilité II est le Règlement UE 2015/35, c'est par défaut celui auquel il est fait référence dans la suite de ce travail.

qui sont visés : la manière de les valoriser et leurs montants. L'article 75 de la directive est fondamental à ce sujet, il stipule que les actifs et les passifs (et a fortiori les passifs subordonnés) des compagnies d'assurance doivent être :

"valorisés au montant pour lequel ils pourraient être transférés ou réglés dans le cadre d'une transaction conclue, dans des conditions de concurrence normales, entre des parties informées et consentantes."

Ce montant est communément appelé la "valeur de marché".

Toujours à propos des exigences quantitatives, la définition des capitaux de solvabilité requis (*Solvency Capital Requirement* et *Minimal Capital Requirement*²) et leurs modalités de calcul sont précisées à la section 4 du chapitre 6 du titre I de la directive. Les formules exactes à utiliser sont quant à elles retranscrites dans le règlement délégué. En substance, les capitaux requis sont calculés par sous-modules et modules de risques, puis agrégés selon des coefficients de corrélation fournis par l'EIOPA. Ils correspondent à un quantile à 99,5% de la distribution des fonds propres de base à horizon d'un an. En d'autres termes, lorsque le capital de solvabilité requis est couvert, l'entreprise d'assurance est censée éviter la ruine à un an avec probabilité 99,5%. Nous verrons par la suite que ceci est différent d'éviter une non-couverture du *SCR* à un an avec probabilité 99,5%.

Il est à noter qu'en cas de non couverture du *SCR*, l'entreprise d'assurance ou de réassurance dispose de deux mois pour remettre à l'autorité locale de contrôle un plan de rétablissement, puis - si ce plan est accepté - de 6 à 9 mois pour le mettre à exécution. Ce délai passé, si la situation ne s'est pas améliorée, l'autorité de contrôle a le pouvoir d'impacter directement la gestion de la société, en interdisant ou renforçant certains dispositifs. En cas de non couverture du *MCR*, l'organisme d'assurance dispose d'un mois pour établir un plan de refinancement réaliste et à court terme. Ce plan doit ramener les fonds propres à un niveau suffisant en 3 mois maximum. Au delà, l'autorité de contrôle retire son agrément à la compagnie d'assurance³. À ce titre, et compte tenu de certaines règles de comptabilisation des éléments de fonds propres qui seront exposées plus tard, les titres subordonnés sont un moyen facile et relativement peu coûteux de financer son capital.

Le deuxième pilier de la directive concerne les exigences qualitatives auxquelles doit répondre une compagnie d'assurance. Concrètement, ces exigences correspondent à la mise en place d'un véritable système de gouvernance et de pilotage des risques - défini à la section 2 du chapitre 4 du titre I - basé notamment sur l'honorabilité des dirigeants, sur la mise en place d'un contrôle interne, ainsi que sur le processus *ORSA* : *Own Risk and Solvency Assessment*. Au sein de l'*ORSA*, l'assureur doit notamment établir son profil de risque, veiller au respect constant des exigences réglementaires en matière de solvabilité et vérifier la cohérence entre les hypothèses de calcul des exigences en capital et le profil de risque.

2. Par la suite abrégés en *SCR* et *MCR*

3. Conformément à l'article L325-1 du Code des Assurances pour les sociétés établies en France par exemple.

Enfin, le troisième pilier est un pilier de transparence financière vis à vis du public - investisseurs comme particuliers - et du régulateur. Cette transparence se fait au travers de différents rapports que les sociétés d'assurances doivent communiquer au public ou aux autorités de contrôle : RSR⁴, SFCR⁵ et QRT⁶. On y trouve notamment des informations sur les structures de bilan des entreprises, leur profil de risque, ou leur couverture des capitaux requis. Ils servent en un sens à constater comment l'entreprise s'adapte à Solvabilité II.

1.1.2 Les articles d'intérêts

La sous-section précédente présente le référentiel normatif Solvabilité II, ses grands principes et les principales exigences des organismes qui y sont soumis. Ci-après sont exposés plus spécifiquement les articles en lien direct avec ce mémoire. Ces articles se trouvent aussi bien dans la directive que dans le règlement délégué, ce dernier servant à expliciter clairement la mise en œuvre de la première. Lorsque nécessaire, certains renvois au Code Français des Assurances sont effectués.

1.1.2.1 L'utilisation des titres subordonnés pour la couverture des capitaux requis

En matière de couverture des capitaux requis, les articles 88 et 93 de la directive sont essentiels. L'article 88 indique que les passifs subordonnés sont inclus dans les fonds propres de base d'une compagnie d'assurance⁷. L'article 93 précise que ces fonds propres de base sont eux même classés en différents niveaux selon leur qualité. Ces qualités sont communément nommées *Tier*, la meilleure qualité étant le *Tier 1*, la moins bonne étant le *Tier 3*. Deux caractéristiques, exposées à l'article 93, sont particulièrement regardées pour déterminer la qualité d'un élément de fonds propre considéré : d'une part la disponibilité complète et permanente de l'élément pour absorber les pertes ; d'autre part, dans une situation de liquidation, le caractère subordonné (ou non) de l'élément de fonds propres aux engagements d'assurance ou de réassurance. Ces caractéristiques sont évaluées en regard de la durée de vie de l'élément de fonds propres : elles doivent être valables à la date d'évaluation et sur toute la durée de vie. En somme, le grand principe exposé à cet article est que l'entité émettrice de titres subordonnés, si elle souhaite disposer du titre pour augmenter sa solvabilité, doit également disposer d'un grand pouvoir de décision quant au remboursement ou non du titre.

Pour trouver plus d'explications concernant le classement en *Tier*, il faut se reporter au règlement délégué, plus spécifiquement aux articles 69 à 77. Ces articles énoncent les caractéristiques précises à examiner pour que tel élément de fonds propre soit de tel *Tier*

4. *Regular Supervisory Report*

5. *Solvency and Financial Condition Report*

6. *Quantitative Report Template*

7. ceci par opposition aux fonds propres "auxiliaires", qui sont des éléments n'entrant pas en compte dans les fonds propres de base, mais qui sont tout de même disponibles pour absorber les pertes lorsque cela est nécessaire.

(1, 2 ou 3). Il ressort que, peu importe le *Tier*, les passifs subordonnés sont admissibles en fonds propres si :

- le remboursement s'arrête dès que la couverture des capitaux requis n'est plus satisfaite, et ne peut reprendre qu'une fois la solvabilité de l'entreprise rétablie, et sur autorisation de l'autorité de contrôle en place ;
- la première obligation contractuelle de remboursement n'intervient pas avant 5 ans au moins, à compter de l'émission ;
- l'élément n'est remboursable qu'au choix de l'émetteur ;
- l'élément ne doit pas contenir d'incitation à racheter ou rembourser de manière anticipée.

De plus, quelques spécificités de chaque *Tier* se dégagent :

- pour les *Tier 1*, le passif ne doit pas avoir de date d'échéance, et les obligations contractuelles de le rembourser ne doivent être qu'entre 5 et 10 ans à compter de la date d'émission ;
- pour les *Tier 2*, le passif doit avoir une échéance d'au moins 10 ans (voire pas d'échéance), et aucune obligation contractuelle de remboursement avant 5 ans ;
- pour les *Tier 3*, le passif doit avoir une échéance d'au moins 5 ans (voire pas d'échéance), et aucune obligation contractuelle de remboursement avant 5 ans.

Il est à noter que le principe de l'article 93 est bien rappelé à chaque fois : le choix d'activer ou non la clause de non-remboursement du titre doit être à la discrétion de l'émetteur.

Au vu des articles exposés ci-dessus, il semble que les passifs subordonnés sont, à de nombreux égards, très utiles pour l'assureur : ils lui confèrent un certain pouvoir de décision, augmentent sa solvabilité, servent au pilotage de l'entreprise, et ont un coût assez modeste⁸. Une lecture trop rapide de ce chapitre ou des textes réglementaires amènerait à penser que les compagnies d'assurance ont une totale liberté en la matière, et pourraient abuser de leur utilisation, sans considérer les risques qui leurs sont associés.

Le premier frein mis à une utilisation excessive des passifs subordonnés est réglementaire : il existe des limites quantitatives à l'utilisation des passifs subordonnés pour la couverture des capitaux requis. Ces limites sont définies à l'article 82 du règlement délégué, et résumées en tableau 1.1 ci-dessous.

Capital requis	Tier 1	Tier 2 + Tier 3	Tier 3
SCR	au moins 50%	au plus 50%	au plus 15%
MCR	au moins 80%	au plus 20%	0%

Lecture : "la somme des montants éligibles des éléments de niveaux 2 et 3 ne dépasse pas 50 % du capital de solvabilité requis."

TABLE 1.1 – Utilisation des différents *Tier* pour la couverture des capitaux requis

8. Ce point sera abordé en section 1.3

Il est à noter que ces limites ne concernent que l'évaluation du respect des exigences réglementaires. A priori, rien dans l'article 82 du règlement délégué n'empêche une compagnie d'assurance d'émettre des *Tier* 1, 2 ou 3 au delà de ces limites. Ces nouvelles émissions ne seront simplement pas admises en couverture des capitaux requis, à moins d'en remplacer d'autres.

On trouve en droit français quelques articles ayant pour objet de surveiller l'émission de dettes subordonnées. L'article R322-77 pose certaines bases, en stipulant que les sociétés d'assurances ne peuvent s'endetter que pour deux cas de figure précis : le financement de leurs activités d'assurance, ou l'augmentation de leur solvabilité. De plus, l'article R322-78 énonce que la société d'assurance doit, dans chaque communication, rappeler explicitement au prêteur (ou l'investisseur), qu'un privilège est naturellement établi en faveur de l'assuré.

En ce qui concerne les dettes subordonnées, l'article R322-79 ajoute que toute émission doit être préalablement approuvée par l'ACPR, suite au dépôt d'un dossier. On trouve, sur le site internet de l'ACPR, plusieurs informations relatives à ce dossier. Il doit prouver la cohérence de l'émission avec les objectifs de développement de l'entreprise, les caractéristiques de l'émission et les impacts qu'elle aura sur la situation financière de l'entreprise.

1.1.2.2 Les autres points de vigilance

Les aspects réglementaires des titres subordonnés présentés dans la sous-partie précédente portent principalement sur les caractéristiques prudentielles des titres subordonnés. Cependant, d'autres aspects réglementaires sont à considérer pour ce mémoire, ou plus généralement quand il s'agit d'un objectif de modélisation.

Tout d'abord, sur l'intérêt même d'un modèle de valorisation, l'article 81 de la directive SII est à noter. Ce dernier énonce les méthodes à retenir pour la comptabilisation des créances découlant de véhicules de titrisation : le principe de comptabilisation en valeur de marché⁹ est tout d'abord rappelé, puis il est précisé que la créance doit tenir compte des pertes probables pour défaut de la contrepartie. Dans la mesure où l'objet de la valorisation de ce mémoire est celle de l'actif d'un fonds commun de titrisation de dettes subordonnées exclusivement émises par des entreprises d'assurance, il est opportun de respecter cet article.

Mis ensemble, les articles 75 et 81 insistent sur l'intérêt de disposer d'un modèle de valorisation pour les titres subordonnés des sociétés non cotées, ainsi que sur les enjeux sous-jacents. Ces titres sont un élément de passif pour les sociétés non cotées, et un élément d'actif pour les investisseurs. Le "marché" ne fournissant pas d'évaluation directe (ni de la valeur du titre, ni du risque de défaut) pour des sociétés non cotées (a fortiori des mutuelles), un modèle est en mesure de répondre à ces objectifs. En effet, un modèle, pris avec ses hypothèses et leurs conséquences, fournit une évaluation assimilable à une valeur de marché, et permet de mieux quantifier le risque de défaut des entités émettrices.

9. Article 75 de la directive

Un autre point à prendre en compte dans cette section est l'ensemble des contraintes de modélisation apportées par les textes réglementaires. Au paragraphe 4 de l'article 42 du règlement délégué, il est stipulé que le calcul de la perte moyenne résultant du défaut d'une contrepartie de réassurance ou de titrisation est - à moins de trouver une base fiable pour une évaluation différente - au moins égale à 50% du montant recouvrable (dans le cas des dettes subordonnées, le montant recouvrable est interprété comme étant le montant émis, c'est à dire le nominal de l'obligation). A des fins de valorisation de dettes subordonnées, cette caractéristique doit être prise en compte.

Un dernier aspect réglementaire relatif à Solvabilité II est à noter pour l'étude des passifs subordonnés. Au 1^{er} janvier 2026 aura lieu la fin d'une clause transitoire, nommée clause de *grandfathering*, transposée en droit français à l'article R 351-27 du Code des Assurances. Cette clause est une mesure transitoire pour le passage du référentiel Solvabilité I au référentiel Solvabilité II. En effet, certaines des obligations subordonnées assimilables à des fonds propres sous Solvabilité I n'étaient plus assimilables à des fonds propres sous Solvabilité II. Pour adoucir la transition d'un référentiel normatif à l'autre, la clause de *grandfathering* permet sous certaines conditions de conserver les propriétés prudentielles des titres subordonnés pour une durée de 10 ans.

Comme nous le verrons en section 1.3, les titres présents dans le fonds ne sont pas directement concernés par cette clause. Néanmoins, la fin prochaine de cette clause impliquera de remplacer les obligations *grandfather* restantes par des nouvelles émissions conformes aux principes de Solvabilité II. Ceci amplifie l'intérêt de disposer d'un modèle de valorisation robuste pour un cadre tel que celui de ce mémoire.

1.2 Les passifs subordonnés

1.2.1 Différents types de titres subordonnés

Définition

Les titres subordonnés sont des titres de créances, dont le détenteur ne touche le remboursement que conditionnellement au remboursement préalable d'autres créanciers. Cette condition dépend de chaque titre. On parle parfois de dette *junior*, par opposition à une dette *senior*, qui est prioritaire. Les détenteurs de titres subordonnés sont prioritaires sur les actionnaires¹⁰. Une caractéristique immédiate des titres subordonnés est un taux d'intérêt plus élevé que celui servi aux créanciers, du fait d'un risque de défaut plus important.

Comme tout titre obligataire, les titres obligataires subordonnés sont caractérisés par un nominal, un coupon (éventuellement indexé sur un taux variable), une maturité (éventuellement indéterminée), et un *spread* de défaut. La principale différence réside donc dans la possibilité pour l'émetteur de ne plus rembourser tout ou partie du nominal ou des coupons, de manière définitive ou temporaire. Certains titres proposent également un remboursement sous forme d'actions de l'entreprise émettrice. Il existe donc une très grande variété de titres subordonnés.

Ces titres portent tous des dénominations différentes, selon leurs caractéristiques respectives. On retrouve par exemple les Titres Subordonnés à Durée Déterminée (TSDD), les Titres Subordonnés à Durée Indéterminée (TSDI), les Titres Subordonnés Remboursables¹¹ (TSR), les Titres Participatifs¹² et les Titres Super Subordonnés¹³.

Spécifiques aux mutuelles et instituts de prévoyance français, il existe également les certificats mutualistes (ou paritaires le cas échéant). Ils sont principalement à destination des sociétaires, et sont conçus pour être très proches de ce que serait une action de la mutuelle émettrice. À ce titre, ils sont prudemment traités comme des *Tier 1*, i.e. des fonds propres de la meilleure qualité¹⁴.

Le mémoire [Lautrette, 2016] traite de la notion de capital contingent, et plus particulièrement des obligations contingente convertibles. La définition donnée de ces obligations est la suivante : "Instruments financiers de type obligataire faisant l'objet, en cas de franchissement d'une certaine barrière (par exemple un niveau de capital règlementaire), d'une conversion en action ou d'une dépréciation du nominal.". Ce mémoire était donc

10. Il peut exceptionnellement arriver que cette situation s'inverse, comme nous le verrons en section 1.2.4 sur les *AT1* de Crédit Suisse ;

11. Les coupons ne sont pas garantis mais le nominal l'est, hormis en situation de faillite ;

12. Ce sont les titres subordonnés de "dernier rang", en cas de liquidation ce sont les derniers à être indemnisés. Ils sont définis à l'article L228-36 du Code de Commerce ;

13. Conditionnels au versement des dividendes ou à la réalisation d'un certain résultat déterminé ;

14. Pour plus d'information, aller consulter par exemple [L'Argus de l'Assurance, 2016] ;

intéressant à mentionner ici, puisque les obligations contingentes convertibles rentrent tout de même dans la même logique générale, selon laquelle le nominal d'une obligation peut être utilisé à des fins prudentielles. Son positionnement est cependant un peu différent, puisque les titres considérés ne sont pas subordonnés à proprement parler, il est (volontairement) inspiré du monde bancaire, et se concentre sur les plus gros acteurs du marché. Dans ce mémoire-ci, nous parlons bien de titres subordonnés, pour des petits organismes, en ajoutant une analyse synthétique de ce que sont les titres subordonnés pour les assureurs, et en étant tourné sur une optique d'optimisation de la modélisation.

1.2.2 Les titres subordonnés comme outils prudentiels pour les assurances

Concernant le marché français de l'assurance, un premier moyen pour constater l'importance relative dans le bilan qu'ont les dettes subordonnées est de consulter les rapports [ACPR, 2021] publiés annuellement sur le site de l'ACPR. Ces rapports ont pour objectif de dresser un état des lieux de ce que l'ACPR constate annuellement sur les différents sujets relatifs à la banque et à l'assurance. On y trouve notamment des données synthétiques sur les bilans "solos" des organismes soumis à SII et contrôlés par l'ACPR.

En tableau 1.2 est présenté un extrait du rapport 2021, indiquant les répartitions des différents postes du bilan en fonction du total des passifs. On observe que les dettes subordonnées incluses en fonds propres de base en 2021 représentaient en moyenne 1% du total bilan des compagnies d'assurance vie, 3% pour les compagnies non-vie. Hormis une petite augmentation en non vie où la répartition est progressivement passé de 2% à 3%, cette répartition est sensiblement la même depuis 2016. Les quelques statistiques du tableau 1.2 permettent de déduire, en tableau 1.3, des informations sur la couverture des capitaux requis.

	2020	2021		
	Ensemble	Ensemble	Vie et Mixtes	Non vie
Actif net	12%	13%	10%	40%
Provisions techniques vie	57%	54%	60%	3%
Provisions techniques santé	3%	3%	3%	5%
Provisions techniques non-vie	5%	5%	1%	37%
Provisions techniques UC	13%	15%	17%	0%
Dettes subordonnées incluses dans les FP de base	1%	1%	1%	3%
Autres passifs	9%	8%	8%	13%
Total passifs (milliards d'euros)	3 088	3 156	2 811	345

Les pourcentages sont donnés relativement au total des passifs.

TABLE 1.2 – Reproduction du rapport chiffré 2021 du marché Français de la banque et de l'assurance.

Seule l'année 2021 est retranscrite dans le tableau 1.3, mais deux constats sont globalement vérifiés chaque année depuis 2016 : d'une part les dettes subordonnées incluses en fonds propres de base représentent entre 7% et 8% des fonds propres de base, d'autre part la portion du SCR couverte par les dettes subordonnées oscille autour de 18%.

	2021
(a) Montant de DS incluses en FP	32
(b) Montant Actif Net	410
(c) Fonds propres = (a)+(b)	442
(d) Part des FP représentés en DS = (a)/(c)	7%
(e) Taux de couverture du SCR	3
(f) SCR = (c) /(e)	175
(g) Part du SCR couverte par les DS	18%

"DS" : dettes subordonnées; "FP" : Fonds Propres.

Les montants sont exprimés en milliards d'euros, tous types d'assurance confondus. Le ratio de couverture du SCR est issu des mêmes rapports que précédemment : [ACPR, 2021]

TABLE 1.3 – Données synthétiques de bilan, échelle française

Cependant, ces données ne concernent que les sociétés établies en France. Il est possible de compléter cette étude avec des données à échelle européenne. Des informations sur les structures des bilans solos des compagnies d'assurance européennes peuvent se trouver sans difficulté sur la base de données [EIOPA, 2022].

On y trouve toutes sortes de données, globalement similaires à celles évoquées précédemment, pays par pays ainsi qu'agrégées au niveau européen. Les résultats sont sensiblement les mêmes, et synthétisés dans le tableau suivant ¹⁵ :

	2021
Montant de DS incluses en FP	121
Part des DS incluses en FP dans le total des DS	99%
FP admis en couverture du SCR	1 750
Part des FP représentés en DS	7%
SCR	679
Taux de couverture du SCR	258%
Part du SCR couverte par les DS	18%

"DS" : dettes subordonnées; "FP" : Fonds Propres.

Les montants sont exprimés en milliards d'euros, tous types d'assurances confondus. On constate notamment que la quasi totalité (99 %) des dettes subordonnées sont effectivement utilisées en fonds propres.

TABLE 1.4 – Données synthétiques de bilan, échelle européenne

15. Voir les annexes pour plus de précision sur les structures de bilan des compagnies d'assurance ou de réassurance européennes

Un lecteur attentif remarquera que les dettes subordonnées émises en France (32 milliards d'euros), représentent presque un tiers des dettes subordonnées européennes (121 milliards d'euros). En effet, en analysant plus finement le tableau A.1 en annexe, on constate que le montant total de dettes subordonnées est principalement dirigé par les émissions françaises, allemandes et italiennes. Une cause possible de cette forte distinction est la suivante : les plus gros acteurs de l'assurance en Europe sont français, allemands ou italiens.

Ces constats sont-ils valables partout ?

Un léger biais peut exister dans cette étude. Comme évoqué en introduction, les dettes subordonnées sur lesquelles l'attention est portée dans ce mémoire sont celles émises par des sociétés de taille modeste¹⁶. Du fait de leurs tailles de bilan moindres, leurs contributions aux statistiques précédentes sont presque négligeables face aux contributions des bilans des plus gros acteurs. Afin d'avoir une vision plus précise du rôle des dettes subordonnées chez les petits organismes, il est possible de consulter certains SFCR bien choisis, pour avoir des données venant d'entreprises de tailles comparables à celles présentes dans le fonds considéré dans ce mémoire.

Il ressort de cette analyse que, relativement à la taille du bilan, l'utilisation des dettes subordonnées chez les plus petits organismes semble légèrement plus importante. En effet, la part des fonds propres représentés par des dettes subordonnées est un petit peu plus élevée que précédemment : 10 % (vs 7 % pour le total Europe). La part du SCR couverte grâce à des dettes subordonnées est elle aussi un peu plus importante : 20 % (vs 18 % pour le total Europe).

1.2.2.1 Les titres subordonnés comme outils d'investissements

Dans la section précédente, les titres subordonnés sont traités pour leur aspects pruden- tiels, la manière dont ils contribuent au passif des bilans des compagnies d'assurance. Nous allons voir ici ce qu'ils sont du point de vue d'un investisseur. La documentation sur l'utilisation des passifs subordonnés comme outil d'investissement pour les banques et les assurances est assez peu fournie, car il s'agit d'un type d'investissement très spécifique. C'est pourquoi l'étude de cette section ne sera que qualitative.

Le premier aspect à noter est qu'investir dans des titres obligataires subordonnés non côtés est un moyen comme un autre d'apporter de la diversification dans ses investisse- ments. Un autre aspect, usuel en finance, est leur rémunération plus élevée qu'un titre obligataire classique. L'investisseur risquant de ne jamais retrouver sa mise initiale¹⁷, il demande une rémunération plus importante. Le risque de perte en capital, inhérent aux titres subordonnés, implique également une illiquidité beaucoup plus forte que les titres non subordonnés.

De plus, les titres subordonnés assimilables en fonds propres doivent avoir de grandes maturités. Ils correspondent donc à des investissements de longs termes, avec (en géné- ral) peu de possibilités de revente. Bien qu'en théorie, tout investisseur peut convenir,

16. ou par des sociétés n'ayant pas la structure nécessaire pour accéder aux marchés financiers

17. du fait du caractère subordonné du titre

les investisseurs recherchés sont plutôt des investisseurs capables d’assumer le risque sur du long terme. Dans le secteur de l’assurance, les acteurs dont les investissements correspondent le mieux à ces critères sont les assureurs-vie et les fonds de pension. En effet, ces derniers ont besoin d’investir sur du long terme pour avoir un actif en adéquation avec le passif, et sauf phénomène soudain de rachat, ils sont rarement dans une optique de revente de leurs actifs.

1.2.3 Comparaison avec d’autres outils à disposition des assurances

Nous venons de voir que les titres subordonnés sont un outil prudentiel à disposition des assurances pour financer leur capital et renforcer leur solvabilité. De façon plus générale, l’objectif est de se libérer d’une manière ou d’une autre d’une partie de ses risques, afin de retrouver une certaine marge de manœuvre. Les dettes subordonnées en particulier sont une technique financière. On retrouve dans cette catégorie tous les instruments issus de la titrisation de risque : les *cat-bonds*, les *swap-catastrophe*, les *swaps* de longévité en assurance vie...

Il est important de souligner que la titrisation de risque consiste à transférer les risques d’un contrat d’assurance (automobile par exemple) vers les marchés financiers, alors que la titrisation exposée dans ce mémoire est la titrisation d’obligations subordonnées non cotées. Dans le premier cas, le risque transféré est le risque d’assurance. Dans le second cas, le risque transféré est le risque que l’entité d’assurance soit une mauvaise débitrice. Ces deux procédés ne sont donc moralement pas les mêmes, bien qu’issu du même mécanisme (une titrisation), et qu’*in fine* le résultat est le même : la création d’un titre financier risqué à valoriser.¹⁸

Un moyen assurantiel d’obtenir la même chose (financement du capital, marge de manœuvre, renforcement de la solvabilité) consiste à faire appel à la réassurance. Dans les paragraphes suivants, il est proposé de faire une synthèse rapide des différences entre le financement par des dettes subordonnées et le financement par la réassurance, ainsi qu’une présentation succincte des avantages et inconvénients de chacun.

Tout d’abord, il existe plusieurs mémoires d’actuariat faisant des comparaisons entre la réassurance et la titrisation. Notamment [de Barros et Delignon, 2009] qui, à sa section 5-1¹⁹, propose une analyse du mécanisme de la titrisation face au mécanisme de la réassurance.

La première des différences est la nature de la relation entre le soucripteur de risque (la compagnie d’assurance), et le porteur de risque (l’investisseur subordonné ou la réassurance). D’un côté, la réassurance est de fait une compagnie d’assurance : à quelques spécificités près, les deux parties sont soumises aux mêmes réglementations et ont une conception de ce que représente l’activité de l’autre. De plus, la réassurance est en contact régulier avec ses clients : d’autres compagnies d’assurance. Ainsi, il existe naturellement

18. Pour plus d’information sur la titrisation des risques d’assurance, l’article [Djelassi, 2016] en constitue une introduction intéressante.

19. Par ailleurs, [de Barros et Delignon, 2009] fournit également de nombreuses explications sur ce qu’est la titrisation de risque d’assurance. Certains des éléments avancés sont encore valable dans notre cas de titrisation de dettes subordonnées.

une réelle asymétrie d'information entre l'assureur et son réassureur : une réassurance est en mesure de constater les tendances de sinistralité à une échelle nettement plus grande que la compagnie d'assurance. Cette asymétrie est en faveur de la réassurance, et lui confère donc un rôle supplémentaire possible : conseiller l'assureur en stratégie de développement en le faisant profiter de son expertise historique et mondiale. D'un autre côté, l'investisseur peut être, à peu de chose près, n'importe quel type d'acteur : un acteur assurantiel, une banque, un fonds d'investissement... L'investisseur subordonné se contente de verser des fonds à l'assurance, et attend en retour, si la situation le permet, des coupons et le remboursement du nominal.

Étant établi que la relation réassureur-assureur n'est pas la même que la relation investisseur-assureur, nous pouvons regarder de façon concrète comment cette différence se traduit, à commencer par ce qui acte la relation.

Dans le cas d'une obligation subordonnée, le lien se limite à un titre obligataire, que le détenteur est en droit de revendre, et qui a une durée initiale d'au moins 10 ans (pour être en *Tier 2*). La seule clause présente au contrat est un arrêt partiel ou total des flux dès que les capitaux requis ne sont plus couverts. Dans le cas de la réassurance, le lien est un traité, qui constitue un contrat souvent annuel (parfois pluri-annuel), mentionnant explicitement le risque couvert, les conditions dans lesquelles il est couvert, les montants minimums et maximums pour lesquels le réassureur s'engage, et d'éventuelles clauses de participations ou de dépôt peuvent être ajoutées. En somme, la réassurance couvre un aspect particulier, alors que les titres subordonnés couvrent l'entité d'assurance dans son ensemble.

Vient ensuite le coût pour l'assurance. Avec les dettes subordonnées, le coût est un coupon souvent trimestriel, éventuellement indexé sur un taux variable. Ce coût est calé à l'émission, et valable pour toute la durée de vie de la dette, soit au moins 10 ans. En optant pour la réassurance, le coût n'est pas le même selon la sinistralité observée l'année précédente. De plus, il est compliqué à prédire à l'avance, et puisque le traité est souvent avec une maturité assez faible, il peut être sujet à beaucoup de variations d'une année à l'autre. Il est noter qu'aussi bien le coût des DS que le coût de la réassurance dépendent également de la bonne volonté du marché de la réassurance ou des marchés financiers à accueillir ou non des risques supplémentaires.

On trouve dans la publication [PartnerRe, 2016] de la compagnie de réassurance *PartnerRe* une présentation des intérêts qu'a la réassurance dans un référentiel tel que celui de Solvabilité II, notamment un tableau comparatif, repris tel quel en page suivante, résumant une partie de ce qui a pu être dit ici.

En conclusion de ces quelques paragraphes, ce qui est à retenir est que les objectifs finaux sont globalement les mêmes, mais que la forme prise est radicalement différente. D'un côté, les titres subordonnés offrent un aspect souple et sont relativement directs, ils bénéficient à l'entreprise dans son ensemble, et augmentent les fonds propres, pour un coût relativement prévisible. D'un autre côté, la réassurance est plus complète et plus spécifique, agit sur un risque ou un portefeuille particulier, mais est aussi plus complexe à mettre en place, pour un coût également moins prévisible.

Source de capital	Réassurance	Actionnaire	Emprunt subordonné
Transfert de risque	Oui	Non	Non
Adaptée au besoin de capital dans le temps	Oui	Non	Non
Dilutive	Non	Oui	Non
Limitations pour les Tiers 1 à 3	Non	Non	Oui
Impact fiscal	Oui	Non	Oui
Risque de contrepartie	Oui	Non	Non
Protection des résultats	Oui	Non	Non
Réduction de la volatilité du SCR	Oui	Non	Non
Frais de mise en place	Non	Oui	Oui
Services de souscription et de gestion associés	Oui	Non	Non

Source : [PartnerRe, 2016]

Titre original : "Comparaison entre la réassurance et les autres sources de capital"

TABLE 1.5 – Comparaison qualitative des avantages et inconvénients de différentes sources de capital.

1.2.4 Un cas historique : les AT1 de Crédit Suisse

Ce cas de figure est l'exemple d'amortissement de titres subordonnés le plus récent, et provient du secteur bancaire. "AT1" signifie *Additional Tier 1*, ce sont des passifs subordonnés assimilables à des fonds propres dans le secteur bancaire.

Les 10 et 12 mars 2023, les banques américaines *Silicon Valley Bank* et *Signature Bank* sont mises en faillite du fait d'un effet conjugué de la remontée brutale des taux d'intérêts et d'un phénomène de *bankrun*. Bien que la contagion des marchés a été relativement limitée à ce jour, la banque suisse Crédit Suisse a été passablement fragilisée par ces deux faillites. La situation se dégrade progressivement, notamment suite au refus de la banque nationale d'Arabie Saoudite de soutenir financièrement Crédit Suisse²⁰.

Étant donné l'importance de Crédit Suisse dans le système bancaire suisse et mondial, les autorités finissent par organiser un rachat de Crédit Suisse par UBS, rachat supervisé par la FINMA, l'autorité de contrôle suisse. Lors de cette reprise, et afin de garantir la stabilité du système bancaire, la FINMA a ordonné à Crédit Suisse l'amortissement de ses *Additional Tier 1*, des passifs subordonnés assimilables à des fonds propres selon les normes de prudence bancaire, pour un montant total d'environ 16 milliards de francs suisses²¹.

Bien que cette action soit conforme aux conditions contractuelles des *AT1* en question, c'est un évènement qui a beaucoup été contesté. En effet, plusieurs acteurs du marché ont jugé qu'en l'occurrence la priorité a été donnée aux actionnaires, la théorie voulant que ces derniers passent après les détenteurs d'obligations subordonnées.

1.3 Présentation du fonds et des dettes présentes

Dans cette partie sont présentées spécifiquement le fonds étudié, son fonctionnement, ainsi que les dettes autour desquelles ce mémoire s'articule.

1.3.1 Le fonds

Le fonds considéré est un fonds commun de titrisation qui sera abrégé par la suite selon le sigle "FCT". Ces fonds sont régulés et encadrés par l'Autorité des Marchés Financiers, et soumis au code Monétaire et Financier²². La définition légale de ce type de fonds est donnée aux articles L214-180 à L214-186 dudit code. Certaines phrases de ces articles sont reprises mot pour mot ci-dessous :

- Le fonds commun de titrisation est un organisme de titrisation constitué sous la forme de copropriété.
- Le fonds n'a pas la personnalité morale
- Le fonds commun de titrisation est constitué à l'initiative de la société de

20. La banque nationale d'Arabie Saoudite est un des principaux actionnaires de Crédit Suisse.

21. Cet amortissement a eu lieu le 19 mars 2023. À cette date, le ce montant correspond environ à 15,8 milliards d'euros.

22. [Assemblée Nationale, FRANCE, 2019]

- gestion [...];
- Les conditions dans lesquelles le fonds peut émettre de nouvelles parts après émission initiale des parts sont définies par son règlement.
 - Le fonds peut émettre des titres de créance négociables et des obligations ou des titres de créance émis sur le fondement d'un droit étranger.
 - Les conditions dans lesquelles le fonds émet des titres de créance sont définies par son règlement.

Il ressort de ces articles qu'un fonds commun de titrisation est un bon moyen pour répondre aux soucis que peuvent rencontrer certains organismes d'assurance dans l'émission de leurs titres subordonnés : les mutuelles à cause de leur structure juridique, ou bien les organismes de taille modeste. Ils sont en effet un moyen de construire un lot d'obligations subordonnées de plusieurs entreprises, françaises ou étrangères, avec une assez grande liberté de gestion, et un système de participations.²³

1.3.2 Le fonctionnement du fonds

Sur la structure même du fonds, un aspect pratique est à noter. L'ensemble des dettes valorisées est en réalité réparties dans 3 fonds différents, ayant tous le même gestionnaire. Cette particularité n'a aucun impact direct sur la valorisation des dettes, et est donc ignoré par la suite. Ce n'est qu'au moment de communiquer la valeur des fonds que ce détail est utile.

Le profil qui se dégage parmi les investisseurs de ce fonds est conforme à ce qui était attendu à la section 1.2.2.1 : il s'agit en grande partie d'assureur vie et fonds de pension européens. On retrouve également quelques *family office*, cherchant à diversifier leurs investissements.

Le fonctionnement des flux financiers est très intuitif. Un investisseur détient une part du fonds²⁴, proportionnelle à son investissement. Lorsqu'un flux entrant ou sortant arrive au fonds, il est réparti entre tous les investisseurs selon les parts détenues. En particulier, si un défaut survient, les pertes sont équitablement subies par l'ensemble des investisseurs.

1.3.3 Les dettes et entités présentes

Les données disponibles pour la valorisation du fonds seront présentées en détail dans la section 2.2.1. Afin de finir de fixer le contexte général dans lequel s'inscrit ce travail, quelques caractéristiques des dettes et entités présentes dans le fonds sont exposées ci-après.

23. La titrisation est une technique financière par laquelle un organisme cède une partie de ses créances aux marchés financiers. Nous pouvons retenir la définition de la [Banque de France, 2020] dans son ABC de l'économie du 10 septembre 2020 : "La titrisation est un mécanisme consistant à transformer des actifs peu liquides – c'est-à-dire qu'on ne peut pas vendre aisément, par exemple des crédits bancaires - en titres financiers, dans l'objectif de les revendre plus facilement à un ou plusieurs investisseurs."

24. ou plus exactement, détiens une part des titres de créance sur le fonds

Tout d'abord, il convient de préciser que toutes les dettes de ce fonds sont des fonds propres de base *Tier 2* selon la directive Solvabilité II. Il est donc nécessaire de prendre en considération dans la modélisation les différents articles vus en section 1.1.2.

En tableau 1.6 ci-dessous, sont présentés les valeurs moyennes des principales caractéristiques des dettes du fonds. Pour les dettes émises en une autre monnaie que l'euro, le nominal considéré ici est celui en euro.

Variable	Valeur typique
Nominal	5-15 M€
Coupon (si coupon fixe)	5-7%
Coupon (si coupon variable)	EURIBOR-3m + 5-7%
Détachement du coupon	Trimestriel
Maturité initiale	10 ans

TABLE 1.6 – Valeurs typiques des caractéristiques des dettes valorisées

On remarque que, dans un environnement de taux bas, les dettes à coupons fixes et les dettes à coupons variables constituaient à peu près le même intérêt pour les investisseurs. Malgré la récente remontée des taux, les dettes à coupons fixes restent au-dessus de l'EURIBOR-3 mois, mais deviennent par construction moins intéressantes que les dettes à coupons variables. Le fonds mélangeant des dettes à coupons fixes et à coupons variables, il est à noter que les écarts dûs aux soudaines variations de taux sont en quelques sortes absorbés par un effet de moyenne : c'est la valeur du fonds dans son ensemble qui bénéficie ou subit la baisse ou la hausse des taux.

Ces dettes sont émises en grande majorité par des compagnies d'assurance non-vie, certaines peuvent pratiquer également ou exclusivement de l'assurance vie. Les entités émettrices sont principalement basées dans l'Union Européenne ou à défaut dans des régions limitrophes. En effet, sur les 24 entités ayant émis au moins une dette dans le fonds, 15 sont basées dans des états membres de l'Union Européenne, les autres sont issues du monde anglo-saxon. Les entités issues du monde anglo-saxon sont entrées dans le fonds avant l'entrée en vigueur du *Brexit*, et donc à une date où elles étaient encore soumises au régime prudentiel Solvabilité II. Actuellement, la valorisation de ces dettes est effectuée sans prendre en compte le *Brexit*, c'est à dire avec des données représentatives du régime Solvabilité II. Il en va de même pour les entités ayant changé de pays d'implantation entre l'émission de leurs dettes et aujourd'hui. L'euro est la principale devise utilisée, avec 21 dettes sur 35 émises dans cette monnaie. Seules deux autres monnaies sont utilisées : la livre sterling et le dollar des États-Unis. L'ensemble de ces informations est synthétisé en tableau 1.8, page 20.

On constate ainsi que, vu la manière dont le fonds s'organise, le risque est intrinsèquement diversifié, de par la répartition géographique et la répartition en devises. Afin

de mieux appréhender la nature du fonds considéré, il est utile de regarder plus spécifiquement quelques variables caractéristiques de l'activité des entités émettrices. Cette synthèse est faite ci-dessous, avec les valeurs modales de quelques variables.

Variable	Valeur typique
Valeur de marché de l'actif	500M€ - 1000M€
BEL	200M€ - 800M€
FP	50M€ - 300M€
MCR	< 50M€
SCR	30M€ - 250M€
Ratio de solvabilité	140% - 210%
Cotisations	0 - 250M€

TABLE 1.7 – Bilan moyen

Les chiffres présentés ici ne dépassent donc que rarement le milliard d'euros. A titre de comparaison, les plus gros acteurs de l'assurance atteignent sans difficulté plusieurs dizaines de milliards d'euros pour ces mêmes variables. De fait, compte tenu de la répartition géographique détaillée dans les paragraphes précédents, il apparaît cohérent de négliger le risque systémique au sein de ce fonds. En d'autres termes, aucune corrélation entre les défauts des différentes entités émettrices n'est envisagée par la suite.

1.4 Synthèse du contexte général

La cadre réglementaire suivi est celui de Solvabilité II, régime prudentiel dans lequel les passifs subordonnés ont une importance de premier plan pour la couverture des capitaux requis. En effet, selon la taille des acteurs, c'est entre 18 et 20 points du ratio de solvabilité qui sont fournis par des passifs subordonnés. Ils sont donc des instruments très utiles au pilotage d'une compagnie. En conséquence, ils ne sont pas exempts de réglementation : ils doivent répondre à des critères très précis pour être effectivement comptabilisés en fonds propres, des limites quantitatives sont imposées aux assureurs, et les autorités de contrôle ont un certain pouvoir de limitation.

Ils sont également utiles en tant qu'outil d'investissement pour les compagnies d'assurance vie et pour les fonds de pensions. Leur caractère long terme, liquides et à haut rendement sont en bonne adéquation avec les engagements de passif de ces acteurs. Qui plus est, s'organiser sous forme de fonds ajoute une certaine diversification du risque, en devise ou géographique par exemple.

Les acteurs concernés par l'émission des titres considérés dans ce mémoire sont des acteurs n'ayant pas d'accès au marché, de par leur taille relativement modeste ou encore à cause de leur nature juridique. La conséquence immédiate de ceci est une absence de données de marché permettant d'anticiper le risque de défaut des entités émettrices. Une organisation sous forme de fonds commun de titrisation permet de contourner ces difficultés.

Pays	Nombre d'entités	Nombre de dettes
France	4	5
Italie	4	5
Belgique	3	4
Angleterre	3	4
Gibraltar	3	4
Bermudes	2	4
Pays-Bas	1	3
Guernesey	1	2
Espagne	1	2
Finlande	1	1
Irlande	1	1
Total passifs	24	35

Monnaie	Nombre
EUR	21
GBP	9
USD	5

TABLE 1.8 – Répartition géographique et devises des entités émettrices participant au fonds

Les dettes subordonnées en présence sont éligibles à être des *Tier 2* sous Solvabilité II, c'est-à-dire des fonds propres de qualité intermédiaire. Elles ont par conséquent une maturité initiale d'au moins 10 ans. Le nominal le plus émis est d'une dizaine de millions d'euros par titre.

L'objet de ce travail est donc, finalement, de valoriser l'actif d'un fonds commun de titrisation, composé d'éléments de passifs subordonnés pour des sociétés d'assurance, tout en respectant les diverses contraintes réglementaires existantes.

Chapitre 2

Étude du modèle actuel et de son implémentation

Dans ce chapitre sont présentés les principaux éléments du modèle de valorisation évoqué en introduction. L'objectif est de présenter un résumé du fonctionnement de ce modèle. Les aspects du modèle n'ayant pas d'influence directe sur la réalisation du mémoire sont volontairement mis de côté. Au contraire, les éléments importants pour la compréhension des travaux effectués en chapitre 3 sont particulièrement mis en avant. La structure de ce chapitre est en bonne partie inspirée de l'article [Bonnin *et al.*, 2015], à laquelle sont ajoutés quelques éléments concrets de calcul et d'implémentation. Pour rappel, FCT est le sigle désignant le fonds commun de titrisation considéré. Enfin, pour l'ensemble de ce chapitre et du chapitre suivant, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, où \mathbb{Q} désigne la probabilité risque neutre.

2.1 La nécessité d'un modèle spécifique

Comme expliqué en précédemment en section 1.1.2.2, un modèle est utile d'un point de vue strictement réglementaire. De plus, il a été vu en section 1.3.1 que le FCT trouve son intérêt auprès des organismes d'assurance désirant un financement sous forme de dettes subordonnées, mais qui, compte tenu de leur taille ou de leur structure juridique, n'ont pas d'accès direct aux marchés financiers. En conséquence, il n'existe pas de données financières permettant d'évaluer les prévisions de défaut des entités émettrices : il n'existe ni cotations, ni notations de crédit, ni produits dérivés... Pour ces mêmes raisons, beaucoup de modèles usuels en risque de crédit sont inadaptés. Enfin, nous avons vu en chapitre 1 que les dettes subordonnées considérées sont des *Tier 2* en norme Solvabilité II. Il est donc nécessaire de les valoriser en valeur de marché, conformément à l'article 75 de la directive.

Toutes ces raisons mises bout à bout concluent quant à la nécessité d'une approche *marked-to-model* pour la valorisation du FCT considéré.

2.2 Le modèle

2.2.1 Les données disponibles

En l'absence de données observables sur les marchés, il est nécessaire de s'interroger sur les données disponibles avant toute étape de modélisation. Ces données sont des mesures synthétiques sur la structure du bilan de chaque entité émettrice, ainsi que des informations sur l'évolution du bilan. Une liste exhaustive est présentée en annexe C.2. Ces données sont notamment : la valeur de marché de l'Actif, la valeur du BE, le montant de cotisations perçues, le SCR et le MCR, les fonds propres et le ratio combiné. Pour plusieurs de ces variables, il est également communiqué le taux de croissance et leur volatilité. Il est important de se souvenir que le montant de fonds propres communiqué est le montant total des fonds propres des trois *Tier*. Ce montant inclut donc les nominaux des trois dettes émises.

Naturellement, les informations caractéristiques de chaque titre subordonné sont aussi présentes : le nominal, la maturité, le taux coupon (pour les dettes à coupon fixe) et le spread de rémunération additionnelle (pour les dettes à coupon variable).

Le modèle développé ne tient pas compte des stratégies de gestion du capital de l'actionnariat et des différentes actions correctives qui peuvent être menées par le management d'une compagnie d'assurance pour gérer les déviations des résultats par rapport aux attentes et à la situation économique. Ces actions correctives peuvent provoquer une volatilité de court terme sur les taux de couverture du SCR et du MCR.

Pour atténuer ce bruit, on utilise à chaque valorisation la moyenne glissante des taux de couvertures renseignés par l'entité sur les quatre derniers trimestres, c'est à dire les quatre derniers trimestres. On en profite pour introduire dès maintenant d_p , le pas de projection, trimestriel. Par soucis de cohérence, les montants de fonds propres économiques sont donc également recalculés, afin d'être en cohérence avec le *SCR* communiqué et le taux de couverture recalculé. Cela implique donc un bilan non équilibré. Pour pallier ce problème, la valeur de l'actif de l'entité est également recalculée comme la somme des fonds propres recalculés, du *Best-Estimate* et de la *Risk-Margin*.

2.2.2 La logique générale

Le modèle part d'une structure de bilan inspirée de celle du modèle de Merton, présenté ci-après, en figure 2.1. L'actif et le *Best Estimate* sont modélisés par des browniens géométriques, dont les paramètres sont les valeurs fournies par les entités émettrices.

Le défaut pouvant, a priori, survenir à n'importe quelle date, il convient de tenir compte des flux impactant chaque entité à chaque instant, entrants ou sortants. Au sujet des flux sortants, une corrélation entre les branches est introduite selon la matrice de corrélation fournie par l'EIOPA ¹.

1. Reproduite en annexe B.1

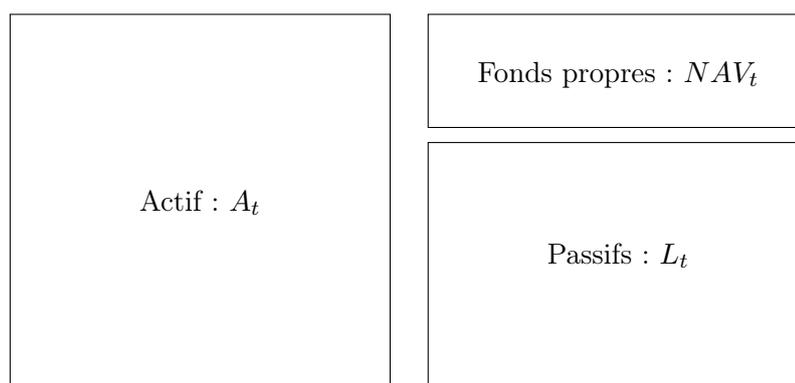


FIGURE 2.1 – Structure générale du bilan dans un modèle de Merton

Une hypothèse est faite dans ce modèle, selon laquelle les entités n'ont pas ou peu d'autres dettes. Il s'agit d'une hypothèse relativement forte, ayant un impact sur la perte en cas de défaut.

L'excédent des actifs par rapport aux passifs, la *Net Asset Value*, à un instant t , se définit simplement comme la quantité² :

$$NAV_t = A_t - L_t \quad (2.1)$$

Il est bon de noter dès maintenant que les flux de dettes ont un impact direct sur la valeur de l'actif. En effet, si entre $t - d_p$ et t , on note :

- R_t le rendement de l'actif ;
- F_t les prestations payées ;
- C_t les cotisations reçues ;
- I_t le flux de dette.

Alors, la valeur de l'actif est donnée par :

$$A_t = A_{t-d_p} \times (1 + R_t) - I_t - (F_t - C_t)$$

Cette équation permet de se rendre compte de l'impact du remboursement d'une dette subordonnée sur la valeur de l'actif, donc sur la *Net Asset Value*, et donc sur la solvabilité de l'entité. Elle sera notamment utile au chapitre 3

En ce qui concerne les exigences réglementaires, le MCR est calculé conformément aux notes techniques de la formule standard, comme la somme par branche suivante :

$$MCR_t = \sum_j (a_j \times BEL_t^j + b_j \times C_t^j) \quad ,$$

2. C'est avec cette variable que le défaut est défini dans le modèle.

où les coefficients a_j et b_j sont ceux fournis par l'EIOPA, et reproduits en annexe B.1.

Le SCR est lui calculé en résolvant par dichotomie une équation implicite non reproduite ici, découlant de la structure de bilan considérée, et de quelques réflexions sous-jacentes : le SCR correspond en théorie à un quantile à 99,5% de la distribution des fonds propres à un an, c'est-à-dire la valeur nette de l'actif diminuée du BEL et de la marge pour risque. L'équation utilisée, sa démonstration et d'éventuelles explications se trouvent cependant dans [Bonnin *et al.*, 2015] et [Planchet *et al.*, 2012].

2.2.3 Notations et nomenclatures utilisées par la suite

Les notations mathématiques utilisées sont introduites progressivement par la suite, mais il est également possible de consulter dès à présent les tableaux E.1 et E.2 en annexe, regroupant l'ensemble de ces notations.

En substance, on parle dans ce chapitre de la valorisation (resp. cadre, projection, équation...) *mono-dette*, là où le chapitre suivant est celui de la valorisation (resp. cadre, projection, équation...) *multi-dette*. Au sein d'un même cadre de projection, certaines variables peuvent être définies avec ou sans considération du défaut de l'entité. Pour ces variables, l'utilisation d'une étoile indique la définition sans considération du défaut.

De plus, lors du passage d'un cadre de projection à l'autre, certaines variables voient leur définition changer. Ces variables sont accompagnées du symbole tilde (\sim) lorsqu'il s'agit du cadre *multi-dette*. Une telle distinction n'a pas lieu d'être pour les variables ne changeant pas de définition d'un cadre à l'autre. Nous verrons que, toutes choses égales par ailleurs, ne pas changer de définition d'un cadre à l'autre n'implique pas nécessairement de ne pas changer de valeur.

Enfin, toutes les valorisations sont supposées être faites à une date t_0 . Cet indice n'est inscrit que lorsqu'il est nécessaire de comparer la valorisation courante avec la valorisation précédente : comparer X_{t_0} avec $X_{t_0-d_p}$ par exemple, X désignant moralement une variable dont on souhaite suivre la variation.

2.2.4 Définition du défaut

Les flux versés par un titre subordonné dépendent de la solvabilité de l'entité émettrice, il convient en premier lieu de définir ce qui constitue le défaut, et ce qu'il se passe au moment où le défaut a lieu.

2.2.4.1 Instant de défaut

À des fins prudentielles, et en cohérence avec les articles des règlements délégués régissant l'utilisation des passifs subordonnés comme des fonds propres, le défaut de l'entité est donné comme le premier instant τ à partir duquel le SCR n'est plus couvert par la *Net Asset Value*. Cet instant de défaut désigne donc l'instant à partir duquel l'investisseur subordonné perd ses droits de créance sur l'entité. Il ne doit donc pas être

confondu avec l'instant de ruine de la compagnie. Lorsque T désigne la maturité de la dette, l'instant τ de défaut est donc la variable aléatoire définie par :

$$\tau = \min \left\{ t \in \llbracket 1, T \rrbracket / \frac{NAV_t}{SCR_t} < 1 \right\}, \quad (2.2)$$

avec la convention $\min(\emptyset) = +\infty$, c'est à dire que $\tau = +\infty$ si l'entité ne fait jamais défaut.

2.2.4.2 Perte en cas de défaut

Nous utilisons l'acronyme habituel *LGD* pour le taux de perte en cas de défaut, issu de l'anglais *Loss Given Default*. Pour le calcul de ce taux, plusieurs approches sont possibles, et toutes issues des textes législatifs.

Une première idée est de se placer dans un contexte de liquidation totale de l'entité émettrice, conformément à l'article A334-1 du Code des Assurances. Il est à noter que se placer dans ce cadre reste cohérent avec les principes de Solvabilité II. En effet, à son article 93, la directive stipule qu'un passif subordonné est un élément de fonds propre si - entre autres - son montant total est disponible en cas de liquidation. Puisque les *Tier 2* valorisés par ce modèle ont pour risque d'être parmi les premiers à subir la liquidation, il est prudent de les valoriser dans le cas d'une liquidation.

Dans un cas de liquidation, et avec l'hypothèse faite que les autres dettes de l'émetteur sont négligeables, l'investisseur subordonné est prioritaire sur l'actionnaire. Il récupère donc le nominal de l'émission, dans la limite des fonds propres. Le taux de perte en cas de défaut d'une entité ayant émis une dette subordonnée de nominal N est alors assez naturellement défini par :

$$LGD(t) = \max \left\{ 0; 1 - \frac{\max \{0; NAV_t\}}{N} \right\}$$

Cette première approche permet de fournir une expression de la *LGD* très intuitive et assez cohérente, en plus d'être règlementairement valide. Toutefois, nous pouvons également considérer le défaut d'une entité émettrice du point de vue d'une assurance qui aurait investi dans le titre subordonné. Un tel cas de figure est prévu par le règlement délégué 2015/35, qui donne une vision légèrement plus pessimiste de la *LGD*, et donc plus prudente. En effet, à l'article 42, nommé "*Ajustement pour défaut de la contrepartie*", il est énoncé au paragraphe 4 :

La perte moyenne résultant du défaut d'une contrepartie visée à l'article 81 de la directive 2009/138/CE est évaluée comme étant au moins égale à 50 % des montants recouvrables, hors ajustement visé au paragraphe 1, sauf s'il existe une base fiable pour une autre évaluation.

L'article 81 de la directive fait référence aux créances découlant des contrats de ré-assurance et des véhicules de titrisation³, et les montants recouvrables mentionnés sont

3. Sous-entendu, des créances détenues par des compagnies d'assurance, et donc à leur actif.

interprétés comme étant le nominal de l'émission. Bien que n'ayant pas d'information spécifique quant aux investisseurs du fonds, il est raisonnable de continuer à se placer dans un cadre assurantiel. Gardant en tête que l'investisseur n'est jamais remboursé au delà de son investissement et des fonds propres disponibles, le taux de perte en cas de défaut à un instant t donné devient alors :

$$LGD(t) = \max \left\{ 50\%; 1 - \frac{\max \{0; NAV_t\}}{N} \right\} \quad (2.3)$$

On constate donc que dès que la NAV est inférieure ou égale à 50% du nominal de l'émission, les deux formules donnent le même taux de perte en cas de défaut. En revanche, lorsque la NAV est supérieure à 50% du nominal, la formule du règlement délégué donne un taux de perte en cas de défaut supérieur au taux de perte en cas de défaut du Code des Assurances. Lorsqu'un défaut survient, ce taux est à calculer, puis à appliquer au nominal de l'émission pour obtenir le montant de perte en cas de défaut.

C'est cette deuxième approche (équation 2.3) qui est retenue dans l'implémentation du modèle.

2.2.4.3 Probabilité de défaut

Le but du modèle ne porte pas, à proprement parler, sur le calcul d'une probabilité de défaut. Néanmoins, la valorisation étant effectuée par n simulations de trajectoires, une approche empirique est faisable pour estimer la probabilité de défaut de l'entité à l'instant t :

$$PD(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\{\tau^{(k)} \leq t\}} , \quad (2.4)$$

où $\tau^{(k)}$ représente la k^e réalisation de la variable aléatoire τ .

De même que l'instant de défaut ne doit pas être confondu avec l'instant de ruine économique, cette probabilité n'est pas la probabilité de ruine, mais la probabilité que, à un instant donné, l'investisseur subordonné ait perdu ses droits de créance.

2.2.5 Le modèle de taux

Comme expliqué en section 1.3.3, certaines des dettes présentes dans le FCT rémunèrent les investisseurs selon un coupon variable : l'EURIBOR 3 mois majoré d'un *spread* p . Ceci nécessite donc de pouvoir modéliser le taux court à chaque instant de détachement du coupon. À cette fin, c'est le modèle de Vasicek qui est utilisé. Pour disposer d'une structure par terme cohérente avec des objectifs de valorisation économique, le modèle de taux est calibré sur les courbes de l'EIOPA à la date d'arrêt des données.

Le modèle de Vasicek est défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = a(r_\infty - r_t)dt + \sigma dW_t ,$$

où r_∞ est la valeur vers laquelle r_t tend, a s'interprète comme la vitesse à laquelle r_t tend vers r_∞ , σ la volatilité du modèle et W est un mouvement brownien standard sous

la probabilité risque neutre. Le taux court à chaque instant issu de ce modèle est ensuite discrétisé avec un pas hebdomadaire puis utilisé dans la projection.

En particulier, nous introduisons dès maintenant la définition du facteur d'actualisation avec un spread x :

$$\delta_x(t) = \exp(-d \times \sum_{u \leq t} (r_u + x)) \quad (2.5)$$

Par simplification, on définit également $\delta(t) := \delta_0(t)$, le facteur d'actualisation au taux sans risque. Avec cette notation, on remarque que l'équation 2.5 peut se réécrire $\delta_x(t) = \delta(t) \times \exp(-xt)$.

2.3 Valorisation du fonds

Étant donné que les phénomènes de corrélation entre les différentes dettes sont ignorés, la valorisation du fond en prenant en compte le défaut (resp. sans prendre en compte le défaut) est simplement la somme des valorisations de chaque dette présente :

$$X = \sum_{i \in \text{Entites}} X_i$$

, où, selon la situation, X_i désigne la dette avec ou sans défaut de l'entité i . Le calcul correspondant à chacun de ces deux cas de figure est détaillé dans les deux sous-parties suivantes.

Afin d'alléger les notations, l'indice i est omis par la suite. De même, seul le cas des coupons variables est retranscrit. Pour obtenir les même équations dans le cas de coupons fixes, il suffit de remplacer le taux coupon variable $r_t + p$ par le taux coupon fixe c .

2.3.1 Hors prise en compte du défaut

À un instant t de détachement du coupon, une entité verse au fonds le coupon, et le nominal s'il s'agit de l'échéance du titre.

Le coupon étant le taux court r_t , majoré de p points de base, le nominal étant N , la date d'échéance étant T , et le pas de projection étant d_p ⁴, le fonds reçoit à l'instant t le flux suivant :

$$I_t^* = N \times (r_t + p) \times d_p \times \mathbb{1}_{\{t \leq T\}} + N \times \mathbb{1}_{\{t=T\}} \quad (2.6)$$

La valeur de la dette hors prise en compte du défaut V^* est alors l'espérance sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} des flux futurs actualisés : $V^* := \sum_{t \leq T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\delta(t) \times I_t^*]$. Puis, en remarquant que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\delta(t) \times r_t] &= -\frac{\partial}{\partial t} P(0, t) \\ &= P(0, t) \times \left(r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - e^{-at} \left(r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_0 \right) \right) \end{aligned}$$

4. Nous avons vu précédemment que la plupart des coupons ont un détachement trimestriel. Dans un tel cas de figure, $d_p = 0,25$

, avec (a, r_∞, σ) les paramètres issus du calibrage du modèle de Vasicek, on obtient finalement :

$$V^* = N \times \left(d_p \times \sum_{t \leq T} P(0, t) \left(p + r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - e^{-at} \left(r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_0 \right) \right) + P(0, T) \right) \quad (2.7)$$

2.3.2 Avec prise en compte du défaut

En prenant en compte le défaut de l'entité émettrice, la démarche est tout à fait similaire. À un instant t donné, le coupon est versé dans son intégralité, et le nominal est versé :

- dans la limite de la LGD ⁵ s'il s'agit d'un instant de défaut ;
- dans son intégralité s'il s'agit de l'échéance et qu'il n'y a pas eu de défaut antérieur.

En d'autres termes, à un instant t de détachement du coupon, l'entité émettrice verse réellement au fonds le flux suivant :

$$I_t = N \times (r_t + p) \times d_p \times \mathbb{1}_{\{t \leq T \wedge \tau\}} + N \times \mathbb{1}_{\{t = T \wedge \tau\}} \times (1 - LGD(t) \times \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}) \quad (2.8)$$

Naturellement, on remarque immédiatement que $\forall t \in [1, T], I_t \leq I_t^*$. La valeur théorique avec prise en compte du défaut, actualisée au taux sans risque, est ainsi :

$$\Lambda = N \times \left(d_p \times \sum_{t \leq T \wedge \tau} \delta(t)(p + r_t) + \delta(T \wedge \tau)(1 - LGD(T \wedge \tau) \times \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}) \right) \quad (2.9)$$

C'est par simulation de $n = 3000$ trajectoires que cette valeur est estimée, dans un premier temps.

$$V = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Lambda^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N \times \left[d_p \times \sum_{t \leq T \wedge \tau^{(k)}} \delta^{(k)}(t)(p + r_t^{(k)}) + \delta^{(k)}(T \wedge \tau^{(k)})(1 - LGD^{(k)}(T \wedge \tau^{(k)}) \times \mathbb{1}_{\{\tau^{(k)} \leq T\}} \right]$$

Du fait que l'actualisation se fasse ici au taux sans risque, cette valorisation a cependant le défaut de mal traduire d'éventuelles imperfections du modèle, par exemple à propos des risques pesant sur la dette émise, risques autres que celui de défaut. Ce point est abordé et résolu dans la section suivante, dans laquelle la valorisation empirique avec prise en compte du défaut (V) sera redéfinie pour prendre en compte ces aspects.

2.4 Expression du risque de crédit sous forme de *spread*

Les équations de la section précédente résultent de flux futurs actualisés au taux sans risque. En agrégeant les valorisations de chaque dette du fonds, il est possible d'obtenir

5. vue en équation (2.3), page 28.

une valorisation du fonds. En l'absence de corrélation entre les défauts des entités, la fonction d'agrégation la plus évidente pour obtenir la valeur du fonds est la somme.

Cependant, le fait d'actualiser au taux sans risque représente mal les anticipations que le marché pourrait avoir face aux titres subordonnés considérés : le risque de défaut à proprement parler, mais aussi par exemple le risque de liquidité ou le risque de souscription.

De plus, la comparaison directe des montants issus des équations précédentes ne serait que peu utile. En effet, ces montants dépendent de beaucoup d'autres variables, qui n'ont en théorie pas d'impact direct sur le risque de défaut. On y retrouve notamment les variables caractéristiques de chaque dette, le nominal, le taux coupon, la maturité... En somme, la simple valeur d'un investissement traduit mal l'écart pouvant exister avec un investissement de même nominal, mais sans risque.

Une méthode usuelle pour contourner ces problèmes est de synthétiser le risque au moyen de *spreads* à ajouter au taux sans risque lorsqu'on actualise la séquence de flux. À cette fin, nous utilisons le facteur d'actualisation $\delta_x(t)$ défini en section 2.2.5. On introduit également le prix d'un zéro coupon risqué de spread x :

$$P_x(0, t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\delta_x(t)] = P(0, t) \times e^{-xt}$$

2.4.1 Réconciliation des valeurs avec et sans défaut

Pour isoler l'ampleur du risque de crédit, sans prendre en compte les autres risques auxquels les dettes sont soumises, ce sont les valeurs avec et sans défaut qu'il faut réconcilier. Ceci est fait en calculant le spread à ajouter au taux sans risque dans l'actualisation de la valeur sans défaut pour obtenir la valeur avec défaut.

En d'autres termes, on cherche ici un *spread* x_1 tel que $V^*(x_1) = V$, où $V^*(x)$ est obtenue en remplaçant les prix zéro-coupon $P(0, t)$ par $P_x(0, t)$ dans l'équation (2.7) :

$$V^*(x) = N \times \left[d_p \times \sum_{t \leq T} P_x(0, t) \left(p + r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - e^{-at} \left(r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_0 \right) \right) + P_x(0, T) \right] \quad (2.10)$$

Ce *spread* x_1 est conçu pour la quantification du risque de crédit. En ce sens, il peut être vu comme une mesure synthétique de l'état du bilan à chaque date de calcul, et correspond aux anticipations de défaut. Il est donc amené à varier à chaque valorisation, selon l'évolution du bilan.

2.4.2 Réconciliation avec la valeur nominale

Pour capter les autres risques que celui de crédit, on cherche un autre *spread*, nommé *spread* d'ajustement, et noté x_2 . Il est tel que $\Lambda(x_2) = N$. De façon analogue à l'équation précédente, $\Lambda(x)$ est obtenue en remplaçant les facteurs d'actualisation $\delta(t)$ par $\delta_x(t)$ dans l'équation (2.9) :

$$\Lambda(x) = N \times \left(d_p \times \sum_{t \leq T \wedge \tau} \delta_x(t)(p + r_t) + \delta_x(T \wedge \tau)(1 - LGD(T \wedge \tau) \times \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}) \right)$$

Le calcul de x_2 se fait à partir des trajectoires simulées, c'est à dire qu'il est cherché en résolvant l'équation :

$$N = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N \times \left[d_p \times \sum_{t \leq T \wedge \tau^{(k)}} \delta_{x_2}^{(k)}(t)(p + r_t^{(k)}) + \delta_{x_2}^{(k)}(T \wedge \tau^{(k)})(1 - LGD^{(k)}(T \wedge \tau^{(k)}) \times \mathbb{1}_{\{\tau^{(k)} \leq T\}} \right]$$

Dans la mesure où ce *spread* x_2 est calculé à l'émission, et sert à réconcilier la valorisation modèle au nominal, il a pour ambition de quantifier les anticipations du marché en ce qui concerne les autres risques que celui de crédit. Il capte notamment les imperfections intrinsèques au modèle, comme par exemple les conséquences d'une hypothèse simplificatrice.

En outre, ce spread est ensuite utilisé dans l'actualisation des flux futurs de chaque dette. Autrement dit, la valorisation empirique avec prise en compte du défaut est donnée par la formule :

$$V = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N \times \left[d_p \times \sum_{t \leq T \wedge \tau^{(k)}} \delta_{x_2}^{(k)}(t)(p + r_t^{(k)}) + \delta_{x_2}^{(k)}(T \wedge \tau^{(k)})(1 - LGD^{(k)}(T \wedge \tau^{(k)}) \times \mathbb{1}_{\{\tau^{(k)} \leq T\}} \right] \quad (2.11)$$

Cette quantité est par la suite appelée "valorisation modèle".

2.4.3 Égalisation de la valorisation sans défaut avec la valeur nominale

Par construction, le *spread* x_1 permet de passer de la valorisation hors défaut à la valorisation avec défaut, et le *spread* x_2 permet de passer de la valorisation avec défaut à la valeur nominale de l'émission. Il est donc possible de définir le *spread* $x_3 := x_1 + x_2$, permettant de passer de la valorisation sans défaut à la valeur nominale avec défaut. Ce *spread* x_3 est à interpréter comme une mesure synthétique du niveau de risque pesant sur la dette.

2.5 Prix final communiqué

2.5.1 Ajout d'un impact de marché

La valorisation modèle telle que définie en équation 2.11 est, comme son nom l'indique, issue d'un modèle de projection, et se base sur des données bilancielles, communiquées

par les entités émettrices. Il a été expliqué en section 2.1 que c'est essentiellement l'absence de données de marché propres à chaque entité du fonds qui justifie la création puis l'implémentation d'un modèle spécifique (ainsi que l'existence même de ce FCT particulier). Cependant, de manière générale, il existe des données de marché sur le risque de défaut des plus grandes compagnies, notamment des cotations de *CDS*⁶. Ces cotations sont exprimées en points de base⁷, et correspondent à la rémunération exigée par les investisseurs en échange de la couverture financière qu'est le *CDS*. De façon immédiate, une cotation qui augmente indique des attentes de rémunération plus importante, et traduit donc des anticipations de défaut plus importantes.

Ainsi, en créant un indice à partir des cotations *CDS* (aussi bien *senior* que subordonnés) de quelques compagnies d'assurances sélectionnées, il est possible de repérer et d'évaluer les anticipations des marchés financiers en matière de risque de défaut. Il est possible d'extraire d'un tel indice des grandes tendances, à intégrer d'une manière où d'une autre à la valorisation pour obtenir un impact de marché.

2.5.2 Construction de l'indice

On se propose ici de montrer la façon dont l'indice de marché est construit. Afin de simplifier les notations et le procédé, seule la construction de l'indice à horizon 10 ans est montrée ici, la construction de l'indice étant rigoureusement identique pour les autres maturités. Les données nécessaires pour construire l'indice entre le 30/12/2022 et le 30/06/2023 sont dans les tableaux C.3 à C.6 en annexe. Le procédé ci-dessous est donc pour une seule maturité.

Les compagnies choisies et les cotations au 30/06/2023 sont présentées dans le tableau 2.2 en page 35. Le premier calcul effectué est de calculer une valeur moyenne de ces cotations, en distinguant selon s'il s'agit des *CDS* seniors ou subordonnés. Puis, la moyenne de ces deux cotations moyenne est calculée. Ce résultat correspond à l'indice de marché de maturité 10 ans.

Dans le tableau suivant est présentée l'application numérique du calcul de l'indice :

(a)	CDS 10 ans senior	84,13 bp
(b)	CDS 10 ans subordonné	160,32 bp
(c) = $\frac{(a)+(b)}{2}$	Indice de marché 10 ans 30/06/2023	122,22 bp

TABLE 2.1 – Calcul de l'indice de marché de maturité 10 ans

De la même façon, il est calculé un indice de marché pour les maturités 1 an, 3 ans et 5 ans, à la date du trimestre de calcul. Pour une dette de maturité résiduelle 1, 3, 5 ou 10 ans, l'indice est utilisé tel quel. Pour les autres maturités, une interpolation linéaire est effectuée. Par exemple, pour une dette de maturité résiduelle de 8,5 ans, l'indice

6. *Credit Default Swap*

7. Pour rappel, 1bp = 0.01%

considéré est :

$$idx_{8,5Y} := idx_{5Y} + (idx_{10Y} - idx_{5Y}) \times \frac{8.5 - 5}{10 - 5}$$

L'intégration concrète de cet indice dans la valorisation est détaillée à la section suivante.

2.5.3 Intégration de l'indice dans la valorisation

Pour l'intégration de l'indice de marché dans la valorisation du trimestre courant t_0 , plusieurs calculs sont effectués, reposant sur 4 valeurs :

1. V_{t_0} : la valorisation modèle du trimestre courant ;
2. $V_{t_0-d_p}$: la valorisation modèle du trimestre précédent ;
3. $r_{t_0-d_p}$: le *spread* d'égalisation de la valorisation du trimestre précédent. Sa définition est expliquée ci-dessous ;
4. Δ_{idx} : La variation de l'indice de marché entre celui calculé pour le trimestre courant t_0 et celui calculé lors du trimestre précédent $t_0 - d_p$.

Tout d'abord, une valeur de marché théorique est calculée comme la valeur actualisée d'une obligation ayant les mêmes caractéristiques, actualisée au taux $r_{t_0-d_p} + \Delta_{idx}$. Cette valeur actualisée est par la suite notée P_{t_0} , et nous l'appellerons "valorisation marché". L'intégration de l'indice de marché se fait donc de façon très intuitive : un indice de marché augmentant est significatif d'anticipations de défaut plus importantes, et se traduit mathématiquement par une baisse de la valorisation marché.

Puis, la valeur finale communiquée est calculée comme étant $Q_{t_0} = P_{t_0} \times \frac{V_{t_0}}{V_{t_0-d_p}}$.

Ensuite, le *spread* d'égalisation r_{t_0} est calculé de façon implicite. Il s'agit du *spread* auquel il faudrait actualiser une obligation de mêmes caractéristiques pour obtenir la valeur Q_{t_0} . La pertinence de ce *spread* se justifie avec des arguments tout à fait similaires à ceux évoqués lors de la valorisation modèle. En définitive, c'est l'évolution de ce *spread* r_{t_0} qui intéressera l'investisseur : une baisse indiquera une amélioration générale du risque et donc un gain en valeur de la dette, là où une hausse indiquera le phénomène opposé.

2.6 L'implémentation

L'implémentation d'un tel modèle a été faite sous R⁸. Préalablement à ce mémoire, l'état des lieux de cette implémentation est le suivant. L'implémentation a initialement été construite avec l'idée de pouvoir réaliser toutes les projections de dettes d'un seul coup. En conséquence, ceci revenait à manipuler plusieurs tableaux à 4 dimensions : la première correspondait au nombre d'entités⁹, la deuxième correspondait au nombre de branche, la troisième au nombre de trimestre à projeter, la quatrième au nombre de

8. [R Core Team, 2021] et [RStudio Team, 2021]

9. Dans le cas de deux dettes émises par une même entité, elles étaient considérées comme deux entités

	Date	30/06/2023
Company	Company 10 Y Senior point	Cotation CDS
Aegon	AEGON CDS EUR SR 10Y	101,28
Allianz	ALVGR CDS EUR SR 10Y	56,40
Generali	ASSGEN CDS EUR SR 10Y	104,95
AXA	AXASA CDS EUR SR 10Y	84,20
Hanover Re	HANRUE CDS EUR SR 10Y	54,77
Legal & General	LGEN CDS EUR SR 10Y	103,93
Prudential	PRUFIN CDS EUR SR 10Y	102,67
SCOR	SCOR CDS EUR SR 10Y	78,15
Swiss Re	SCHREI CDS EUR SR 10Y	78,73
Zurich Ins.	ZURNVXINS CDS EUR SR 10Y	76,20
Full Name	Company 10 Y Sub point	Cotation CDS
Aegon	AEGON CDS EUR SUB 10Y	189,35
Allianz	ALVGR CDS EUR SUB 10Y	150,95
Generali	ASSGEN CDS EUR SUB 10Y	186,04
AXA	AXASA CDS EUR SUB 10Y	145,21
Hanover Re	HANRUE CDS EUR SUB 10Y	150,64
Legal & General	LGEN CDS EUR SUB 10Y	191,48
Prudential	PRUFIN CDS EUR SUB 10Y	169,55
SCOR	SCOR CDS EUR SUB 10Y	128,10
Swiss Re	SCHREI CDS EUR SUB 10Y	148,53
Zurich Ins.	ZURNVXINS CDS EUR SUB 10Y	143,35

Lecture : Aegon rémunèrera au taux 1,8935% l'investisseur acceptant d'acheter un de ses *CDS* subordonnés de maturité 10 ans.

FIGURE 2.2 – Indice de marché 10 ans au 30/06/2023

simulations. En somme : des tableaux de tailles conséquentes à faire interagir, au vu des capacités de ce langage.

L'impact de ceci concerne le temps de calcul. Il est possible de faire une loi empirique d'environ 1,5 minutes par année projetée, soit une quinzaine de minute pour projeter sur 10 années. Pris tout seul, ce temps de calcul semble acceptable. Cependant, un aspect tout à fait opérationnel est à prendre en compte : à chaque valorisation, afin de comprendre les écarts que la valeur de la dette subit d'un trimestre à l'autre, des études de sensibilités sont menées. Concrètement, il s'agit de modifier légèrement la valeur d'un paramètre, et de relancer une valorisation pour voir si ce paramètre particulier est responsable des variations observées. En pratique, ces études de sensibilité peuvent souvent être assez nombreuses pour chaque dette. Il est donc possible d'obtenir un temps total d'exécution de plusieurs heures pour une seule dette, et donc de plusieurs jours pour la valorisation complète du fonds.

Le fait de chercher à projeter simultanément les dettes d'une même entité permet naturellement d'optimiser ceci puisque toutes les dettes se retrouvent valorisées en une seule projection (y compris dans les études de sensibilité). De plus, travailler sur l'implémentation du modèle permet d'en réaliser un audit, de se questionner sur la justesse de l'implémentation, et de profiter au maximum des points forts du langage R (comme par exemple la vectorisation des opérations).

2.7 Exemple d'un déroulé complet de valorisation, avant modifications

Cette section présente un exemple de déroulé complet d'une valorisation, pour une entité fictive, ayant émis deux dettes. L'objectif ici est d'agrémenter les explications théoriques des paragraphes précédents de quelques données numériques, afin de se faire une idée des ordres de grandeur de la valorisation modèle, de la valorisation marché, et de la valorisation finale. De plus, ces exemples numériques permettront de mieux apprécier l'ampleur du retour critique fait dans la section suivante, à propos des limites de la modélisation actuelle.

Dans un premier temps, une présentation de l'entité est faite, puis chacune des étapes de calcul sont effectuées. Pour rappel, l'objectif de ce mémoire est de prendre en compte des retours d'expérience afin de modifier un modèle de valorisation, et donc nécessairement d'étudier les impacts du changement de modèle. Ce qui nous intéresse donc sont les variations de valeurs d'un cadre de projection à l'autre, plus que les valeurs en elles mêmes. À ce titre, seuls quelques commentaires sont apportés sur les résultats obtenus. La majeure partie des analyses entrant dans le cadre des travaux de ce mémoire sont faites au chapitre 4. La seule entorse faite avec une situation réelle concerne le nombre de simulations : il a été choisi de simuler un nombre de $n = 10\,000$ trajectoires, afin de pouvoir mieux étudier la distribution des défauts lors du chapitre 4.

2.7.1 Présentation de l'entité

Nous considérons une entité non-vie, européenne, dont les caractéristiques du bilan, d'évolution du bilan, et de solvabilité, sont résumées dans le tableau 2.3 en page 37. Ces valeurs sont inspirées des bilans réellement constatés lors de la valorisation, et sont en cohérence avec les ratios moyens énoncés au chapitre 1.

Nom de la variable	Valeur
Actif	
Valeur de marché de l'Actif	962 000 000
Taux de croissance de l'Actif (historique)	1%
Volatilité de l'Actif	4%
BEL	
Best Estimate Liabilities - BEL	650 000 000
Volatilité du BEL	15%
Quote-part des réserves servies en prestations	10%
Duration du Passif	5
Cotisations	
Montant des cotisations perçues	100 000 000
Taux de croissance des cotisations	1%
Volatilité des cotisations	2%
Ratio combiné	
Ratio combiné réalisé initial	100%
Ratio combiné cible	100%
Volatilité du ratio combiné	2%
Indicateurs de Solvabilité initiaux	
SCR	150 000 000
Fonds propres	267 000 000
Taux de couverture du SCR	178%

Les montants sont en euros, la duration est en années.

Aux fins de recalcul des variables dans la sous-section suivante, on considère que les 3 derniers ratios de couverture du SCR ont été les suivants : 170%, 173% et 187%.

FIGURE 2.3 – Bilan d'une entité fictive

Nous considérons également que, au cours de ces dernières années, l'entité a émis un total 25 millions d'euros de fonds propres *Tier 2*, répartis en deux titres de dette subordonnée. Chacune de ces deux dettes est à coupon variable, indexée sur l'EURIBOR-

3m. Le spread d'ajustement qui avait été calculé lors de l'émission de la seconde dette est de 7,60%. La valorisation se déroule à la date $t_0 = 30/06/2023$, pour des données bilanciellées arrêtées au 31/03/2023. La courbe des taux utilisée est présentée en annexe C.1.

La première dette, la plus ancienne, a une maturité résiduelle de 3 ans, une rémunération additionnelle de 6% et un nominal de 15 millions d'euros. La seconde dette, la plus jeune, a une maturité résiduelle de 7 ans, une rémunération additionnelle de 7% et un nominal de 10 millions d'euros.

2.7.2 Recalcul de certaines variables

En premier lieu, afin de diminuer la volatilité du taux de couverture du SCR, on commence par recalculer ce taux, comme la moyenne des quatre dernières valeurs communiquées : 178%, 170%, 173% et 187%. Ceci donne finalement un taux de couverture du SCR de 177%. Par soucis de cohérence, à SCR égal, il est donc nécessaire de recalculer les fonds propres. On obtient alors $FP_0 = 265\,500\,000\text{€}$.

Puis, pour les mêmes raisons, la valeur de l'actif est recalculée, comme la somme des 3 principaux éléments du passif : les fonds propres, le BEL, et la marge pour risque (calculée comme le produit de 6% par la durée du passif par le SCR).

$$\begin{aligned} A_0 &= FP_0 + BEL_0 + 6\% \times D \times SCR_0 \\ &= 960\,500\,000\text{€} \end{aligned}$$

2.7.3 Valorisation modèle

Une fois cette revue de quelques valeurs effectuées, il est possible de projeter le bilan et les flux de dettes, une par une, afin d'obtenir une valorisation de chacune des dettes.

Projection de la première dette

Le projection se déroule ici sur une durée totale de 3 années, soit 12 trimestres. Les valorisations modèle avec et sans défaut obtenues sont données dans le tableau suivant :

N	15 000 000
$V_{t_0}^*$	14 321 530
V_{t_0}	14 156 008
x_1	0,49%

Projection de la seconde dette

Le projection se déroule ici sur une durée totale de 7 années, soit 28 trimestres. Cette projection est **complètement indépendante** de la première, et n'est donc pas effectuée simultanément. Les valorisations modèle avec et sans défaut obtenues sont données dans le tableau suivant :

N	10 000 000
$V_{t_0}^*$	9 628 097
V_{t_0}	9 497 116
x_1	0,34%

2.7.4 Impact marché

À partir de cette étape, le déroulé de la valorisation se base sur certains résultats de la valorisation précédente. Pour le bien de l'exemple, supposons que ces résultats aient été les suivants :

	Dette 1	Dette 2
N	15 000 000	10 000 000
$V_{t_0-d_p}$	14 350 000	9 600 000
$r_{t_0-d_p}$	5,8%	7,2%

En suivant la méthodologie expliquée en section 2.5.2, on obtient les deux valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \Delta_{idx}(t_0, 3Y) = -0.13\% \\ \Delta_{idx}(t_0, 7Y) = -0.11\% \end{cases}$$

Avec ces deux valeurs, nous pouvons donc obtenir la valorisation marché de ce trimestre qui, pour rappel, est définie comme la valeur des flux futurs d'une obligation de mêmes caractéristiques, actualisés au taux $r_{t_0-d_p} + \Delta_{idx}(t_0, m)$, m désignant ici la maturité résiduelle de la dette.

2.7.5 Valorisation finale

Tous les calculs précédents effectués, il est enfin possible de calculer la valorisation finale communiquée à l'investisseur : $Q_{t_0} = P_{t_0} \times \frac{V_{t_0}}{V_{t_0-d_p}}$:

	Dette 1	Dette 2
N	15 000 000	10 000 000
$V_{t_0-d_p}$	14 350 000	9 600 000
V_{t_0}	14 156 008	9 497 116
P_{t_0}	15 132 936	9 952 276
Q_{t_0}	14 928 360	9 845 617
$\frac{Q_{t_0}}{N}$	99,522%	98,456%
r_{t_0}	6,18%	7,29%

2.7.6 Commentaires

Cette section regroupe quelques commentaires pouvant être faits sur ces résultats, et la présentation de quelques résultats synthétiques.

Le premier commentaire à faire est le suivant : ces résultats dépendent du bilan fourni. Le modèle de projection est plus ou moins sensible à certains paramètres. La valeur des

différentes mesures de risques, c'est leur évolution au cours de la simulation qui nous intéresse pour le moment. Dans le chapitre 4, nous étudierons comment changer de cadre de projection impacte ces différentes estimations, à bilan égal. C'est à ce moment ci que nous ferons spécialement attention aux valeurs que prennent ces mesures de risques. Pour cette section, nous nous contenterons d'une analyse rapide la valorisation dans son ensemble.

Tout d'abord, on constate une certaine cohérence globale dans l'ensemble des résultats obtenus : les valorisations sans prendre en compte le défaut sont supérieures à celles prenant en compte le défaut, les valorisations modèle à t_0 sont inférieures aux valorisations à $t_0 - d_p$, ce qui implique une augmentation du *spread* r_{t_0} par rapport à $r_{t_0-d_p}$, la dette la plus proche de son échéance a un prix plus proche du nominal que la seconde etc...

Ensuite, il est possible de regarder l'évolution de la probabilité de défaut empirique. Puisque, dans ce cadre *mono-dette*, avoir deux dettes signifie réaliser deux projections, nous disposons de deux estimations de cette probabilité de défaut, comme montré sur le tableau 2.2 ci-dessous :

Trimestre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Dette 1	0,0003	0,0028	0,0066	0,0113	0,0147	0,0179	0,0199	0,0227	0,0240	0,0255	0,0268	0,0289	-	-
Dette 2	0,0005	0,0040	0,0090	0,0129	0,0163	0,0200	0,0225	0,0242	0,0260	0,0270	0,0282	0,0292	0,0297	0,0307

Trimestre	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Dette 1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Dette 2	0,0314	0,0317	0,0319	0,0319	0,0321	0,0325	0,0326	0,0327	0,0329	0,0329	0,0329	0,0329	0,0329	0,0331

La première estimation s'arrête au bout de 12 trimestres, car il s'agit de la projection de la première dette, qui a une maturité de 3 ans.

TABLE 2.2 – Évolution de la probabilité de défaut empirique

Deux constats sont à tirer de ce tableau. Premièrement, les deux projections donnent approximativement le même nombre de défauts pour les trimestres qu'elles ont en commun. Deuxièmement, on constate sur la deuxième projection une croissance rapide de la probabilité de défaut, où elle passe de 0 à 2,9% en 13 trimestres, puis ne passe que de 2,9% à 3% sur les 15 trimestres suivants. On conclue également que sur les 10 000 trajectoires de chaque projection, 289 mènent au défaut de l'entité pour la projection de la première dette, et 331 mènent au défaut de l'entité pour la projection de la deuxième dette

Il est également intéressant de regarder si les trajectoires menant au défaut sont les mêmes pour les deux dettes. Sur ces trajectoires menant au défaut, seules 8 sont communes entre les deux projections. En d'autres termes, seulement 8 trajectoires finissent par aboutir au défaut de l'entité sur chacune des deux dettes. Dans la réalité, un défaut de l'entité impacte obligatoirement les deux dettes.

Il est possible de pousser un peu cette analyse, en regardant s'il existe des trajectoires pour lesquelles l'entité est en défaut dans les deux projections, et est en défaut au même moment dans les deux projections. Ce cas de figure n'arrive qu'une seule fois, comme

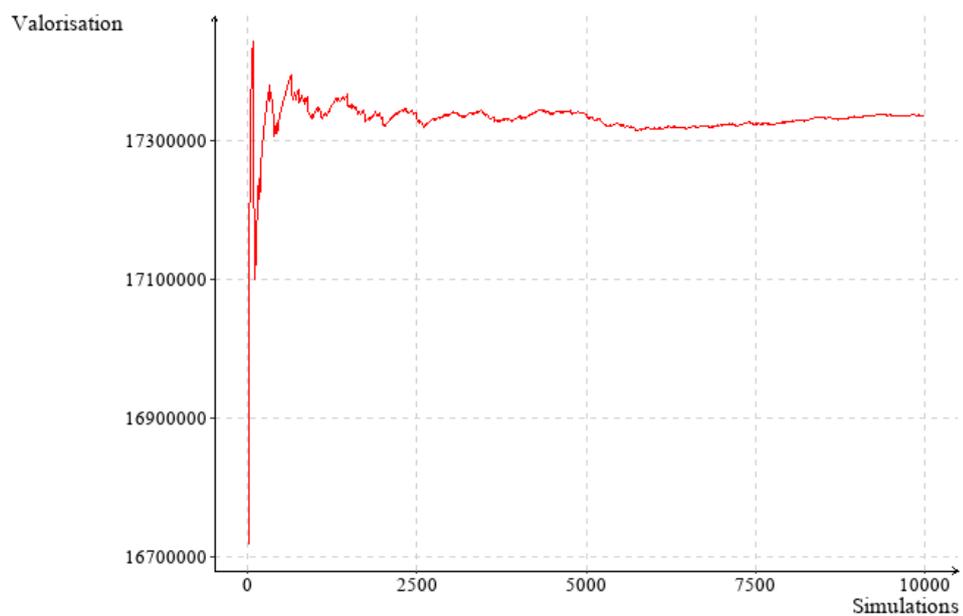
montré sur le tableau 2.3 en page 42.

Sur un aspect tout à fait opérationnel, un graphique étudiant la convergence de la valorisation de la première dette au cours de 3000 simulations est représenté page 42. Ce graphique valide le choix du nombre de simulations effectuées.

Trimestre	Projection 1	Projection 2	Instants communs
1	3	5	0
2	25	35	0
3	38	50	0
4	47	39	0
5	34	34	1
6	32	37	0
7	20	25	0
8	28	17	0
9	13	18	0
10	15	10	0
11	13	12	0
12	21	10	0

Lecture : Lors de la projection de la dette 1, on observe exactement 34 défauts survenus lors du cinquième trimestre.

TABLE 2.3 – Nombre de défauts communs entre les deux projections, cadre mono-dette



La valorisation représentée ici est calculée avec une actualisation au taux sans risque. Le graphique de la convergence de la deuxième dette étant d'allure tout à fait similaire, il n'y a pas lieu de le représenter.

FIGURE 2.4 – Étude de la convergence de la valorisation

2.8 Retour d'expérience critique sur le modèle actuel

2.8.1 Les hypothèses générales

Dans cette section sont rappelées quelques hypothèses simplificatrices de modélisation, accompagnées d'une appréciation qualitative de leurs répercussions sur la valorisation.

En matière de défaut

Tout d'abord, il a été expliqué en section 1.2.1 que les titres subordonnés peuvent présenter un très grand nombre de caractéristiques différentes, notamment sur les critères de non-remboursement. Or, comme vu dans la partie précédente, le défaut modélisé est d'une part défini par une non-couverture du SCR, et est d'autre part vu comme un état définitif.

Comme indiqué en section 1.1.2.1, le premier point est conforme au règlement délégué, articles 69 à 77 : le remboursement s'arrête dès que la couverture des capitaux requis n'est plus satisfaite. Le deuxième point est quant à lui légèrement plus pessimiste que le règlement délégué, puisqu'il interdit la reprise des paiements, là où le règlement délégué confère à l'autorité de contrôle en place le pouvoir d'autoriser la reprise du remboursement. Ignorant le fait qu'il apparaît délicat de modéliser l'attitude d'une autorité de contrôle dans des simulations d'évolution de bilan, cet écart va dans le sens de la prudence, et n'est donc pas la lacune la plus urgente.

En matière de défaut, nous pouvons aussi penser à la *LGD* qui, au moment où un défaut survient, est au moins de 50%. Même s'il s'agit d'un paragraphe du règlement délégué, il peut sembler perturbant au premier abord. En effet, dans une situation où le défaut ne se produit qu'à peu de choses près (par exemple un taux de couverture du SCR de 98%), il semble étonnant que la *NAV* ne soit pas suffisante pour rembourser également les investisseurs subordonnés.

Dans un objectif de prise en compte des retours d'expérience pour améliorer le modèle de valorisation, les retours d'expérience sont d'une part que ce choix de prendre une *LGD* d'au moins 50% est une pratique courante, et d'autre part que l'historique du fonds montre que c'est un choix relativement bien vérifié dans la pratique.

Sur la nature des entités du fonds

Le modèle de valorisation présenté dans ce chapitre part du postulat que les dettes subordonnées valorisées sont issues de mutuelles non-vie européennes, de taille modeste. Dans la pratique, le fonds s'est progressivement diversifié sous plusieurs aspects depuis sa création : certaines des entités sont mixtes, un faible nombre sont des entités vie, et certaines atteignent des besoins en fonds propres de plusieurs milliards.

Des ajustements non développés dans ce mémoire ont été apportés sur la projection du bilan, afin de tenter de prendre en compte au maximum ces nouvelles spécificités.

Cependant, ces ajustements conduisent à des sources de variations supplémentaires, qui peuvent être plus difficilement explicables.

Sur la qualité des données

Enfin, en actuariat et dans le secteur financier en général, il est essentiel de s'interroger sur la qualité des données disponibles. En l'occurrence, il a été évoqué lors de la présentation du fonds (section 1.3) que certaines des entités sont par exemple localisées en Angleterre, donc dans un pays non soumis au régime Solvabilité II, ou bien soumis à un régime équivalent¹⁰. Or, le modèle est construit sur l'hypothèse sous jacente que les données sont représentatives de ce régime prudentiel.

Ainsi, au delà des écarts, intrinsèques au modèle, qui peuvent exister avec la réalité, il existe également des mécanismes réglementaires différents, qui ne sont pas pris en compte par le modèle. Dans la réalité, ces mécanismes pourraient avoir pour effet, à situation similaire, de provoquer le défaut de l'entité européenne, là où l'entité britannique ne le serait pas, et vice versa.

De plus, les données reçues sont celles calculées par les entités du fonds. Hormis suivre l'évolution de ces données d'un trimestre à l'autre, et vérifier la cohérence des évolutions au vu des avis d'expert, il n'existe pas de moyen d'assurer leur exactitude. Cet aspect n'est pas inhérent à ce modèle, et est applicable à bien d'autres situations. Il est néanmoins à avoir en tête pour mettre en perspective les résultats d'un modèle avec les constats de la réalité.

2.8.2 La valorisation et son implémentation

Les entités multi-dettes

Cet aspect est évoqué dès l'introduction, et plusieurs fois ensuite. À aucun moment il n'est pris en compte le fait que certaines entités puissent avoir plusieurs dettes. Ainsi, en pratique, tant dans le développement théorique que dans l'implémentation pratique, le bilan est projeté sur n simulations autant de fois que de dettes émises. Dans chaque projection, le bilan n'est donc impacté que par les flux de la dette en compagnie de laquelle il est projeté. Cette modélisation pose plusieurs problèmes, de cohérence d'une part, et de réalisme d'autre part.

En matière de réalisme, projeter chaque dette émise par une entité indépendamment de celles émises par cette même entité biaise la vision du risque de défaut. En effet, du point de vue du fonds et des investisseurs, quand une entité se retrouve en défaut, ce sont en réalité deux dettes qui ne sont plus remboursées au lieu d'une seule. Du point de vue de l'entité, avoir deux dettes augmente le coût de la dette, et donc les flux sortants. Qui plus est, lorsque les deux dettes n'ont pas la même maturité¹¹, les fonds propres prudentiels baissent significativement à l'échéance de la dette la plus ancienne¹².

10. C'est par exemple le cas des Bermudes, l'équivalence de Solvabilité II pour les entreprises bermudoises est la décision déléguée de l'Union Européenne 2016/309 du 26 novembre 2015.

11. ce qui, en pratique, est toujours le cas.

12. ils baissent, logiquement, d'un montant égal au nominal de la dette arrivée à maturité.

Ceci entraîne donc une tendance à sous-estimer les flux sortants des entités multi-dette, à surestimer leur solvabilité à partir de certaines échéances et à sous-estimer le nombre de défauts des entités concernées.

En matière de cohérence, comme expliqué en section 2.2.1, les fonds propres initiaux prennent de toute façon en compte toutes les dettes. En ne projetant qu'une seule dette, le bilan projeté a des variables initiales caractéristique d'une situation avec deux dettes : il n'apparaît alors pas cohérent de ne projeter chaque dette qu'une par une.

Le spread d'ajustement

Beaucoup de choses sont à dire en ce qui concerne le *spread* d'ajustement x_2 , abordé en section 2.4.2. Commençons donc par rappeler la manière dont il est défini, et l'interprétation qui est à lui donner. Ce *spread* est calculé à l'émission, et correspond à la quantité qu'il faut ajouter au taux sans risque pour égaliser la valeur actuelle des flux futurs avec défaut et la valeur nominale. Il est ensuite réutilisé dans toutes les valorisations suivantes, pour obtenir la valeur avec défaut de la dette. Il permet de synthétiser l'ensemble des risques pesant sur chaque dette, autres que le risque de défaut. Enfin, lors d'une émission d'une nouvelle dette, ce *spread* est recalculé à partir des flux futurs de la nouvelle émission, puis utilisé pour la valeur actuelle des flux futurs des deux dettes.

Or, à l'échéance, la valeur de la dette est le montant du flux généré, c'est à dire son nominal augmenté d'un coupon ($N + c$, nous nommons cette valeur "nominal couponné" par la suite), par absence d'opportunité d'arbitrage. Ainsi, un investisseur s'attend raisonnablement à ce que, en se rapprochant de l'échéance, la valeur de son investissement se rapproche progressivement de la valeur nominale couponnée. Ce constat est d'autant plus vrai lorsque l'entité a, au cours de l'existence de la dette, affiché des indicateurs de solvabilité toujours plus rassurants : taux de couverture du SCR progressivement passé aux alentours de 200%, volatilités de l'actif et du BE de plus en plus faibles...

Mais, en actualisant selon le taux court augmenté d'un *spread* fixe, il n'est pas possible d'effectivement observer une convergence vers le nominal couponné, à mesure que l'échéance se rapproche¹³. Ce point ne pose pas de réel problème pour les dettes ayant une maturité résiduelle importante. En revanche, pour les dettes arrivant à maturité à horizon relativement proche, il est de bon ton de veiller à une convergence de la valorisation modèle vers le nominal.

Un autre élément entre en jeu concernant ce *spread* x_2 . Il permet de synthétiser les risques autres que celui de crédit pesant sur la dette lors de son émission, comme par exemple la liquidité ou les incertitudes liées au modèle. Or, compte tenu d'un éventuel coupon plus intéressant qu'un autre, la liquidité de la dette dépend en réalité plus de l'entreprise à un instant donné que de la dette en elle même.

Une question se pose alors concernant les entités "multi-dettes" : comment justifier que deux dettes aient un *spread* x_2 calculé dans des conditions différentes, alors qu'ils

13. la valeur de la dette sera plutôt sous-estimée que sur-estimée

symbolisent les mêmes risques ? La méthode choisie actuellement est la suivante : lors de l'émission d'une nouvelle dette, x_2 est recalculé, et est appliqué aux dettes déjà existantes.

Cette méthode garantit une certaine cohérence dans la quantification du risque de liquidité : avec une nouvelle dette et un nouveau bilan, la vision du risque pesant sur l'entité change, il est alors cohérent de requantifier ce risque.

Cependant, changer brutalement de *spread* d'ajustement pour les plus vieilles dettes (et donc celles de maturité les plus courtes) induit une variation brutale dans la valorisation, ce qui est plutôt surprenant. Ceci peut également mener à s'écarter encore plus du nominal, bien que nous ayons vu dans les paragraphes précédents qu'a priori on chercherait plutôt à s'en rapprocher.

En définitive, l'ensemble des soucis constatés concernant x_2 concernent la cohérence de l'actualisation et l'impact qu'il a sur la valorisation. Qui plus est, chercher à rationaliser tel soucis peut aboutir à une contradiction rendant encore plus problématique tel autre soucis. Il est donc de bon ton de chercher une nouvelle méthode, réconciliant au mieux l'ensemble des paragraphes précédents.

L'intégration de l'indice marché

L'idée d'intégrer un indice de marché à la valorisation est louable : elle permet d'intégrer des grandes tendances du monde réel dans un modèle théorique. Cela ajoute donc une certaine crédibilité de marché au modèle, et est d'ailleurs en phase avec l'article 75 de la directive, introduisant l'importance de la valeur de marché. La manière dont cet indice est intégré actuellement permet de fournir des évolutions cohérentes : une baisse de l'indice de marché se traduit par une hausse de la valorisation finale communiquée à l'investisseur et vice versa.

Cependant, cette intégration repose sur une méthodologie discutable, fournissant des résultats difficiles à interpréter, dans la mesure où les différents risques ne sont pas intégrés de façon uniforme et cohérente. En effet, la valorisation finale communiquée est $Q_{t_0} = P_{t_0} \times \frac{V_{t_0}}{V_{t_0-d_p}}$. Dans cette formule, l'impact de marché est intégré à travers P_{t_0} , les risques synthétisés par x_2 dans V_{t_0} et $V_{t_0-d_p}$, et seule l'amélioration ou la dégradation du risque de défaut est renseignée, à travers le ratio $\frac{V_{t_0}}{V_{t_0-d_p}}$. En somme, ce résultat s'explique mais ne se justifie pas vraiment.

Pour rappel, l'indice de marché correspond à des attentes de rémunération de la part d'investisseurs, en échange d'un engagement de couverture en cas de défaut. Comme c'est fait actuellement, c'est dans l'actualisation de flux futurs qu'il est utilisé. Nous avons vu ci-dessus qu'une part des travaux concerneront le *spread* x_2 et donc par extension l'actualisation effectuée. Il apparaît ainsi opportun de mettre à profit le besoin de travaux sur x_2 pour mettre à jour la manière d'intégrer l'indice de marché.

Chapitre 3

Modifications apportées, nouvelle méthodologie

Le chapitre précédent a servi à présenter le modèle de valorisation utilisé jusqu'à ce jour. De façon très synthétique : les données de chaque entité émettrice sont collectées, chaque dette est projetée seule avec le bilan associé, des indicateurs de risques sont calculés, et une valorisation finale est communiquée à l'investisseur.

Certaines incohérences ou questions ont été relevées, notamment le fait que deux dettes d'une même entité ne soient pas projetées ensemble, ainsi qu'un manque de cohérence dans la construction de *spreads* d'ajustements ou bien dans l'intégration de l'indice de marché.

L'objet de ce chapitre est d'exposer les solutions apportées à ces trois sujets, tant de façon théorique que pratique. Il sera d'abord traité l'aspect des dettes multiples, puis viendront les modifications sur les *spreads* d'ajustement, et enfin sur l'intégration de l'indice de marché. Chacune des solutions apportées est accompagnée d'une appréciation qualitative de son impact sur le déroulé de la valorisation. Quelques propos sur l'implémentation du modèle sont apportés.

Les résultats et variations réellement obtenues causées par le changement de modèle seront ensuite détaillés en chapitre 4.

3.1 Les quelques conventions propres à ce chapitre

L'objet de cette section est de rappeler quelques éléments de notations et de nomenclature, utiles avant de poursuivre la lecture de ce mémoire.

On parle dans ce chapitre de la valorisation (resp. cadre, projection, équation...) *multi-dette*, là où le chapitre précédent était celui de la valorisation (resp. cadre, projection, équation...) *mono-dette*. Il est donc sous-entendu que "entité" désigne un organisme d'assurance ayant émis un nombre d de dettes subordonnées supérieur ou égal à 2. Certaines variables sont définies dans deux cas de figure possible : avec ou sans considération du défaut de l'entité. Les variables accompagnées d'une étoile sont celles sans considération du défaut. De façon similaire, les variables accompagnées du symbole tilde (\sim) sont

celle dont la définition mathématique est modifiée entre le cadre mono-dette et le cadre multi-dette.

Toutes les valorisations sont supposées être faites à une date t_0 . Cet indice n'est inscrit que lorsqu'il est nécessaire de comparer la valorisation courante avec la valorisation précédente : comparer X_{t_0} avec $X_{t_0-d_p}$ par exemple, X désignant moralement une valeur de dette (avec ou sans défaut, actualisée selon le taux court augmenté ou non d'un *spread* etc...).

Enfin, chacune des modifications est faite en considérant que les modifications précédentes sont terminées et mises en place.

3.2 La valorisation multiple

3.2.1 Préambule

Il a été expliqué en section 2.8.2 que la non prise en compte de l'existence de plusieurs dettes subordonnées au bilan pouvait mener à sous-estimer pour chaque entité : leur flux sortants, leur solvabilité et leur nombre de défaut¹. Dans cette section sont exposées les solutions apportées à ce problème.

Nous considérons donc une entité ayant émis d dettes, de nominaux (N_1, \dots, N_d) ², de maturités (T_1, \dots, T_d) , et de rémunération (p_1, \dots, p_d) ³. Dans cette situation, on note $\widetilde{I}_{t,l}$ le flux réellement causé par la l^e dette à l'instant t , \widetilde{I}_t le flux total de dette, naturellement défini par $\widetilde{I}_t = \sum_{l=1}^d \widetilde{I}_{t,l}$.

Changer ces quelques définitions implique de changer une partie des équations du chapitre précédent. Ceci est l'objet des sous-parties suivantes. A cette fin, chacune des équations du chapitre précédent seront reprises, modifiées lorsque nécessaire, et il sera expliqué comment la prise en compte de plusieurs flux a un impact sur les variables caractérisant le risque de défaut.

3.2.2 La Net Asset Value et l'instant de défaut

Avant l'aspect purement pratique de la prise en compte de plusieurs flux, il est nécessaire de s'interroger sur la relation qui existe entre l'instant de défaut et les flux dûs aux dettes.

En effet, peu importe le nombre de dettes, la définition de l'instant de défaut ne change pas, il s'agit du premier instant τ où la *Net Asset Value* ne couvre pas le *SCR* :

$$\tau = \min \left\{ t \in \llbracket 1, T \rrbracket / \frac{NAV_t}{SCR_t} < 1 \right\}$$

Or la *NAV* est elle même définie comme l'excédent de l'actif par rapport aux passifs : $NAV_t = A_t - L_t$. Comme vu en chapitre 2, la valeur de l'actif de l'entité est donnée par

1. en plus d'un léger manque de cohérence
 2. Le nominal total est alors défini par $\widetilde{N} := \sum_{l=1}^d N_l$.
 3. dans le cas de dettes à coupons variables, offrant une rémunération égale à l'EURIBOR 3 mois augmenté de p_l

la relation :

$$A_t = A_{t-d_p} \times (1 + R_t) - \tilde{I}_t - (F_t - C_t)$$

où, à l'instant t , A_t est la valeur de l'actif, R_t le rendement de l'actif, \tilde{I}_t le flux total de dette, F_t les prestations et C_t les cotisations.

Il est donc possible de réécrire l'instant de défaut comme :

$$\tau = \min \left\{ t \in \llbracket 1, T \rrbracket / \frac{A_{t-d_p} \times (1 + R_t) - \tilde{I}_t - (F_t - C_t) - L_t}{SCR_t} < 1 \right\}$$

Afin de simplifier les notations par la suite, on introduit le ratio π_t de couverture du SCR par la NAV :

$$\pi_t := \frac{NAV_t}{SCR_t} = \frac{A_{t-d_p} \times (1 + R_t) - \tilde{I}_t - (F_t - C_t) - L_t}{SCR_t} \quad (3.1)$$

La prise en compte de plusieurs dettes a un impact immédiat sur ce ratio. En effet, le coût de la dette, \tilde{I}_t , est d'autant plus grand que le nombre de dettes est grand. Par construction, π_t est alors d'autant plus faible que le nombre de dettes est grand, toutes choses égales par ailleurs. En particulier, lorsque l'instant t correspond à l'échéance d'une des dettes, le flux sortant correspond à un nominal et un coupon (voire plusieurs). En reprenant les montants moyens établis en section 1.6, ceci correspond à flux sortant moyen d'une bonne dizaine de millions d'euros. Ce flux baisse les fonds propres d'autant, et diminue donc le ratio de couverture π_t ⁴.

On serait tenté de penser qu'en théorie, avec un nombre de dettes plus important, le total bilan A_t serait lui aussi plus important, et qu'il serait donc possible d'atténuer l'augmentation due au passage de I_t à \tilde{I}_t . En pratique, comme expliqué en section 2.2.1, le total bilan prend de toute façon en compte toutes les dettes. Autrement dit, entre les deux cadres de projection, la valeur de A_0 est la même : les seules sources de variation de π_t entre un cadre "mono-dette" et un cadre "multi-dettes" sont dues à \tilde{I}_t .

En somme, prendre en compte l'existence de plusieurs flux de dettes aura en pratique tendance à fragiliser le ratio π_t (i.e. le diminuer, en direction de 1). Le défaut τ arrivera donc plus facilement : plus rapidement ou plus fréquemment. De fait, il est raisonnable de s'attendre à ce que la valorisation de chaque dette soit un peu inférieure lorsqu'elle est projetée de façon commune aux autres dettes.

4. Il est possible de donner une estimation de la baisse que subira π_t . En effet, l'analyse faite en section 1.2.2, permet de conclure que les dettes subordonnées contribuent en moyenne pour 18 points à la couverture du SCR . Par exemple, une entité ayant émis 2 dettes de même nominaux verra ainsi son ratio π_t baisser d'environ 9 points au remboursement du nominal de la première dette.

3.2.3 La perte en cas de défaut

La prise en compte de plusieurs dettes dans la projection a également un impact sur la perte en cas de défaut. En effet, la LGD à appliquer au nominal de l'émission a été définie en section 2.2.4.2 à l'aide de la NAV , et en partant du principe que l'entité a une seule dette, de nominal N .

En cas de défaut d'une entité ayant émis plusieurs dettes, la perte des investisseurs porte sur toutes les émissions. De la même manière que précédemment, on considère le paragraphe 4 de l'article 42 du règlement délégué 2015/35, et le fait que les fonds propres limitent le remboursement du nominal à l'instant de défaut.

De plus, nous avons vu en chapitre 1 que les passifs subordonnés peuvent avoir, entre eux, des règles de subordinations. Un choix est donc à faire concernant la modélisation de la LGD . Un constat simple permet de faire ce choix : toutes les dettes du fonds sont des *Tier II*. A ce titre, elles ont le même statut de priorité, tant pour les investisseurs que pour les entités émettrices. De fait, le taux de perte subi sur chacune en cas de défaut doit être le même (autrement, certains investisseurs se retrouveraient pénalisés, en ayant accepté le même risque).

Compte tenu de ce qui précède, le plus commode et le plus intuitif pour définir la LGD dans le cas de plusieurs dettes, tout en restant cohérent avec la LGD dans le cas d'une seule dette, est de la définir comme :

$$\widetilde{LGD}(t) = \max \left\{ 50\%; 1 - \frac{\max\{0; NAV_t\}}{\sum_{l=1}^d N_l \times \mathbb{1}_{\{t \leq T_l\}}} \right\} \quad (3.2)$$

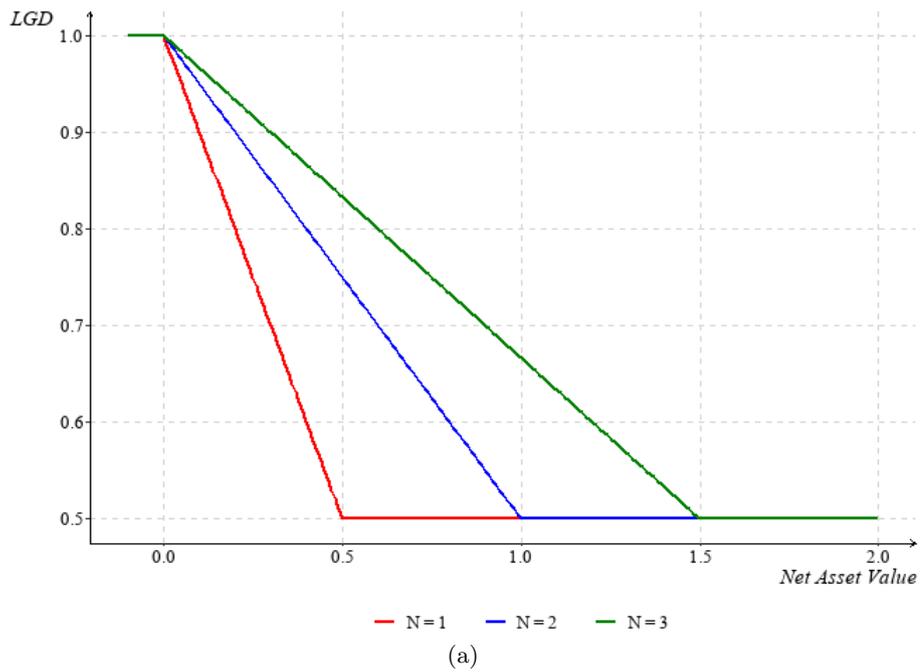
Ce taux de LGD est ainsi à appliquer au nominal total $\widetilde{N}(t) = \sum_{l=1}^d N_l \times \mathbb{1}_{\{t \leq T_l\}}$ pour obtenir le montant total perdu, ou de façon similaire, à appliquer au nominal de chaque dette pour obtenir le montant perdu sur chaque dette.

Il est à remarquer que cette formule fait appel à la notion de nominal total, qui est amené à varier au cours de la projection. En effet, à chaque échéance, un nominal est remboursé, ce qui diminue d'autant le nominal total.

Quel impact dans les montants perdus ?

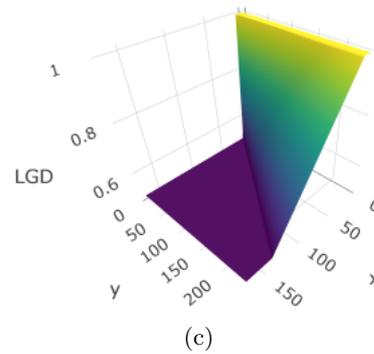
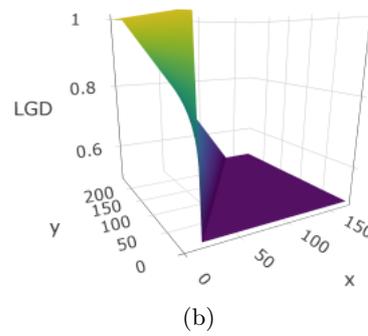
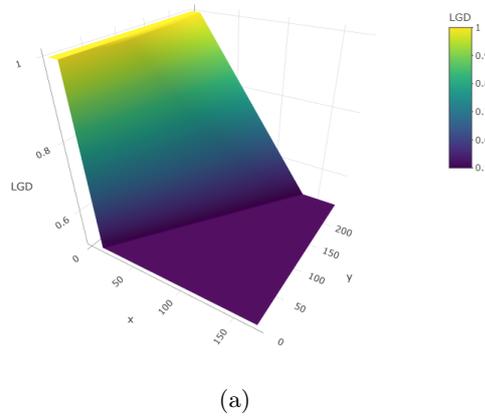
Prendre en compte plusieurs flux de dette impacte la NAV à la baisse, et le nominal total \widetilde{N} à la hausse. De fait, le rapport $\frac{NAV_t}{\widetilde{N}(t)}$ sera par construction plus faible. Cette nouvelle formule donne ainsi des valeurs supérieures ou égales de LGD , et donc des montants recouverts plus faibles ou égaux.

Pour se faire une idée de cet écart, le graphique 3.1 en page 51 donne l'évolution du taux de LGD selon le montant de la NAV , pour une, deux et trois dettes, toutes de nominaux symboliquement égaux à 1. Une vue en trois dimensions est également proposée en page 52



Sur ce graphique est représentée l'évolution de la \widetilde{LGD} en fonction de la NAV , avec 3 valeurs différentes pour le nominal total \widetilde{N} . Ce nominal total peut indifféremment être interprété comme successivement la somme des nominaux de 1, puis 2, puis 3 dettes, ou bien comme une seule dette, dont le nominal serait d'abord égal à 1, puis 2, puis 3.

FIGURE 3.1 – Evolution de la perte en cas de défaut en fonction de la *Net Asset Value* et du nominal total



Sur ces trois graphes, "x" est la *Net Asset Value* et "y" est le nominal total \tilde{N} .

FIGURE 3.2 – Vue en trois dimension de l'évolution de la perte en cas de défaut en fonction de la *Net Asset Value* et du nominal total

3.2.4 Les flux sortants

Après avoir compris à quels endroits la prise en compte de plusieurs flux de dette va impacter le bilan et la solvabilité d'une entité, nous pouvons regarder concrètement comment les flux de dette sont impactés.

Les flux sortants en l'absence de défaut

De façon tout à fait intuitive, le coût de la dette pour une entité est simplement la somme des coûts de chaque dette prise seule, comme montré sur le schéma 3.3 en page 54.

C'est à dire :

$$\widetilde{I}_t^* = \sum_{l=0}^d \widetilde{I}_{t,l}^*$$

, où $\widetilde{I}_{t,l}^*$ correspond au flux causé par la l^e dette à l'instant t , en l'absence de défaut. Ce flux est rigoureusement identique à celui établi en chapitre 2 :

$$\widetilde{I}_{t,l}^* = N_l \times (r_t + p_l) \times d_p \times \mathbb{1}_{\{t \leq T_l\}} + N_l \times \mathbb{1}_{\{t = T_l\}}$$

Actualiser les flux $(\widetilde{I}_{t,1}^*, \dots, \widetilde{I}_{t,d}^*)$ de chaque instant t permet d'obtenir les valorisations-modèle hors défaut de chacune des dettes : $(\widetilde{V}_1^*, \dots, \widetilde{V}_d^*)$. À un indice près, l'expression de ces valeurs actuelles est la même que celle de l'équation 2.7, cette formule n'est donc pas reproduite ici.

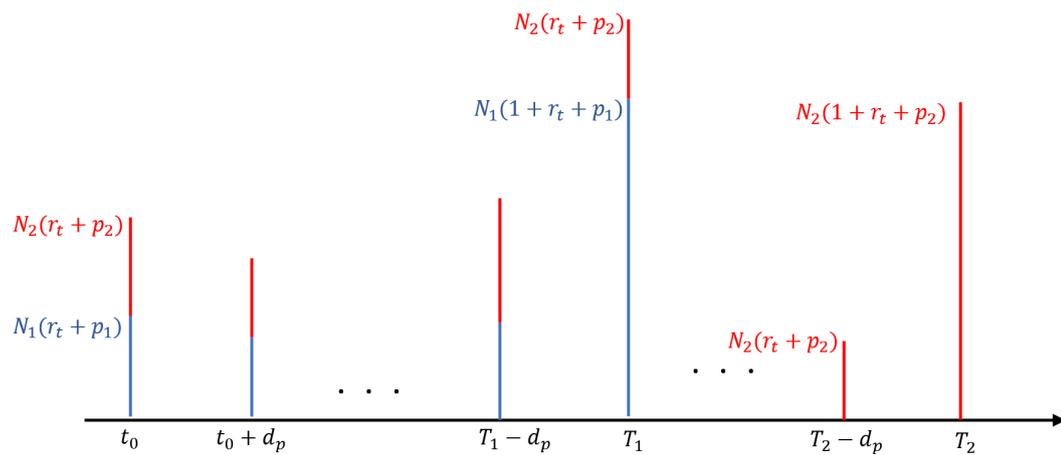
Puisque nous sommes dans le cas où nous ne prenons pas en compte le défaut, les valeurs obtenues avec ces formules sont également les mêmes que celles obtenues avec les formules du chapitre précédent ⁵ :

$$(\widetilde{V}_1^*, \dots, \widetilde{V}_d^*) = (V_1^*, \dots, V_d^*)$$

L'équation 2.6 sur le coût total de la dette à un instant t , hors prise en compte du défaut, se réécrit ainsi :

$$\widetilde{I}_t^* = \sum_{l=1}^d N_l \times (r_t + p_l) \times d_p \times \mathbb{1}_{\{t \leq T_l\}} + N_l \times \mathbb{1}_{\{t = T_l\}} \quad (3.3)$$

5. il est à noter que ce type de constat se révèle fort utile d'un point de vue strictement opérationnel. En effet, il permet de garantir que lors du changement d'un outil ou d'un code informatique, les deux versions sont cohérentes.



Sur ce schéma sont considérés les flux théoriques de deux dettes, sans considérer le risque de défaut. Ces deux dettes sont de nominaux N_1 et N_2 , de rémunération p_1 et p_2 , de maturité T_1 et T_2 , et dont les dates de détachement de coupon sont identiques. En particulier, il est observable que lorsqu'on arrive à la maturité de la dette la plus ancienne, le flux correspondant est constitué de deux coupons et d'un nominal.

FIGURE 3.3 – Prise en compte des flux de plusieurs dettes

Actualiser et sommer ces flux \widetilde{I}_t^* de chaque instant t permet d'obtenir la valorisation-modèle hors défaut totale, \widetilde{V}^* , donné en équation 3.4 ci-dessous.

$$\widetilde{V}^* = \sum_{l=1}^d N_l \times \left[d_p \times \sum_{t \leq T_l} P(0, t) \left(p_l + r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - e^{-at} \left(r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_0 \right) \right) + P(0, T_l) \right] \quad (3.4)$$

Naturellement, on retrouve que : $\widetilde{V}^* = \sum_{l=1}^d \widetilde{V}_l^* = \sum_{l=1}^d V_l^* = V^*$

Les flux sortants avec prise en compte du défaut

Comme expliqué à plusieurs reprises, le défaut d'une entité a pour effet d'interrompre tous les flux de dettes (c'est à dire, du point de vue des investisseurs, les flux entrants). A l'instant du défaut τ , les coupons sont de toute façon versés, et le nominal est remboursé dans la limite de la *LGD*. La *LGD* est, nous l'avons vu, commune à toutes les dettes.

Ainsi, en prenant en compte le défaut, le flux à l'instant t de la l^e dette est donné par l'équation :

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_{t,l} = & N_l \times (r_t + p_l) \times d_p \times \mathbb{1}_{\{t \leq T_l \wedge \tau\}} \\ & + N_l \times \mathbb{1}_{\{t = T_l \wedge \tau\}} \times \left(1 - \widetilde{LGD}(t) \times \mathbb{1}_{\{\tau \leq T_l\}} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Le raisonnement pour la construction de cette formule est finalement assez similaire à celui mené dans le chapitre 2. Ce qui change entre cette équation et l'équation 2.8 est d'une part la valeur de l'instant de défaut τ , et d'autre part la définition et la valeur de la *LGD*.

En sommant ces flux pour chacune des d dettes et instant t donné, on peut obtenir la valeur du flux de dette total, dans un cadre de projection "multi-dette" avec prise en compte du défaut :

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_t = & \sum_{l=1}^d \left[N_l \times (r_t + p_l) \times d_p \times \mathbb{1}_{\{t \leq T_l \wedge \tau\}} \right. \\ & \left. + N_l \times \mathbb{1}_{\{t = T_l \wedge \tau\}} \times \left(1 - \widetilde{LGD}(t) \times \mathbb{1}_{\{\tau \leq T_l\}} \right) \right] \end{aligned}$$

Ici encore, actualiser les flux ($\widetilde{I}_{t,1}, \dots, \widetilde{I}_{t,d}$) de chaque instant t permet d'obtenir pour chaque dette sa valorisation-modèle avec défaut, dans un cadre ou le défaut d'une entité est commun à toutes les dettes émises par cette entité : ($\widetilde{\Lambda}_1, \dots, \widetilde{\Lambda}_d$). Identiquement au chapitre 2, le calcul de ces valeurs est fait par estimation sur un jeu de $n = 3000$

simulations. La valorisation totale des dettes avec prise en compte du défaut, \tilde{V} , est ainsi :

$$\tilde{V} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^d \widetilde{\Lambda}_l^{(k)}$$

où :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_l^{(k)} = N_l \times & \left(d_p \times \sum_{t \leq T_l \wedge \tau^{(k)}} \delta_{x_2}^{(k)}(t) (p_l + r_t^{(k)}) \right. \\ & \left. + \delta_{x_2}^{(k)}(T_l \wedge \tau^{(k)}) (1 - \widetilde{LGD}^{(k)}(T_l \wedge \tau^{(k)}) \times \mathbb{1}_{\{\tau^{(k)} \leq T_l\}}) \right) \end{aligned}$$

C'est à dire :

$$\begin{aligned} \tilde{V} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^d N_l \times & \left(d_p \times \sum_{t \leq T_l \wedge \tau^{(k)}} \delta_{x_2}^{(k)}(t) (p_l + r_t^{(k)}) \right. \\ & \left. + \delta_{x_2}^{(k)}(T_l \wedge \tau^{(k)}) (1 - \widetilde{LGD}^{(k)}(T_l \wedge \tau^{(k)}) \times \mathbb{1}_{\{\tau^{(k)} \leq T_l\}}) \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

En intervertissant les sommes, on retrouve logiquement que :

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \sum_{l=1}^d \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \widetilde{\Lambda}_l^{(k)} \\ &= \sum_{l=1}^d \tilde{V}_l \end{aligned}$$

À l'issue de ce procédé, nous obtenons donc $2d + 2$ valeurs :

$$(\tilde{V}^*, \tilde{V}_1^*, \dots, \tilde{V}_d^*, \tilde{V}, \tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_d)$$

Ces valeurs dépendent des caractéristiques de chaque dette, des $n = 3000$ projections des variables bilantielles, du taux de LGD , du taux court simulé, de l'instant de défaut τ , et du *spread* d'ajustement x_2 , à travers les facteurs d'actualisation δ_{x_2} . Dans la mesure, où, comme nous l'avons vu, x_2 va être modifié dans la section suivante, l'équation 3.6 n'est - à proprement parler - pas dans sa version définitive. Pour obtenir sa version définitive, il est nécessaire de se pencher sur les deux autres problèmes soulevés en section 2.8.2, à commencer par le *spread* d'ajustement x_2 .

3.3 Le *spread* d'ajustement

Commençons par rappeler brièvement quelques aspects d'ordre généraux relatifs au *spread* d'ajustement x_2 :

1. Il est calculé à l'émission, comme étant le *spread* à ajouter au taux sans risque pour que la valeur avec défaut de la dette égale le nominal ;
2. Il est caractéristique de l'état du bilan de l'entité émettrice à un instant donné, et synthétise l'ensemble des risques autres que celui de défaut pesant sur l'entité ;
3. Si une nouvelle émission a lieu, il est recalculé, et est utilisé de façon commune aux deux dettes. Nommons provisoirement x'_2 ce *spread* recalculé ;
4. Il empêche de garantir que la valeur de la dette se rapproche de sa valeur nominale couponnée ($N + c$) en se rapprochant de l'échéance, et ce quel que soit le nombre de dettes émises par l'entité ;

Le recalcul évoqué au 3^e point peut faire sens vis-à-vis du 2^e point. En effet, puisque le bilan évolue entre deux émissions, il semble cohérent de mettre à jour x_2 avec les nouvelles informations de bilan. Mais, selon les valeurs \tilde{V} , N , et x_2 , le calcul de x'_2 peut atténuer ou empirer le problème pointé au 4^e point. Le tableau ci-dessous explique l'effet qu'a le recalcul de x_2 :

	$\tilde{V}_l < N_l$	$\tilde{V}_l > N_l$
$x'_2 > x_2$	accentuation	atténuation
$x'_2 < x_2$	atténuation	accentuation

Par exemple, si la valeur de x'_2 diminue par rapport à celle de x_2 , alors l'effet d'actualisation sera plus faible, donc la dette gagnera en valeur, toutes choses égales par ailleurs. Ainsi, si $\tilde{V}_l < N_l$, alors dans ce cas de figure \tilde{V}_l se rapprochera de N_l , d'où l'*atténuation* mentionnée sur la première colonne de la deuxième ligne.

TABLE 3.1 – Impact du changement de *spread* d'ajustement

A proprement parler, le problème n'est donc pas que le *spread* d'ajustement change au cours de la durée de vie, mais plutôt qu'en l'état actuel, il ne change pas forcément de façon cohérente en regard du 4^e point.

En somme, il faut donc une méthode donnant un *spread* d'ajustement permettant d'égaliser la valeur avec défaut et le nominal à l'émission, garantissant que la valeur avec défaut se rapproche du nominal couponné avec la maturité décroissante, et étant capable d'évoluer au fur et à mesure des émissions successives, sans perturbant les points précédents.

Du point de vue de cette convergence, un *spread* x_2 dépendant de la maturité résiduelle T , et convergeant vers 0 en même temps que T permet de satisfaire que \tilde{V} converge vers N_l . De plus, faire converger x_2 vers 0 tout en dépendant du bilan est conforme à sa signification : ce *spread* synthétise un ensemble de risques variés. Pour ne prendre que le

cas du risque de liquidité de la dette, prenons un exemple où nous sommes à quelques trimestres de l'échéance, avec une entité affichant un bilan stable depuis un certain temps et un *SCR* bien couvert. Alors, bien que le risque de défaut est toujours présent, il est relativement raisonnable de supposer que le titre de dette est un investissement presque assimilable à un investissement sans risque. En conséquence, il n'y a que peu de chance que le détenteur du titre cherche à s'en défaire, d'autant que le coupon est souvent un coupon assez élevé. En conséquence, il ne semble pas absurde de ne pas actualiser les flux futurs à un taux beaucoup plus élevé que le taux sans risque.

On peut alors imaginer différentes solutions pour faire tendre x_2 vers 0 : une loi empirique basée uniquement sur des avis d'experts, une interpolation linéaire entre 0 et la dernière valeur calculée pour x_2 , le calcul à chaque valorisation d'une dérive de plus en plus grande, à appliquer à x_2 ... La solution proposée est le calibrage d'une structure par terme :

1. À l'émission d'une dette, celle-ci est projetée avec sa maturité initiale (de $T = 10$ ans), et on calcule ainsi le *spread* $x_2(10)$ permettant de réconcilier la valeur nominale et la valeur avec défaut.
2. Puis, toujours à l'émission, la dette est à nouveau projetée avec les mêmes données d'origine, hormis la maturité, qui est forcée à $T = 9$ ans, et un *spread* $x_2(9)$ est obtenu, répondant aux mêmes objectifs.
3. L'étape précédente est répétée ainsi de suite pour toutes les maturités entières fictives entre $T = 1$ an et $T = 8$ ans.
4. On définit ensuite : $x_2(0) = 0$
5. Puis, une fois les valeurs $(x_2(s))_{s \in \llbracket 0, 10 \rrbracket}$ obtenues pour toutes les maturités entières entre 1 an et 10 ans, une interpolation est effectuée lorsque la maturité résiduelle est non entière^{6, 7}.

Une fois cette structure par terme calibrée, le *spread* d'ajustement utilisé lors de la valorisation faite à la date t_0 dans les équations de la section précédente est $x_2(T)$, T désignant la maturité résiduelle de la dette à la date t_0 . Si une nouvelle dette est émise, une nouvelle structure par terme est calibrée, de la même façon. Cette nouvelle structure par terme annule et remplace la ou les structures par termes calibrées lors des émissions précédentes.

De cette manière, les 4 points mentionnés au début de cette section sont pris en compte : évolution en fonction du bilan, convergence vers 0 et donc cohérence des valorisations, et cohérence entre le changement du *spread* d'ajustement d'une valorisation à l'autre et les impacts qu'il a dans les calculs.

6. Pour rappel, les valorisations ont lieu trimestriellement. Une situation où $T = 1,5$ symbolise donc l'échéance d'une dette arrivant à maturité dans un an et six mois.

7. Le choix de faire une interpolation pour les maturités non entière plutôt que de recalculer comme pour les autres chaque maturité relève d'un argument opérationnel : le temps de calcul complet serait alors trop long.

3.4 L'indice de marché

Il a été vu en section 2.8.2 que le troisième et dernier point méritant une revue dans le modèle de valorisation utilisé est la manière dont est intégrée l'indice de marché. En effet, la manière dont l'indice de marché est ajouté ne semble pas vraiment justifiée : les risques ne sont pas introduits de façon homogène dans la valorisation finale communiquée. Même si le résultat final est explicable, il manque de justification.

Pour introduire l'indice de marché différemment, et de façon cohérente avec les autres risques, commençons par rappeler sa définition. Il correspond à une moyenne arithmétique des attentes de rémunération de la part d'investisseurs, en échange d'un engagement de couverture en cas de défaut. Un indice de marché plus élevé traduira des attentes de rémunération de *CDS* plus élevées, et donc des anticipations de défaut plus importantes. Plutôt que sa valeur même, c'est donc en réalité l'évolution de l'indice qui nous intéresse. Cette évolution est ensuite à intégrer à la valorisation modèle. La solution proposée est d'impacter le *spread* d'ajustement issu de la structure par terme calibrée, $x_2(T)$, à la hausse ou à la baisse, selon l'évolution constatée de l'indice. Il existe plusieurs manières de quantifier l'évolution de l'indice, mais principalement deux : en variation relative ou en variation absolue.

La variation relative, c'est à dire le rapport de l'indice à la date t_0 par l'indice à la date $t_0 - d_p$ peut sembler intuitivement le meilleur ou le logique quand il s'agit de repérer des grandes tendances d'évolution. Cependant, après plusieurs tests effectués, il a été observé en pratique qu'utiliser cette méthode donnait relativement facilement lieu à augmenter ou diminuer le *spread* d'ajustement de $\pm 25\%$ de sa valeur⁸. Cette forte volatilité de l'indice induisait une trop forte volatilité de x_2 et donc une trop forte volatilité dans les valorisations.

La méthode finalement proposée est donc de continuer d'utiliser la variation absolue de l'indice de marché. Notons $\Delta_{idx}(t_0, T)$ cette variation entre t_0 et $t_0 - d_p$ pour une dette de maturité T . Si elle a par exemple une valeur de $5bp$, cela signifie que, depuis la valorisation précédente, les investisseurs de marché souhaitent en moyenne être rémunérés $5bp$ de plus pour le même type d'instrument financier.

La quantité $\Delta_{idx}(t_0, T)$ est donc ajoutée au *spread* d'ajustement issu de la structure par terme, $x_2(T)$, afin de traduire concrètement les grandes tendances de marché dans la valorisation modèle à travers les facteurs d'actualisation.

3.5 L'implémentation

Cette section ne concerne pas la valorisation théorique en elle même, mais plutôt un aspect tout à fait pratique et opérationnel de l'actuariat : l'implémentation de modèles.

Il a été vu en section 2.6 que l'implémentation d'un tel modèle a été faite à l'aide du langage de programmation R. Quelques défauts ont été pointés, notamment la structure des variables, la structure du code et le temps de calcul. La prise en compte de plusieurs flux a nécessité plusieurs changements : la plupart des tableaux ont été redimensionnés,

8. Une comparaison plus complète des deux méthodes est faite en annexe C.4.

certaines morceaux de code supplémentaire ont pu être vectorisés, la structure des fichiers d'input a également été modifiée, afin d'être en cohérence avec le fait de projeter une seule fois le bilan de chaque entité...

Ces modifications de code sont l'occasion d'introduire une méthodologie fort utile dès qu'un travail consiste à modifier une implémentation, dans laquelle certains éléments ne doivent, logiquement, pas changer. C'est le cas ici, comme nous l'avons vu dans la note 5 en bas de la page 53. En effet, peu importe le cadre de projection utilisé⁹, les valeurs hors prise en compte du défaut sont censées être les mêmes (en fixant une graine pour la génération de l'aléa). Donc, si à l'issue de la projection dans chacun des deux cadres, on observe $\widetilde{V}^* \neq V^*$, tous paramètres initiaux égaux par ailleurs, c'est que la nouvelle implémentation (celle du cadre *multi-dette*) n'est pas en cohérence avec l'ancienne (celle du cadre *mono-dette*).

Puis, pour trouver à quel endroit la divergence entre les deux versions d'implémentation se fait, nous pouvons appliquer un procédé théoriquement simple mais très robuste en pratique, inspiré des fonctions de hachages¹⁰. Lors d'une projection, l'espace de travail de la session R est systématiquement rempli d'un ensemble de variables numériques. Il est donc à tout moment possible, mathématiquement et informatiquement, de faire la somme¹¹ de toutes ces variables, pour obtenir un agrégat de l'espace de travail. Cet agrégat n'a bien entendu aucune espèce de signification par rapport à l'étude de valorisation menée, son intérêt est uniquement informatique. En exécutant pas à pas chacune des deux implémentations, et en calculant l'agrégat à chaque étape de calcul, il est possible de repérer facilement et rapidement à quel endroit la divergence entre les deux implémentations se produit.

3.6 Conclusion des modifications

Cette section synthétise l'ensemble de la méthodologie de valorisation, en prenant en compte les modifications discutées dans les sections précédentes : le défaut commun des dettes émises par une même entité, le *spread* d'ajustement et l'indice de marché. Les équations ci-dessous sont celles utilisées pour établir les résultats du chapitre suivant.

Tout d'abord, l'instant de défaut garde la même définition :

$$\tau = \min \left\{ t = 1, \dots, T / \frac{NAV_t}{SCR_t} < 1 \right\}$$

En revanche, nous avons vu qu'a priori, la valeur de l'instant de défaut sera elle, modifiée. La perte en cas de défaut dépend désormais du nominal total de toutes les

9. cadre *mono-dette* ou cadre *multi-dette*

10. Les fonctions de hachage sont des fonctions mathématiques qui, pour une information donnée, garantit l'existence d'une unique valeur, permettant d'authentifier de façon certaine l'information d'entrée. Elles doivent par ailleurs être *pseudo-aléatoire* : changer de façon infime l'information d'entrée doit changer radicalement l'information de sortie. Ces fonctions sont notamment utilisées dans les créations de *blockchains*, afin de garantir l'exactitude et la véracité des informations inscrites sur cette *blockchain*.

11. ou toute autre fonction d'agrégation

dettes émises :

$$\widetilde{LGD}(t) = \max \left\{ 50\%; 1 - \frac{\max \{0; NAV_t\}}{\sum_{l=1}^d N_l \times \mathbb{1}_{\{t \leq T_l\}}} \right\}$$

Au global, on s'attend à une perte en cas de défaut plutôt plus importante. Les flux de chaque dette sont similaires à ceux du cadre mono-dette, mais dépendent désormais tous du même instant de défaut et de la même perte en cas de défaut :

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_{t,l} = & N_l \times (r_t + p_l) \times d_p \times \mathbb{1}_{\{t \leq T_l \wedge \tau\}} \\ & + N_l \times \mathbb{1}_{\{t = T_l \wedge \tau\}} \times \left(1 - \widetilde{LGD}(t) \times \mathbb{1}_{\{\tau \leq T_l\}} \right) \end{aligned}$$

Les estimations sont ici encore faites par simulations, en projetant $n = 3000$ trajectoires. La valeur finale communiquée de la dette totale est obtenue en actualisant les flux futurs prenant en compte le défaut de chaque dette. L'actualisation se fait au taux sans risque impacté d'un indice de marché, et augmenté d'un *spread* issu d'une structure par terme calibrée à l'émission de la dette la plus jeune :

$$\begin{aligned} \widetilde{V} = & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^d N_l \times \left[d_p \times \sum_{t \leq T_l \wedge \tau^{(k)}} \delta_{x_2(T_l) + \Delta_{idx}(t_0, T_l)}^{(k)}(t) (p_l + r_t^{(k)}) \right. \\ & \left. + \delta_{x_2(T_l) + \Delta_{idx}(t_0, T_l)}^{(k)}(T_l \wedge \tau^{(k)}) (1 - \widetilde{LGD}^{(k)}(T_l \wedge \tau^{(k)}) \times \mathbb{1}_{\{\tau^{(k)} \leq T_l\}}) \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Impact qualitatif sur la valorisation

Ce court paragraphe a pour objectif de résumer les différents impacts attendus de ces modifications sur les valorisations de chaque dette.

Tout d'abord, la prise en compte du défaut commun aura tendance à augmenter le nombre de défauts. En particulier, pour une dette donnée, le nombre de défauts subis dans un cadre multi-dette sera supérieur ou égal au nombre de défaut subis dans un cadre mono-dette. Ainsi, cette première modification aura globalement tendance à diminuer la valorisation de chaque dette.

L'introduction d'une structure par terme pour le *spread* d'ajustement est plus délicate à traiter, car l'impact dépend en partie de la valeur qu'avait préalablement ce *spread*. Cependant, la structure par terme converge par construction vers 0. Pour les dettes de maturité résiduelle plus faible, l'utilisation de cette structure par terme aura plutôt tendance à diminuer l'effet d'actualisation, et donc à augmenter la valorisation de chaque dette.

Le changement de l'intégration de l'indice de marché aura un impact facilement prévisible, mais toutefois assez limité. Comme nous avons pu le voir en section 2.5.2, l'indice de marché a de toute façon une valeur numérique assez faible par rapport au *spread* d'ajustement, et ne sera donc pas la principale source de variation du facteur d'actualisation. Cependant, son impact sera toutefois celui attendu : un indice variant à la hausse impactera négativement la valorisation et vice-versa.

Chapitre 4

Étude des résultats obtenus et interprétation

Le modèle de valorisation utilisé jusqu'à ce jour a été présenté en chapitre 2. Les différents aspects de la valorisation ont été vus à travers un exemple concret, et divers problèmes ont été abordés. Le chapitre 3 propose un nouveau cadre pour mener à bien la valorisation, de façon plus cohérente et plus juste. À chaque modification menée, une étude qualitative de l'impact sur la valorisation a été donnée.

Il est proposé ici d'étudier plus en détail et de façon numérique les impacts des modifications théoriques menées au chapitre 3. Tout au long de ce chapitre, des comparaisons sont faites entre le cadre mono-dette et le cadre multi-dette. L'entité dont le bilan est projeté et dont les dettes sont valorisées est la même que celle utilisée pour l'exemple à la fin du chapitre 2. Il est bon de rappeler que les variations qui nous intéressent ici sont celles causées par le changement de cadre de projection, et non par rapport à un changement de bilan.

En premier lieu sera étudié le défaut en lui-même : instant de défaut, probabilité de défaut, et pertes en cas de défaut. Puis nous verrons l'impact sur les flux reçus par le fonds. Afin d'isoler cette première modification des autres, une valorisation modèle sans prendre en compte les changements sur le *spread* d'ajustement et sur l'indice de marché sera notamment donnée.

Enfin, après avoir présenté la structure par terme calibrée, nous verrons ce que cela change dans la valorisation de prendre une structure par terme pour le *spread* d'ajustement. Une deuxième et troisième valorisations seront alors données, d'abord sans, puis avec l'indice de marché.

En dernier lieu, bien que ce ne soit pas le cœur de ce travail, nous verrons comment les impacts du changement de cadre de projection peuvent être plus ou moins amplifiés par les variables du bilan fourni.

4.1 Préambule

4.1.1 Rappel du bilan et des dettes projetées

Il est rappelé ci-dessous le bilan de l'entité, ainsi que quelques grandeurs utiles à la valorisation et à la comparaison des deux méthodes de projection.

Nom de la variable	Valeur	Valeur recalculée
Actif		
Valeur de marché de l'Actif	962 000 000	960 500 000
Taux de croissance de l'Actif (historique)	1%	1%
Volatilité de l'Actif	4%	4%
BEL		
Best Estimate Liabilities - BEL	650 000 000	650 000 000
Volatilité du BEL	15%	15%
Quote-part des réserves servies en prestations	10%	10%
Duration du Passif ventilée par branche	5	5
Cotisations		
Montant des cotisations perçues	100 000 000	100 000 000
Taux de croissance des cotisations	1%	1%
Volatilité des cotisations	2%	2%
Ratio combiné		
Ratio combiné réalisé initial	100%	100%
Ratio combiné cible	100%	100%
Volatilité du ratio combiné	2%	2%
Indicateurs de Solvabilité initiaux		
SCR	150 000 000	150 000 000
Fonds propres	267 000 000	265 500 000
Taux de couverture du SCR	178%	177%

Fonds propres subordonnés		
<i>Inclus dans les fonds propres</i>	Dettes 1	Dettes 2
Nominal de la Dette Subordonnée	15 000 000	10 000 000
Taux de rémunération additionnelle au-delà de l'EURIBOR	6,00%	7,00%
Spread d'ajustement	7,60%	7,60%
Maturité initiale	10	10
Maturité résiduelle	3	7
Monnaie	EUR	EUR

FIGURE 4.1 – Rappel des variables projetées

Le nombre de simulations utilisées pour l'ensemble de ce chapitre est de $n = 10\,000$, et la courbe des taux utilisée est la même que celle utilisée dans l'exemple 2.7.

4.1.2 Rappel des résultats de la valorisation mono-dette

On rappelle ici quelques résultats obtenus en projection mono-dette pour chacune des deux dettes, lors de la section 2.7 :

Nom	Variable	Dette 1	Dette 2
Valorisation modèle	V_{t_0}	14 156 008	9 497 116
Valorisation marché	P_{t_0}	15 132 936	9 952 276
Valorisation finale	Q_{t_0}	14 928 360	9 845 617
Prix	$\frac{Q_{t_0}}{N}$	99,522%	98,456%
<i>Spread</i> de la dette	r_{t_0}	6,18%	7,29%

TABLE 4.1 – Rappel de quelques résultats de la projection mono-dette

4.1.3 Nomenclature et représentation

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'impact de la mise à jour du modèle sur la valorisation. Ceci revient donc à analyser comment la prise en compte des défauts communs à plusieurs dettes influe sur la valorisation en elle-même, mais aussi sur les anticipations de défaut des entités du fonds. Dans ce chapitre, avec notre entité décrite dans la sous-section précédente, il est donc nécessaire de comparer trois projections : deux projections pour lesquelles chaque dette est projetée sans considération de l'autre¹ et une où les deux dettes sont projetées ensemble². Les analyses portent sur les variations qu'il peut exister entre les deux premières projections et la troisième.

Afin de simplifier la lecture, les formulations suivantes sont introduites :

- "Projection D_1 " fait référence à la projection de la première dette, projetée en cadre *mono-dette* (c'est à dire seule) ;
- "Projection D_2 " fait référence à la projection de la deuxième dette, projetée en cadre *mono-dette* (c'est à dire seule) ;
- "Projection commune" ou "projection multi-dette" fait référence à la projection des deux dettes projetées ensemble, donc en cadre *multi-dette*.

De plus, en matière de représentation graphique, la couleur bleue concerne des éléments relatifs à la projection D_1 , la couleur rouge des éléments relatifs à la projection D_2 , et la couleur violette des éléments relatifs à la projection multi-dette.

4.1.4 Commentaire sur la génération des aléas

Un dernier détail a son importance pour comprendre pourquoi certains résultats seront plus commentés que d'autres. Ce modèle de projection et de valorisation a été implémenté en R. Afin de profiter au mieux des capacités de ce langage, un maximum

1. c'est à dire comme c'était fait préalablement à ce mémoire, comme au chapitre 2

2. c'est à dire de la façon étudiée au chapitre 3

d'opérations ont été vectorisées, dont la génération des aléas. Concrètement, pour cette opération, un vecteur de taille $n \times T_{max} \times d_p$ est créé, où T_{max} est la maturité de la dette projetée dans le cadre mono-dette, ou bien la maturité la plus grande dans le cadre mono-dette³. Ce vecteur est ensuite mis sous forme de tableau, qui est utilisé à chaque étape de la projection. L'utilisation d'une graine pour la génération de ces aléas garantit que les aléas subis par l'entité dans la projection D_2 sont les mêmes que ceux subis par l'entité dans la projection multi-dette, puisque T_{max} a la même valeur dans ces deux projections. En revanche, la graine garantit également que ces aléas ne sont pas les mêmes que ceux de la projection D_1 , puisque la valeur de T_{max} n'est plus la même.

C'est pour cette raison que la comparaison des projection D_2 et multi-dette est possible dans le détail, et qu'au contraire la comparaison des projections D_1 et multi-dette doit rester globale.

Il aurait été possible sans difficulté de contourner ceci en modifiant la génération des aléas dans la projection D_1 . Le choix fait a été de rester un maximum fidèle au procédé utilisé jusqu'à ce jour, et donc de garder cette singularité : en simulation mono-dette, deux dettes émises par une même entité ne seront pas impactées par les mêmes aléas.

4.2 Impacts sur le défaut

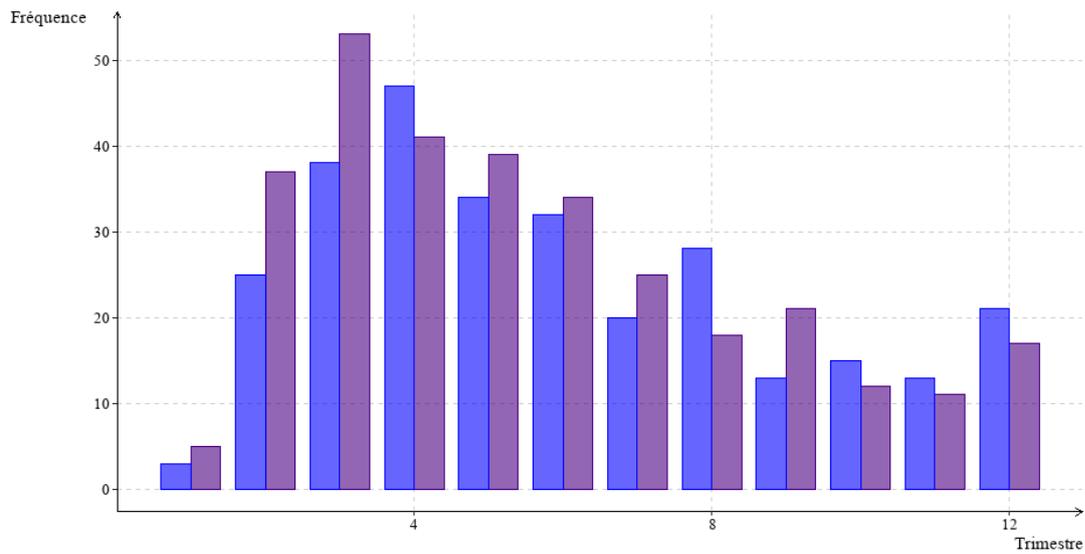
4.2.1 Les instants de défaut

L'objectif ici est de comparer l'impact qu'a eu la prise en compte de plusieurs flux dans les instants de défauts. Pour rappel, lors du chapitre 3, l'effet attendu sur l'instant de défaut était une augmentation de la fréquence ou de la vitesse d'apparition.

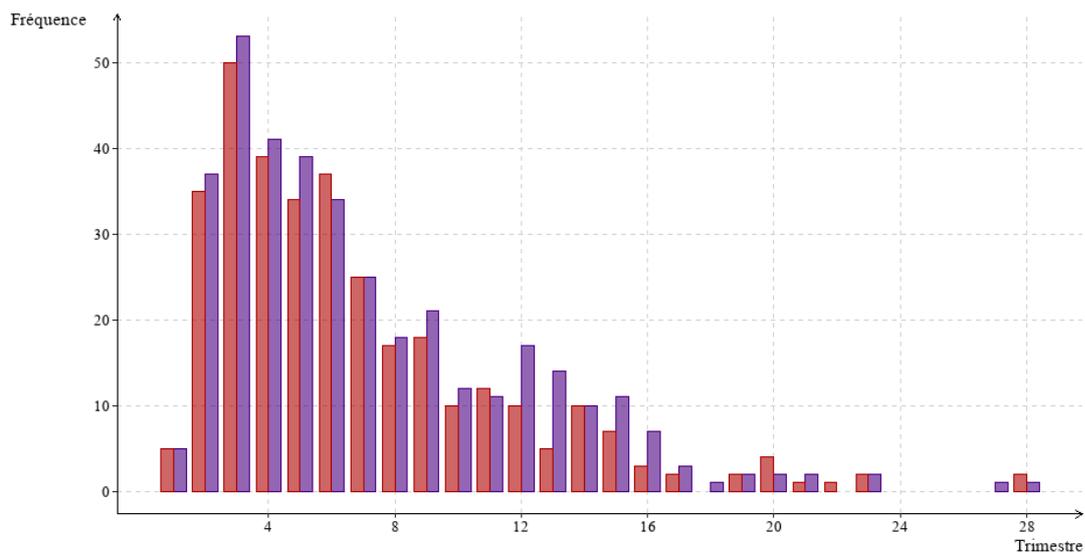
Une comparaison numérique du nombre de défauts survenant à chaque instant est faite en tableau D.1 en annexe. Ces données numériques permettent d'établir les deux histogrammes en page 67. On tire de ces deux histogrammes une impression proche de celle attendue : les défauts du cadre multi-dette arrivent effectivement plus tôt et sont plus nombreux que les défauts du cadre mono-dette.

En particulier, on distingue un phénomène intéressant au 12^e trimestre de l'histogramme 4.2b. Cet histogramme compare le nombre de défauts à chaque instant de la projection D_2 avec le nombre de défaut à chaque instant de la projection commune. En projection commune, le 12^e trimestre correspond à celui où la première dette est remboursée, c'est à dire un flux sortant de 15 millions d'euros pour l'entité. À cet instant et au suivant, on observe une augmentation du nombre de défauts en cadre multi-dette par rapport à la projection de D_2 seule.

3. c'est à dire que $T_{max} = 3$ pour la projection D_1 , et $T_{max} = 7$ pour les projections D_2 et multi-dette.



(a) Dette 1



(b) Dette 2

La différence d'échelle sur l'axe des abscisses est causée par les maturités de chacune des deux dettes. En projection *multi-dette* (représentée par la couleur violette) les instants de défauts sont communs aux deux dettes : les histogrammes violets sont les mêmes sur les deux figures présentes.

FIGURE 4.2 – Défauts subis à chaque instant par chaque dette entre les cadres mono-dette et multi-dette

Confirmons l'apparence graphique par quelques calculs numériques, à commencer par le nombre total de défauts. Pour chaque projection, le nombre total de défauts subis à maturité de chaque dette est reporté dans le tableau suivant :

	Nombre de défauts		
	Projection 1	Projection 2	Projection commune
À maturité de la dette 1 (3 ans)	289	292	313
À maturité de la dette 2 (7 ans)	-	331	369

Lecture : lors de la projection de la deuxième dette en cadre mono-dette, il a été observé 331 défauts au bout de 7 ans. Lors de la projection en cadre multi-dette il a été observé 369 défauts au bout de 7 ans. La dette 1 ayant une maturité de 3 ans, il n'y a pas lieu de regarder le nombre de défaut à 7 ans quand on la projette toute seule.

TABLE 4.2 – Comparaison du nombre de défauts à maturité de chaque dette, selon le cadre de projection

On constate immédiatement le fait qu'à maturité de chacune des dettes, le nombre de défauts est plus important quand on projette communément les deux dettes, qui se retrouvent alors impactées par les mêmes défauts. Passer d'un cadre de projection mono-dette à un cadre de projection multi-dette augmente donc bien le nombre de défauts. À maturité des dettes, cette augmentation est d'environ 9%⁴, ou de façon équivalente, projeter chaque dette indépendamment de l'autre sous-estime le nombre total de défauts d'environ 8% ($= \frac{1}{1+9\%} - 1$).

En plus de cette première analyse, nous pouvons regarder si les instants de défaut arrivent plus tôt. À cette fin, une première idée est de regarder l'instant de défaut moyen, parmi les trajectoires aboutissant au défaut. Cet instant moyen de défaut est de 6 trimestres pour la projection D_1 , de 6,8 trimestres pour la projection D_2 , et de 7,16 trimestres pour la projection multi-dette. Il semble que nous obtenions un résultat un peu contre-intuitif : en moyenne le défaut arriverait plus tard dans le cadre multi-dette.

Cependant, il existe deux biais dans ces calculs. Premièrement, le défaut moyen de 6 trimestres concerne la projection de la première dette en solo : ce résultat se base sur une projection de seulement 12 trimestres. Ceci implique qu'il n'y aura de toute façon jamais le moindre défaut au delà de 12 trimestres, dans cette projection. Ce chiffre n'est pas calculé sur le même support que les deux autres. Au contraire, les défauts moyens de 6,8 trimestres et 7,16 trimestres se basent sur des projections de 28 trimestres, il semble déjà plus pertinent de les comparer. Mais, le deuxième biais est que ces deux valeurs ne se basent pas sur le même nombre total de défauts (331 pour le premier, 369 pour le second). Ils ne sont donc pas estimés avec des échantillons de même taille, ce qui peut poser problème.

4. $\frac{313}{289} - 1 = 8,30\%$; $\frac{313}{292} - 1 = 7,19\%$; $\frac{369}{331} - 1 = 11,48\%$

Une deuxième idée consiste donc à regarder les trajectoires menant au défaut aussi bien dans la projection D_2 que dans la projection multi-dette. Il sera alors possible de distinguer (ou non) une tendance particulière dans les instants de défaut, au sein de ces trajectoires. De ce point de vue, les 331 trajectoires menant au défaut dans la projection D_2 sont également des trajectoires menant au défaut dans la projection multi-dette. Parmi ces 331 trajectoires, 303 ont des instants de défaut communs entre la projection D_2 et la projection multi-dette. Les 28 trajectoires restantes ont pour point commun d'avoir des instants de défaut plus petits dans le cadre multi-dette que dans le cadre mono-dette. Ceci montre donc une certaine tendance à faire arriver le défaut plus rapidement.

Existe-t-il une loi empirique de l'instant de défaut ?

De façon empirique, il semble qu'une loi Binomiale Négative se dégage des histogrammes 4.2, que ce soit en projection mono-dette ou en projection multi-dette⁵.

La loi binomiale négative de paramètres r et p est la loi de la variable aléatoire qui compte le nombre d'échecs dans une série d'épreuves de Bernoulli de paramètre p avant d'obtenir r succès. Cette loi dépend de deux paramètres, usuellement notés r et p . Le premier représente le nombre de succès que l'on cherche à obtenir, et le second représente la probabilité du succès dans le schéma de Bernoulli sous-jacent.

À l'aide de R, et particulièrement de la librairie MASS, il est possible de calibrer une loi binomiale négative sur les données d'instant de défaut. Les paramètres obtenus par maximum de vraisemblance et avec la distribution des instants de défaut de la projection multi-dette sont les suivants :

p	0,3438
r	3,75

L'interprétation à donner à ces paramètres est délicate voire impossible dans la mesure où une loi binomiale négative est construite sur l'hypothèse que les épreuves de Bernoulli sont indépendantes et identiquement distribuées (ce qui s'apparente classiquement à un tirage avec remise). En réalité, dans une trajectoire donnée, le défaut ne survient qu'une fois, et est définitif : on n'observe ni indépendance ni remise. Donc, même si nous observons empiriquement une loi binomiale négative, il n'est pas vraiment possible d'en interpréter les paramètres en les rapprochant de ce qu'ils signifient dans la définition classique de la loi.

Avant de tirer une conclusion, nous pouvons regarder ce que le calibrage de cette loi donne sur la projection D_2 . Comme le montre le tableau suivant :

p	0,3563
r	3,77

5. À la lecture de ces histogrammes, on pourrait également penser à une loi Poisson. Nous ne la retenons pas ici car cette loi suppose entre autres que la moyenne et la variance sont égales. Or, pour ne prendre que le cas de la projection multi-dette, la moyenne est de 7,1 trimestres, et la variance de 22,7.

Sans grande surprise au vu de l'histogramme 4.2b, ces paramètres sont très proches : ceci laisse penser que les deux distributions sont les mêmes. Un moyen de vérifier cela est de faire un test d'hypothèse pour voir s'il est possible ou non de rejeter l'hypothèse selon laquelle la distribution de l'instant de défaut dans le cadre mono-dette est la même que la distribution de défaut dans le cadre multi-dette. Plusieurs tests sont possibles pour ceci, par exemple le test de Wilcoxon-Mann-Whitney, servant à comparer si deux échantillons de données $(X_i)_i$ et $(Y_j)_j$ suivent la même loi. Un aspect louable de ce test est qu'il ne nécessite pas obligatoirement que les deux échantillons aient la même taille, ce qui est notre cas ici.

Dans ce test, les deux hypothèses sont les suivantes :

- H_0 : Les deux distributions sont identiques ;
- H_1 : Les deux distributions sont différentes.

La statistique de test est $U = \sum_i \sum_j g(X_i, Y_j)$, où $g(x, y)$ vaut 1 si $x > y$, 0,5 si $x = y$ et 0 si $x < y$. Cette statistique peut être approchée par une loi normale, et c'est ainsi que, pour un niveau de confiance donné, le test conclue sur la possibilité ou non de rejeter l'hypothèse nulle.

Dans notre cas de figure, nous pouvons mener ce test avec les instants de défauts dans la projection D_2 et dans la projection commune, à l'aide de la fonction `wilcox.test`, de la librairie `stats` de R. La valeur de la statistique de test est de 58 321, et la *p-value* de 0,31. Nous ne disposons donc pas d'assez d'informations pour rejeter l'hypothèse nulle, selon laquelle les deux distributions ont la même loi.

Que conclure de cette étude ?

Tout d'abord, quelle que soit la projection, on distingue que la distribution de l'instant de défaut semble suivre une loi binomiale négative. Cependant, passer d'une projection mono-dette à une projection multi-dette augmente bel et bien le nombre de défauts, le faisant passer de 331 sur 10 000 à 369 sur 10 000 en 28 trimestres. Ensuite, passer d'une projection mono-dette à une projection multi-dette a également tendance à avancer légèrement l'instant de défaut : parmi les 331 trajectoires menant au défaut dans les deux projections, 28 ont un défaut ayant lieu plus tôt dans la trajectoire multi-dette. En revanche, cette dégradation du défaut n'est pas suffisante pour affirmer que la distribution de l'instant de défaut change.

En conclusion, passer d'un cadre de projection mono-dette à un cadre de projection multi-dette dégrade les instants de défaut sans pour autant en changer la distribution.

4.2.2 Évolution de la probabilité de défaut

Ayant étudié les instants de défaut dans la sous-section précédente, nous avons vu le nombre exact ou cumulé de défauts à chaque instant. Cette sous-section n'a donc qu'un intérêt illustratif, dans la mesure où il suffit de diviser par 10 000 les chiffres des paragraphes précédents pour obtenir les probabilités de défaut empiriques. Ces probabilités de défaut sont représentées sur la figure suivante :

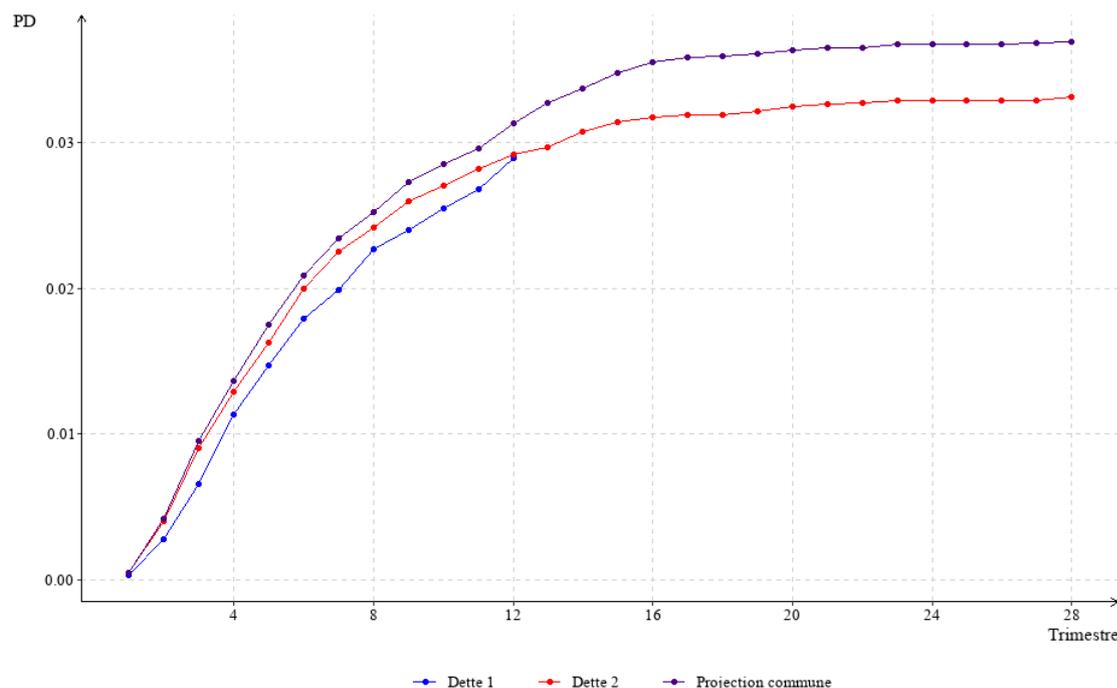


FIGURE 4.3 – Évolution de la probabilité empirique de défaut

On retrouve dans cette figure les constats de la section précédente. Tout d'abord, entre 1 et 12 trimestres (maturité de la dette 1), les probabilités de défaut empiriques de la projection D_2 (en rouge) sont très proches et légèrement inférieures à celles de la projection multi-dette (en violette) : pour un même aléa, la projection multi-dette fait globalement subir un peu plus de défauts à l'entité. D'autre part, cet écart entre les courbes rouge et violette se creuse naturellement au fil du temps : l'augmentation du nombre de défauts concerne tous les instants. En particulier, cet écart se creuse subitement entre les trimestres 11 et 16, puis reste relativement constant après. Ceci s'explique par le fait que le trimestre 12 est la maturité de la dette 1. À cette date, la dette est remboursée et l'entité voit automatiquement ses fonds propres diminuer de 15 millions d'euros (le nominal de la dette 1). Cette baisse soudaine a deux effets. Le premier est de provoquer à cet instant particulier un certain nombre de défauts en plus. Le second

est que l'entité est alors moins bien couverte⁶. Ainsi, l'entité est moins bien parée pour survivre aux quelques trimestres qui suivent, et encore moins dans les trajectoires où la situation est déjà défavorable à l'entité. En conséquence, un certain nombre de défauts supplémentaires apparaissent dans les quelques trimestres qui suivent le remboursement de la première dette.

4.2.3 Évolution de la perte en cas de défaut

En équation 3.2 a été présentée une nouvelle formule de la perte en cas de défaut (la *LGD*), afin d'avoir une perte en cas de défaut cohérente avec l'émission de plusieurs dettes subordonnées. Bien que l'anticipation des valeurs données par cette formule soit rendue compliquée à cause des effets multiples de la prise en compte de plusieurs dettes, l'impact attendu était globalement une hausse de la *LGD*. De plus, il s'agit d'une quantité calculable à tout instant, sans considération du défaut de l'entité : une valeur de 24% à un instant t par exemple n'indique seulement que, si jamais l'entité fait défaut à cet instant t précis, la perte subie par l'investisseur sera de 24%.

La *LGD* considérée par la suite est celle du Code des Assurances, dont la formule est reprise ci-dessous :

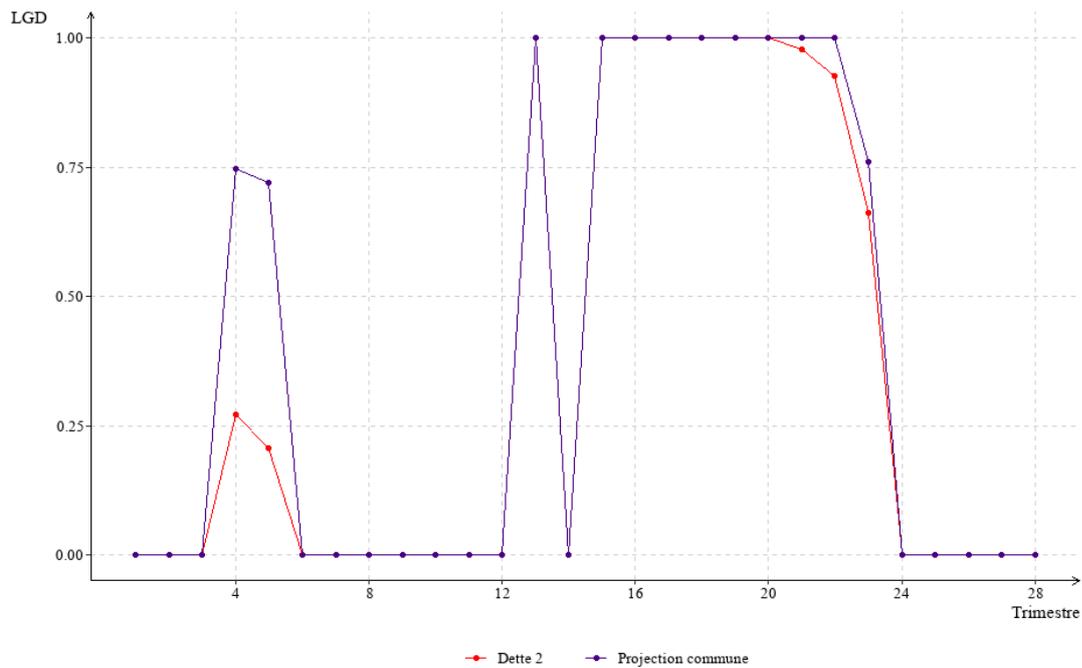
$$\widetilde{LGD}(t) = \max \left\{ 0\%; 1 - \frac{\max \{0; NAV_t\}}{\sum_{l=1}^d N_l \times \mathbb{1}_{\{t \leq T_l\}}} \right\}$$

On choisit exceptionnellement de prendre cette formule ici pour constater l'impact qu'a le plancher de 50% issu du règlement délégué. Le premier constat est le suivant : sur l'ensemble des 28 trimestres (=7 ans) simulés 10 000 fois, la *LGD* donnée par la formule précédente n'est non nulle que 19 fois, aussi bien dans la projection D_2 que dans la projection commune.

Bien que cet échantillon de valeurs soit de petite taille, il est possible de calculer une *LGD* moyenne à chaque instant, représentée sur le graphique 4.4 en page 73. Cependant, nous pouvons tout de même constater que la *LGD* empirique de la projection multi-dette a tendance à effectivement être supérieure ou égale à celle de la projection mono-dette.

Enfin, bien qu'il n'y ait pas de lien immédiat entre une *LGD* non nulle et le taux de défaut, nous pouvons regarder quelle est la *LGD* empirique moyenne aux 369 instants de défaut survenus dans les 10 000 trajectoires. Le constat est simple : à ces instants de défaut, la *LGD* est toujours nulle. D'une part, ceci appuie l'intérêt de prendre la perte en cas de défaut définie dans le règlement délégué, c'est-à-dire avec un plancher de 50%. Autrement, la perte estimée pour l'investisseur serait toujours nulle (modulo un nombre de coupons reçus moins important que prévu). D'autre part, ceci implique pour notre exemple particulier, que la *LGD* effectivement appliquée aux instants de défauts est la même dans les projections D_2 et multi-dette). En d'autres termes, le seul écart sur les flux reçus dans chaque projection est causé par l'écart des instants de défauts, et non pas par un éventuel écart qui aurait pu apparaître sur la *LGD*.

6. Pour rappel, à la date de calcul, cette dette de 15 millions d'euros représente 10% du SCR de l'entité



Sur ce graphique, une valeur nulle de la LGD pour un trimestre (par exemple au trimestre 8), indique qu'à ce trimestre particulier la LGD empirique du code des assurances a toujours été nulle. Une valeur non nulle pour un autre trimestre (par exemple au trimestre 4), indique la valeur moyenne des LGD empiriques non nulles constatées à ce trimestre.

FIGURE 4.4 – Évolution de la LGD empirique entre le cadre mono-dette et le cadre multi-dette

4.3 La valorisation modèle

4.3.1 Les flux

Nous l'avons vu en chapitre 3, les flux hors prise en compte du défaut de chacune des deux dettes sont les mêmes dans les deux cadres de projection. Ces flux permettent d'ailleurs de vérifier la cohérence de l'implémentation du cadre multi-dette avec l'implémentation du cadre mono-dette.

Avec prise en compte du défaut, le changement dans le flux concerne simplement la valeur de l'instant de défaut. En effet nous avons vu dans la section précédente que la perte en cas de défaut appliquée, dans notre exemple particulier, ne change pas. En section 4.2.1, nous avons vu que 28 trajectoires ont un instant de défaut plus petit dans la projection multi-dette par rapport à la projection D_2 , et 38 trajectoires mènent au défaut dans la projection multi-dette et non dans la projection D_2 . Les seules différences dans les flux reçus par le fonds au titre de la 2^e dette vont donc se faire sur ces 66 trajectoires. Traitons ces deux cas un par un.

Tout d'abord, pour le cas des 28 trajectoires dans lesquelles le défaut arrive plus tôt en projection multi-dette, le temps d'attente entre les deux défauts est répertorié dans le tableau suivant :

Trimestres d'écart	Nombre
1	21
2	1
3	3
5	1
6	1
9	1
Total :	28

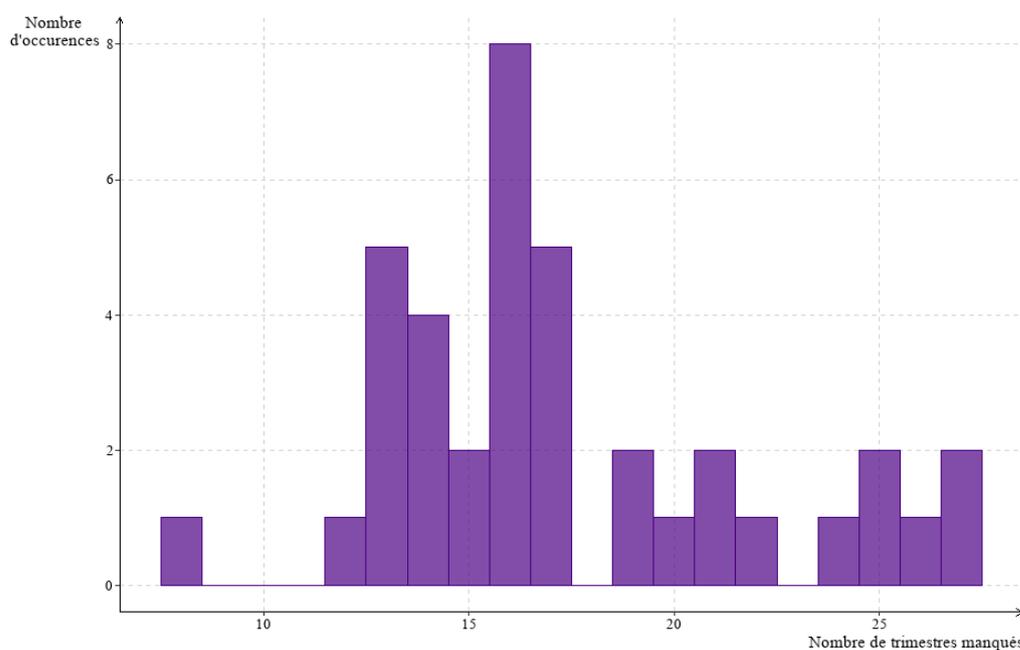
Lecture : Sur les 28 trajectoires pour lesquelles le défaut arrive plus tôt en projection multi-dette, 21 d'entre elles ont un défaut qui arrive 1 trimestre plus tôt que dans la projection D_2 .

TABLE 4.3 – Temps d'attente entre les défauts de la projection D_2 et la projection multi-dette

L'interprétation de ces écarts est la suivante : en projection multi-dette, le fonds (l'investisseur) recevra 52 coupons de moins⁷ au titre de la deuxième dette qu'en projection mono-dette, pour ces trajectoires.

Pour les 38 trajectoires en défaut seulement dans la projection multi-dette, nous pouvons regarder combien de coupons et de nominaux sont manqués à cause de ces défauts supplémentaires. Les résultats sont retranscrits dans l'histogramme suivant :

7. $21 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times 3 + 1 \times 5 + 1 \times 6 + 1 \times 9$



Lecture : Sur les 38 trajectoires pour lesquelles le défaut n'arrive que dans la projection multi-dette, 2 arrivent à 15 trimestres de l'échéance.

Observations comptées ici : {8; 12; 13; 13; 13; 13; 13; 14; 14; 14; 14; 15; 15; 16; 16; 16; 16; 16; 16; 16; 16; 17; 17; 17; 17; 17; 19; 19; 20; 21; 21; 22; 24; 25; 25; 26; 27; 27}

FIGURE 4.5 – Temps d'attente entre les défauts de la projection D_2 et la projection multi-dette

L'interprétation de ces écarts est la suivante : les 38 trajectoires menant au défaut uniquement en projection multi-dette génèrent au total 660 coupons de moins qu'en projection mono-dette, et 38 fois où le nominal n'est qu'à moitié remboursé.

Au total, sur les 10 000 trajectoires, ce sont donc 712 coupons et 38 moitiés de nominaux qui n'ont lieu que dans la projection D_2 (par rapport à la projection multi-dette). Ce nombre peut sembler très important, mais il est à mettre en perspective avec le fait que d'une part, au total, 10 000 trajectoires de 28 trimestres représentent 280 000 flux potentiels, et d'autre part qu'un effet d'actualisation est plus ou moins fort selon la date du flux.

Regarder la temporalité des différents flux financiers de la dette 2 dans différents cadres de projection revient à peu de choses près à s'intéresser à la durée de cette dette dans chacun des deux cadres de projection. Cependant, l'ensemble de ce qui a pour l'instant été fait sur ce chapitre participe à conclure que même si la vision du risque

de défaut est un peu détériorée, elle ne l'est pas nécessairement assez pour observer des perturbations significatives sur les variables les plus globales.

Ce constat est encore vérifié sur la durée de la dette 2, reportée ci-dessous :

	Projection D_2	Projection commune
Duration	5,01	5
Duration modifiée	4,87	4,86

À noter que la durée dépend de la façon dont sont actualisés les flux futurs, et que nous pourrions être amenés à réviser ce jugement une fois le changement du *spread* d'ajustement effectué.

4.3.2 La distribution des valorisations modèle

Compte tenu des observations des paragraphes précédents, nous pouvons nous attendre à ce que la distribution des valorisations modèle (c'est à dire sans prendre en compte l'indice de marché) de la dette 2, ne change pas du tout au tout entre la projection D_2 et la projection multi-dette. Pour étudier ceci graphiquement, on trie chacune des deux distributions par ordre croissant, et on trace la répartition des 400 pires valorisations (sur 10 000) sur un même graphique, affiché ci-dessous :

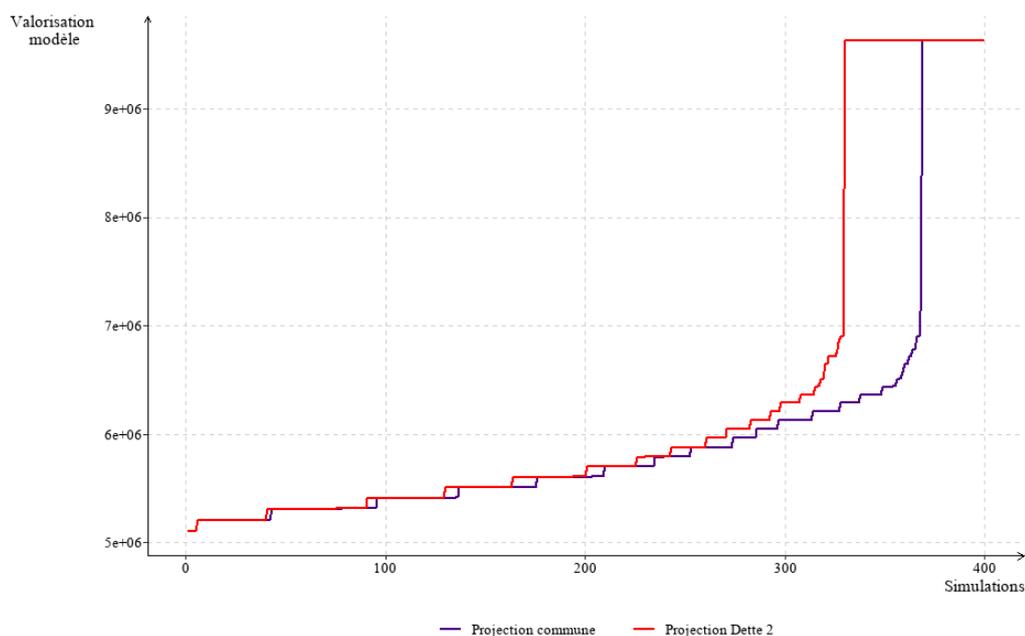


FIGURE 4.6 – Distribution des valorisations modèle de la projection D_2 et de la projection multi-dette

Sur ce graphique, on distingue bien les 331 (resp. 369) défauts de la projection D_2

(resp. projection multi-dette). On retrouve également que l'essentiel des différences de valorisation se joue sur les 38 défauts de plus dans la valorisation multi-dette.

4.3.3 La valorisation modèle finale

Toute cette étude faite, nous pouvons enfin obtenir une valorisation modèle de chaque dette dans le cadre multi-dette, et la comparer à la valorisation modèle de chaque dette projetée seule. Ces valorisations sont présentées dans le tableau suivant :

	Projection mono-dette	Projection multi-dette	Variation
Dette 1	14 156 008	14 137 638	-0,130%
Dette 2	9 497 116	9 482 962	-0,149%

TABLE 4.4 – Variation des valorisations modèle entre le cadre mono-dette et le cadre multi-dette

Il est important de se souvenir que cette valorisation modèle dépend entre autres du *spread* d'ajustement, et sera donc revue après les modifications apportées à ce paramètre.

4.4 La structure par terme pour le *spread* d'ajustement et l'impact de marché

4.4.1 La structure par terme

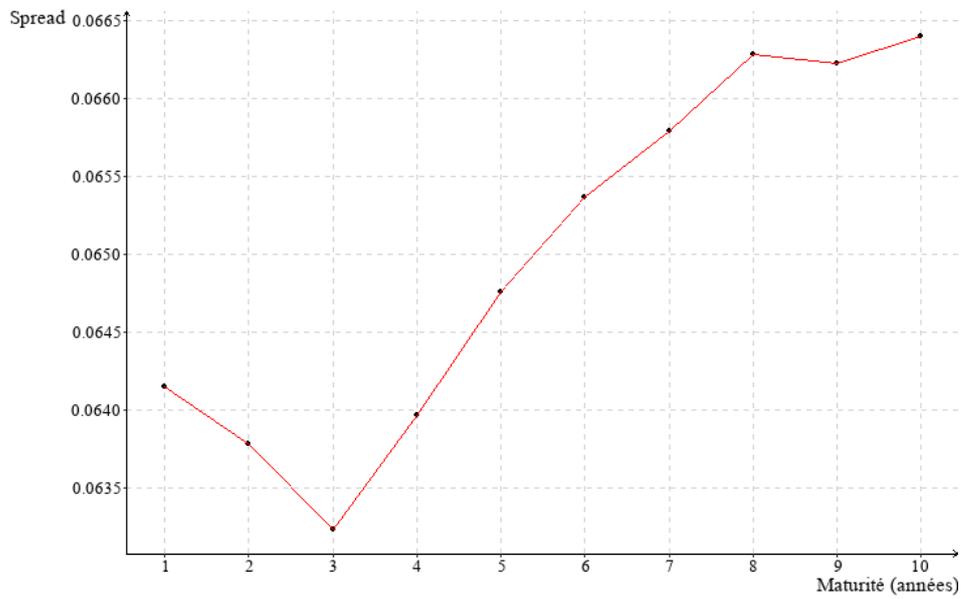
Pour rappel, le travail à propos du *spread* d'ajustement (noté x_2) avait pour objectif de répondre simultanément à plusieurs critères : faire converger la valorisation de la dette vers le nominal couponné avec la maturité, d'en choisir une valeur intuitive quand plusieurs émissions de dette ont eu lieu, puis évoluant de façon cohérente avec ces deux derniers points dès qu'une nouvelle émission a lieu.

La solution proposée a été de calibrer une structure par terme de ce *spread* d'ajustement, convergeant par construction vers 0, et à mettre à jour à chaque nouvelle émission de dette.

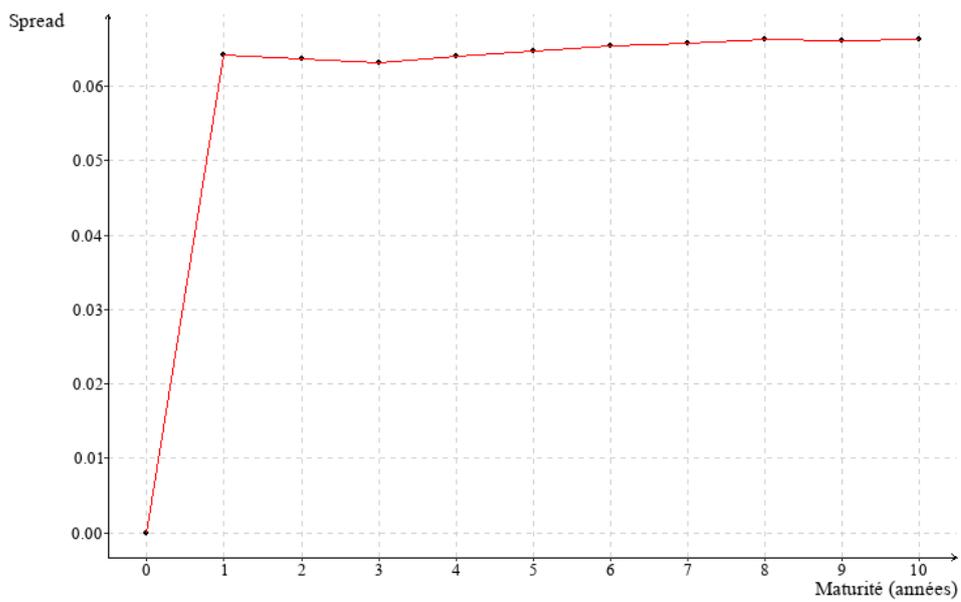
Puisque les mises à jour du modèle de valorisation ont été effectives pour la valorisation de juin 2023, la structure par terme de x_2 a été calibré avec le bilan fourni, arrêté au 31/03/2023. Limité par la puissance de calcul, cette structure par terme n'a été calibrée qu'avec des jeux de 3000 simulations pour chaque maturité. Cette structure par terme est représentée sur le graphique 4.7, les maturités 1-10 ans sont représentées sur les graphiques 4.7a, et les maturités 0-10 ans sur le graphique 4.7b, le tout en page 79. Sur ces courbes, le point (0;0) a été renseigné à la main, et correspond à la théorie : à un instant infinitésimal de l'échéance, si l'entité n'est pas en défaut, il n'y a *a priori* plus de risque.

Pour les maturités non entières, le spread x_2 utilisé est calculé par interpolation linéaire des deux maturités entières les plus proches.

On constate que cette structure par terme a un creux à la maturité 3 ans, ou en d'autres termes, ne converge vers 0 que parce que nous l'avons décidé, en imposant le point (0;0).



(a)



(b)

Note : Le graphe (a) n'est qu'un agrandissement du graphe (b)

FIGURE 4.7 – Structure par terme du *spread* d'ajustement

Tâchons d'expliquer qualitativement la forme qu'a cette courbe, en répondant à 3 questions : Pourquoi x_2 est-il toujours positif? Pourquoi est-il proche du coupon à maturité 10 ans? Pourquoi observe-t-on un creux à maturité 3 ans?

Pourquoi x_2 est il toujours positif?

Considérons une dette à coupon variable $r_t + p$, actualisée seulement au taux sans risque r_t , et avec p de l'ordre de grandeur observé jusqu'à maintenant, entre 5% et 7%. Dans ces conditions, la haute valeur de p contribue pour beaucoup à la valorisation de la dette, suffisamment pour combler la baisse de valorisation causée par les défauts simulés, à tel point que la valeur actualisée seulement au taux sans risque en prenant en compte le défaut est supérieure au nominal. Pour retrouver le nominal, il faut donc augmenter le taux d'actualisation, c'est à dire prendre x_2 positif.

Pourquoi $x_2(10)$ est il proche du coupon ?

D'un point de vue strictement calculatoire, rien ne semble garantir que ce *spread* soit toujours positif. Considérons encore cette dette à coupon variable $r_t + p$. Il est alors directement possible d'estimer x_2 pour les plus grandes maturités. En effet, en actualisant à $r_t + x_2$ une dette à coupon variable rémunérant $r_t + p$, on peut considérer l'approximation $x_2 \approx p$ pour rapprocher la valorisation de la valeur nominale. Ceci explique le point de départ de la courbe un peu inférieur à 7%. Cette approximation est limitée par l'arrêt des flux en cas de défaut.

Pourquoi observe-t-on un creux à maturité 3 ans ?

Lorsque la maturité diminue, le nombre de flux à actualiser diminue, ce qui a tendance à diminuer le *spread* à ajouter au taux sans risque pour retrouver le nominal couponné⁸. Mais dans le même temps, si la maturité diminue, alors le nombre de défauts simulés diminue (car alors, il existe moins "d'opportunités" de faire défaut). Donc, la valorisation avec défaut augmente, et donc le *spread* à ajouter au taux sans risque pour retrouver le nominal a tendance à augmenter aussi. Ainsi, pour une maturité donnée, le *spread* à ajouter au taux sans risque pour que la valeur avec défaut égale le nominal est tiré dans un sens par le nombre de flux à actualiser et dans un autre par le nombre de défauts simulés.

Entre 10 ans et 3 ans de maturité, c'est la baisse du nombre de flux à actualiser qui impacte le plus le calcul de x_2 : on observe bel et bien une structure par terme décroissante. La maturité de 3 ans correspond à la maturité à partir de laquelle les forces s'inversent. Entre 3 ans et 1 an, c'est la baisse du nombre de défauts simulés qui influe le plus sur le calcul de x_2 , et qui a tendance à l'augmenter.

8. Plus le nombre de flux est important, plus il faut les actualiser fortement pour retrouver une certaine valeur, toutes choses égales par ailleurs. Réciproquement, plus le nombre de flux est faible, moins il est nécessaire de les actualiser fortement.

Intégration de la structure par terme à la valorisation

De cette structure par terme, nous lisons entre autres les valeurs $x_2(3) = 6,32\%$ et $x_2(7) = 6,58\%$. Conformément à la méthode explicitée en chapitre 3, $x_2(3)$ (resp. $x_2(7)$) est ajouté au taux sans risque dans l'actualisation des flux futurs de la première dette (resp. de la deuxième dette)⁹, et une nouvelle valorisation modèle est ainsi fournie :

	Projection mono-dette	Projection multi-dette avec structure par terme	Variation
Dette 1	14 156 008	14 623 026	3,299%
Dette 2	9 497 116	9 987 430	5,163%

TABLE 4.5 – Variation des valorisations modèle entre le cadre mono-dette et le cadre multi-dette, avec prise en compte des modifications sur le *spread* d'ajustement

On constate que l'intégration de cette structure par terme efface complètement la baisse de valorisation engendrée par la prise en compte du défaut commun, et inverse même la tendance, puisque la valorisation modèle se retrouve supérieure à celle calculée avec la méthodologie précédente.

4.4.2 L'indice de marché

Dans la nouvelle méthode de valorisation, l'indice de marché est encore ajouté en variation additive. Nous reprenons donc les deux valeurs de variations calculées en section 2.7 :

$$\begin{cases} \Delta_{idx}(t_0, 3Y) = -0.13\% \\ \Delta_{idx}(t_0, 7Y) = -0.11\% \end{cases}$$

Ces deux valeurs sont ajoutées respectivement à $x_2(3)$ et $x_2(7)$ dans l'actualisation des flux futurs de chaque dette, et on obtient ainsi les valorisations finales communiquées. Ces valeurs sont comparées cette fois-ci avec les valorisations finales communiquées dans la méthodologie précédente :

	Projection mono-dette	Projection multi-dette avec structure par terme et indice marché	Variation
Dette 1	14 928 360	14 673 268	-1,709%
Dette 2	9 845 617	10 044 340	2,018%

TABLE 4.6 – Variation des valorisations modèle entre le cadre mono-dette et le cadre multi-dette, avec prise en compte des modifications sur le *spread* d'ajustement et de l'impact marché

9. ou plus exactement, ces deux valeurs viennent remplacer la valeur de 7,60% utilisée jusqu'à ce stade.

4.5 Synthèse des résultats successifs

Au niveau du défaut, les observations sont nombreuses. On observe effectivement un nombre de défaut plus important, et qui se produisent en moyenne un petit peu plus tôt, mais pas de façon suffisante pour déformer la distribution de ces défauts à chaque instant. Quelques effets intéressants se dégagent tout de même, notamment l'impact de l'échéance plus courte de la dette 1, qui provoque une baisse soudaine des fonds propres et une augmentation du risque de défaut, ou encore le fait que la distribution de l'instant de défaut semble suivre une loi binomiale négative.

L'utilisation d'une structure par terme fournit des valeurs numériques sensiblement plus faibles pour le *spread* d'ajustement, ce qui provoque une hausse des valorisations modèle, comme montré en tableau 4.7 ci-dessous :

	Dette 1			Dette 2		
	Projection mono-dette	Projection multi-dette	Variation par changement de projection	Projection mono-dette	Projection multi-dette	Variation par changement de projection
Nombre de défauts à maturité	289	292	1,04%	331	369	11,48%
Distribution des défauts	-	-	très peu déformée	-	-	très peu déformée
Perte en cas de défaut	-	-	légèrement plus élevée	-	-	légèrement plus élevée
Valorisation modèle	14 156 008	14 137 638	-0,13%	9 497 116	9 482 962	-0,15%
Valorisation modèle avec structure par terme	-	14 623 026	3,30%	-	9 987 430	5,16%
Valorisation marché	15 132 936	14 673 268	-3,04%	9 952 276	10 044 340	0,93%
Impact marché	6,90%	0,34%	-	4,79%	0,57%	-
Valorisation finale	14 928 360	14 673 268	-1,71%	9 845 617	10 044 340	2,02%
Impact modèle & marché	5,46%	0,34%	-	3,67%	0,57%	-
Prix	99,5%	97,82%	-1,71%	98,46%	100,44%	2,02%
Spread de la dette	6,18%	-	-	7,29%	-	-

La valorisation modèle désigne la valeur moyenne obtenue par l'actualisation des flux futurs au taux sans risque augmenté du *spread* x_2 . Il vaut 7,60% pour la projection mono-dette, et est issu de la structure par terme pour la projection mono-dette.

La valorisation marché désigne la valorisation obtenue après l'intégration de l'indice marché. Cette intégration ne se fait pas de la même manière dans les deux projections. En particulier, dans la projection multi-dette, intégrer l'indice marché se fait avec la structure par terme. Dans cette projection, la valorisation marché correspond donc à la valorisation finale.

TABLE 4.7 – Synthèse des résultats successifs

Puisque le *spread* d'ajustement est issu de la structure par terme calibrée avec le bilan fourni, on pourrait être étonné que la valorisation modèle de la dette 2 en projection multi-dette ne soit pas égale au nominal (par définition de la structure par terme). En réalité, ce très faible écart provient du nombre de simulations : la valeur présentée ici est avec 10 000 simulations, alors que la structure par terme a été calibrée avec 3 000

simulations.

Au total, on constate que l'effet du changement de méthode de valorisation n'est pas le même sur les deux dettes émises. Sur la dette 1, de maturité la plus courte, la valorisation finale baisse de 1,71%, tandis que sur la dette 2 elle augmente de 2,02%. Un effet commun aux deux dettes est le suivant : passer de la valorisation modèle à la valorisation finale provoque des variations nettement moins importantes dans le cadre multi-dette (0,34% et 0,57%) que dans le cadre mono-dette (6,90% et 4,79%).

Enfin, un dernier constat très intéressant se dégage sur la valorisation. En cadre mono-dette, la valorisation totale des deux dettes est de 24 773 977 €. En cadre multi-dette, avec toutes les modifications considérées, la valorisation totale des deux dettes est de 24 717 608 €. En somme, la valeur totale est quasiment la même, elle ne subit qu'une très légère baisse de 0,2%.

Le dernier résultat à évoquer est opérationnel. Le temps de calcul nécessaire à chaque projection a été évoqué en chapitre 2. En cadre mono-dette, le temps était d'environ 1,5 minute par année projetée, soit une quinzaine de minutes pour 10 ans. Au total, valoriser les deux dettes prenait donc environ 20 minutes (en excluant le temps passé à analyser manuellement les résultats, produire un rapport de synthèse). En cadre multi-dette, en plus des modifications sur le fonctionnement du code, quelques optimisations ont été faites. Le temps de calcul par année projetée est au final le même. Mais, les deux dettes étant projetées en même temps, valoriser les deux dettes prend environ 10 minutes (là encore, en excluant le temps passé à l'analyse et à la production de rapport). L'implémentation est donc, de ce point de vue, une réussite.

4.6 Retour critique sur ces modifications

Le remboursement de la première dette

Lors de l'étude sur les instants de défaut, nous avons vu que le remboursement de la première dette au bout de 12 trimestre engendre un nombre un peu plus important de défauts à ce trimestre particulier et sur les trimestres qui suivent. Ceci s'explique par le fait que rembourser la première dette, de nominal 15 millions d'euros, revient à diminuer d'autant les fonds propres. En pratique, lorsqu'une dette arrive à maturité, il arrive souvent qu'elle soit remplacée par une autre dette de même nominal. Ce remplacement et les caractéristiques de la nouvelle émission dépendent bien entendu de beaucoup de facteurs : les besoins de l'entité, sa capacité à trouver un acheteur, la solidité de son bilan à cet instant... Cependant, le fait est que ce flux sortant de 15 millions d'euros est parfois absent, et donc surestimé dans la projection.

La structure par terme

La forme de la structure par terme du *spread* d'ajustement peut sembler étrange bien qu'étant tout de même explicable. Notamment, elle ne converge vers 0 avec la maturité

que parce que cela a été imposé. On souhaitait cette convergence vers 0 pour garantir que la valorisation avec défaut de la dette converge vers la valeur nominale couponnée avec la maturité décroissante. La forme presque en angle droit de cette structure par terme donnera en pratique lieu à une convergence réellement visible que pour les deux ou trois derniers trimestres.

Cette structure par terme n'est mise à jour qu'à chaque émission : pour les valorisations qui suivent l'émission cela ne pose pas vraiment de problème, mais des cas de figures plus délicats pourraient survenir. Par exemple, une entité émet une dette en n'étant que peu solvable, une structure par terme est calibrée sur ce bilan. Des années plus tard, aucune autre dette n'a été émise, mais le bilan est perçu comme plus solide : il semble alors délicat de garder une vision du risque d'il y a plusieurs années. D'un autre côté, s'agissant de sociétés non cotées, elles n'ont pour la plupart pas ou très peu d'interactions avec le marché à d'autres moments qu'aux émissions. La vision qu'a le marché d'elles est donc celle de la dernière émission.

De plus, les valeurs issues de cette structure par terme dépendent du taux coupon. Or une structure par terme calculée à l'émission d'une dette sera appliquée à toutes les dettes, en particulier à celles qui ont potentiellement des coupons différents. Une dette peut ainsi être valorisée avec une structure par terme correspondant à un coupon différent.

En somme la solution trouvée, bien que plus cohérente, n'est pas nécessairement la plus simple ni la plus intuitive.

La dépendance de ces résultats aux données

L'objectif de ce mémoire a été de changer puis implémenter un changement de modèle de valorisation et d'en constater les effets, pour une application réelle et récurrente, suite aux retours d'experts du sujet. Ce travail a été mené, avec comme point de départ un bilan caractéristique d'un organisme d'assurance non vie européen. Il est donc à rappeler que l'ensemble des résultats présentés ici dépendent du bilan renseignée. Pour ne prendre qu'un exemple, une compagnie moins bien capitalisée (c'est à dire avec un taux de couverture du SCR plus faible), serait sans doute amenée à subir un impact nettement plus important sur le taux de défaut en cadre multi-dette.

De la même façon, un élément essentiel de l'ensemble de cette valorisation concerne la simulation du taux court. Cette simulation est issue du modèle de Vasicek, calibré sur la courbe des taux de l'EIOPA. Comme vu en annexe, la courbe des taux utilisée a été corrigée de l'inflation. Une courbe des taux légèrement différente pourrait mener à un taux court simulé bien différent, et donc des coupons et des facteurs d'actualisation nettement différents eux aussi.

Conclusion

Les titres subordonnés sont des outils prudents à disposition des entreprises d'assurance ou de réassurance européennes. Puisqu'ils servent à la couverture des capitaux requis, ils sont rigoureusement encadrés, aussi bien en droit français qu'en droit européen. Tout en offrant une grande souplesse et une facilité de gestion, ils doivent répondre à un ensemble de critères bien définis pour être admis en couverture prudentielle.

En moyenne, les passifs subordonnés couvrent environ 18% du SCR en Europe, ce pourcentage ayant tendance à être un peu plus élevé pour les organismes plus petits. Pour ces organismes, l'organisation sous forme de fonds de titrisation non coté permet de contourner une bonne partie des difficultés concernant l'émission de titres obligataires subordonnés. Un fonds peut également offrir à l'investisseur une diversification géographique et une diversification en devise. Les investisseurs particulièrement séduits par les titres subordonnés sont les assureurs-vie et les fonds de pension, du fait de la nature long-terme et illiquide de cet investissement.

Un modèle de valorisation avait été développé afin de permettre la valorisation de ces titres, et combler l'absence de données de marché permettant de quantifier le risque de défaut des entités émettrices. Le fonds évoluant, il a été nécessaire de revoir ce modèle pour considérer le fait que le défaut d'une entité impacte toutes ses dettes subordonnées. Ceci aboutit à valoriser chaque dette de façon plus juste. La distribution des défauts simulés n'a pas été modifiée de façon significative et garde la même apparence, bien que l'on observe tout de même une augmentation de la fréquence et de la vitesse d'apparition des défauts. Cette faible déformation de la distribution des instants de défaut s'est traduit par un impact très limité sur les valorisations modèle.

Travailler sur le modèle a été l'occasion de revoir la manière d'actualiser les flux. L'utilisation d'une structure par terme pour le *spread* d'ajustement a été proposée. Cette structure par terme permet de mettre en cohérence beaucoup de choses au sujet de ce *spread* tout en étant une méthode explicable. En pratique, cela s'est traduit par une forte diminution du *spread* d'ajustement utilisé, et donc d'une forte hausse de la valorisation. L'utilisation de la structure par terme a finalement été la principale source de variation dans ce changement de modèle. Le choix d'intégrer des tendances de marché à la valorisation a été gardé, mais modifié pour mieux le justifier. En conséquence, son intégration ne donne plus lieu à de gros écarts entre les différentes valorisations.

Après toutes les modifications, la valeur totale du fonds, c'est-à-dire l'investissement, ne varie que très peu. Il est simplement ventilé différemment. Cet aspect a été retrouvé en

situation réelle. C'est donc dans le détail plus qu'au global que la valorisation multi-dette change quelque chose. La compréhension du risque intrinsèque à chaque valorisation et à chaque entité est plus complète, mais la vision du fonds reste, dans l'ensemble, la même. Du fait des multiples changements, certaines dettes ont vu leur valorisation baisser tandis que d'autres ont vu leur valorisation augmenter.

Le cas des entités ayant émis plusieurs dettes est donc mis en cohérence, tout en profitant d'un temps d'exécution plus faible, et d'une utilisation plus simple de l'outil de projection. Cependant, quelques éléments critiques ont été notés sur ce travail. En premier lieu, l'ensemble des résultats numériques présentés dans ce mémoire dépendent du bilan renseigné. Nous avons par exemple constaté que la prise en compte du défaut commun à plusieurs dette n'a finalement un impact qu'assez limité ici. Bien que le modèle de projection de bilan ne soit pas le cœur de ce travail, il semble clair que le défaut de l'entité dépend de l'évolution du bilan. Les impacts du changement de modèles peuvent être plus ou moins amplifiés par les nombreux paramètres du bilan projeté. De même, le modèle ne prend pas en compte la possible émission d'une nouvelle dette à chaque maturité des dettes les plus anciennes, en guise de remplacement. Sur une thématique assez proche, l'existence d'autres passifs subordonnés pour lesquels nous disposons d'un montant, d'un coupon moyen et d'une durée, est ignorée. Il pourrait être utile d'ajouter à la projection les flux sortants générés par ces passifs en particulier, afin de garantir une plus grande exactitude dans le coût total de la dette de chaque entité.

La structure par terme pour le *spread* d'ajustement, bien qu'explicable et répondant aux exigences demandées, est une méthode relativement compliquée à comprendre, et n'intègre pas nécessairement les évolutions de bilan sur plusieurs années, en plus d'être un peu coûteuse en temps de calcul d'un point de vue strictement opérationnel. Les valeurs issues de cette structure par terme dépendent également en bonne partie du taux coupon. Il pourrait être opportun de chercher à la calibrer différemment pour prendre en compte l'écart de coupon. Une autre option pourrait être de la remplacer par une forme paramétrique dépendant du bilan, et satisfaisant par construction les conditions posées.

Enfin, certains manques pointés lors du retour critique du chapitre 2 n'ont pas été traités. Par exemple, le fait que le modèle ne prend pas en compte une possible reprise des remboursements, ou encore sur le taux de perte en cas de défaut. Ces remarques posent de nouvelles questions qui dépassent le cadre de ce travail et nécessitent de nouveaux choix de modélisation. Elles permettent néanmoins de formuler des pistes de ce qu'il faudrait faire pour continuer d'améliorer la valorisation.

Bibliographie

- [ACPR, 2021] ACPR (2016–2021). Les chiffres du marché français de la banque et de l'assurance. Rapport technique, Banque de France, ACPR.
- [Assemblée Nationale, FRANCE, 2015] ASSEMBLÉE NATIONALE, FRANCE (2015). Code des assurances. Journal Officiel de la République Française. Particulièrement articles R.351-27, A.334-1 et R322-77 à R322-79.
- [Assemblée Nationale, FRANCE, 2019] ASSEMBLÉE NATIONALE, FRANCE (2019). Code monétaire et financier. Journal Officiel de la République Française. Articles L214-180 à L214-186.
- [Banque de France, 2020] BANQUE DE FRANCE (2020). Abc de l'économie - titrisation. Rapport technique, Banque de France. Consulté le 08/06/2023.
- [Bonnin *et al.*, 2015] BONNIN, F., PLANCHET, F., TAMMAR, M., de CLERMONT-TONNERRE, A. et SAPONE, D. (2015). Valeur économique de dettes subordonnées pour des sociétés non-vies. *Assurance et Gestion des Risque*, 82(Mars-Juin).
- [Commission Européenne, 2014] COMMISSION EUROPÉENNE (10 octobre 2014). Règlement délégué (UE) 2015/35 de la Commission. Journal Officiel de l'UE. JO L 12 du 17.1.2015, Articles 69 à 77.
- [de Barros et Delignon, 2009] de BARROS, M. et DELIGNON, B. (2009). Enjeux et perspective de la titrisation du risque de masse en assurance dommage. Mémoire d'actuariat, Centre d'études actuarielles.
- [Djelassi, 2016] DJELASSI, M. (2016). Titrisation et assurance automobile. *Assurance et Gestion des Risque*, 83(1-2).
- [EIOPA, 2022] EIOPA (2022). Insurance statistics. Disponible sur : https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/insurance-statistics_en. Consulté le 10/05/2023.
- [L'Argus de l'Assurance, 2016] L'ARGUS DE L'ASSURANCE (2016). Le certificat mutualiste, un complément plus qu'un concurrent. Disponible sur : <https://www.argusdelassurance.com/institutions/le-certificat-mutualiste-un-complement-plus-qu-un-concurrent.112905>. Consulté le 11/05/2023.
- [Lautrette, 2016] LAUTRETTE, A. (2016). Capital Contingent : de la banque à l'assurance. Mémoire d'actuariat, Conservatoire National des Arts et Métiers.

- [Parlement Européen et Conseil de l'Union Européenne, 2009] PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (25 novembre 2009). Directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (Solvabilité II). Journal Officiel de l'UE. JO L 335/1 du 17.12.2009.
- [PartnerRe, 2016] PARTNERRE (Mai 2016). Avec Solvabilité II, pourquoi choisir la réassurance comme source de capital? *PartnerReviews*.
- [Planchet *et al.*, 2010] PLANCHET, F., GUIBERT, Q. et JUILLARD, M. (2010). Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes. *Bulletin Français d'Actuariat*, 10(20, Juin-Décembre).
- [Planchet *et al.*, 2012] PLANCHET, F., GUIBERT, Q. et JUILLARD, M. (2012). Measuring uncertainty of solvency coverage ratio in orsa for non-life insurance. *European Actuarial Journal*, 2 :205-226.
- [R Core Team, 2021] R CORE TEAM (2021). *R : A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- [RStudio Team, 2021] RSTUDIO TEAM (2021). *RStudio : Integrated Development Environment for R*. RStudio, PBC, Boston, MA.

Table des figures

1	Structure par terme du <i>spread</i> d'ajustement	viii
2	Défauts subis à chaque instant par chaque dette entre les cadres mono-dette (rouge) et multi-dette (violet)	ix
3	Term structure of adjustment spread	xvi
4	Number of simulated defaults between single-debt projection (red) and multi-debt projection (purple)	xvii
2.1	Structure générale du bilan dans un modèle de Merton	25
2.2	Indice de marché 10 ans au 30/06/2023	35
2.3	Bilan d'une entité fictive	37
2.4	Étude de la convergence de la valorisation	42
3.1	Evolution de la perte en cas de défaut en fonction de la <i>Net Asset Value</i> et du nominal total	51
3.2	Vue en trois dimension de l'évolution de la perte en cas de défaut en fonction de la <i>Net Asset Value</i> et du nominal total	52
3.3	Prise en compte des flux de plusieurs dettes	54
4.1	Rappel des variables projetées	64
4.2	Défauts subis à chaque instant par chaque dette entre les cadres mono-dette et multi-dette	67
4.3	Évolution de la probabilité empirique de défaut	71
4.4	Évolution de la <i>LGD</i> empirique entre le cadre mono-dette et le cadre multi-dette	73
4.5	Temps d'attente entre les défauts de la projection D_2 et la projection multi-dette	75
4.6	Distribution des valorisations modèle de la projection D_2 et de la projection multi-dette	76
4.7	Structure par terme du <i>spread</i> d'ajustement	79
A.1	Extrait du rapport chiffré 2022 du marché Français de la banque et de l'assurance, par l'ACPR, description à échelle européenne.	92
A.2	Comparaison fonds propres et SCR des bilans solos des compagnies d'assurance européennes	93

A.3	Somme ligne à ligne des actifs des bilans solos des entreprises d'assurance européennes	94
A.4	Somme ligne à ligne des passifs des bilans solos des entreprises d'assurance européennes	95
B.1	Valeurs numériques pour les calcul "Formule Standard" de Solvabilité II.	97
C.1	Courbe des taux utilisée	98
C.2	Données disponibles pour chaque entité présente dans le fonds	99
C.3	Cotations CDS 10 ans entre le 30/12/2022 et le 30/06/2023	100
C.4	Cotations CDS 5 ans entre le 30/12/2022 et le 30/06/2023	101
C.5	Cotations CDS 3 ans entre le 30/12/2022 et le 30/06/2023	102
C.6	Cotations CDS 1 an entre le 30/12/2022 et le 30/06/2023	103
C.7	Indice de marché 1, 3, 5 et 10 ans entre le 30/12/2022 et le 30/06/2023	104
C.8	Étude sur la variation de l'indice de marché	105
D.1	Comparaison du nombre de défauts à chaque instant	106

Liste des tableaux

1	Données synthétiques de bilan, échelle européenne	vi
2	Summary balance sheet data, European scale	xiv
1.1	Utilisation des différents <i>Tier</i> pour la couverture des capitaux requis	6
1.2	Reproduction du rapport chiffré 2021 du marché Français de la banque et de l'assurance.	10
1.3	Données synthétiques de bilan, échelle française	11
1.4	Données synthétiques de bilan, échelle européenne	11
1.5	Comparaison qualitative des avantages et inconvénients de différentes sources de capital.	15
1.6	Valeurs typiques des caractéristiques des dettes valorisées	18
1.7	Bilan moyen	19
1.8	Répartition géographique et devises des entités émettrices participant au fonds	20
2.1	Calcul de l'indice de marché de maturité 10 ans	33
2.2	Évolution de la probabilité de défaut empirique	40
2.3	Nombre de défauts communs entre les deux projections, cadre mono-dette	42

3.1	Impact du changement de <i>spread</i> d'ajustement	57
4.1	Rappel de quelques résultats de la projection mono-dette	65
4.2	Comparaison du nombre de défauts à maturité de chaque dette, selon le cadre de projection	68
4.3	Temps d'attente entre les défauts de la projection D_2 et la projection multi-dette	74
4.4	Variation des valorisations modèle entre le cadre mono-dette et le cadre multi-dette	77
4.5	Variation des valorisations modèle entre le cadre mono-dette et le cadre multi-dette, avec prise en compte des modifications sur le <i>spread</i> d'ajustement	81
4.6	Variation des valorisations modèle entre le cadre mono-dette et le cadre multi-dette, avec prise en compte des modifications sur le <i>spread</i> d'ajustement et de l'impact marché	81
4.7	Synthèse des résultats successifs	82
E.1	Index des notations mathématiques	107
E.2	Index des notations mathématiques	108

Annexe A

Données synthétiques de bilans solos

En milliards d'euros	Actifs					Passifs						
	Placements hors contrats en UC	Placements des contrats en UC	Trésorerie et dépôts	Autres actifs	Total actifs	Dettes subordonnées	PT non vie	PT vie (hors UC)	PTUC	Autres passifs	Actifnet	Total passifs
Union européenne	7 017	2 141	272	1 046	10 476	118	719	5 174	2 110	868	1 636	10 476
France	2 354	501	69	232	3 156	45	148	1 937	488	267	419	3 156
Allemagne	2 137	173	76	270	2 656	31	239	1 388	188	235	576	2 656
Italie	809	233	18	61	1 121	19	54	628	223	55	141	1 121
Pays-bas	295	239	11	14	559	2	68	67	308	38	52	535
Danemark	96	311	26	102	535	4	28	288	103	42	65	529
Irlande	296	93	12	128	529	2	11	204	229	72	40	559
Belgique	189	221	9	19	438	0	21	83	213	16	105	438
Espagne	249	51	7	72	378	6	34	210	50	37	41	378
Suède	257	32	16	35	341	0	28	168	31	53	61	341
Luxembourg	69	171	11	75	325	1	43	63	169	18	31	325
Autriche	108	19	4	14	145	4	10	62	16	15	39	145
Finlande	32	51	4	2	90	1	3	19	49	3	15	90
Portugal	33	16	1	3	53	1	3	24	16	3	7	53
Pologne	29	9	1	4	43	1	9	6	9	4	15	43
Tchéquie	14	4	1	2	20	0	3	8	4	1	4	20
Grèce	12	3	1	3	19	0	3	3	1	3	6	16
Malte	7	1	4	4	16	0	4	4	3	3	5	19
Hongrie	7	2	0	1	9	0	1	2	4	1	2	9
Slovénie	4	4	0	1	9	0	1	2	2	1	3	9
Slovaquie	5	0	0	1	6	0	1	2	0	1	2	6
Croatie	4	1	0	1	6	0	1	2	1	1	2	6
Roumanie	3	0	0	1	5	0	2	0	0	1	2	5
Chypre	3	1	0	1	5	0	1	1	1	1	1	5
Bulgarie	2	2	0	1	5	0	1	0	2	0	2	5
Estonie	1	1	0	0	2	0	0	0	1	0	1	2
Lituanie	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2
Lettonie	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2

On déduit de ce tableau issu de l'ACPR que ce sont principalement les compagnies françaises, allemandes et italiennes qui utilisent les dettes subordonnées en Europe.

FIGURE A.1 – Extrait du rapport chiffré 2022 du marché Français de la banque et de l'assurance, par l'ACPR, description à échelle européenne.

Own funds and SCR [Extract from S.23.01/Annual/Solo/EUR million/Ratios]

		Y2020	Y2021
		EUR million	EUR million
R0500	Total available own funds to meet the SCR	1 623 535,74	1 757 492,23
R0510	Total available own funds to meet the MCR	1 594 567,83	1 728 647,01
R0540	Total eligible own funds to meet the SCR	1 615 952,49	1 749 526,43
R0550	Total eligible own funds to meet the MCR	1 529 552,59	1 663 231,46
R0580	SCR	643 957,18	678 689,70
R0600	MCR	230 948,92	238 247,26
R0620	Ratio of Eligible own funds to SCR	2,51	2,58
R0620_P10	Ratio of Eligible own funds to SCR (P10)	1,44	1,45
R0620_P25	Ratio of Eligible own funds to SCR (P25)	1,73	1,75
R0620_P50	Ratio of Eligible own funds to SCR (P50)	2,23	2,19
R0620_P75	Ratio of Eligible own funds to SCR (P75)	3,14	3,01
R0620_P90	Ratio of Eligible own funds to SCR (P90)	4,57	4,38
R0640	Ratio of Eligible own funds to MCR	6,62	6,98
R0640_P10	Ratio of Eligible own funds to MCR (P10)	2,65	2,69
R0640_P25	Ratio of Eligible own funds to MCR (P25)	3,87	4,00
R0640_P50	Ratio of Eligible own funds to MCR (P50)	5,72	6,10
R0640_P75	Ratio of Eligible own funds to MCR (P75)	8,54	8,60
R0640_P90	Ratio of Eligible own funds to MCR (P90)	12,19	12,29

Note: The distributions for the SCR and MCR ratios (R0620 and R0640) are given as percentiles (10th, 25th, 50th, 75th and 90th) as indicated in brackets for the relevant items. The aggregate SCR and MCR ratios are defined as $R0620=R0540/R0580$ and $R0640=R0550/R0600$. Exchange rate conversions to EUR using ECB exchange rates as of reference date. Sample includes insurers with financial year end within the calendar year. Data covers the EU plus Norway and Liechtenstein. Data for DK not included in 2016. Data extracted on August 20, 2022

Source : Base de données [EIOPA, 2022]

Seules les années 2020 et 2021 sont retranscrites ici, les années antérieures sont disponibles sur le site de l'EIOPA.

FIGURE A.2 – Comparaison fonds propres et SCR des bilans solos des compagnies d'assurance européennes

Balance sheet by item [S.02.01/Annual/Solo/EUR million]			
		Y2020	Y2021
		EUR million	EUR million
R0001	Assets		
R0010	Goodwill		
R0020	Deferred acquisition costs		
R0030	Intangible assets	12,46	126,16
R0040	Deferred tax assets	67500,26	57047,58
R0050	Pension benefit surplus	876,51	1022,49
R0060	Property, plant & equipment held for own use	30681,42	31460,81
R0070	Investments (other than assets held for index-linked and unit-linked contracts)	7217006,26	7172116,18
R0080	Property (other than for own use)	114465,78	118593,3
R0090	Holdings in related undertakings, including participations	893478,89	1018055,23
R0100	Equities	209260,68	253243,69
R0110	Equities - listed	151093,58	182230,93
R0120	Equities - unlisted	58167,1	71012,75
R0130	Bonds	4291615,95	4072230,78
R0140	Government Bonds	2285828,29	2151305,14
R0150	Corporate Bonds	1875461,73	1789208,92
R0160	Structured notes	100764,88	105091,6
R0170	Collateralised securities	29561,04	26625,13
R0180	Collective Investments Undertakings	1520582,04	1567323,19
R0190	Derivatives	126001,56	85668,01
R0200	Deposits other than cash equivalents	43855,97	46151,73
R0210	Other investments	17745,39	10850,26
R0220	Assets held for index-linked and unit-linked contracts	1870553,48	2219769,33
R0230	Loans and mortgages	367814,38	375041,35
R0240	Loans on policies	11234,19	10878,92
R0250	Loans and mortgages to individuals	150416,08	164717,33
R0260	Other loans and mortgages	206164,11	199445,11
R0270	Reinsurance recoverables from:	398289,61	429521,94
R0280	Non-life and health similar to non-life	185975,18	215304,13
R0290	Non-life excluding health	171499,93	200113,25
R0300	Health similar to non-life	14475,25	15190,88
R0310	Life and health similar to life, excluding health and index-linked and unit-linked	195847,36	192958,33
R0320	Health similar to life	17830,61	16631,73
R0330	Life excluding health and index-linked and unit-linked	178016,75	176326,61
R0340	Life index-linked and unit-linked	16467,07	21259,48
R0350	Deposits to cedants	111977,85	117091,47
R0360	Insurance and intermediaries receivables	87796,14	85696,35
R0370	Reinsurance receivables	16648,97	18011,54
R0380	Receivables (trade, not insurance)	100356,28	94328,92
R0390	Own shares (held directly)	967,98	958,89
R0400	Amounts due in respect of own fund items or initial fund called up but not yet paid in	1,85	20,08
R0410	Cash and cash equivalents	114658,2	113480,89
R0420	Any other assets, not elsewhere shown	26231,73	26516,27
R0500	Total assets	10 411 373,39	10 742 210,24

Source : Base de données [EIOPA, 2022]

Seules les années 2020 et 2021 sont retranscrites ici, les années antérieures sont disponibles sur le site de l'EIOPA.

FIGURE A.3 – Somme ligne à ligne des actifs des bilans solos des entreprises d'assurance européennes

Balance sheet by item [S.02.01/Annual/Solo/EUR million]

		Y2020	Y2021
		EUR million	EUR million
R0501	Liabilities		
R0510	Technical provisions – non-life	728951,42	774757,9
R0520	Technical provisions – non-life (excluding health)	628702,78	673755,69
R0530	Technical provisions calculated as a whole	228,37	341,01
R0540	Best Estimate	596453,71	641163,37
R0550	Risk margin	32020,69	32251,31
R0560	Technical provisions - health (similar to non-life)	100248,64	101002,21
R0570	Technical provisions calculated as a whole	12,93	17,43
R0580	Best Estimate	93385,03	94298,04
R0590	Risk margin	6850,68	6686,74
R0600	Technical provisions - life (excluding index-linked and unit-linked)	5304787,2	5115713,35
R0610	Technical provisions - health (similar to life)	479832,91	479697,06
R0620	Technical provisions calculated as a whole	616,9	470,42
R0630	Best Estimate	451656,57	451932,98
R0640	Risk margin	27559,43	27293,66
R0650	Technical provisions – life (excluding health and index-linked and unit-linked)	4824954,29	4636016,28
R0660	Technical provisions calculated as a whole	59042,11	43420,07
R0670	Best Estimate	4686755,51	4522252,41
R0680	Risk margin	79156,68	70343,8
R0690	Technical provisions – index-linked and unit-linked	1851871,56	2186995,64
R0700	Technical provisions calculated as a whole	324238,04	330385,76
R0710	Best Estimate	1508321,89	1835946,04
R0720	Risk margin	19311,63	20663,84
R0730	Other technical provisions		
R0740	Contingent liabilities	1803,88	2213,4
R0750	Provisions other than technical provisions	19054,33	28328,28
R0760	Pension benefit obligations	50512,54	47956,32
R0770	Deposits from reinsurers	102785,47	113192,38
R0780	Deferred tax liabilities	162596,4	165348,13
R0790	Derivatives	75396,18	70165,65
R0800	Debts owed to credit institutions	89375,04	85665,34
R0810	Financial liabilities other than debts owed to credit institutions	143961,29	137991,29
R0820	Insurance & intermediaries payables	58239,21	57704,59
R0830	Reinsurance payables	26416,73	27574,68
R0840	Payables (trade, not insurance)	112758,08	102186,07
R0850	Subordinated liabilities	118737,03	122107,07
R0860	Subordinated liabilities not in Basic Own Funds	1027,72	1408,53
R0870	Subordinated liabilities in Basic Own Funds	117709,31	120698,55
R0880	Any other liabilities, not elsewhere shown	38732,02	39315,45
R0900	Total liabilities	8 885 978,37	9 077 215,54
R1000	Excess of assets over liabilities	1 525 395,02	1 664 994,70

Source : Base de données [EIOPA, 2022]

Seules les années 2020 et 2021 sont retranscrites ici, les années antérieures sont disponibles sur le site de l'EIOPA.

FIGURE A.4 – Somme ligne à ligne des passifs des bilans solos des entreprises d'assurance européennes

Annexe B

Compléments juridiques

Branche	Nom Branche
B1	Motor vehicle liability insurance and proportional reinsurance
B2	Other motor insurance and proportional reinsurance
B3	Marine, aviation and transport insurance and proportional reinsurance
B4	Fire and other damage to property insurance and proportional reinsurance
B5	General liability insurance and proportional reinsurance
B6	Credit and suretyship insurance and proportional reinsurance
B7	Legal expenses insurance and proportional reinsurance
B8	Assistance and its proportional reinsurance
B9	Miscellaneous financial loss insurance and proportional reinsurance
B10	Non proportional casualty reinsurance
B11	Non proportional marine, aviation and transport reinsurance
B12	Non proportional property reinsurance
B13	Medical expense insurance and proportional reinsurance
B14	Income protection insurance and proportional reinsurance
B15	Workers' compensation insurance and proportional reinsurance
B16	Non-proportional health reinsurance

Matrice de corrélation entre branches d'activité																
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13	B14	B15	B16
B1	1	0,5	0,5	0,25	0,5	0,25	0,5	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0
B2	0,5	1	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0
B3	0,5	0,25	1	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,5	0,25	0	0	0	0
B4	0,25	0,25	0,25	1	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,5	0,5	0	0	0	0
B5	0,5	0,25	0,25	0,25	1	0,5	0,5	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0	0	0	0
B6	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	1	0,5	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0	0	0	0
B7	0,5	0,5	0,25	0,25	0,5	0,5	1	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0	0	0	0
B8	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1	0,5	0,25	0,25	0,5	0	0	0	0
B9	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	0,25	0,5	0,25	0	0	0	0
B10	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	1	0,25	0,25	0	0	0	0
B11	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	1	0,25	0	0	0	0
B12	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	1	0	0	0	0
B13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,5	0,5	0,5
B14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	1	0,5	0,5
B15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	1	0,5
B16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	1

Source : EIOPA

FIGURE B.1 – Valeurs numériques pour les calcul "Formule Standard" de Solvabilité II.

Annexe C

Données accessibles

C.1 Courbe des taux

Maturité	Taux EIOPA 31/03/2023	Taux EIOPA corrigé 31/03/2023
1	3,472%	0,078%
2	3,315%	2,887%
3	3,140%	3,140%
4	3,009%	3,009%
5	2,930%	2,930%
6	2,886%	2,886%
7	2,860%	2,860%
8	2,847%	2,847%
9	2,845%	2,845%
10	2,850%	2,850%
11	2,837%	2,798%
12	2,870%	2,825%
13	2,889%	2,838%
14	2,884%	2,839%
15	2,860%	2,813%
16	2,824%	2,769%
17	2,781%	2,732%
18	2,740%	2,695%
19	2,703%	2,664%
20	2,674%	2,657%
21	2,655%	2,636%
22	2,644%	2,627%
23	2,640%	2,621%
24	2,640%	2,639%
25	2,644%	2,644%
26	2,651%	2,651%
27	2,660%	2,660%
28	2,671%	2,671%
29	2,683%	2,683%
30	2,696%	2,696%

La courbe des taux fournie par l'EIOPA au 31/03/2023 (date d'arrêt des données) est fortement impactée par des anticipations d'inflation court terme élevées. Dans la mesure où les dettes projetées ont des maturités relativement longues il a été décidé d'ajuster cette courbe de l'inflation, à l'aide de données concernant des *swaps* d'inflation. L'objectif final étant d'avoir une inflation long terme de 2%, correspondant à l'objectif économique de la BCE. Le calcul n'est pas reproduit ici. La courbe des taux originale, et celle corrigée, sont présentées ci-dessus.

FIGURE C.1 – Courbe des taux utilisée

C.2 Données bilancielles

Nom de la variable	Notation dans le modèle de projection	Valeur	Valeur (si Ventilation par branches)	
			B1	
Actif			Actif	
Valeur de marché de l'Actif	A			
Taux de croissance de l'Actif (historique)	mu_a			
Volatilité de l'Actif	sigma_a			
Fonds propres			Fonds propres	
Nominal de la Dette Subordonnée	NDS			
Taux coupon de la Dette Subordonnée	Spread			
Spread de la Dette Subordonnée	SpreadAjuste			
Maturité initiale	Matini			
BEL			BEL	
Best Estimate Liabilities - BEL	BEL			
Volatilité du BEL	sigma_p			
Cote-part des réserves servies en prestations	phi			
Duration du Passif ventilée par branche	D			
Cotisations			Cotisations	
Montant des cotisations perçues	C			
Taux de croissance des cotisations	mu_c			
Volatilité des cotisations	sigma_c			
Ratio combiné			Ratio combiné	
Ratio combiné réalisé initial	B			
Ratio combiné cible	beta			
Volatilité du ratio combiné	sigma_b			
Indicateurs de Solvabilité Initiaux			Indicateurs de Solvabilité Initiaux	
SCR	SCR_entite			
MCR	MCR_entite			
TMG	TMG			
Corrélation Actif_Passif	Cor_AP			
Type de l'entité	Type_Entite			
Critère de ruine	defautMCR			
Taux de rémunération du capital réglementaire	alpha			
ID Entité				
	FP ECO			
	TC			
	TCSCR			
	TGMCR			
	FP ECO pour le TC SCR			
	Expense Ratio			
	Mathematical Reserves - MR			

À des fins de lisibilité, seule la colonne de la branche 1 est représentée. Les entités émettrices ont la possibilité de remplir ces informations branche par branche.

FIGURE C.2 – Données disponibles pour chaque entité présente dans le fonds

C.3 Indice de marché

	Date	30/12/2022	31/03/2023	30/06/2023
Company	Company 10 Y Senior point	Cotation CDS		
Aegon	AEGON CDS EUR SR 10Y	105,32	104,21	101,28
Allianz	ALVGR CDS EUR SR 10Y	56,01	60,68	56,40
Generali	ASSGEN CDS EUR SR 10Y	126,13	115,39	104,95
AXA	AXASA CDS EUR SR 10Y	83,74	90,49	84,20
Hanover Re	HANRUE CDS EUR SR 10Y	59,68	61,26	54,77
Legal & General	LGEN CDS EUR SR 10Y	101,55	108,06	103,93
Prudential	PRUFIN CDS EUR SR 10Y	113,91	110,12	102,67
SCOR	SCOR CDS EUR SR 10Y	121,14	98,65	78,15
Swiss Re	SCHREI CDS EUR SR 10Y	84,13	87,02	78,73
Zurich Ins.	ZURNVXINS CDS EUR SR 10Y	79,29	86,04	76,20
Full Name	Company 10 Y Sub point	Cotation CDS		
Aegon	AEGON CDS EUR SUB 10Y	206,28	194,34	189,35
Allianz	ALVGR CDS EUR SUB 10Y	150,45	154,99	150,95
Generali	ASSGEN CDS EUR SUB 10Y	210,86	213,09	186,04
AXA	AXASA CDS EUR SUB 10Y	143,55	153,17	145,21
Hanover Re	HANRUE CDS EUR SUB 10Y	154,42	156,58	150,64
Legal & General	LGEN CDS EUR SUB 10Y	201,31	199,18	191,48
Prudential	PRUFIN CDS EUR SUB 10Y	166,22	185,97	169,55
SCOR	SCOR CDS EUR SUB 10Y	208,11	166,44	128,10
Swiss Re	SCHREI CDS EUR SUB 10Y	169,87	161,52	148,53
Zurich Ins.	ZURNVXINS CDS EUR SUB 10Y	148,29	162,77	143,35

Ces données ont été communiquées par le gestionnaire du FCT.

FIGURE C.3 – Cotations CDS 10 ans entre le 30/12/2022 et le 30/06/2023

	Date	30/12/2022	31/03/2023	30/06/2023
Full Name	Company 5 Y Senior point	Cotation CDS		
Aegon	AEGON CDS EUR SR 5Y	77,29	75,69	72,69
Allianz	ALVGR CDS EUR SR 5Y	40,71	43,56	38,06
Generali	ASSGEN CDS EUR SR 5Y	99,71	87,74	79,05
AXA	AXASA CDS EUR SR 5Y	66,28	70,79	62,72
Hanover Re	HANRUE CDS EUR SR 5Y	44,78	45,06	39,54
Legal & General	LGEN CDS EUR SR 5Y	72,52	73,82	69,01
Prudential	PRUFIN CDS EUR SR 5Y	76,78	73,68	66,62
SCOR	SCOR CDS EUR SR 5Y	92,81	75,14	56,47
Swiss Re	SCHREI CDS EUR SR 5Y	64,00	67,27	58,50
Zurich Ins.	ZURNVXINS CDS EUR SR 5Y	64,14	69,72	60,09
Full Name	Company 5 Y Sub point	Cotation CDS		
Aegon	AEGON CDS EUR SUB 5Y	157,14	150,64	147,33
Allianz	ALVGR CDS EUR SUB 5Y	113,43	120,56	112,76
Generali	ASSGEN CDS EUR SUB 5Y	164,86	166,78	144,48
AXA	AXASA CDS EUR SUB 5Y	109,14	119,81	112,75
Hanover Re	HANRUE CDS EUR SUB 5Y	123,58	129,16	118,04
Legal & General	LGEN CDS EUR SUB 5Y	157,29	148,56	139,19
Prudential	PRUFIN CDS EUR SUB 5Y	132,86	139,69	122,81
SCOR	SCOR CDS EUR SUB 5Y	154,36	121,86	88,15
Swiss Re	SCHREI CDS EUR SUB 5Y	136,43	130,66	116,11
Zurich Ins.	ZURNVXINS CDS EUR SUB 5Y	116,14	129,74	111,29

Ces données ont été communiquées par le gestionnaire du FCT.

FIGURE C.4 – Cotations CDS 5 ans entre le 30/12/2022 et le 30/06/2023

	Date	30/12/2022	31/03/2023	30/06/2023
Full Name	Company 3 Y Senior point	Cotation CDS		
Aegon	AEGON CDS EUR SR 3Y	54,30	46,80	45,56
Allianz	ALVGR CDS EUR SR 3Y	29,06	27,26	23,30
Generali	ASSGEN CDS EUR SR 3Y	74,40	63,45	55,61
AXA	AXASA CDS EUR SR 3Y	51,35	48,97	42,46
Hanover Re	HANRUE CDS EUR SR 3Y	30,35	27,18	24,10
Legal & General	LGEN CDS EUR SR 3Y	56,56	50,93	47,93
Prudential	PRUFIN CDS EUR SR 3Y	52,58	47,51	43,21
SCOR	SCOR CDS EUR SR 3Y	67,22	57,41	43,40
Swiss Re	SCHREI CDS EUR SR 3Y	45,35	43,44	39,03
Zurich Ins.	ZURNVXINS CDS EUR SR 3Y	44,41	44,49	36,54
Full Name	Company 3Y Sub point	Cotation CDS		
Aegon	AEGON CDS EUR SUB 3Y	108,99	103,97	101,32
Allianz	ALVGR CDS EUR SUB 3Y	77,81	81,35	76,57
Generali	ASSGEN CDS EUR SUB 3Y	118,58	118,99	93,08
AXA	AXASA CDS EUR SUB 3Y	76,08	80,21	70,73
Hanover Re	HANRUE CDS EUR SUB 3Y	77,82	77,79	70,47
Legal & General	LGEN CDS EUR SUB 3Y	126,59	108,79	102,66
Prudential	PRUFIN CDS EUR SUB 3Y	91,03	95,87	80,98
SCOR	SCOR CDS EUR SUB 3Y	113,57	93,52	68,10
Swiss Re	SCHREI CDS EUR SUB 3Y	92,52	82,24	71,60
Zurich Ins.	ZURNVXINS CDS EUR SUB 3Y	77,40	85,11	71,40

Ces données ont été communiquées par le gestionnaire du FCT.

FIGURE C.5 – Cotations CDS 3 ans entre le 30/12/2022 et le 30/06/2023

	Date	30/12/2022	31/03/2023	30/06/2023
Full Name	Company 1 Y Senior point	Cotation CDS		
Aegon	AEGON CDS EUR SR 1Y	28,43	23,56	21,50
Allianz	ALVGR CDS EUR SR 1Y	15,52	15,09	9,77
Generali	ASSGEN CDS EUR SR 1Y	47,75	42,49	36,24
AXA	AXASA CDS EUR SR 1Y	34,60	31,83	20,75
Hanover Re	HANRUE CDS EUR SR 1Y	14,47	13,45	8,13
Legal & General	LGEN CDS EUR SR 1Y	39,57	30,69	29,38
Prudential	PRUFIN CDS EUR SR 1Y	28,90	23,95	17,62
SCOR	SCOR CDS EUR SR 1Y	36,53	36,27	27,94
Swiss Re	SCHREI CDS EUR SR 1Y	28,60	27,56	21,16
Zurich Ins.	ZURNVXINS CDS EUR SR 1Y	23,26	27,77	18,62
Full Name	Company 1 Y Sub point	Cotation CDS		
Aegon	AEGON CDS EUR SUB 1Y	52,47	62,63	60,82
Allianz	ALVGR CDS EUR SUB 1Y	42,80	45,38	36,06
Generali	ASSGEN CDS EUR SUB 1Y	64,84	71,34	56,81
AXA	AXASA CDS EUR SUB 1Y	40,17	47,29	34,18
Hanover Re	HANRUE CDS EUR SUB 1Y	41,92	39,19	31,65
Legal & General	LGEN CDS EUR SUB 1Y	93,52	69,77	66,99
Prudential	PRUFIN CDS EUR SUB 1Y	47,87	51,70	38,27
SCOR	SCOR CDS EUR SUB 1Y	65,09	61,50	45,70
Swiss Re	SCHREI CDS EUR SUB 1Y	47,13	38,06	28,68
Zurich Ins.	ZURNVXINS CDS EUR SUB 1Y	40,02	49,98	44,35

Ces données ont été communiquées par le gestionnaire du FCT.

FIGURE C.6 – Cotations CDS 1 an entre le 30/12/2022 et le 30/06/2023

Date	30/12/2022	31/03/2023	30/06/2023
1Y SENIOR	29,76	27,27	21,11
3Y SENIOR	50,56	45,74	40,11
5Y SENIOR	69,90	68,25	60,28
10Y SENIOR	93,09	92,19	84,13
1Y SUB	53,58	53,68	44,35
3Y SUB	96,04	92,78	80,69
5Y SUB	136,52	135,75	121,29
10Y SUB	175,94	174,81	160,32
1Y INDEX	41,67	40,48	32,73
3Y INDEX	73,30	69,26	60,40
5Y INDEX	103,21	102,00	90,78
10Y INDEX	134,51	133,50	122,22

Les cellules grisées ont été obtenues avec les données des tableaux précédents, selon la méthodologie expliquée en section 2.5.2.

Puis, les cellules non grisées correspondent aux valeurs moyennes des cellules grisées. Par exemple :
 $41,67 = \frac{29,76+53,58}{2}$

FIGURE C.7 – Indice de marché 1, 3, 5 et 10 ans entre le 30/12/2022 et le 30/06/2023

C.4 Étude sur l'indice de marché

	idx 1	0,3%	0,4%	0,5%	0,6%	0,7%	0,8%	0,9%	1,0%	1,1%	1,2%	1,3%	1,4%	1,5%
idx 0	0,3%	0,0%	2,0%	4,0%	6,0%	8,0%	10,0%	12,0%	14,0%	16,0%	18,0%	20,0%	22,0%	24,0%
0,4%	-2,0%	0,0%	2,0%	4,0%	6,0%	8,0%	10,0%	12,0%	14,0%	16,0%	18,0%	20,0%	22,0%	24,0%
0,5%	-4,0%	-2,0%	0,0%	2,0%	4,0%	6,0%	8,0%	10,0%	12,0%	14,0%	16,0%	18,0%	20,0%	24,0%
0,6%	-6,0%	-4,0%	-2,0%	0,0%	2,0%	4,0%	6,0%	8,0%	10,0%	12,0%	14,0%	16,0%	18,0%	24,0%
0,7%	-8,0%	-6,0%	-4,0%	-2,0%	0,0%	2,0%	4,0%	6,0%	8,0%	10,0%	12,0%	14,0%	16,0%	24,0%
0,8%	-10,0%	-8,0%	-6,0%	-4,0%	-2,0%	0,0%	2,0%	4,0%	6,0%	8,0%	10,0%	12,0%	14,0%	24,0%
0,9%	-12,0%	-10,0%	-8,0%	-6,0%	-4,0%	-2,0%	0,0%	2,0%	4,0%	6,0%	8,0%	10,0%	12,0%	24,0%
1,0%	-14,0%	-12,0%	-10,0%	-8,0%	-6,0%	-4,0%	-2,0%	0,0%	2,0%	4,0%	6,0%	8,0%	10,0%	24,0%
1,1%	-16,0%	-14,0%	-12,0%	-10,0%	-8,0%	-6,0%	-4,0%	-2,0%	0,0%	2,0%	4,0%	6,0%	8,0%	24,0%
1,2%	-18,0%	-16,0%	-14,0%	-12,0%	-10,0%	-8,0%	-6,0%	-4,0%	-2,0%	0,0%	2,0%	4,0%	6,0%	24,0%
1,3%	-20,0%	-18,0%	-16,0%	-14,0%	-12,0%	-10,0%	-8,0%	-6,0%	-4,0%	-2,0%	0,0%	2,0%	4,0%	24,0%
1,4%	-22,0%	-20,0%	-18,0%	-16,0%	-14,0%	-12,0%	-10,0%	-8,0%	-6,0%	-4,0%	-2,0%	0,0%	2,0%	24,0%
1,5%	-24,0%	-22,0%	-20,0%	-18,0%	-16,0%	-14,0%	-12,0%	-10,0%	-8,0%	-6,0%	-4,0%	-2,0%	0,0%	24,0%

	idx 1	0,3%	0,4%	0,5%	0,6%	0,7%	0,8%	0,9%	1,0%	1,1%	1,2%	1,3%	1,4%	1,5%
idx 0	0,3%	0,0%	33,3%	66,7%	100,0%	133,3%	166,7%	200,0%	233,3%	266,7%	300,0%	333,3%	366,7%	400,0%
0,4%	-25,0%	0,0%	25,0%	50,0%	75,0%	100,0%	125,0%	150,0%	175,0%	200,0%	225,0%	250,0%	275,0%	300,0%
0,5%	-40,0%	-20,0%	0,0%	20,0%	40,0%	60,0%	80,0%	100,0%	120,0%	140,0%	160,0%	180,0%	200,0%	240,0%
0,6%	-50,0%	-33,3%	-16,7%	0,0%	16,7%	33,3%	50,0%	66,7%	83,3%	100,0%	116,7%	133,3%	150,0%	180,0%
0,7%	-57,1%	-42,9%	-28,6%	-14,3%	0,0%	14,3%	28,6%	42,9%	57,1%	71,4%	85,7%	100,0%	114,3%	142,9%
0,8%	-62,5%	-50,0%	-37,5%	-25,0%	-12,5%	0,0%	12,5%	25,0%	37,5%	50,0%	62,5%	75,0%	87,5%	112,5%
0,9%	-66,7%	-55,6%	-44,4%	-33,3%	-22,2%	-11,1%	0,0%	11,1%	22,2%	33,3%	44,4%	55,6%	66,7%	93,3%
1,0%	-70,0%	-60,0%	-50,0%	-40,0%	-30,0%	-20,0%	-10,0%	0,0%	10,0%	20,0%	30,0%	40,0%	50,0%	80,0%
1,1%	-72,7%	-63,6%	-54,5%	-45,5%	-36,4%	-27,3%	-18,2%	-9,1%	0,0%	9,1%	18,2%	27,3%	36,4%	63,6%
1,2%	-75,0%	-66,7%	-58,3%	-50,0%	-41,7%	-33,3%	-25,0%	-16,7%	-8,3%	0,0%	8,3%	16,7%	25,0%	50,0%
1,3%	-76,9%	-69,2%	-61,5%	-53,8%	-46,2%	-38,5%	-30,8%	-23,1%	-15,4%	-7,7%	0,0%	7,7%	15,4%	30,8%
1,4%	-78,6%	-71,4%	-64,3%	-57,1%	-50,0%	-42,9%	-35,7%	-28,6%	-21,4%	-14,3%	-7,1%	0,0%	7,1%	14,3%
1,5%	-80,0%	-73,3%	-66,7%	-60,0%	-53,3%	-46,7%	-40,0%	-33,3%	-26,7%	-20,0%	-13,3%	-6,7%	0,0%	13,3%

FIGURE C.8 – Étude sur la variation de l'indice de marché

Sur les deux tableaux ci-dessus, $idx0$ représente des valeurs qu'aurait pu avoir l'indice lors de la précédente valorisation, et $idx1$ représente des valeurs qu'aurait pu avoir l'indice lors de la valorisation courante. On considère un $spread x_2 = 5\%$. Pour le tableau du haut, on regarde quelle variation subit x_2 en appliquant une variation additive de l'indice. Pour le tableau du bas, on regarde quelle variation subit x_2 en appliquant une variation multiplicative de l'indice.

Un constat immédiat ressort : utiliser la variation multiplicative donne lieu, pour de mêmes indices, à des variations de x_2 (donc d'actualisation) beaucoup plus fortes.

Annexe D

Résultats

Trimestre	Projection		
	Dette 1	Dette 2	Commune
1	3	5	5
2	25	35	37
3	38	50	53
4	47	39	41
5	34	34	39
6	32	37	34
7	20	25	25
8	28	17	18
9	13	18	21
10	15	10	12
11	13	12	11
12	21	10	17
13	0	5	14
14	0	10	10
15	0	7	11
16	0	3	7
17	0	2	3
18	0	0	1
19	0	2	2
20	0	4	2
21	0	1	2
22	0	1	0
23	0	2	2
24	0	0	0
25	0	0	0
26	0	0	0
27	0	0	1
28	0	2	1
Total	289	331	369

Lecture : Lors du quatrième trimestre, la projection mono-dette de la première dette a donné exactement 47 défauts, celle de la seconde dette a donné exactement 39 défauts, et la projection multi-dette a donné exactement 41 défauts.

FIGURE D.1 – Comparaison du nombre de défauts à chaque instant

Annexe E

Notations mathématiques

Cette annexe regroupe, dans les deux tableaux ci-dessous, l'ensemble des notations mathématiques utilisées, aussi bien dans le cadre mono-dette que dans le cadre multi-dette. Certaines de ces variables dépendent du temps, leurs notations sont donc sous-entendues être pour un instant t donné.

Nom	Notation
Valeur de marché de l'actif	A_t
Passifs d'assurance	L_t
<i>Best Estimate</i>	BE_t
<i>Risk Margin</i>	RM_t
<i>Solvency Capital Requirement</i>	SCR_t
<i>Minimum Capital Requirement</i>	MCR_t
Cotisations	C_t
Taux court	r_t
<i>Net Asset Value</i>	NAV_t
Numéro de l'entité	i
Nombre de simulations	n
Numéro de simulation	k
k^e simulation de "X"	$X^{(k)}$
Instant de défaut	τ
Paramètres du modèle de Vasicek	(r_∞, a, σ)
Facteur d'actualisation	$\delta(t)$
Facteur d'actualisation risqué	$\delta_x(t)$
Pas de projection du bilan	d_p
Prix d'un Zéro-Coupon	$P(t, T)$
Prix d'un Zéro-Coupon risqué	$P_x(t, T)$
Taux de couverture du SCR	π_t

TABLE E.1 – Index des notations mathématiques

Nom	Cadre "mono-dette"	Cadre "multi-dette"
Nominal	N	
Nominal total	\emptyset	
Taux coupon	p	
Echéance de la dette	T	
Numéro de la dette	\emptyset	l
Flux de dette hors défaut	I_t^*	$\tilde{I}_{t,l}^*$
Flux de dette hors défaut total	\emptyset	\tilde{I}_t^*
Flux de dette avec défaut	I_t	$\tilde{I}_{t,l}$
Flux de dette avec défaut total	\emptyset	\tilde{I}_t
Valeur théorique hors défaut	V^*	
Valeur théorique avec défaut	Λ	
Valeur empirique avec défaut	V	
Valeur totale hors défaut	\emptyset	
Valeur totale sans défaut	\emptyset	
Perte en cas de défaut	LGD	

TABLE E.2 – Index des notations mathématiques