

**Mémoire présenté pour l'obtention du DUAS et l'admission à l'Institut des Actuaire**

**le vendredi 8 décembre 2023 à 09h00**

Par : Julien DESCHAMPS

Titre: Calibrage du modèle de taux G2++ dans le cadre du calcul de provisions  
CVA

Confidentialité :  NON  OUI Durée :  1 an  2 ans  3 ans  4 ans  5 ans

*Membres du jury de l'IA :*

*Entreprise : Crédit Mutuel Alliance  
Fédérale*

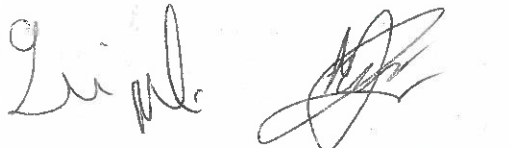
*Directeur de mémoire (entreprise) :*

*Membres du jury de l'Unistra :*

*Nom : Amandine LEIGNEL  
Noémie DREYFUS*


J. BERARD  
P.-O. GOFFARD

Signature du responsable entreprise



Secrétariat : Mme Stéphanie Richard

Signature du candidat



# Résumé

La construction d'un modèle de taux est essentielle lors du calcul de provisions *Credit Value Adjustment* puisqu'elle permet d'évaluer les prix futurs des actifs.

L'objectif est de s'approcher au mieux des données de marché avec des trajectoires stochastiques, en intégrant des contraintes de délais d'exécution. Le modèle gaussien à deux facteurs G2++ est le compromis retenu et implémenté avec des données de marché. La détermination des cinq paramètres est réalisée par minimisation de l'erreur entre le prix de marché et le prix de modèle sur un échantillon de *swaptions*. Le set optimal obtenu permet une reproduction précise des prix cotés.

Cette étude vise à quantifier l'impact des choix de calibrage à l'aide d'analyses de sensibilité. Si le choix de la distance n'est pas déterminant, l'erreur à minimiser doit être relative plutôt qu'absolue. De plus, les écarts croissants avec la taille de la surface de calibrage incitent à utiliser un échantillon plus fin. Enfin, l'exploitation d'un autre algorithme renvoie à l'arbitrage entre la précision souhaitée et la durée d'exécution.

*Mots-clés* : Calibrage, Modèle de taux, G2++, algorithme d'optimisation, swap-tion, Credit Value Adjustment, CVA, risque de crédit, test de sensibilité

# Abstract

The interest rate model calibration is key in computing regulatory Credit Value Adjustment provisions because it enables the valuation of the future price of assets.

The goal is to get as close as possible to the initial curve using stochastic trajectories while considering execution durations. The 2-factor Gaussian model G2++ is the chosen compromise that is implemented with market data. The 5 parameters values are determined by minimizing the error between market price and model price on a sample of swaptions. The obtained set of values allows a precise reproduction of market prices.

This study aims to quantify the impact of calibration choices using sensitivity analyses. If the distance component is not crucial, the minimized error should be relative rather than absolute. Moreover, differences are increasing with the size of the calibration surface which is an argument in favor of using smaller samples. Lastly, using another algorithm points to the arbitrage between expected precision and execution duration.

*Mots-clés* : Calibration, interest rate model, G2++, optimization algorithm, swaption, Credit Value Adjustment, CVA, credit risk, sensibility analysis

# Note de synthèse

La *Credit Value Adjustment* (CVA) est la principale mesure du risque de crédit sur les produits dérivés. Elle représente la valeur de marché du risque de contrepartie, et s'écrit :

$$CVA = MtM_{sans\ risque} - MtM$$

avec  $MtM$  la valeur de marché de l'actif.

Depuis la mise en application de la norme comptable IFRS 13, le régulateur exige de calculer des montants de provisions CVA basés sur l'estimation en *fair value* des instruments. Puisque la valorisation d'actifs nécessite l'actualisation des flux futurs probables, la modélisation stochastique des taux d'intérêt est centrale au sein d'un moteur de provisions CVA. Il s'agit donc de calibrer de manière pertinente les paramètres d'un modèle de taux adapté à cet enjeu. Le périmètre retenu est restreint aux produits dérivés de taux.

Les modèles de taux sont principalement caractérisés par le nombre de facteurs aléatoires générés. D'une part, les modèles de taux à un facteur tels que Vasicek ou Hull-White ont souvent des difficultés à s'adapter à des courbes initiales singulières. D'autre part, les modèles basés sur plus de deux facteurs tels que le *LIBOR Market Model* (LMM) sont complexes à implémenter et requièrent une durée d'exécution importante. Ainsi, le modèle gaussien à deux facteurs, appelé G2++, constitue un compromis satisfaisant à travers ses bonnes capacités d'adaptation à la courbe de taux en *input* et sa complexité raisonnable répondant aux contraintes opérationnelles.

Le modèle G2++ est caractérisé par la dynamique de taux suivante :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t)$$

avec  $r(0) = r_0 \in \mathbb{R}$  la valeur du taux court sur le marché en date de calcul et  $(x(t))_{t \geq 0}$  et  $(y(t))_{t \geq 0}$  deux processus d'Orstein-Uhlenbeck initialement nuls vérifiant :

$$\begin{cases} dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t) \\ dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t) \end{cases}$$

où :

- $W_1$  et  $W_2$  sont deux mouvements browniens standards tels que :

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$$

où  $\rho \in [-1,1]$  est la corrélation instantanée.

- $a, b, \sigma$  et  $\eta$  sont des paramètres strictement positifs.
- $\varphi$  est une fonction déterministe bien définie sur l'intervalle  $[0, T^*]$  (avec  $T^* > 0$  un horizon de temps donné), vérifiant  $\varphi(0) = r_0$ .

Le calibrage est réalisé à partir de données de marché au 30/11/2022 afin de vérifier la propriété de *market consistency*. Le calibrage nécessite une courbe de taux en entrée, ainsi qu'un échantillon de valeurs cibles duquel le modèle doit s'approcher.

### La courbe de taux

La courbe retenue est celle des taux *swaps* entre 1 et 30 ans. Elle est atypique car elle présente deux bosses respectivement à 2 et 12 ans :

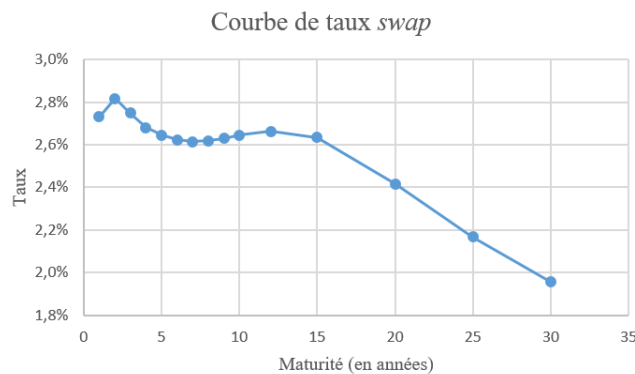


FIGURE 1 – Courbe de taux euro *swap* au 30/11/2022

### Les valeurs cibles

Les *caps* (et *floors*) et les *swaptions* sont les deux produits les plus utilisés pour calibrer le modèle G2++. Leur caractère optionnel permet aux investisseurs d'exprimer leurs anticipations de manière plus spécifique qu'avec des produits plus simples tels que des FRA ou des *swaps*. Ils captent ainsi mieux les fluctuations de marché que l'on cherche à incorporer au modèle.

Le choix est fait de calibrer avec des *swaptions* en raison de leur complexité plus importante que celle des *caps*, ainsi que de la liquidité importante dont ils bénéficient à date d'étude. Par ailleurs, la liquidité est maximisée en utilisant des produits "à la monnaie" (ATM) sur les marchés.

Bien que les *swaptions* sont cotées en volatilité implicite, l'objectif est de reproduire les prix de marché. Les surfaces de volatilité ne permettent pas nécessairement de comparer des valeurs avec des maturités/ténors différent(e)s. L'utilisation des prix est donc retenue pour le calibrage.

De plus, il existe deux conventions de récupération des volatilités implicites : le modèle normal de Bachelier ou le modèle log-normal de Black. Afin de préserver un maximum de flexibilité, il est choisi d'opter pour la convention normale, utilisable même en période de taux bas voire négatifs.

La surface de prix disponible comprend des maturités de 0,25 à 30 ans et des ténors de 1 à 30 ans. Une première restriction est appliquée : les *swaptions* de maturité totale supérieure à 30 ans ne sont pas considérées. En effet, elles ne représentent qu'une part très faible des actifs détenus, négligeable pour cette étude. De plus, cela permet de limiter les approximations en n'extrapolant pas la courbe des taux initiale.

L'étude des produits en portefeuille met en évidence que plus de 90% des *swaptions* possèdent une maturité totale comprise entre 1,25 an et 5 ans. L'utilisation de cet échantillon est suffisante pour l'analyse des sensibilités et limite considérablement les écarts marché/modèle ainsi que la durée d'exécution.

Finalement, le calibrage est réalisé à partir d'un ensemble de 18 prix de marché au 30/11/2022, obtenus avec le modèle de Bachelier et associés à des *swaptions* ATM dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans.

## **Le problème de minimisation**

La détermination des valeurs des 5 paramètres nécessite de minimiser les écarts entre les prix de marché et les prix calculés par le modèle G2++ sur l'échantillon cible.

Pour chaque *swaption*, l'appréciation de la distance peut être réalisée à l'aide de plusieurs fonctions : valeur absolue, fonction carré ou d'autres fonctions puissances d'ordres pairs supérieurs. L'enjeu de ce choix est de déterminer un degré de sensibilité pertinent aux valeurs aberrantes. Usuellement, la fonction carré représente un compromis satisfaisant : l'erreur quadratique est utilisée.

De plus, il est nécessaire d'établir le poids associé à chaque produit de l'échantillon cible. Les deux grandes conventions sont l'erreur absolue et l'erreur relative. Etant donné que les prix de marché sont globalement croissants avec la maturité et le

térior des produits, la valeur absolue surpondère les plus grandes maturités totales. Sans *a priori* sur les pondérations, il est choisi d'accorder une importance équivalente à chaque produit en utilisant l'erreur relative.

Le problème de minimisation est décrit mathématiquement par :

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{i \in I} \left( \frac{\Pi_i^{obs} - \Pi_i^{mod}(\theta)}{\Pi_i^{obs}} \right)^2$$

avec :

- $\theta = (a, b, \sigma, \eta, \rho)$  représente le vecteur à optimiser, c'est-à-dire les paramètres du modèle G2++.
- $\Theta$  représente l'ensemble des contraintes pour chaque paramètre.
- $I$  représente l'échantillon cible avec les 18 *swaptions*.
- $\Pi_i^{obs}$  est le prix de marché de la *swaption*  $i$ .
- $\Pi_i^{mod}$  est la fonction, dépendant des paramètres, du prix théorique de G2++ de la *swaption*  $i$ .

### Les contraintes et l'algorithme retenu

Le modèle G2++ impose  $a, b, \sigma$  et  $\eta$  strictement positifs et  $\rho$  appartenant à l'intervalle  $[-1, 1]$ . Afin de limiter le risque de divergence du modèle sans empêcher l'atteinte du minimum global, les contraintes retenues sont :

$$a, b, \sigma, \eta \in [10^{-4}, 10]^4 \text{ et } \rho \in [-1, 1]$$

Pour résoudre de tels problèmes, les deux solutions principales utilisées à date d'étude sont les algorithmes L-BFGS-B (basé sur la descente de gradient et la Hessienne) et Levenberg-Marquardt (combinaison de l'algorithme de Gauss-Newton et de la descente de gradient). Le L-BFGS-B est retenu sur la base de sa vitesse d'exécution.

### La détermination du prix de modèle

La formule de valorisation d'une *swaption* par le modèle G2++ nécessite le recours à la quadrature de Gauss-Hermite pour réaliser une intégration numérique et à l'algorithme de Newton pour la résolution d'équations non-linéaires. La durée d'exécution s'avère trop longue avec ces méthodes. Une approximation suffisamment précise et beaucoup plus rapide proposée par Schrager et Pessler est retenue.

## Les résultats obtenus

L'indicateur d'erreur observé est la moyenne de l'erreur relative en valeur absolue, exprimée en pourcentage.

L'algorithme L-BFGS-B n'assure pas la convergence vers la solution optimale. En effet, il détermine les minima locaux autour d'un set précisé en *input*. C'est pourquoi il est nécessaire de l'implémenter avec un set initial proche de la solution optimale. Pour ce faire, il convient de tester des sets aléatoires de paramètres à plusieurs reprises afin qu'une confiance suffisante soit accordée au set final. Ici, 100 lancements différents ont été réalisés. Le set de paramètres optimal est :

$a$	$b$	$\sigma$	$\eta$	$\rho$
43,9%	21,3%	5,0%	7,2%	-95,0%

TABLE 1 – Set de paramètres optimal obtenu en calibrant avec des *swaptions* dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans

Les valeurs obtenues sont cohérentes et proches des résultats issus d'études similaires. En effet, la volatilité est limitée par les faibles valeurs de  $\sigma$  et  $\eta$ , en outre  $\rho$  est proche de  $-1$  sans l'atteindre.

Ce set de paramètres présente une erreur globale de 2,13%, ce qui est relativement faible compte tenu de la taille de l'échantillon cible.

Le calcul des prix de zéro-coupon avec le modèle a permis de comparer les déflateurs du modèle avec ceux issus la courbe de taux initiale :

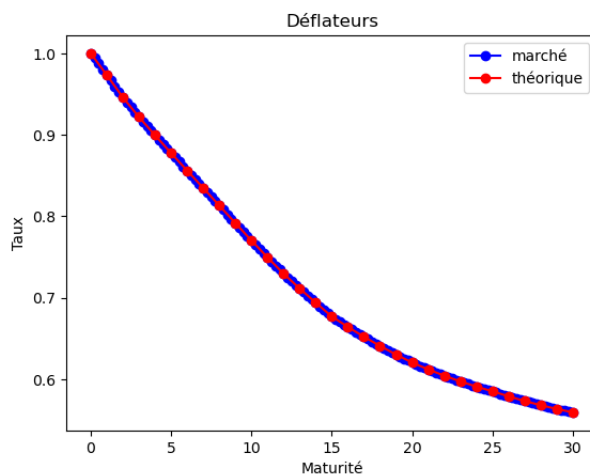


FIGURE 2 – Comparaison des déflateurs issus du calibrage de G2++ et de marché



Le modèle permet de reproduire parfaitement la courbe de taux initiale, ce qui est satisfaisant puisque c'est une propriété de G2++.

### Les analyses de sensibilités

Il apparaît nécessaire de mesurer l'impact du choix d'une surface restreinte pour le calibrage en modifiant l'échantillon de valeur cible. Pour cela, une surface de 96 prix de *swaptions* de maturités totales inférieures à 30 ans est utilisée. Une erreur globale de 5,23% est obtenue avec un set optimal très éloigné du précédent. L'erreur est 2,5 fois plus importante, et les résultats indiquent une mauvaise adaptation aux produits de grandes maturités  $\times$  ténors. Il n'est pas pertinent d'utiliser une telle surface pour cette étude.

De plus, il est intéressant de remettre en cause le choix de la distance en remplaçant la fonction carré par la valeur absolue. Le set optimal est très proche de celui de référence, de même que l'erreur globale. Avec les données utilisées, le choix de la distance n'est donc pas déterminant pour le calibrage.

L'analyse suivante consiste à utiliser l'erreur absolue plutôt que l'erreur relative dans le processus de calibrage. Compte tenu de la dynamique des prix, ce choix ne pondère pas équitablement chaque produit. L'erreur globale augmente à 2,38%, obtenue avec  $\rho$  très proche de  $-1$  ( $< -99\%$ ) et des volatilités près de 4 fois plus élevées que celle de référence. L'impact potentiel sur la projection de trajectoires stochastiques est conséquent. Dans le contexte de cette étude, il est préférable de calibrer en utilisant l'erreur relative plutôt que l'erreur absolue.

Le dernier test utilise l'algorithme de Levenberg-Marquardt lors de l'optimisation. Cette méthode nécessite une durée importante d'exécution. Un nombre d'évaluations maximal de la fonction objectif est fixé pour répondre aux contraintes opérationnelles. Néanmoins, la mise en place de ce seuil ne permet pas à l'algorithme de converger vers une solution aussi précise que celle de référence.

Les différentes sensibilités réalisées tendent à valider les choix de calibrage. Elles soulignent la pertinence de restreindre la taille de l'échantillon de valeurs cibles, ainsi que l'utilisation de l'erreur relative plutôt que l'erreur absolue. En revanche, les tests indiquent que le choix de la distance n'est pas déterminant.

# Executive summary

Credit Value Adjustment (CVA) is the main measure of credit risk on derivative products. It represents the market value of the compensation risk, and is written as follows :

$$CVA = MtM_{risk-free} - MtM$$

Since the implementation of the IAS 39 accounting standard, CVA provisions must be computed based on the fair value of financial instruments. Asset valuation requires the actualization of future expected cash flows. Therefore interest rate term structure is modeled stochastically and is key in a CVA provisions model. The goal of this study is thus to calibrate parameters of an interest rate model as relevantly as possible considering the issue previously mentioned. The chosen scope is restricted to derivative products.

Interest rate models are mainly characterized by the number of random factors generated. On the one hand, 1-factor interest rate models like Vasicek or Hull-White usually face difficulties adapting to particular initial curves. On the other hand, models that involve more than 2 factors such as the LIBOR Market Model (LMM), are complex to implement and take longer to execute. Considering these issues, the 2-factor Gaussian model G2++ is a satisfactory compromise because of its adaptation abilities to the interest rate curve as an input and its reasonable complexity which meets operational constraints.

G2++ model is characterized by the following interest rate dynamic :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t)$$

with  $r(0) = r_0 \in \mathbb{R}$  the short interest rate value on the market at computation date and  $(x(t))_{t \geq 0}$  and  $(y(t))_{t \geq 0}$  two initially null Orstein-Uhlenbeck processes verifying :

$$\begin{cases} dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t) \\ dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t) \end{cases}$$

where :

- $W_1$  et  $W_2$  are 2 standards Brownian motions such as :

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$$

where  $\rho \in [-1,1]$  is the instant correlation.

- $a, b, \sigma$  et  $\eta$  are strictly positive parameters.
- $\varphi$  is a determinist function defined on the  $[0, T^*]$  interval (with  $T^* > 0$  a defined temporal horizon), verifying  $\varphi(0) = r_0$ .

The calibration is made from market data as of 30/11/2022 in order to verify both market consistency and fair value properties. The calibration needs an interest rate curve as input and target values that the model prices should approach.

### Interest rate curve

The swap rate curve with swap rates between 1 and 30 years is chosen here. It is atypical as it shows two bumps at 2 and 12 years respectively :

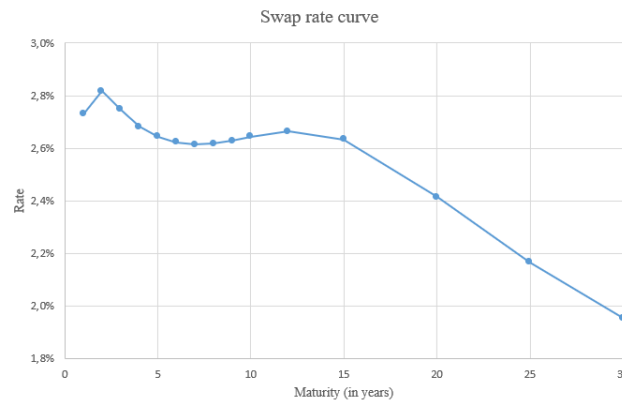


FIGURE 3 – Euro swap interest rate curve on the 30/11/2022

### Target values

Caps (and floors) and swaptions are the two main products used to calibrate the G2++ model. Their optional characteristic allows investors to express their expectation in a more specific way than with simpler products like FRA or swaps. Hence they better capture the market fluctuations that are to be implemented in the model.

The choice is made to calibrate with swaptions because of their additional complexity compared to caps and the significant liquidity they have at study date. Moreover liquidity is maximized by using "At The Money" (ATM) products.

Even though swaptions are valued using implicit volatility, the goal is to reproduce market prices. Furthermore volatility surfaces do not necessarily enable comparisons with different maturities and tenors. Hence prices will be used for calibration instead of volatilities.

Moreover two conventions exist to acquire implied volatilities : Bachelier normal

model and Black log-normal model. In order to keep maximal flexibility, the normal convention is chosen because it can be used even in low or negative interest rate periods.

The available price surface includes maturities from 0,25 to 30 years and tenors from 1 to 30 years. A first restriction is made : swaptions with maturities over 30 years are not included. Indeed, they only represent a small part of the portfolio. Furthermore, this avoids extrapolating the initial rate curve. More than 90% of swaptions have a maturity between 1,25 year and 5 years. Therefore using such a sample is sufficient for sensitivity analysis and significantly reduces market/model discrepancies as well as execution time.

The calibration is made from a total of 18 market prices collected on the 30/11/2022 with the Bachelier model and associated with ATM swaptions with a maturity between 1,25 year and 5 years.

### Minimization problem

To determine values for the 5 parameters, differences between market prices and G2++ model prices need to be minimized on the sample.

For each swaption, the estimate of the distance may be done using several function : absolute value, square function or other superior pair-powered functions. The goal is to select a sensitivity level that is relevant for outliers. The square function is usually considered as a satisfying compromise.

Besides, the weighting of each product included in the sample should be established. Two conventions exist on the matter : absolute and relative errors. Considering that market prices are mostly increasing with maturity and tenor of products, the absolute value overweighting the largest total maturities. Without any prior assumptions about the weightings, it is chosen to assign equal importance to each product using relative error.

The minimization problem is described mathematically by :

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{i \in I} \left( \frac{\Pi_i^{obs} - \Pi_i^{mod}(\theta)}{\Pi_i^{obs}} \right)^2$$

with :

- $\theta = (a, b, \sigma, \eta, \rho)$  represents the vector to be optimized, i.e. the parameters of the G2++ model.
- $\Theta$  represents the constraints for each parameter.
- $I$  represents the target sample with the 18 swaptions.

- $\Pi_i^{obs}$  is the market price of swaption  $i$ .
- $\Pi_i^{mod}$  is the function, depending on the parameters, of the theoretical price with G2++ of the swaption  $i$ .

### Constraints and chosen algorithm

G2++ model imposes  $a, b, \sigma$  et  $\eta$  strictly positive and  $\rho$  included in the  $[-1,1]$  interval. To limit the risks of divergence from the model which would prevent from getting to the global minimum, the following constraints are applied :

$$a, b, \sigma, \eta \in [10^{-4}, 10]^4 \text{ and } \rho \in [-1, 1]$$

To solve such issues, two main solutions used usually used : the L-BFGS-B algorithm (based on the gradient descent and the Hessian) and the Levenberg-Marquardt algorithm (a mix between Gauss-Newton algorithm and the gradient descent). The L-BFGS-B is chosen because it fits the execution time constraint better.

### Model pricing

The valuation formula of a swaption by the G2++ model requires the Gauss-Hermite squaring to do a numerical integration and the Newton algorithm to solve non-linear equations. Execution time is too long with these methods. An accurate and much faster approximation offered by Schrager and Pessler is used.

### Results

The observed error indicator is the average relative error in absolute value, expressed in percentage.

The L-BFGS-B algorithm does not guarantee convergence to the optimal solution. Indeed, it identifies local minima around a specified input set. Therefore, it is necessary to implement it with an initial set close to the optimal solution. Here 100 different executions have been made to obtain the following set of optimal parameters :

$a$	$b$	$\sigma$	$\eta$	$\rho$
43,9%	21,3%	5,0%	7,2%	-95,0%

TABLE 2 – Optimal set of parameters obtained by calibrating with swaptions of total maturity is between 1.25 and 5 years

Obtained data are coherent and similar to recent studies. Volatility is limited by small values of  $\sigma$  and  $\eta$ , and  $\rho$  is close to  $-1$  without reaching it. This parameters set has a global error of 2,13% which is small considering the size of the sample.

The computation of zero-coupon prices with the model enables to compare deflators with those of the initial interest rate curve :

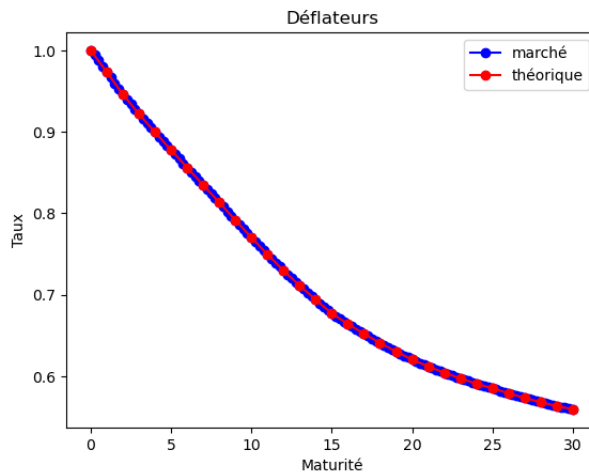


FIGURE 4 – Comparison of deflators from G2++ calibration and market

The model enables to perfectly reproduce the initial interest rate curve which is satisfying considering the fact that it is a G2++ property.

### Sensitivity analyses

The impact of the restricted surface on calibration is measured by modifying the value sample. A price surface including 96 swaptions of total maturities under 30 years is used. A global error of 5,23% is obtained with an optimal set very distant from the previous one. The error is 2,5 times bigger and results indicate a misfit to products with large maturities  $\times$  tenors.

Moreover, it seems interesting to challenge the distance by replacing the square function with the absolute value. The optimal set is very close to the reference and the global error is almost identical with 2,14%. With the data used, the distance choice is not decisive for calibration.

The next analysis consists in using the absolute error instead of the relative one during calibration process. Due to price dynamics, this choice does not weigh

equally each product. The global error increases to 2.38% with a  $\rho$  very close to  $-1$  ( $< -99\%$ ) and volatilities almost 4 times bigger than the reference value. The potential impact on stochastic trajectories projections is important. Hence, in this study, the relative error is preferred to the absolute to calibrate.

The last test uses Levenberg-Marquardt algorithm for optimization. This method needs a significant execution duration. A maximum number of evaluations of the goal function is set. Nevertheless this limit does not allow the algorithm to converge to a solution as accurate as the reference value.

Sensibilities tend to validate calibration's choices. It underlines the relevance of using a smaller value sample as well as the relative error more than the absolute. On the other hand, tests point that the choice of distance choice is not determinative.

# Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mes tutrices Amandine Leignel et Noémie Dreyfus pour leur encadrement, leur disponibilité et leur bienveillance depuis mon arrivée.

En second lieu, je tiens à mentionner Evelyne Lucke-Briault et Sidi El Bahraoui de m'avoir donné l'opportunité d'effectuer mon stage et mon alternance, puis de m'avoir embauché au Pôle Finances de l'Audit Métiers, au sein de l'Inspection Générale du Groupe Crédit Mutuel Alliance Fédérale.

Plus largement, je remercie l'ensemble des collaborateurs du Pôle Finances pour leur bienveillance. Je souhaite tout particulièrement remercier Estelle Louette pour ses nombreuses relectures et souligner l'aide de Cyril Coste dont l'expérience en modélisation financière m'a été d'une grande aide, ainsi que mon fidèle binôme de travail Alexandre Puel.

Je remercie également Valentine Poutçou pour sa relecture et pour avoir partagé avec moi son expérience du mémoire sur un sujet similaire.

Un grand merci à mon ami Alec Sabry pour son regard aiguisé à la relecture et pour tous les bons moments partagés au cours de ces trois dernières années.

J'adresse mes remerciements à l'équipe pédagogique du DUAS pour l'ensemble des connaissances transmises au cours de ces trois années, qui ont permis la réalisation de ce mémoire.

Enfin, je tiens à remercier du fond du coeur ma mère pour tout ce qu'elle a fait pour moi.



# Table des matières

Introduction	1
<b>I Le cadre de l'étude</b>	<b>3</b>
<b>1 Le risque de crédit sur les produits dérivés</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction et périmètre retenu . . . . .	5
1.2 Les caractéristiques du marché des dérivés . . . . .	5
<b>2 Les provisions <i>Credit Value Adjustment</i></b>	<b>12</b>
2.1 Périmètre de l'étude . . . . .	13
2.2 Le contexte et la réglementation . . . . .	13
2.3 La détermination des provisions CVA . . . . .	18
<b>3 La présentation du modèle de taux</b>	<b>21</b>
3.1 Histoire . . . . .	22
3.2 Principaux modèles . . . . .	25
3.3 Le choix du modèle G2++ . . . . .	26
<b>4 La problématique et les données utilisées</b>	<b>28</b>
4.1 La méthodologie de l'audit . . . . .	28
4.2 L'intérêt de l'étude . . . . .	30
4.3 La provenance et la qualité des données . . . . .	30
<b>II Les fondements théoriques</b>	<b>31</b>
<b>5 Les notions mathématiques et financières</b>	<b>32</b>
5.1 Les hypothèses théoriques . . . . .	33
5.2 Le concept de taux d'intérêt . . . . .	33
5.3 Les éléments fondamentaux . . . . .	35
5.4 Les principaux produits dérivés de taux et leur valorisation . . . . .	35

<b>6</b>	<b>Les spécificités du modèle G2++</b>	<b>43</b>
6.1	La dynamique du taux court . . . . .	43
6.2	L'interprétation des variables du modèle . . . . .	44
6.3	La distribution du taux court . . . . .	44
6.4	Le <i>pricing</i> d'une obligation zéro-coupon avec G2++ . . . . .	45
6.5	Le <i>pricing</i> d'une <i>swaption</i> avec G2++ . . . . .	46
<b>III</b>	<b>L'implémentation</b>	<b>48</b>
<b>7</b>	<b>Le calibrage du modèle de taux G2++</b>	<b>49</b>
7.1	Les données d'entrée . . . . .	50
7.2	L'optimisation . . . . .	59
7.3	Les résultats . . . . .	66
<b>IV</b>	<b>L'analyse des résultats et tests de sensibilité</b>	<b>71</b>
<b>8</b>	<b>Les sensibilités du modèle de taux</b>	<b>72</b>
8.1	Modification de la surface de prix . . . . .	72
8.2	Changement de distance . . . . .	74
8.3	Changement d'erreur . . . . .	76
8.4	Algorithmes alternatifs . . . . .	78
8.5	D'autres tests de sensibilité . . . . .	79
	<b>Conclusion</b>	<b>80</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>85</b>
	<b>Annexe</b>	<b>88</b>
	<b>A Processus d'Orstein-Uhlenbeck</b>	<b>88</b>

# Introduction

Le risque de crédit sur les produits dérivés de taux est un enjeu crucial dont la sous-estimation a, en partie, causé la crise des *subprimes* en 2008. Depuis cet événement, les régulateurs ont imposé des exigences de fonds propres aux différents acteurs sur les marchés. A ce jour, les normes comptables qui encadrent cette activité sont principalement IFRS 9 et IFRS 13. Elles imposent la mise en place de provisions CVA dont le calcul se base sur la juste valeur des actifs et passifs considérés. Pour chaque contrat dérivé en portefeuille comportant un risque de crédit, les organismes financiers doivent valoriser leurs produits en tenant compte du potentiel défaut de leurs contreparties. Compte tenu du volume du marché des produits dérivés de taux et de ses impacts directs sur les résultats financiers, cette activité représente un point d'attention majeur pour le secteur.

Pour un *deal* donné, la détermination du montant de provisions fait appel à plusieurs variables. Elle nécessite d'estimer les probabilités de défaut de la contrepartie, l'exposition et le montant réellement en risque en cas de survenance du défaut. La valorisation de produits financiers se base sur des prédictions de taux d'intérêt futurs afin d'actualiser les flux probables. De fait, le modèle de taux est le facteur le plus influent lors du calcul.

Cette étude a été réalisée au sein de l'Inspection Générale du Groupe Crédit Mutuel Alliance Fédérale, à la suite d'une mission d'audit portant sur le calcul des provisions CVA. La démarche d'audit vise à confronter de manière indépendante les résultats de l'entité auditée. Ainsi, l'objectif de ce mémoire est de construire un modèle de taux respectant les contraintes opérationnelles telles que la durée d'exécution.

Afin de s'adapter au marché, les modèles de taux sont stochastiques. La génération de plusieurs aléas permet de mieux capter les anticipations des investisseurs. Dans ce cadre, le modèle de taux G2++ à deux facteurs a été retenu pour cette étude. Ce modèle, très répandu, est un compromis satisfaisant entre capacité d'ajustement et simplicité de mise en oeuvre.

La première partie de cette étude présente le risque de crédit sur le marché spécifique des produits dérivés, puis la définition de la CVA. Les modèles de taux existants ainsi que la problématique sont précisés. La théorie mathématique pour construire un modèle de taux et les propriétés de G2++ sont détaillées dans la partie suivante. Dans un troisième temps, les problématiques d'implémentation du modèle de taux sont considérées et les choix retenus sont justifiés. Enfin, des tests de sensibilité sont réalisés afin de quantifier l'impact des décisions précédentes.

# Première partie

## Le cadre de l'étude

Cette première partie a pour objectif de contextualiser l'étude à travers quatre chapitres. Tout d'abord, les deux principales notions que sont le risque de crédit sur les produits dérivés et les provisions *Credit Value Adjustment* sont définies. Ensuite, une présentation des modèles de taux est réalisée. Le choix du modèle G2++ y est justifié. Le dernier chapitre précise la problématique de l'étude et les données utilisées.

# Chapitre 1

## Le risque de crédit sur les produits dérivés

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction et périmètre retenu . . . . .</b>	<b>5</b>
	Définition . . . . .	5
	Exemple . . . . .	5
<b>1.2</b>	<b>Les caractéristiques du marché des dérivés . . . . .</b>	<b>5</b>
1.2.1	Présentation . . . . .	5
	Définition . . . . .	5
	Données chiffrées . . . . .	5
	Histoire . . . . .	6
	Utilité concrète . . . . .	7
	Types de sous-jacents . . . . .	7
1.2.2	Fonctionnement des marchés . . . . .	7
	Formes de négociation . . . . .	7
	Les accords de <i>netting</i> . . . . .	10
	Modalités de paiement . . . . .	10
1.2.3	Les produits dérivés de taux . . . . .	11

---

## **1.1 Introduction et périmètre retenu**

### **Définition**

Le risque de crédit est défini comme le risque qu'une entité soit incapable d'honorer, en partie ou totalement, l'engagement financier d'un contrat, c'est-à-dire le versement de flux à des dates définies, auprès d'une contrepartie.

### **Exemple**

L'exemple le plus commun est un crédit immobilier qu'un particulier réalise auprès de sa banque. Le risque de crédit réside alors dans l'incapacité pour l'emprunteur de verser une mensualité à l'institution financière.

Le risque de crédit concerne l'intégralité des contrats financiers puisque toute entité possède une probabilité de défaut non nulle à toute date, aussi faible soit-elle.

**Le périmètre retenu dans cette étude se limite aux produits dérivés.**

Le risque de crédit comporte diverses composantes. Cette étude ne considérera que le risque, pour une entité et un contrat donnés, que la contrepartie fasse défaut. Dans ce cadre, il est question de risque de contrepartie sur le marché des produits dérivés de taux.

## **1.2 Les caractéristiques du marché des dérivés**

### **1.2.1 Présentation**

#### **Définition**

Un produit dérivé est un contrat financier entre deux parties dont la valeur dépend de l'évolution du cours d'un autre actif, appelé sous-jacent. Un produit dérivé implique nécessairement au moins un versement de flux à une date future. Ces produits sont échangés entre des acteurs spécialisés, sur le marché des produits dérivés.

#### **Données chiffrées**

Le marché des produits dérivés est le marché le plus important en volumes de flux échangés. Le tableau ci-dessous présente des données de l'Autorité des Marchés

Financiers (AMF) [3] :

Données	Volume
Notionnels bruts mondiaux	598 416
Montants en risque	12 439
Exposition brute de crédit	2 500

TABLE 1.1 – Volume des échanges (en Mds €) sur les marchés dérivés en 2021

## Histoire

Avec l'essor de la finance moderne, les grandes banques ont rapidement commencé à s'échanger des produits dérivés à des fins de couverture ou de spéculation. Ces transactions étaient conclues entre deux parties, chacune supportant alors le risque de défaut de l'autre.

L'avènement des contrats à taux *forward* dans les années 1970 a permis la création d'un marché dédié à l'échange de tels produits entre institutions financières. La seconde source d'intérêt notable pour ce marché est apparue en 1974 avec l'entrée en vigueur des taux de change variables.

Ce marché s'est considérablement développé dans les décennies qui ont suivi, tant en volumes échangés qu'en nombre de produits existants, ou encore en termes de diversité des acteurs. En effet, de plus en plus d'entreprises venant de différents domaines y trouvent une réponse à leurs besoins. Les produits échangés permettent par exemple aux entreprises marchandes de gérer leurs propres risques. Ce point est illustré dans la partie suivante.

Le marché des dérivés fait l'objet de nombreux risques de par la nature des produits mais également la volatilité et les volumes conséquents échangés. A travers le monde, des réglementations ont été mises en place pour encadrer les pratiques sur ce marché. En Europe, le règlement EMIR (*European Market Infrastructure Regulation*) publié en 2012 a pour objectif de limiter les risques sur ce marché, et ainsi contenir le risque de crise systémique.



### **Utilité concrète**

Au-delà de l'aspect spéculatif, les produits dérivés représentent une solution de gestion des risques économiques et financiers. Les deux exemples ci-dessous illustrent en quoi les produits dérivés répondent à des besoins spécifiques d'acteurs non-financiers.

- Une compagnie aérienne, consciente de la raréfaction du pétrole, anticipe une hausse du cours du kérosène à moyen long terme. Elle peut se servir d'un produit dérivé pour fixer aujourd'hui le prix d'achat d'une quantité donnée à une date future.
- Une banque, souhaitant bénéficier de la hausse des taux, peut acheter un produit pour convertir ses revenus à taux fixes contre des intérêts à taux variables.

### **Types de sous-jacents**

Les produits dérivés peuvent être indexés sur tout produit coté possédant un cours. Néanmoins, ils sont principalement issus de quatre catégories distinctes de sous-jacents :

- Produit dérivé d'action, dont au moins un sous-jacent est le cours d'une action cotée.
- Produit dérivé de change, dont au moins un sous-jacent est le cours d'une paire de devises.
- Produit dérivé de matière première, dont au moins un sous-jacent est le cours d'une matière première.
- Produit dérivé de taux, dont au moins un sous-jacent est le cours d'un taux.

## **1.2.2 Fonctionnement des marchés**

Ce paragraphe a pour objectif de présenter le fonctionnement et les spécificités du marché des dérivés à travers les types de négociations, les accords entre acteurs et les modes de paiement.

### **Formes de négociation**

Deux grands types de négociation scindent le marché des dérivés : les marchés organisés et les marchés de gré à gré. Ces derniers sont détaillés dans les paragraphes suivants.

## Marché organisé

Un marché organisé rassemble une multitude d'acteurs et assure la collecte ainsi que la confrontation des ordres. Le règlement des flux est ensuite assuré pour chaque contrat par une chambre de compensation, qui effectue des appels de marge.

### Chambre de compensation

Une chambre de compensation est une institution ayant le rôle d'intermédiaire lors d'échanges de flux financiers.

Au lieu de verser un flux à une contrepartie directement, l'entité le verse à cet organisme. La chambre de compensation se charge de payer le flux prévu au contrat à la contrepartie.

Pour remplir son rôle, la chambre de compensation impose un dépôt de garantie obligatoire pour ouvrir une position. En effet, les flux futurs étant, au moins en partie, variables, les contreparties s'engagent à verser des montants qui ne sont pas prévisibles. La chambre de compensation demande alors à chacune des contreparties de disposer de garanties disponibles dans l'hypothèse où elle deviendrait inapte à honorer ses engagements dans le futur. Ces garanties sont de deux types :

- Des liquidités déposées sur un compte de la chambre de compensation.
- Des titres peu volatils placés en nantissement auprès de la chambre de compensation. Les chambres ont chacune leurs propres règles quant aux titres qu'elles acceptent comme garanties : actifs HQLA (*High Quality Liquid Assets*) au sens de la réglementation, ou plus largement des obligations auprès de certains(e)s états/entreprises.

Ce dépôt de garantie est donc nécessaire pour conclure un *deal* en utilisant une chambre de compensation.

Néanmoins, tout comme les conditions de marché permettent d'anticiper l'évolution du prix de certains produits, elles permettent également d'anticiper les pertes potentielles futures des différents acteurs. Afin de tenir compte des évolutions de marché, la chambre de compensation révisé quotidiennement le montant du dépôt de garantie nécessaire au maintien d'une position ouverte pour chaque contrepartie.

### Appel de marge

Un appel de marge est une demande de fonds, réalisée quotidiennement par la chambre de compensation auprès de ses contreparties, pour maintenir une position ouverte. Les montants de garanties demandés par les chambres de compensation sont calculés en fonction des cours de clôture de la séance boursière précédente.

Il existe trois issues possibles à un appel de marge pour une contrepartie donnée :

- Les conditions de marché se sont détériorées depuis la dernière séance, et la chambre de compensation demande à la contrepartie d'augmenter son dépôt

de garantie. Deux possibilités :

- La contrepartie verse les flux demandés. La position est maintenue ouverte jusqu'au prochain appel de marge.
  - La contrepartie ne verse pas les flux demandés. La chambre de compensation a la possibilité de solder la position en l'état, c'est-à-dire récupérer le dépôt de garantie et clôturer le *deal*.
- Les conditions de marché se sont améliorées depuis la dernière séance. La chambre de compensation demande alors moins de dépôt de garantie, et elle reverse une partie des liquidités ou des titres à la contrepartie.

En cas de défaut d'une contrepartie, la chambre de compensation exécute tout de même les versements prévus au contrat, au bénéfice de l'autre partie. C'est donc la chambre de compensation qui supporte le risque de crédit associé à chacune des contreparties.

**Les produits négociés sur les marchés organisés ne sont donc pas soumis au risque de contrepartie.**

### Marché de gré à gré

Le marché de gré à gré, en anglais marché OTC (*Over The Counter*), à l'inverse d'un marché organisé, permet d'établir des contrats entre deux contreparties qui échangent directement, sans intermédiaire.

Historiquement, les premiers contrats dérivés ont été conclus de gré à gré.

Il est par essence moins réglementé qu'un marché organisé : les acteurs négocient les conditions des contrats et supportent directement les risques de leurs contreparties. Dans le même temps, son attractivité provient des coûts de transaction limités (en comparaison du marché organisé) rendus possible par l'absence d'intermédiaire, et la possibilité d'établir des contrats sur-mesure. Ce dernier argument est néanmoins à nuancer puisqu'il est également source d'illiquidité.

### Taux de recouvrement

Bien que le marché de gré à gré soit moins contrôlé qu'un marché organisé, il y existe une notion similaire au dépôt de garantie fait à la chambre de compensation. Il s'agit de l'application d'un taux de recouvrement, noté  $R$ , sur chaque contrat. C'est la proportion du nominal qu'un acteur va recevoir en cas de défaut de sa contrepartie.

Cela permet de réduire la perte en cas de défaut sur un contrat. En effet, pour une obligation zéro-coupon de montant de nominal  $N$ , l'exposition est alors égale

à tout instant  $t$  à :

$$E(t) = N * (1 - R(t))$$

**Dans la suite de cette étude, ne sont considérés que des produits négociés sur le marché de gré à gré, portant un risque de contrepartie.**

### Les accords de *netting*

Les acteurs présents sur les marchés ont des expositions à de nombreuses contreparties différentes. En règle générale, ils ont plusieurs contrats avec chaque contrepartie. Sur le marché des produits dérivés, où peuvent s'échanger des produits avec de nombreux versements de flux financiers, cette situation fait apparaître de nouvelles problématiques telles que la gestion de la liquidité, les coûts de transaction et le risque de livraison.

C'est pourquoi des accords dit "de *netting*" sont conclus entre les acteurs, pour limiter le nombre et les montants des versements à effectuer. Il est question de compensation bilatérale entre des acteurs qui y trouvent chacun des bénéfices. Ces accords ne sont pas obligatoires, mais ils sont devenus des pratiques courantes de marché et sont largement répandus aujourd'hui. Deux contreparties peuvent d'ailleurs déterminer plusieurs contrats de compensation différents, par exemple en fonction des produits échangés. Il est à la discrétion des acteurs de définir les caractéristiques de chacun de leurs contrats de *netting*.

Il existe différents contrats-types permettant d'encadrer les transactions de gré à gré sur les dérivés. Le plus connu est le contrat cadre ISDA. Ce contrat a été créé par l'*International Swaps and Derivatives Association* en 1992 et modifié pour la dernière fois en 2018. L'ISDA explique qu'un tel contrat définit "les principes fondamentaux qui sont nécessaires au caractère exécutoire du mécanisme de résiliation-compensation bilatérale" [10].

### Modalités de paiement

L'utilisation de produits dérivés permet de convenir de la date de paiement. Ceci est spécifique au marché des dérivés et se divise en deux parties :

- Le paiement au comptant des produits, c'est-à-dire que l'acheteur paye immédiatement. C'est le sens intuitif du commerce, appelé "paiement cash".
- Le paiement à une date future des produits, c'est-à-dire que l'acheteur devient détenteur du produit immédiatement mais ne le paye qu'à une date future définie. Ce sont les contrats à terme.

### 1.2.3 Les produits dérivés de taux

Les dérivés de taux représentent une part importante du marché des dérivés en termes d'encours. Le tableau ci-dessous présente des données issues de l'AMF [3].

<b>Données</b>	<b>Volume</b>
Notionnels bruts mondiaux	475 271
Encours total compensés	370 157

TABLE 1.2 – Volume des échanges (en Md €) sur les marchés dérivés de taux en 2021

Il apparaît que les produits dérivés de taux représentent 79% de l'encours total sur les dérivés en 2021. De plus, la part des produits de taux compensés s'élève à 78% de l'encours total la même année, ce qui montre l'efficacité des réglementations mises en place pour limiter le risque de contrepartie sur cette classe d'actifs.

Les dérivés de taux sont surtout utilisés par les institutions financières, à la fois pour couvrir leurs positions, et pour spéculer sur la volatilité des taux avec l'effet de levier.

# Chapitre 2

## Les provisions *Credit Value Adjustment*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Périmètre de l'étude . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>2.2</b>	<b>Le contexte et la réglementation . . . . .</b>	<b>13</b>
2.2.1	L'apparition de la CVA . . . . .	14
	Normes comptables . . . . .	14
	Normes réglementaires . . . . .	14
2.2.2	Agrégation des provisions CVA . . . . .	16
	Au niveau d'un contrat . . . . .	16
	Au niveau d'une contrepartie . . . . .	16
	Exemple . . . . .	16
<b>2.3</b>	<b>La détermination des provisions CVA . . . . .</b>	<b>18</b>
2.3.1	L'exposition au défaut . . . . .	18
2.3.2	La probabilité de défaut . . . . .	18
2.3.3	La perte en cas de défaut . . . . .	19
2.3.4	La formule théorique . . . . .	19

---

La *Credit Value Adjustment* (CVA) est la valeur de marché du risque de crédit pour un produit dérivé. Elle est définie comme la différence entre la valeur du dérivé calculée sous l'hypothèse que la contrepartie ne fasse pas défaut, et la valeur du dérivé en levant cette hypothèse. Cet indicateur de risque se comporte comme une décote sur la valorisation d'un dérivé qu'une entité subit en raison du risque de défaut de sa contrepartie. Ainsi, en notant Mark-to-Market (*MtM*) la valorisation d'un actif sur le marché, la CVA est donnée par :

$$CVA = MtM_{sans\ risque} - MtM \quad (2.1)$$

## 2.1 Périmètre de l'étude

Il existe plusieurs provisions différentes au titre du risque de contrepartie. Ces dernières forment la famille des provisions xVA.

L'exemple suivant permet de les définir :

Soit une entité A qui a conclu un *deal* avec une contrepartie B. Les principales provisions sont :

- La provision CVA. Elle est liée au risque, supporté par A, que la contrepartie B fasse défaut avant la maturité du produit.
- La provision DVA (*Debit Value Adjustment*). Elle est rattachée au risque, supporté par B, que A fasse défaut avant la maturité. Ainsi, la DVA joue un rôle identique à la CVA mais du point de vue de l'autre partie.
- La provision FVA (*Funding Value Adjustment*). Elle représente le coût de financement d'un produit non-collatéralisé et intègre le risque d'illiquidité non couvert par les deux provisions précédentes. Cette provision est elle-même constituée de deux types de provision : FBA (*Funding Benefit Adjustment*) liée aux bénéfices et FCA (*Funding Cost Adjustment*) liée aux coûts.

De ce fait, la prise en compte du risque de contrepartie comprend deux dimensions : il est question de CVA bilatérale (comprenant la CVA et la DVA), et de CVA unilatérale (sans la DVA). La DVA et la FVA ne sont pas abordées davantage.

**Le sujet sous-jacent à cette étude est la détermination des montants de provisions pour la CVA unilatérale.** Elle représente des enjeux importants puisqu'elle comptabilise les pertes attendues, qui impactent directement les résultats financiers.

## 2.2 Le contexte et la réglementation

La crise financière de 2008-2009, aussi appelée crise des *subprimes*, a causé des pertes importantes aux acteurs des marchés, voire des faillites. Ces événements ont eu des conséquences sur l'ensemble des acteurs, notamment à cause des produits dérivés négociés de gré à gré. La crise des *subprimes* a mis en évidence une sous-estimation importante du risque de crédit, spécifiquement sur le marché OTC. Les différents acteurs ont globalement reconnu le besoin de renforcer la réglementation dans ce domaine.

## 2.2.1 L'apparition de la CVA

Les normes qui encadrent les provisions CVA sont apparues après 2008. Leurs attendus sont de deux types : comptables et réglementaires. Les principaux textes et leurs contenus sont repris dans les paragraphes suivants.

### Normes comptables

Les normes comptables sont basées sur les directives publiées par l'IASB (*International Accounting Standards Board*)<sup>1</sup>. Ces textes sont ensuite transposés en droit européen. Les deux principaux textes en lien avec la CVA sont :

- IFRS 13, publié en 2013. Ce texte a mis en place la notion d'évaluation à la juste valeur des produits financiers. Une définition est donnée à l'article 22 : "L'entité doit évaluer la juste valeur d'un actif ou d'un passif à l'aide des hypothèses que les participants de marché utiliseraient pour fixer le prix de l'actif ou du passif, en supposant que les participants de marché agissent dans leur meilleur intérêt économique". Cette idée représente une avancée majeure dans la gestion des risques : elle permet aux investisseurs d'avoir une meilleure compréhension des actifs puisque leurs valeurs reflètent les prix de marché actuels.
- IFRS 9, publié en 2018. Il précise la détermination des provisions CVA. Le paragraphe 5.5.13 contient notamment la mention précisant "l'entité doit évaluer les pertes de crédit attendues sur un instrument financier d'une façon qui reflète : un montant objectif et fondé sur des pondérations probabilistes, la valeur temps de l'argent et les informations raisonnables et justifiables sur les événements passés, la conjoncture actuelle et les prévisions de la conjoncture économique future, qu'il est possible, à la date de clôture, d'obtenir sans devoir engager des coûts ou des efforts excessifs".

### Normes réglementaires

Les normes réglementaires sont basées sur les accords de Bâle<sup>2</sup>. Ces textes sont ensuite transposés en droit européen via des paquets dédiés. La CVA réglementaire correspond aux fonds propres obligatoires afin de faire face au risque de défaut d'une contrepartie, c'est-à-dire le risque de variation de la valeur des dérivés dû

---

1. L'IASB est un organisme à but non lucratif chargé d'élaborer des normes comptables internationales. Basé à Londres, son objectif est de publier les normes labellisées IFRS.

2. Les accords de Bâle sont des directives prudentielles publiées par un comité d'experts dont les textes ont des impacts majeurs sur les exigences de fonds propres pour les banques.



à la dégradation de la qualité de crédit de la contrepartie (hors instrument de couverture). Les deux principaux textes en lien avec la CVA sont :

- Les accords de Bâle III publiés en 2010. Ce texte constitue la réponse du comité de Bâle à la crise de 2008, avec pour objet de renforcer la réglementation, le contrôle et la gestion des risques dans le secteur bancaire. Il complète les accords de Bâle II qui datent de 2004, et a été transposé en droit européen avec le paquet CRD (*Capital Requirement Directives*). A date d'étude, la dernière version est le CRD IV, qui comprend notamment des dispositions permettant de renforcer les exigences prudentielles concernant le risque de contrepartie. Ce texte a été complété à de nombreuses reprises depuis sa publication.
- Le CRR (*Capital Requirements Regulation*) publié en 2013. Il vient renforcer le CRD IV en proposant deux méthodologies d'évaluation de l'exigence de fonds propres pour risque d'ajustement de l'évaluation de crédit : la méthode standard (article 384) et la méthode avancée (ou méthode interne, article 383). L'utilisation d'une méthode avancée ou standard pour calculer l'exigence de fonds propres au regard du risque CVA est subordonnée à l'accord de leur autorité de contrôle. Les deux méthodes sont les suivantes :
  - La méthode IMM (*Internal Model Method*) repose sur la création d'un modèle interne à l'entité pour évaluer le besoin en fonds propres. Ce modèle doit être conforme à la réglementation et validé régulièrement par le régulateur. Cette méthode requiert des compétences spécifiques pour la conception d'un modèle adéquat, et fait porter une responsabilité importante sur les banques qui l'utilisent.
  - Le modèle VaR (*Value At Risk*) repose sur l'établissement d'un niveau de confiance acceptable par rapport au montant maximal de pertes attendues. Ces pertes attendues sont déterminées par un modèle interne conçu par l'entité.

Sans cette homologation, la charge en capital sur le risque CVA est calculée selon la méthode standard.

- Le CRR II publié en juin 2021. Il a proposé une nouvelle méthode standard qui modifie le calcul des valeurs exposées au risque pour l'estimation des exigences en fonds propres au titre du risque CVA et au titre du risque de contrepartie. Les entités peuvent choisir, sous condition de volume des positions sur dérivés (bilan et hors bilan), entre les trois approches définies dans le CRR II : la SA-CCR, la SA-CCR simplifiée et la méthode de l'exposition initiale dite OEM (modèle interne).

## 2.2.2 Agrégation des provisions CVA

La détermination des provisions est intrinsèquement liée à l'exposition. Cette donnée peut être déterminée au niveau de chaque contrat, mais il est nécessaire de la considérer à la maille de la contrepartie pour tenir compte des différents accords.

### Au niveau d'un contrat

Soit  $V_t$  la valeur d'un contrat à un instant  $t$ . Le risque de défaut n'apparaît que si l'exposition est positive, c'est-à-dire que la contrepartie a une dette. Ainsi :

$$Expo(t) = \max(V(t), 0)$$

### Au niveau d'une contrepartie

Il a été expliqué au 1.2.2 que les acteurs sur les marchés utilisent des accords de *netting* afin de simplifier les nombreuses transactions et optimiser leur liquidité. Néanmoins, ces accords ne sont pas obligatoires et tous les contrats ne sont pas nécessairement couverts. La prise en compte mathématique de ces accords pour la détermination de l'exposition est présentée ici.

Soit  $n$  accords de *netting* entre deux acteurs. On note  $AN = \{AN_1, \dots, AN_n\}$  l'ensemble des accords de *netting* existants, où chaque  $AN_i$  contient au moins 1 contrat de valeur  $V_i$ . L'exposition totale est :

$$Expo(t) = \sum_{k=1}^n \max \left( \sum_{i \in AN_k} V_i(t), 0 \right) + \sum_{i \notin AN} \max(V_i(t), 0)$$

### Exemple

Pour illustrer ces notions, un exemple simplifié est proposé *infra*. Soit une entité ayant conclu 6 contrats différents avec deux contreparties distinctes notées A et B. Il existe deux contrats de *netting* avec A et un seul avec B. La situation est reprise dans le graphique suivant :

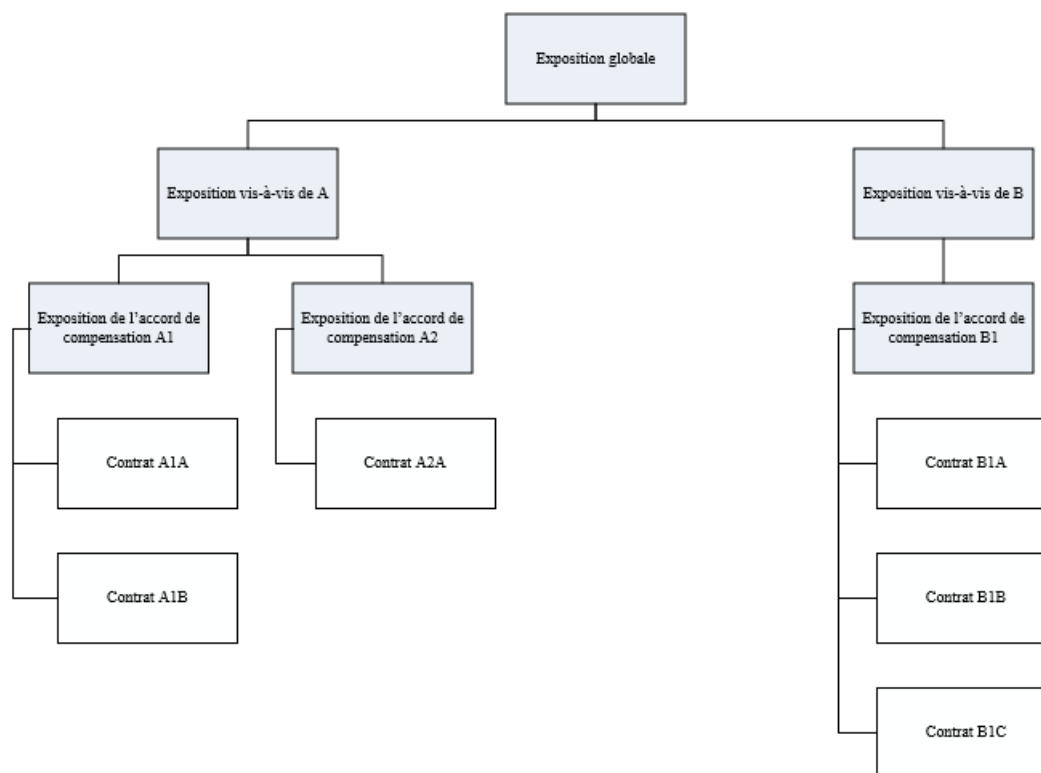


FIGURE 2.1 – Agrégation des provisions CVA

Concernant la contrepartie A, l'exposition globale est la somme de :

- l'exposition restante au titre de l'accord A.1 dont l'assiette est la somme des expositions des contrats A.1.A et A.1.B.
- l'exposition restante au titre de l'accord A.2 calculée sur l'exposition du contrat A.2.A.

Quant à la contrepartie B, l'exposition liée réside dans l'application de l'accord B.1 à la somme des expositions aux contrats B.1.A, B.1.B et B.1.C.

L'exposition est définie au niveau de l'entité comme la somme des expositions à chaque contrepartie :

$$Expo_{tot} = Expo_A + Expo_B$$

## 2.3 La détermination des provisions CVA

L'objectif des provisions CVA est d'établir un montant juste, permettant de faire face au défaut potentiel de la contrepartie sur chaque *deal*. Le calcul de la CVA dépend principalement de trois variables qui sont décrites dans les paragraphes suivants.

### 2.3.1 L'exposition au défaut

Le premier facteur qui influence les provisions CVA est l'assiette de calcul. C'est la valeur du contrat au moment du défaut de la contrepartie. L'exposition au défaut est notée **EAD**.

La détermination de l'exposition est centrale pour le calcul de la CVA. Elle est déterminée par des simulations de scénarios de marché, nécessitant d'estimer les taux futurs. Cela requiert l'utilisation d'un modèle de taux approprié, qui est donc le sujet de cette étude.

### 2.3.2 La probabilité de défaut

La seconde variable nécessaire au calcul de la CVA est la probabilité de défaut de la contrepartie. Il est nécessaire d'estimer ce risque à chaque instant  $\tau$  futur. La probabilité de défaut de la contrepartie entre la date de défaut et une date future  $\tau$  est notée **PD**( $\tau$ ).

La détermination de la probabilité de défaut des contreparties est très impactante pour le calcul des provisions CVA. Il existe deux types de probabilités :

- L'approche marché consiste à utiliser les *spreads* de marché de CDS (*Credit Default Swaps*) de la contrepartie, cotés à date de calcul. Cette méthode n'est utilisable que si la contrepartie possède des CDS cotés sur les marchés.
- L'approche historique consiste à utiliser les données de marché antérieures à la date de calcul. Cette méthode requiert de disposer d'un profond historique de CDS.

L'utilisation de *spreads* de marché nécessite de construire un modèle de défaut. Il existe plusieurs types de modèle de défaut, les deux principaux sont repris ci-après :

- Les modèles structurels se basent sur la structure du capital de l'entité et assimile l'évènement du défaut à l'exercice d'une option. Le modèle de Merton est le modèle structurel le plus répandu.
- Les modèles à intensité sont fondés sur l'évolution historique de la probabilité de défaut de l'entité. Le principal modèle de défaut est celui de Cox.

La construction d'un modèle de défaut approprié est complexe, cette problématique fait d'ailleurs l'objet de mémoires dédiés. Cette étude étant focalisée sur le calibrage du modèle de taux G2++, les modèles de défaut ne seront pas étudiés. Le lecteur pourra se référer au mémoire d'Alexandre Delacroix [5] pour la présentation des modèles de Merton et de Cox.

### 2.3.3 La perte en cas de défaut

La dernière information majeure sur laquelle se base le calcul de la CVA est la proportion de perte en cas de défaut. Notée **LGD** (*Loss Given Default*), elle représente la part de la valeur réellement en risque au moment du défaut de la contrepartie. Ce montant est supposé constant au cours de la vie d'un contrat. Le niveau de LGD est intrinsèquement lié au taux de recouvrement (dépôts de garantie échangés), eux-mêmes dépendants de la qualité de crédit des acteurs. De ce fait, la valeur de cette variable dépend essentiellement du *rating* attribué par les agences de notation aux contreparties.

Soit  $R$  le taux de recouvrement d'un *deal*, la LGD est le montant en risque tel que :

$$LGD = (1 - R)$$

De cette manière, le défaut d'une contrepartie ne représente quasiment jamais une perte de 100% de la valeur.

### 2.3.4 La formule théorique

Soit un instant futur de défaut de la contrepartie noté  $\tau$  et  $DF(\tau)$  le facteur d'actualisation entre la date de calcul et cet instant. De plus, soit  $L(\tau)$  la perte associée cet instant. Mathématiquement, ce montant s'exprime par :

$$L(\tau) = LGD DF(\tau) EP(\tau)$$

avec  $EP(\tau)$  représentant l'exposition positive à la contrepartie à l'instant  $\tau$ .

On construit alors une variable aléatoire  $L^*$  représentant les pertes potentielles liées au défaut d'une contrepartie :

$$L^* = \mathbf{1}_{\tau \leq T} LGD DF(\tau) EP(\tau)$$

avec  $T$  la maturité du produit considéré.

**Remarque**

Le calcul de la CVA ne fait pas directement appel à l'exposition au défaut EAD présentée *supra*, mais à l'exposition positive. En effet, comme présenté dans la partie 2.2.2, il n'est pertinent de calculer des provisions pour le risque de contrepartie uniquement si le défaut de la contrepartie représente une perte pour l'entité. Ainsi :

$$EP(\tau) = \max [0, EAD(\tau)]$$

Le montant de CVA s'exprime en date de calcul comme l'espérance sous la mesure risque neutre<sup>3</sup> de la perte potentielle :

$$\begin{aligned} CVA &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[L^*] \\ &= LGD \int_0^T \mathbb{E}[DF(t)EP(t)|\tau = t] dPD(t) \\ &= LGD \int_0^T \mathbb{E}[DF(t)EP(t)] dPD(t) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité utilise l'hypothèse d'indépendance entre la probabilité de défaut et l'exposition à la contrepartie. Cette hypothèse forte est liée au *Wrong Way Risk*, qui met en avant des corrélations parfois fortes entre la défaillance, les pertes potentielles et des facteurs de marché. Ce point n'est pas abordé dans cette étude. Le lecteur pourra se référer au mémoire de Wadie JOUILI intitulé "Modélisation du risk Wrong Way dans le calcul de la CVA" [9].

L'expression de la CVA s'écrit usuellement :

$$CVA = LGD \int_0^T EPE(t) dPD(t)$$

avec  $EPE(t)$  l'exposition positive espérée et actualisée à un instant futur  $t$ .

---

3. La mesure risque neutre est une métrique supposant que les investisseurs sont neutres au risque. Sur des marchés efficients, elle permet de déterminer les prix équitables.

# Chapitre 3

## La présentation du modèle de taux

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Histoire</b>	<b>22</b>
3.1.1	Modèles monofactoriels	22
3.1.2	Modèles à volatilité stochastique	22
3.1.3	Reproduction de la courbe des taux	23
3.1.4	Modèles multifactoriels	23
3.1.5	Modèles à changement de régime	24
3.1.6	Prédiction de taux négatifs	24
<b>3.2</b>	<b>Principaux modèles</b>	<b>25</b>
3.2.1	Le modèle Hull-White à un facteur	25
3.2.2	Le modèle LMM+	26
3.2.3	Le modèle G2++	26
<b>3.3</b>	<b>Le choix du modèle G2++</b>	<b>26</b>

---

Un modèle de taux a pour objectif de fournir une estimation des taux d'intérêt futurs. De plus, les modèles de taux sont utilisés pour déterminer le prix de différents produits dérivés, idéalement à l'aide de formules fermées.

Au vu de l'historique des marchés financiers, il apparaît que l'évolution des taux d'intérêt dépend de nombreuses variables : économiques, financières voire extra-financières. La modélisation des taux d'intérêt ne peut donc être déterministe : elle est systématiquement stochastique.

Ce chapitre propose un résumé de l'évolution des modèles de taux puis une présentation des principaux modèles utilisés dans le contexte de cette étude, et termine en justifiant le choix du modèle retenu.

## 3.1 Histoire

Ce paragraphe présente l'histoire de la modélisation stochastique des taux d'intérêt, qui a débuté dans les années 1970. Les notations sont pour la plupart reprises du document d'orientation concernant les générateurs de scénarios économiques, publié par l'Institut des Actuairens en 2018 [11].

### 3.1.1 Modèles monofactoriels

La première publication qui a posé les bases des techniques modernes est celle de l'économiste Oldřich Vašíček en 1977 [15]. Il a développé le modèle, dont la dynamique des taux courts  $r_t$  s'écrit :

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t)$$

avec :

- $a$  représente la vitesse de retour à la moyenne du taux.
- $b$  représente la moyenne du taux court  $r_t$ .
- $\sigma$  représente la volatilité du taux.
- $W_{t \geq 0}$  est un processus de Wiener. C'est un terme aléatoire permettant de modéliser les fluctuations sur les marchés.

Cette équation se compose d'un premier terme, déterministe,  $a(b - r(t))dt$ , et d'un second, stochastique,  $\sigma dW(t)$ . Ce dernier terme lui vaut l'appellation de modèle "à un facteur", sous-entendu "utilisant un facteur aléatoire".

Le modèle de Vasicek représente le fondement de la prédiction théorique de taux d'intérêt. De nombreux modèles en sont issus, tels que celui de Hull-White, présenté ultérieurement, ou encore celui de Ho-Lee en 1986 se basant sur l'équation  $dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW(t)$  avec  $\theta$  déterministe.

### 3.1.2 Modèles à volatilité stochastique

Le second développement important dans la modélisation des taux d'intérêt intervient en 1985 avec l'apparition de modèle à volatilité stochastique. Le terme  $\sigma$  devient lui-même dépendant du temps. Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross modélise  $r_t$  comme la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr(t) = \lambda(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$



Ce modèle a permis une meilleure prise en compte des caractéristiques des différentes maturités et ainsi une amélioration des prédictions. De nombreuses adaptations de ce modèle seront proposées dont les modèles CIR++ et CIR2++ évoqués par la suite.

### 3.1.3 Reproduction de la courbe des taux

L'un des objectifs principaux d'un modèle était, jusque là, d'être capable de reproduire du mieux possible la courbe des taux en vigueur à la date de calcul. Ce point est essentiel, puisqu'une mauvaise représentation de l'état actuel des taux a peu de chance d'aboutir à de bonnes prédictions. Dans cette optique, il a été proposé de construire des modèles qui s'ajustent parfaitement à la courbe de taux utilisée en pratique.

Dans le cadre du modèle CIR, une amélioration appelée CIR++ a été proposée par Brigo et Mercurio [6] pour pallier cette problématique :

$$r_t^{\text{CIR++}} = r_t^{\text{CIR}} + \sigma(r_t^{\text{CIR}}) + \varphi(t)$$

où  $\varphi$  est une fonction déterministe du temps représentant à chaque instant la translation nécessaire au modèle pour correspondre à la courbe de taux en vigueur. Cette fonction nécessite de fournir une courbe de taux en entrée à des pas fins, mais assure une reproduction parfaite de cette dernière en sortie.

De nombreuses améliorations similaires ont été proposées pour des modèles existants. La problématique de reproduction parfaite de la courbe des taux d'entrée s'est petit à petit imposée parmi les acteurs, et tous les modèles postérieurs y répondront, comme celui de Hull-White.

### 3.1.4 Modèles multifactoriels

L'évolution suivante est la prise de conscience des limites des modèles à un facteur. En effet, ces derniers ne semblent pas capables de s'adapter à certains produits complexes ou aux périodes de grande volatilité sur les marchés.

Mathieu Le Bellac et Arnaud Viricel ont publié en 2012 une étude portant sur l'analyse des facteurs explicatifs des taux d'intérêt [1]. A l'aide d'une Analyse en Composantes Principales (ACP) sur des données entre 2000 et 2013, il a été mis en évidence que plus de 99% des variations de taux d'intérêt sont expliquées par 3 vecteurs propres : translation, pentification et convexité. De plus, ce travail met en avant que les taux ne sont pas parfaitement corrélés. De ce fait, il est pertinent d'ajouter au moins un autre facteur stochastique pour tenir compte de ce phénomène. Les modèles multifactoriels apparaissent.

Par exemple, le modèle CIR2++ améliore le modèle CIR++ en ajoutant un second facteur :

$$\begin{aligned}r_t &= x_t + y_t + \phi_t \\dx_t &= \lambda_x(\theta_x - x_t)dt + \sigma_x\sqrt{x_t}dW_t^x \\dy_t &= \lambda_y(\theta_y - y_t)dt + \sigma_y\sqrt{y_t}dW_t^y\end{aligned}$$

Où  $W_t^x$  et  $W_t^y$  sont des mouvements browniens standards.

Suivant ce même principe, il existe des extensions des modèles de Vasicek et de Hull-White qui comprennent deux facteurs. De nombreux autres modèles bifactoriels existent, tels que le modèle gaussien à deux facteurs appelé G2, ou son amélioration G2++ présentée plus bas.

La modélisation stochastique a connu un rebondissement lors de la création du modèle LMM : *LIBOR Market Model*, aussi appelé BGM (Brace-Gatarek-Musiela). Ce dernier a été publié en 1997 pour expliquer les variations des taux LIBOR, en appliquant une loi log-normale. Il est utilisé pour modéliser les taux *forwards*, à la différence des modèles précédents, spécifiques aux taux à court terme. Ce nouveau type de modèle permet une prise en compte encore plus précise de la structure par terme des taux. Il est énormément utilisé aujourd'hui, malgré le remplacement des taux LIBOR par des taux sans risque différenciés selon les devises : SOFR pour le dollar américain, SONIA pour la livre sterling et SARON pour le franc suisse. Le modèle LMM a connu des améliorations : DDLMM (*Displaced Diffusion LIBOR Market Model*) et DDLMM (*Stochastic Volatility DDLMM*, aussi appelé LMM+). Les spécificités du modèle LMM+ seront reprises dans la partie 3.2.

### 3.1.5 Modèles à changement de régime

La dernière innovation notable dans le domaine de la modélisation stochastique des taux d'intérêt est l'apparition de modèles de changement de régimes, aussi appelés modèles à seuils. Ce type de modèle possède une forme générale, mais l'objectif est de déterminer des périodes (temporelles) ou des zones (fonction des maturités) de fortes volatilités et de calibrer spécifiquement les valeurs de ses paramètres sur chacune d'entre elles. Ces modèles permettent par définition de s'adapter à quasiment n'importe quel historique. Néanmoins, ils sont relativement récents et les avantages pour la prédiction restent à prouver.

### 3.1.6 Prédiction de taux négatifs

Certains modèles de taux, compte tenu de leurs hypothèses sous-jacentes, permettent de prédire des taux d'intérêts négatifs. C'est par exemple le cas de Vasicek,

de Hull-White ou encore de G2++. Avant les années 2010, il était absurde pour les acteurs des marchés que les taux soient négatifs. Nombre d'études sérieuses ont d'ailleurs mis de côté ces modèles pensant qu'ils ne correspondaient pas au marché.

Depuis, les marchés ont connu une longue période de taux d'intérêt proches de zéro voire négatifs entre les années 2010 et 2022. Durant cet intervalle, ce type de modèle a été inévitablement utilisé. En effet, les modèles reposant sur l'hypothèse de loi log-normale n'étaient plus exploitables.

Depuis, la tendance s'est inversée sur les marchés et les taux sont de nouveau largement positifs. Cela est la conséquence de la politique monétaire de remontée des taux appliquée depuis juillet 2022 pour l'euro via la Banque Centrale Européenne (BCE). Ainsi, tous les modèles de taux s'avèrent pertinents à date d'étude.

### Remarque

La crise liée à la Covid-19 a fortement impacté l'ensemble des marchés. Cela a eu pour effet de remettre en cause les modèles de taux utilisés. Ainsi, la plupart des institutions ont revu récemment leur modélisation de taux d'intérêt. Cette étude s'inscrit pleinement dans ce contexte de besoin d'adaptation des modèles de taux à de forts mouvements de marché, ou encore de changement de conjoncture économique avec la hausse des taux.

## 3.2 Principaux modèles

Parmi l'ensemble des modèles évoqués *supra*, les différentes institutions font un ou plusieurs choix. La littérature indique que les modèles les plus utilisés sont le modèle de Hull-White à un facteur, le modèle LMM et le modèle gaussien à deux facteurs. Ils seront présentés dans ce paragraphe.

### Remarque

Ces trois modèles sont capables de prédire des taux négatifs. Seul ce type de modèle est envisagé pour cette étude afin de garder autant de flexibilité que possible.

### 3.2.1 Le modèle Hull-White à un facteur

Le modèle de Hull-White est indéniablement le modèle à un facteur le plus utilisé. La dynamique du taux court s'écrit comme suit :

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha r_t)dt + \sigma dW(t)$$

dont les variables ont des rôles similaires au modèle de Vasicek présenté plus haut, à l'exception de  $\alpha$ , qui n'est facteur ici que du taux court  $r_t$ . La forme générale consiste à inclure une dépendance temporelle à  $\alpha$ , mais le modèle est plus couramment utilisé en considérant ce paramètre constant.

Le modèle de Hull-White est souvent pris comme référence pour représenter les modèles monofactoriels. Il nécessite des données de marché en entrée et permet de reproduire exactement la courbe des taux. De plus, son calibrage est relativement aisé puisqu'il fournit des formules fermées facilement implémentables pour les principaux produits dérivés.

### 3.2.2 Le modèle LMM+

Le modèle LMM+ est un modèle complexe créé en 2003 par Joshi et Rebonato. Son étude est l'objet du mémoire d'Antoine Burg en 2018 [2]. Il intègre une volatilité stochastique.

Cette nouvelle prise en compte permet de capter très précisément les fluctuations de marché et de mieux s'adapter aux prix que la plupart des modèles. Néanmoins, cette complexité nuit à l'implémentation du modèle, qui requiert une durée d'exécution conséquente. Sa formulation mathématique n'est pas décrite ici.

### 3.2.3 Le modèle G2++

Le modèle G2++, aussi appelé LGM2F, est une extension du modèle gaussien à deux facteurs, appelé G2. Ce modèle est lui-même une adaptation du modèle de Hull-White à deux facteurs. Il a été présenté par Brigo et Mercurio en 2005 [6], et se base sur deux processus symétriques comportant chacun un terme aléatoire. L'ajout d'un second facteur permet de mieux s'adapter à la forme de la courbe des taux. Il possède 5 paramètres à calibrer avec des données de marché. Enfin, G2++ présente l'avantage de fournir des formules fermées pour la plupart des produits dérivés de taux et limite ainsi les difficultés d'implémentation.

La présentation mathématique précise de ce modèle est détaillée dans la prochaine section.

## 3.3 Le choix du modèle G2++

Au vu des caractéristiques des modèles présentées *supra*, et des conclusions présentées dans la littérature, il apparaît que :

- Le modèle Hull-White à un facteur est facilement implémentable mais se heurte aux limites des modèles monofactoriels, comme l'a montré le travail

de Valentine Poutçou [12]<sup>1</sup>.

- Le modèle LMM+ permet par sa complexité de capter de manière très satisfaisante les anticipations sur les marchés. Néanmoins, il apparaît difficile à implémenter et requiert un temps important de calibrage dans l'étude d'Antoine Burg [2].

Dans le contexte de cette étude, étant donné la problématique de durée d'exécution pour le moteur de calcul des provisions, le modèle LMM+ n'est retenu.

Il apparaît que le modèle G2++ est un meilleur compromis entre précision des résultats et temps de calcul que le modèle de Hull-White.

**Le modèle G2++ est retenu dans la suite de ce mémoire.**

---

1. Voir la comparaison des résultats entre G2++ et Hull-White dans la partie III.

# Chapitre 4

## La problématique et les données utilisées

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>La méthodologie de l'audit . . . . .</b>	<b>28</b>
	Périodicité des contrôles . . . . .	29
<b>4.2</b>	<b>L'intérêt de l'étude . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>4.3</b>	<b>La provenance et la qualité des données . . . . .</b>	<b>30</b>

---

Le besoin de cette étude est apparu à la suite d'une mission d'audit réalisée au sein du département Audit Métiers rattaché à l'Inspection Générale du groupe Crédit Mutuel Alliance Fédérale.

### 4.1 La méthodologie de l'audit

L'audit est indépendant au sein d'une entreprise et positionné comme suivant dans la pyramide des contrôles :

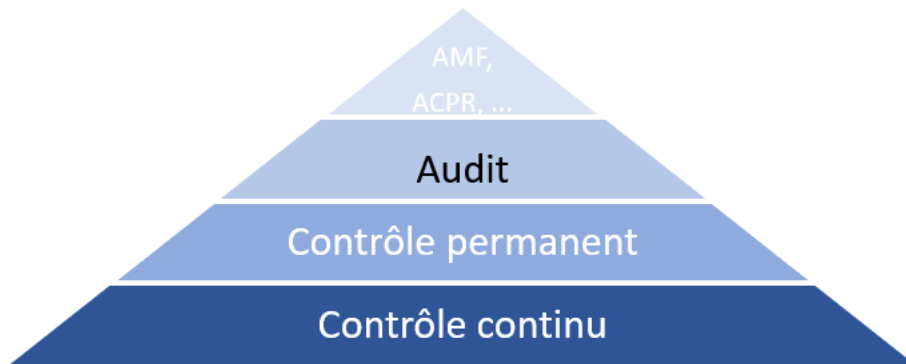


FIGURE 4.1 – Pyramide des contrôles

Le premier niveau de contrôle est le contrôle continu, réalisé par les équipes opérationnelles. Le second est le contrôle permanent, effectué par des équipes dédiées (non opérationnelles) en interne. L’audit constitue le troisième niveau, appelé contrôle périodique, puisqu’il n’a vocation à contrôler que ponctuellement ou à fréquence définie. Le dernier niveau est assuré par les autorités de tutelle : AMF, ACPR<sup>1</sup> et BCE pour les établissements financiers.

Les activités d’audit interne sont définies par l’arrêté du 3 novembre 2014<sup>2</sup>. Lors des missions, les équipes d’audit contrôlent de manière indépendante les activités effectuées. La finalité est la publication d’un rapport d’audit présentant des recommandations que l’entité devra mettre en oeuvre.

### Périodicité des contrôles

Les thématiques des missions, ainsi que les entités auditées, sont définies d’une année sur l’autre dans un plan d’audit. Ce plan est construit en concertation avec les différents acteurs de la chaîne de contrôle. Il en découle, en fonction du contexte, des missions de 3 mois ciblées sur des thématiques et/ou sur des entités spécifiques. Bien que certaines missions puissent avoir un caractère exceptionnel dû à un risque non anticipé ou à de nouveaux enjeux, la plupart font l’objet d’une revue régulière. En effet, les différentes autorités de tutelle tendent à intensifier la fréquence des contrôles. Il est ainsi naturel que les activités liées à des enjeux importants soient régulièrement examinées. C’est notamment le cas du calcul de provisions CVA puisqu’il influence le besoin en fonds propres d’une entité.

---

1. Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution.

2. Arrêté du 3 novembre 2014 relatif au contrôle interne des entreprises du secteur de la banque, des services de paiement et des services d’investissement soumises au contrôle de l’Autorité de contrôle prudentiel et de résolution.

## 4.2 L'intérêt de l'étude

Cette étude fait suite à une mission récemment menée sur la détermination du montant de provisions CVA. L'activité sous-jacente est fréquemment analysée par l'Audit Métiers.

La détermination des provisions CVA est fortement influencée par le choix et le calibrage du modèle de taux choisi.

Dans ce contexte, il est pertinent pour l'Audit Métiers de construire un modèle de taux indépendant, répondant aux problématiques opérationnelles. L'objectif est *in fine* de comparer les résultats obtenus avec ceux de l'entité auditée. Les conclusions permettront de valider ou non les processus en place et, si nécessaire, d'indiquer des axes d'amélioration possibles.

La problématique de ce mémoire peut être exprimée comme suit :

**Choix opérationnel d'un modèle de taux et détermination de son calibrage optimal pour le calcul des provisions CVA.**

## 4.3 La provenance et la qualité des données

Afin de mener à bien cette étude, différentes informations sont nécessaires. Une courbe de taux est nécessaire pour évaluer les flux futurs, elle est précisée au 7.1.1.

De plus, afin de calibrer un modèle de taux, il est nécessaire de disposer d'un ensemble de prix de marché de plusieurs produits.

Cette étude se base sur un portefeuille de produits dérivés traités au sein d'une entité du Groupe, vu au 30/11/2022. Les données ont été fournies par une équipe interne, spécialisée dans l'extraction et la fiabilisation des données de marché.



## Deuxième partie

# Les fondements théoriques

La deuxième partie de l'étude est consacrée aux notions théoriques nécessaires à la réalisation des travaux. Il est d'abord présenté la construction mathématique d'un modèle de taux, puis seront apportées des précisions sur les spécificités du modèle G2++.

# Chapitre 5

## Les notions mathématiques et financières

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Les hypothèses théoriques . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>5.2</b>	<b>Le concept de taux d'intérêt . . . . .</b>	<b>33</b>
5.2.1	Le taux spot . . . . .	33
5.2.2	Le taux court . . . . .	34
5.2.3	Le taux <i>forward</i> . . . . .	34
5.2.4	Le taux <i>forward</i> instantané . . . . .	34
<b>5.3</b>	<b>Les éléments fondamentaux . . . . .</b>	<b>35</b>
5.3.1	L'actif sans risque . . . . .	35
5.3.2	L'obligation zéro-coupon sans risque de défaut . . . . .	35
5.3.3	Le déflateur . . . . .	35
<b>5.4</b>	<b>Les principaux produits dérivés de taux et leur valo- risation . . . . .</b>	<b>35</b>
5.4.1	Les <i>Forward Rate Agreement</i> . . . . .	36
5.4.2	Les <i>swaps</i> de taux . . . . .	37
5.4.3	Les <i>caps</i> et <i>floors</i> sur taux . . . . .	39
5.4.4	Les <i>swaptions</i> . . . . .	40

---

Ce chapitre a pour but de définir les principaux éléments théoriques nécessaires à la construction d'un modèle de taux. Les notations choisies sont d'abord reprises de Hull [8] et des supports de cours de Areski Cousin [4], puis de Brigo et Mercurio [6] pour la seconde partie.

## 5.1 Les hypothèses théoriques

Les notions présentées dans la suite de cette partie reposent sur les hypothèses de marché suivantes :

- Aucun coût de transaction.
- Pas de friction (ce qui donne la possibilité d'acheter ou de vendre n'importe quelle quantité d'actifs sans délais).
- Pas d'asymétrie d'information entre les acteurs.
- Possibilité de vendre à découvert (ce qui permet de vendre un actif sans le posséder, en s'engageant à verser les flux associés).
- Existence d'un actif sans risque ou d'un compte épargne qui génère un rendement certain, connu en début de période, pour des périodes suffisamment courtes.
- Marché complet (tous les actifs échangés sont répliquables par un ensemble d'actifs sous-jacents).
- Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA).

### Définition :

Soit  $t > 0$  une date et soit une stratégie d'investissement qui génère la richesse  $\Pi_t$  en  $t$ . Soit  $B(0,t)$  la valeur en  $t$  de l'actif sans risque avec un investissement de 1 unité monétaire en date initiale. Il y a arbitrage dans les deux cas suivants :

- $\Pi_0 = 0$  et  $\exists t > 0$ ,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\Pi_t > 0) > 0 \\ \mathbb{P}(\Pi_t < 0) = 0 \end{cases}$$

- $\Pi_0 > 0$  et  $\exists t > 0$ ,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\Pi_t > \Pi_0 B(0,t)) > 0 \\ \mathbb{P}(\Pi_t < \Pi_0 B(0,t)) = 0 \end{cases}$$

## 5.2 Le concept de taux d'intérêt

Ce paragraphe introduit les différents taux d'intérêt usuels à travers leur définition mathématique et leur utilité.

### 5.2.1 Le taux spot

Soit  $0 < t < T$ . Le taux spot est défini comme le taux de rendement actuariel en  $t$  d'une obligation zéro-coupon de maturité  $T$ . Il est noté  $R(t,T)$ . Son expression dépend de la convention de taux d'intérêt choisie :

- En convention simple de taux d'intérêt :

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t} \left[ \frac{1}{P(t,T)} - 1 \right]$$

- En convention composée de taux d'intérêt :

$$R(t,T) = P(t,T)^{-\frac{1}{T-t}} - 1$$

La connaissance en date  $t$  du taux spot à différentes maturités permet la reconstitution de la fonction  $T \mapsto R(t,T)$ , aussi appelée structure par termes des taux d'intérêt.

### 5.2.2 Le taux court

Soit  $0 < t < T$ . Le taux court, aussi appelé taux spot instantané, est noté  $r(t,T)$ . Il est défini par :

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t,T)$$

Le taux court représente le taux d'intérêt associé à une obligation de maturité infiniment courte.

### 5.2.3 Le taux *forward*

Soit  $0 < t < T_1 < T_2$ . Le taux *forward*, aussi appelé taux à terme, est noté  $F(t,T_1,T_2)$ . En Absence d'Opportunité d'Arbitrage et en convention de taux simple, il est défini par :

$$F(t,T_1,T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \left[ \frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)} - 1 \right]$$

Le taux *forward*, représente le taux d'intérêt en date  $t$  associé à un emprunt entre  $T_1$  et  $T_2$ .

### 5.2.4 Le taux *forward* instantané

Soit  $0 < t < T$ . Le taux *forward* instantané est noté  $f(t,T)$  et défini par :

$$f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} F(t,T,T+h)$$

Le taux *forward* instantané représente le taux d'intérêt en date  $t$  pour un emprunt en date  $T$  de durée infiniment courte.

## 5.3 Les éléments fondamentaux

### 5.3.1 L'actif sans risque

La théorie suppose l'existence d'un actif sans risque. Il est comparable à un compte épargne qui paye des intérêts certains connus en début de période, pour des durées infiniment courtes.

La quantité  $B(0,t)$  représente la valeur obtenue à la date  $t > 0$  après un investissement d'une unité monétaire en date d'origine sur l'actif sans risque.

A l'origine,  $B(0,0) = 1$ , et la dynamique de  $B$  en  $t$  est donnée par :

$$dB(0,t) = r_t B(0,t) dt$$

### 5.3.2 L'obligation zéro-coupon sans risque de défaut

Une obligation zéro-coupon sans risque de défaut est un actif financier versant un unique flux certain à date de maturité.

Soit  $0 < t < T$ . Le prix en date  $t$  d'une obligation zéro-coupon de maturité  $T$  est noté  $P(t,T)$ . Ce prix est usuellement appelé *zéro-coupon* et vérifie les deux propriétés suivantes :

- $P(T,T) = 1$ .
- La fonction  $T \mapsto P(t,T)$  est décroissante.

### 5.3.3 Le déflateur

Le déflateur est le montant qu'il faut investir sur le compte épargne en date  $t > 0$  pour obtenir une unité monétaire à date  $T$  ( $T > t$ ). Il est aussi appelé "facteur d'actualisation stochastique", se note  $D(t,T)$ , et s'exprime par :

$$\begin{aligned} D(t,T) &= \frac{B(0,t)}{B(0,T)} \\ &= e^{-\int_t^T r_u du} \end{aligned}$$

## 5.4 Les principaux produits dérivés de taux et leur valorisation

Cette partie présente les principaux produits dérivés de taux : FRA, *swap*, *cap* (et *floor*) et *swaption*. Les formules de valorisation et les flux associés à chaque produits sont précisés ci-après.

### L'intérêt des produits dérivés :

Le marché des produits dérivés est le plus important en termes de notionnel. En 2021, les produits de taux représentaient 79% du marché<sup>1</sup>.

Les produits dérivés de taux permettent notamment aux investisseurs de se couvrir de l'évolution des taux d'intérêt. Ces derniers négocient avec des contreparties souvent financières qui profitent de ce marché pour accéder à des produits spécifiques.

### Remarque

Le *payoff* d'un produit est la somme des flux futurs probables. Le prix du produit est obtenu en actualisant le *payoff* à la date de calcul. Théoriquement, le prix  $\Pi$  d'un produit quelconque est donné en date de calcul  $t$  par l'espérance sous la mesure risque-neutre du *payoff* :

$$\Pi(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\text{payoff}(t)] \quad (5.1)$$

## 5.4.1 Les *Forward Rate Agreement*

### Définition

Les *Forward Rate Agreements*, appelés communément FRA, sont des produits dérivés de taux négociés de gré à gré. Les FRA permettent à deux contreparties de s'échanger, à une date future, un flux variable et un flux fixe.

Un FRA est défini par les caractéristiques suivantes :

- Un montant de nominal échangé.
- Un taux de référence qui varie au cours du temps.
- Un taux contractuel fixe, appelé taux FRA.
- Une date à laquelle est observée le taux variable, appelée date de valeur.
- Une date de paiement, à laquelle le flux unique est payé. Cette date représente également la fin du contrat.
- Une date de maturité, qui représente la fin des obligations des deux contreparties.

### Échanges de flux

Dans le cadre d'un FRA, deux flux sont théoriquement échangés à la date de paiement :

- L'acheteur (appelé payeur) paye le taux fixe.
- Le vendeur (appelé receveur) paye le taux variable.

---

1. Voir au 1.2

En réalité, un unique flux de montant  $|Flux_{Var.} - Flux_{Fixe}|$  est versé à la contrepartie qui bénéficie de l'évolution du taux.

### Valorisation théorique

Soit un montant de nominal  $N$ , une date de valeur  $T$ , une date de maturité  $S > T$  et un taux fixe  $K$ .

En convention de taux simple, la valeur d'un FRA pour le receveur est donnée à une date  $t$  par :

$$\prod_{Rec.}^{FRA}(t, T, S, K, N) = N(S - T)P(t, S)[K - F(t, T, S)]$$

L'obtention de la valorisation d'un FRA pour le payeur se fait avec la relation suivante :

$$\prod_{Pay.}^{FRA}(t, T, S, K, N) = - \prod_{Rec.}^{FRA}(t, T, S, K, N)$$

### Taux d'équilibre

La notion de taux d'équilibre fait référence à un taux juste qui n'avantage aucune des deux parties. A ce taux, la valeur intrinsèque d'un produit est nulle.

Le taux d'équilibre d'un FRA est le taux, noté  $K_{eq}$ , qui vérifie  $\prod_{Rec.}^{FRA}(t, T, S, K_{eq}, N) = \prod_{Pay.}^{FRA}(t, T, S, K_{eq}, N)$ . Il s'exprime comme :

$$K_{eq}(t, T, S) = F(t, T, S)$$

Le taux d'équilibre pour un FRA correspond au taux *forward* défini au 5.2.3. La grande liquidité des FRA permet de limiter l'arbitrage sur les marchés et participe à l'équité entre acteurs.

## 5.4.2 Les *swaps* de taux

### Définition

Les *swaps* de taux, en anglais *Interest Rate Swaps* (IRS) sont des produits dérivés de taux négociés de gré à gré entre deux contreparties. Les *swaps* de taux permettent de s'échanger une série de flux fixes et variables à des dates futures.

Un *swap* de taux est défini par les caractéristiques suivantes :

- Un montant de nominal échangé.
- Un taux de référence qui varie au cours du temps, dont les intérêts représentent la "jambe variable" du *swap*.
- Un taux contractuel fixe, dont les intérêts représentent la "jambe fixe" du *swap*.

- Un type : payeur ou receveur. Un *swap* dit "payeur" (respectivement "receveur") engage le détenteur à verser les intérêts fixes (respectivement variables) et à recevoir les intérêts variables (respectivement fixes).
- Un échéancier de dates, comprenant :
  - Une date de négociation.
  - Un ensemble de dates de calcul des montants d'intérêts à verser, qui correspondent aux dates d'observations du taux variable. Ces dates sont appelées "dates de valeurs".
  - Un ensemble de dates de paiement des intérêts pour les jambes fixe et variable.
  - Une date de maturité, qui représente la fin des obligations des deux contreparties.

### Remarque

Les dates de paiement des intérêts fixes ne correspondent pas nécessairement aux dates de paiement des intérêts variables.

### Hypothèse

Les *swaps* de taux comprennent généralement très peu d'écart entre leurs dates de maturité et leurs dates de premier versement de flux.

**Pour tous les produits, il est considéré dans la suite de cette étude que les dates de paiement des intérêts fixes et variables sont identiques.**

Cette simplification permet d'améliorer la lisibilité du document en évitant le recours à des notations plus complexes.

### Échanges de flux

Dans le cadre d'un *swap* de taux payeur, à chaque date de paiement :

- L'acheteur paye le taux fixe.
- Le vendeur paye le taux variable.

En réalité, un unique flux de montant  $|Flux_{Var.} - Flux_{Fixe}|$  est versé à chaque date de paiement à la contrepartie qui bénéficie de l'évolution du taux.

### Valorisation théorique

Soit un montant de nominal  $N$ , un échéancier de dates ordonnées  $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, \dots, T_n\}_{n>0}$  correspondant aux dates de paiement des intérêts et un taux fixe  $K$ .

En convention de taux simple, la valeur d'un *swap* de taux pour le receveur est donnée par :

$$\prod_{Rec.}^{Swap}(t, \mathcal{T}, K, N) = N \sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) P(t, T_i) [K - F(t, T_{i-1}, T_i)]$$



L'obtention de la valorisation d'un FRA pour le payeur se fait avec la relation suivante :

$$\prod_{Pay.}^{Swap}(t, \mathcal{T}, K, N) = - \prod_{Rec.}^{Swap}(t, \mathcal{T}, K, N)$$

**Remarque**

Un *swap* de taux peut être vu comme une somme de  $n$  FRA dont les dates de paiement correspondent aux dates de  $\mathcal{T}$ .

**Taux d'équilibre**

Le taux d'équilibre d'un *swap* est le taux, noté  $K_{eq}$ , qui vérifie  $\prod_{Rec.}^{Swap}(t, \mathcal{T}, K_{eq}, N) = \prod_{Pay.}^{Swap}(t, \mathcal{T}, K_{eq}, N)$ . Il s'exprime comme :

$$K_{eq}(t, \mathcal{T}) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1})P(t, T_i)}$$

Le taux d'équilibre pour un *swap* de taux peut être perçu comme une généralisation du taux *forward* puisqu'il représente l'absence d'arbitrage associé à un assemblage de plusieurs FRA. Il est appelé couramment "taux *swap forward*".

**5.4.3 Les caps et floors sur taux**

**Définition**

Les *caps* et les *floors* sont des produits dérivés de taux assimilables à des *swaps* de taux d'intérêt. Un *cap* (respectivement un *floor*) est un *swap* payeur (respectivement receveur) dont seuls les flux positifs sont versés.

Ces produits sont caractérisés par un montant de nominal, une maturité correspondant à la durée du *cap/floor* et un taux fixe (appelé *strike*).

**Échanges de flux**

Dans le cadre d'un *cap*, à chaque date de paiement du *swap* :

- Si le taux variable est supérieur au taux fixe : l'acheteur reçoit la valeur  $Flux_{Var.} - Flux_{Fixe}$  de la part du vendeur.
- Sinon, aucun flux n'est versé.

**Remarque**

Les *caps* (respectivement les *floors*) sont construits comme des assemblages de plusieurs produits simples appelés *caplets* (respectivement *floorlets*). Ces derniers sont assimilables à des FRA ne payant que les flux positifs.

Ainsi, soit un nominal  $N$ , un *strike*  $K$  et une date de paiement  $T$ , le *payoff* d'un *caplet* est :

$$\text{payoff}^{\text{Caplet}}(t, T, K, N) = N(T - t)[F(t, T) - K]^+$$

Et celui d'un *floorlet* est :

$$\text{payoff}^{\text{Floorlet}}(t, T, K, N) = N(T - t)[K - F(t, T)]^+$$

### Valorisation théorique

Soit un montant de nominal  $N$ , un échéancier de dates ordonnées  $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, \dots, T_n\}_{n>0}$  correspondant aux dates de paiement du *swap* et un taux fixe  $K$ .

En convention de taux simple, le *payoff* d'un *cap* s'exprime comme une somme de *caplets* de maturités  $T_i$  :

$$\text{payoff}^{\text{Cap}}(t, \mathcal{T}, K, N) = N \sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) [F(T_{i-1}, T_i) - K]^+$$

Celui d'un *floor* s'exprime comme une somme de *floorlets* de maturités  $T_i$  :

$$\text{payoff}^{\text{Floor}}(t, \mathcal{T}, K, N) = N \sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) [K - F(T_{i-1}, T_i)]^+$$

Un acheteur de *cap* se protège contre une hausse du taux variable au-delà d'un certain seuil  $K$ . Un *cap* est comparable à une assurance fictive dont un sinistre surviendrait lorsque le taux variable dépasse  $K$ . Le montant de franchise correspondrait à la différence entre le taux actuel et  $K$ , et les indemnités versées aux flux  $Flux_{Var.}(i) - Flux_{Fixe}$ . A l'inverse, un acheteur de *floor* se préserve d'une baisse des taux d'intérêt.

Ces produits sont très échangés sur les marchés. Le contexte actuel de hausse des taux d'intérêt ne fait qu'accentuer la demande de couverture avec de tels produits.

## 5.4.4 Les *swaptions*

### Définition

Les *swaptions* (contraction de *swap* et option) sont des produits dérivés de taux négociés de gré à gré entre deux contreparties. Une *swaption* donne la possibilité à son détenteur de contracter un *swap* de taux à une date future dont les caractéristiques sont fixées au contrat.

Les *swaptions* sont définies par les caractéristiques suivantes :

- Un montant de nominal échangé.

- Une date de négociation.
- Une date de maturité de l'option.
- Pour le *swap* :
  - Un taux de référence qui varie au cours du temps et un taux contractuel fixe.
  - Un type : payeuse ou receveuse. Une *swaption* dite "payeuse" (respectivement "receveuse") permet au détenteur de contracter un *swap* payeur (respectivement receveur).
  - Un échéancier de dates.

### Remarques

- La date de maturité de l'option ne coïncide pas nécessairement avec la date de début du *swap*. Dans la suite de l'étude, il est supposé que ces deux dates sont identiques.
- Les *swaptions* peuvent permettre d'entrer dans tout type de *swap* : *swap* de taux d'intérêt, *swap* de devises, *Credit Default Swap* (CDS) ou encore *swap* de matières premières. Au vu du contexte présenté, seules les *swaptions* associées à des *swaps* de taux d'intérêt seront présentées.
- Il existe plusieurs types de *swaptions*, relatives aux modalités d'exercice de l'option sous-jacente : européennes, américaines et bermudiennes. Le portefeuille étudié ne contient que des *swaptions* européennes. Ces dernières permettent à leur détenteur d'exercer leur droit de rentrer dans le *swap* uniquement à la date de maturité de l'option. Cette étude présentera donc uniquement ce type de produit.

### Valorisation théorique

Soit un montant de nominal  $N$ , un taux fixe  $K$  et un échéancier de dates ordonnées  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}_{n>0}$  correspondant aux dates de paiement des intérêts du *swap* et  $T_0$  correspondant à la maturité de l'option.

En convention de taux simple, le *payoff* d'une *swaption* payeuse est donné par :

$$\text{payoff}_{\text{Pay.}}^{\text{Swaption}} = \max \left( 0, N \sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) (F(T_{i-1}, T_i) - K) \right)$$

Celui d'une *swaption* receveuse est symétriquement :

$$\text{payoff}_{\text{Rec.}}^{\text{Swaption}} = \max \left( 0, N \sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) (K - F(T_{i-1}, T_i)) \right)$$

**Remarque**

Les *swaptions* ne sont pas un assemblage de produits plus simples, leur prix de marchés contient donc des anticipations spécifiques. Cet argument est repris dans les choix de calibrage au chapitre 7.

# Chapitre 6

## Les spécificités du modèle G2++

### Sommaire

---

6.1	La dynamique du taux court . . . . .	43
6.2	L'interprétation des variables du modèle . . . . .	44
6.3	La distribution du taux court . . . . .	44
6.4	Le <i>pricing</i> d'une obligation zéro-coupon avec G2++ .	45
6.5	Le <i>pricing</i> d'une <i>swaption</i> avec G2++ . . . . .	46

---

Ce chapitre définit les caractéristiques théoriques du modèle de taux G2++ et ses propriétés.

### 6.1 La dynamique du taux court

Le modèle G2++ suppose que le taux court s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t) \\ r(0) = r_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (6.1)$$

avec  $r_0$  la valeur du taux court sur le marché en date de calcul et  $(x(t))_{t \geq 0}$  et  $(y(t))_{t \geq 0}$  deux processus d'Orstein-Ulhenbeck (détaillé en annexe 8.5) vérifiant :

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

La dynamique des deux processus est donnée par :

$$\begin{cases} dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t) \\ dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t) \end{cases} \quad (6.3)$$

où :

- $W_1$  et  $W_2$  sont deux mouvements browniens standards tels que :

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt \quad (6.4)$$

avec  $\rho \in [-1,1]$  la corrélation instantanée.

- $a, b, \sigma$  et  $\eta$  sont des paramètres strictement positifs.
- $\varphi$  est une fonction déterministe bien définie sur l'intervalle  $[0, T^*]$  (avec  $T^* > 0$  un horizon de temps donné), vérifiant  $\varphi(0) = r_0$ .

## 6.2 L'interprétation des variables du modèle

Les variables définies précédemment peuvent être interprétées de la manière suivante :

- Les paramètres  $a$  et  $b$  sont respectivement les coefficients représentant la vitesse de retour à la moyenne des processus  $(x(t))_{t \geq 0}$  et  $(y(t))_{t \geq 0}$ . Cette dénomination est justifiée dans la partie suivante.
- Les paramètres  $\sigma$  et  $\eta$  sont respectivement les coefficients représentant la volatilité des processus  $(x(t))_{t \geq 0}$  et  $(y(t))_{t \geq 0}$ . Ces deux paramètres multiplient respectivement les mouvements browniens  $W_1$  et  $W_2$ .
- Le paramètre  $\rho$  est la corrélation instantanée entre les deux mouvements browniens. Une corrélation parfaite ( $\rho = 1$  ou  $\rho = -1$ ) établit l'écriture d'un mouvement brownien en fonction de l'autre. Cela signifie que l'utilisation d'un modèle à deux facteurs n'est pas pertinente.
- La fonction  $\varphi$  permet au modèle de reproduire exactement la courbe des taux observée sur le marché. Son expression est précisée au 6.4.

## 6.3 La distribution du taux court

Il apparaît pertinent d'exprimer l'espérance et la volatilité du taux court  $r(t)$ .

L'application du lemme d'Itô aux processus  $X_t = x(t)e^{at}$  et  $Y_t = y(t)e^{bt}$  livre :

$$\begin{cases} dX(t) = e^{at}\sigma dW_1(t) \\ dY(t) = e^{bt}\eta dW_2(t) \end{cases}$$

Soit  $0 \leq s < t$ . L'intégration de l'expression précédente entre  $s$  et  $t$  donne :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-a(t-s)}x(s) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) \\ y(t) = e^{-b(t-s)}y(s) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) \end{cases}$$

Le taux court s'exprime alors ainsi :

$$r(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) + \varphi(t) \quad (6.5)$$

Avec  $s=0$ , l'expression du taux court est simplifiée :

$$r(t) = \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_0^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) + \varphi(t) \quad (6.6)$$

Soit  $\mathcal{F}_t$  la filtration générée par les vecteurs  $(x(t))_{t \geq 0}, (y(t))_{t \geq 0}$ . Alors  $\mathcal{F}_t$  contient toutes les valeurs prises jusqu'au temps  $t$ . Conditionnellement à  $\mathcal{F}_s$  avec  $s < t$ , il vient que le taux court suit une loi normale d'espérance et de variance :

$$\mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \varphi(t) \quad (6.7)$$

$$\mathbb{V}[r(t)|\mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(t-s)}] + \frac{\eta^2}{2b} [1 - e^{-2b(t-s)}] + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b} [1 - e^{-(a+b)(t-s)}]$$

### Remarque

Il apparaît que l'expression de l'espérance dépend uniquement des paramètres  $a$  et  $b$ . Avec  $a = b = 0$ , on obtient  $\mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_t] = r(t)$ . A l'inverse, de grandes valeurs pour  $a$  et  $b$  ne font qu'écarter l'espérance de la valeur  $r(t)$ . C'est en cela que les paramètres  $a$  et  $b$  représentent la "vitesse de retour à la moyenne".

## 6.4 Le pricing d'une obligation zéro-coupon avec G2++

Dans ce paragraphe, l'objectif est d'obtenir l'expression d'une obligation zéro-coupon non soumise au risque de défaut de l'émetteur.

Une obligation zéro-coupon est un titre de créance qui garantit le versement d'un unique flux d'une unité monétaire à la maturité. Soit  $0 < t < T$ , en l'absence d'opportunité d'arbitrage, le prix en  $t$  d'une obligation zéro-coupon de maturité  $T$  est donnée par :

$$P(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t \right] \quad (6.8)$$

avec  $\mathbb{Q}$  la probabilité risque-neutre.

L'expression du prix d'une obligation zéro-coupon revient à calculer l'espérance sous la probabilité risque-neutre du *payoff* actualisé, conditionnellement à  $\mathcal{F}_t$ .

Le modèle G2++ permet d'obtenir une formule fermée du prix d'une obligation zéro-coupon :

$$P(t,T) = \frac{P^M(0,T)}{P^M(0,t)} e^{\mathcal{A}(t,T)} \quad (6.9)$$

avec  $P^M(t,T)$  le prix de marché en date  $t$  d'une obligation zéro-coupon de maturité  $T$ , et :

$$\mathcal{A}(t,T) = \frac{1}{2} [V(t,T) - V(0,T) + V(0,t)] - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t)$$

où :

$$\begin{aligned} V(t,T) = & \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right] \\ & + \frac{\eta^2}{b^2} \left[ T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right] \\ & - 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left[ T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right] \end{aligned}$$

### Remarque

Le modèle G2++ peut reproduire exactement la courbe des taux zéro-coupon de marché. Cela est permis grâce à la fonction  $\varphi$ . Cette propriété est vérifiée si et seulement si la fonction  $\varphi$  s'exprime comme<sup>1</sup> :

$$\varphi(T) = f^M(T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-bT})^2 + \frac{\rho\sigma\eta}{ab} (1 - e^{-aT}) (1 - e^{-bT}) \quad (6.10)$$

avec  $f^M(0,T) = -\frac{\partial \ln P^M}{\partial T}(0,T)$  le taux forward instantané de marché pour la maturité  $T$ .

## 6.5 Le pricing d'une swaption avec G2++

Le modèle G2++ fournit une formule semi-fermée pour valoriser les *swaptions*. Cette désignation fait référence à la difficulté d'implémentation due aux bornes infinies présentes dans l'intégrale, ainsi que la résolution d'équations non-linéaires dans la formule.

Soit un montant de nominal  $N$ , un taux fixe  $K$  et un échéancier de dates ordonnées  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}_{n>0}$  correspondant aux dates de paiement des intérêts du

---

1. Cette expression est obtenue en supposant que  $P^M$  est différentiable.



swap et  $T$  correspondant à la maturité de l'option. La formule théorique du prix avec G2++ est :

$$\prod_{G2++}^{Swaption}(t, \mathcal{T}, N, K, \omega) = N\omega P(0, T) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \left[ \Phi(-\omega h_1(x)) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) e^{\kappa_i(x)} \Phi(-\omega h_2(x)) \right] dx$$

avec :

- $\begin{cases} \omega = 1 & \text{pour une swaption payeuse} \\ \omega = -1 & \text{pour une swaption receveuse} \end{cases}$
- $\mu_x = \frac{\sigma^2}{2a^2} [1 - e^{-2aT}] + \rho \frac{\sigma\eta}{b(a+b)} [1 - e^{-(a+b)T}] - \left(\frac{\sigma^2}{a^2} + \rho \frac{\sigma\eta}{ab}\right) [1 - e^{-aT}]$
- $\mu_y = \frac{\eta^2}{2b^2} [1 - e^{-2bT}] + \rho \frac{\sigma\eta}{a(a+b)} [1 - e^{-(a+b)T}] - \left(\frac{\eta^2}{b^2} + \rho \frac{\sigma\eta}{ab}\right) [1 - e^{-bT}]$
- $\sigma_x = \sigma \sqrt{\frac{1-e^{-2aT}}{2a}}$
- $\sigma_y = \eta \sqrt{\frac{1-e^{-2bT}}{2b}}$
- $\rho_{xy} = \frac{\rho\sigma\eta}{(a+b)\sigma_x\sigma_y} [1 - e^{-(a+b)T}]$
- $B(z, t, T) = \frac{1-e^{-z(T-t)}}{z}$
- $h_1(x) = \frac{\bar{y}-\mu_y}{\sigma_y \sqrt{1-\rho_{xy}^2}} - \frac{\rho_{xy}(x-\mu_x)}{\sigma_x \sqrt{1-\rho_{xy}^2}}$
- $h_2(x) = h_1(x) + B(b, T, t_i) \sigma_y \sqrt{1-\rho_{xy}^2}$
- $\lambda_i(x) = c_i A(T, T_i) e^{-B(a, T, T_i)x}$
- $\kappa_i(x) = -B(b, T, T_i) \left[ \mu_y - \frac{1}{2}(1-\rho_{xy}^2)\sigma^2 B(b, T, T_i) + \rho_{xy}\sigma_y \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right]$
- $\bar{y} = \bar{y}(x)$  est l'unique solution de l'équation :

$$\sum_{i=1}^n c_i A(T, T_i) e^{-B(a, T, T_i)x - B(b, T, T_i)\bar{y}} = 1$$

## Troisième partie

# **L'implémentation**

La troisième partie présente les problématiques d'implémentation et les principaux résultats obtenus.

# Chapitre 7

## Le calibrage du modèle de taux G2++

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Les données d'entrée</b>	<b>50</b>
7.1.1	La courbe de taux	50
7.1.2	Les valeurs cibles	52
	Le choix du produit	52
	La convention	53
	La grandeur	54
	La liquidité des produits	55
	L'échantillon retenu	56
<b>7.2</b>	<b>L'optimisation</b>	<b>59</b>
7.2.1	La distance	60
7.2.2	L'erreur	60
7.2.3	L'algorithme d'optimisation	61
	Le fonctionnement	61
	Les contraintes	62
	Le choix de l'algorithme	63
7.2.4	La détermination du prix de modèle	64
	Implémentation avec la quadrature de Gauss-Hermite	65
	L'approximation de Schrager et Pelsser	66
<b>7.3</b>	<b>Les résultats</b>	<b>66</b>
7.3.1	Les sorties du calibrage	66
	La mesure de l'erreur	67
	La détermination du set optimal	67
7.3.2	La reconstruction de la courbe de taux initiale	69

---

Le calibrage d'un modèle de taux consiste à déterminer des valeurs pour ses paramètres. Ce chapitre présente les *inputs* du modèle et les choix relatifs à l'optimisation, ainsi que les résultats obtenus.

## 7.1 Les données d'entrée

L'utilisation de données de marché est nécessaire pour calibrer un modèle de taux qui soit *market-consistent*. Les paragraphes suivants présentent les deux données principales qui ont été extraites du marché : la courbe de taux et les données cibles.

### 7.1.1 La courbe de taux

Afin de valoriser un produit, il est nécessaire d'actualiser les flux futurs. Le calibrage requiert d'utiliser une courbe de taux d'entrée, de maturités aussi précises et larges que possible, et adaptée aux produits à calibrer. Concernant les *swaptions*, la valorisation inclut le prix d'obligations zéro-coupon. Les deux principales courbes utilisées sont :

- Courbe de taux sans risque sans VA (*Volatility Adjustment*) publiée par l'EIOPA.
- Courbe de taux euro *swap* de marché.

Elles sont représentées ci-après :

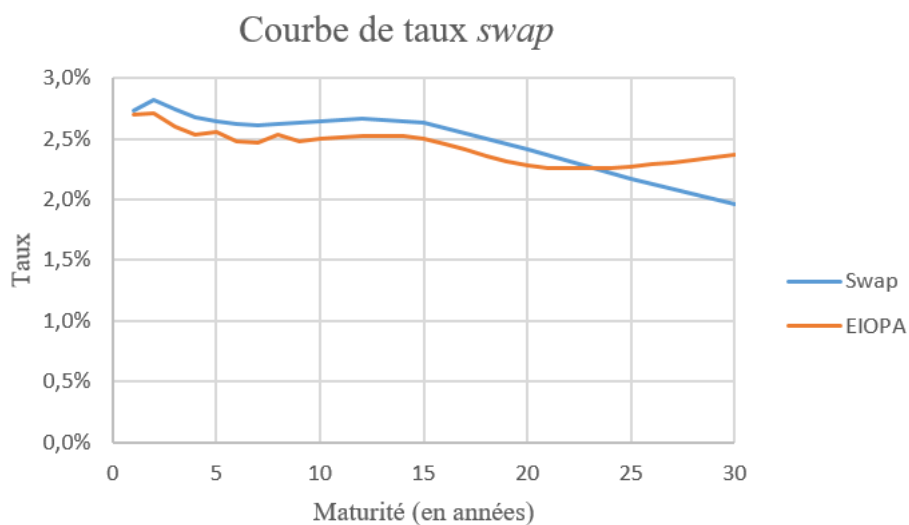


FIGURE 7.1 – Comparaison de la courbe de taux *swap* utilisée avec celle publiée par l’EIOPA au 30/11/2022

Il apparaît que les deux courbes sont proches jusqu’à 20 ans environ, puis ont des valeurs différentes ensuite. Comme le détaille l’EIOPA dans sa méthodologie [14], la détermination de la courbe de taux sans risque utilise un LLP (*Last Liquid Point*) puis applique la méthode de Smith Wilson afin d’extrapoler les taux. Cette procédure est la cause du décalage avec les données de marché.

Afin de s’adapter au plus près des prix de marché, **la courbe de taux *swap* est utilisée pour cette étude**. Elle est présentée plus précisément *infra* :

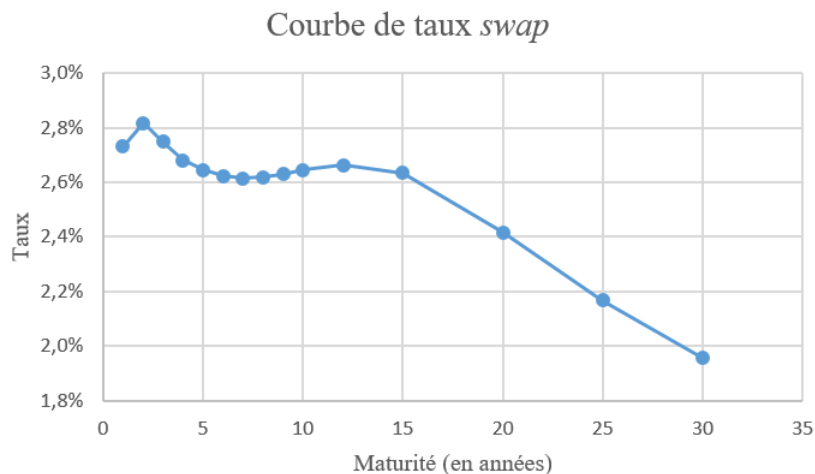


FIGURE 7.2 – Courbe de taux euro *swap* au 30/11/2022

Dans un contexte de remontée des taux qui a commencé en juillet 2022 pour l'euro, les anticipations des investisseurs sur les *swaps* euros indiquent un pic à 2 ans, une décrue jusqu'à 5 ans suivie d'une bosse jusqu'à 15 ans avec un pic à 12 ans. Les anticipations sont ensuite largement pessimistes sur le long terme jusqu'à la dernière maturité à 30 ans.

### 7.1.2 Les valeurs cibles

Le calibrage avec des données de marché consiste en la minimisation des écarts entre des valeurs observées et les résultats du modèle. Les valeurs observées sont en réalité des extractions de données disponibles sur les marchés. Le choix des valeurs est effectué selon plusieurs critères, détaillés ci-dessous.

#### Remarque

Bien que les produits traités dans le cadre de la CVA soient des produits de gré à gré comportant un risque de contrepartie, le calibrage s'appuie sur des valeurs disponibles sur les marchés. Les produits mentionnés sont échangés sur des marchés liquides dont les cotations sont accessibles.

#### Le choix du produit

Le premier critère qui intervient dans le choix des données cibles est le type de produit utilisé. Parmi les produits dérivés de taux présentés au 5.4, le calibrage est usuellement réalisé sur des *caps* (et *floors*) ou des *swaptions*. Ces deux produits apportent de meilleurs résultats pour deux raisons principales :

- Ils comprennent une composante optionnelle. Cette caractéristique permet aux investisseurs, à travers le niveau de *strike* notamment, de spéculer de manière plus précise qu'avec des *swaps* ou des FRA qui fixent uniquement un taux sur une période donnée. Les *caps* et *swaptions* représentent mieux les anticipations de marché, surtout sur les maturités extrêmes.
- Ils bénéficient d'une liquidité importante, particulièrement dans le contexte actuel de remontée des taux. En effet, de nombreux acteurs financiers et non financiers cherchent à se protéger de la hausse des taux d'intérêt, ce qui dynamise le marché.

Les *caps* et *swaptions* apparaissent comme les uniques produits candidats pour le calibrage du modèle de taux.

Il est pertinent de souligner que les *swaptions* sont plus flexibles que les *caps*. En effet, une *swaption* représente la combinaison d'une option et d'un *swap*.

Concrètement, si un investisseur veut se couvrir avec un produit de maturité précise, sur 10 ans par exemple, il peut :

- Contracter un *cap* ou un *floor* de maturité 10 ans.
- Contracter une *swaption* de maturité totale 10 ans. Il y aura ainsi plusieurs choix quant au produit choisi, fonction de la maturité de l'option et du ténor du *swap* : 5x5, 1x9, 7x3, etc.

Plutôt que de proposer des prix pour chaque maturité comme les *caps*, les *swaptions* présentent des surfaces de prix, et contiennent ainsi davantage d'informations. Les travaux de Valentine Poutçou [12] ont d'ailleurs montré que le calibrage avec des *swaptions* permet d'obtenir des erreurs plus faibles qu'avec les *caps*. Néanmoins, cette précision supplémentaire induit que le calibrage avec des *swaptions* est plus complexe qu'avec des *caps*.

**Cette étude utilise des *swaptions* comme produit de calibrage.**

### Remarque

Il est possible de calibrer un modèle de taux en utilisant plusieurs types de produits. Cette technique consiste à calibrer certains paramètres avec un type de produit donné, et d'obtenir les autres paramètres avec un autre produit, en fixant les valeurs des paramètres déjà déterminés. Cette méthode est peu documentée et fait largement appel au dire d'expert lors de sa mise en place. Elle n'est pas implémentée dans cette étude.

### La convention

Les *swaptions* sont des produits cotés en volatilité implicite. Cette dernière n'est pas unique, elle est déterminée en utilisant un modèle. Il est d'usage que les volatilités implicites des *swaptions* soient disponibles selon deux conventions : le modèle de Black et le modèle de Bachelier.

### Le modèle de Black

Le modèle de Black repose sur l'hypothèse de volatilité log-normale.

Le taux *swap forward*  $K_{eq}$  suit la distribution :

$$\ln(K_{eq}(t)) \sim \mathcal{N} \left( \ln(K_{eq}(0)) - \frac{(\sigma_{Bl})^2}{2}t, (\sigma_{Bl})^2t \right)$$

avec :

- $t = 0$  la date de calibrage.
- $\sigma_{Bl}$  la volatilité implicite cotée pour la *swaption* considérée.

Historiquement, le modèle de Black est le plus utilisé et la littérature le concernant est développée. Néanmoins, par définition de la fonction log, cette convention ne peut pas s'appliquer dans un contexte de taux négatifs ou proches de 0. Par conséquent, ce modèle n'a pas été capable de fournir des cotations pendant la période récente de taux faibles.

Dans le contexte actuel, les taux sont largement au-dessus de 0, ce qui permet d'utiliser à nouveau le modèle de Black.

### **Le modèle de Bachelier**

Le modèle de Bachelier repose sur l'hypothèse de volatilité normale.

Le taux *swap forward* suit la distribution :

$$K_{eq}(t) \sim \mathcal{N} \left( K_{eq}(0) , (\sigma_{Ba})^2 t \right)$$

avec  $\sigma^{Ba}$  la volatilité implicite cotée selon le modèle de Bachelier.

Ce modèle est moins utilisé que le modèle de Black. Néanmoins, il a été prépondérant pendant la période de taux faibles. Il présente l'avantage, par l'hypothèse de normalité des volatilités, de fonctionner en toutes circonstances.

Bien que le choix de la convention soit libre, le modèle de Bachelier semble plus pertinent pour cette étude au vu du marché actuel puisqu'il est plus flexible que celui de Black. Étant donné que les taux pourraient, à moyen-long terme, baisser de nouveau, il est souhaitable de garder un maximum de robustesse pour le modèle.

**La convention retenue pour cette étude est le modèle de Bachelier.**

### **La grandeur**

La réflexion suivante à mener réside dans le choix de la grandeur à calibrer. Deux grandeurs contiennent les informations d'une *swaption* : la volatilité implicite et le prix. Il est possible de calibrer sur les deux données.

Toutefois, il est d'usage de comparer des prix plutôt que des volatilités. Les surfaces de volatilité peuvent être ambiguës et ne pas être comparables entre des ténors et maturités différentes. L'utilisation des prix permet à l'utilisateur expérimenté de mieux appréhender les écarts. Ainsi, il existe deux alternatives :

- Calibrer avec les volatilités implicites puis les transformer en prix pour observer les résultats.
- Transformer directement les volatilités implicites en prix puis effectuer le calibrage.



Dans le cadre de la mission d'audit, les prix de *swaptions* cotées ont récupérés en date du 30/11/2022. Plus précisément, les *swaptions* mentionnées sont européennes, payeuses, et la fréquence de paiement associée au *swap* est semestrielle.

Le modèle de Bachelier permet d'obtenir le prix d'une *swaption* avec la formule suivante :

$$\Pi^{Ba}(T, \mathcal{T}, N, K) = NF^{Bach}(K, K_{eq}(0), \sigma^{Ba} \sqrt{T}, \omega) \sum_{i=1}^n \tau_i P(T, T_i)$$

avec :

$$F^{Bach}(F, K, z, \omega) = \omega(F - K) \Phi\left(\omega \frac{F - K}{z}\right) + z \phi\left(\omega \frac{F - K}{z}\right)$$

où :

- $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- $\phi$  est la densité de la loi normale centrée réduite.
- $\omega$  est l'indicateur du type de *swaption* :  $\omega = 1(-1)$  pour une *swaption* payeuse (receveuse).

**Les valeurs cibles retenues sont des prix de *swaptions* cotées sur le marché selon le modèle de Bachelier au 30/11/2022.**

*Les caractéristiques européennes et payeuses des swaptions ne seront plus reprises dans la suite mais seront sous-entendues.*

### La liquidité des produits

Dans l'objectif de positionner à chaque instant la valeur d'un dérivé sur le marché, il est attribué un des trois qualificatifs suivants : ATM, ITM ou OTM.

#### Définition

- Une *swaption* est dite "dans la monnaie" (ITM : *In the Money*), si le prix d'exercice de l'option (*strike*) est inférieur au taux *forward* associé au *swap*.
- Une *swaption* est dite "à la monnaie" (ATM : *At the Money*), si le prix d'exercice de l'option (*strike*) est égal au taux *forward* associé au *swap*.
- Une *swaption* est dite "en dehors de la monnaie" (OTM : *Out of the Money*), si le prix d'exercice de l'option (*strike*) est supérieur au taux *forward* associé au *swap*.

Afin de s'assurer de la cohérence des prix de marché, il est d'usage de n'observer que les prix correspondants à des *swaptions* particulières, dites "à la monnaie". En effet, les *swaptions* ATM sont neutres et c'est ce type de produit qui est échangé

sur le marché primaire. Le choix de produit ATM garantit la plus grande liquidité possible.

**Cette étude se base sur les prix de *swaptions* ATM cotées selon le modèle de Bachelier au 30/11/2022.**

*Dans la suite, les swaptions considérées seront toujours ATM. Afin d'alléger les notations, cette caractéristique ne sera plus mentionnée.*

### **L'échantillon retenu**

L'ultime problématique concernant les valeurs cibles réside dans le choix de l'échantillon de prix à utiliser.

Le choix de l'échantillon est central dans le calibrage. En effet, si un modèle de taux peut très facilement capter les variations de prix d'un petit nombre de produits (avec deux ou trois produits,  $G2++$  est capable de suivre très précisément les prix de marché), les erreurs sont de plus en plus importantes lorsqu'il doit s'ajuster à un grand nombre de prix. Il est ainsi admis que la performance, au sens de la capacité à s'adapter à des prix, est décroissante par rapport au nombre de produits.

Les paragraphes ci-après détaillent le choix de l'échantillon retenu.

### **Les données brutes**

En date du 30/11/2022, les prix des *swaptions* à disposition sont de deux dimensions :

- Un premier axe selon la maturité de l'option. Les maturités cotées sont 0,25, 0,5, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20 et 30 ans.
- Un second axe selon le ténor du *swap* : 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20 et 30 ans.

La surface de prix disponible comprend donc 120 prix différents, pour des maturités totales comprises entre 1,25 an à 60 ans. Elle est représentée sur le graphique suivant :

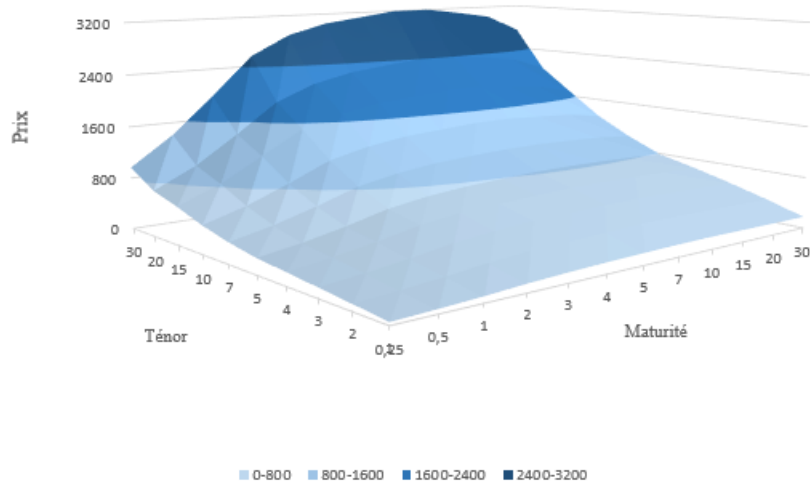


FIGURE 7.3 – Surface des prix de marché des *swaptions* au 30/11/2022, en bps

Deux constats apparaissent clairement sur le graphique :

- Les valeurs de prix les plus faibles sont liées à des *swaptions* de petites maturités et petits ténors.
- Les valeurs de prix les plus grandes sont liées à des *swaptions* ayant de grandes maturités et de grands ténors.

Globalement, le prix d'une *swaption* augmente à la fois avec la maturité et le ténor du produit.

### Choix préliminaire

Trois possibilités principales sont évoquées dans la littérature pour convenir du portefeuille à calibrer :

- Les *swaptions* co-terminales. Ce choix consiste à ne considérer que les produits dont la maturité totale est égale à une maturité de *swaps* en portefeuille. Il est nécessaire de fixer une maturité précise.
- La diagonale. Cette méthode requiert de n'inclure dans les valeurs cibles que les *swaptions* dont la maturité est égale au ténor.
- La matrice pleine. Aucune restriction n'est réalisée *a priori* sur la surface de prix.

L'utilisation de la co-terminalité est surtout pertinente dans un cadre de couverture, avec des *swaptions* bermudiennes. Ces produits sont caractérisés par la possibilité d'exercer l'option à un ensemble de dates fixées à la signature du contrat. Le calcul de la CVA concernant l'ensemble des dérivés en portefeuille, ce choix n'est

pas pertinent ici.

Par ailleurs, n'utiliser que la diagonale de la surface de prix conduit à supprimer une large majorité de l'information induite par la valorisation de marché. En effet, cette méthode ne permettrait de n'utiliser que 10 valeurs sur les 120 disponibles. Ce procédé est souvent appliqué dans les études recherchant un délai d'exécution très faible. Il possède néanmoins plusieurs inconvénients majeurs : très peu de données sur le court terme et une grande sensibilité aux taux à long terme, souvent très volatils. En outre, la perte d'information sous-jacente réduirait considérablement l'intérêt d'utiliser les *swaptions* plutôt que les *caps* pour le calibrage.

Ainsi, il n'apparaît pas pertinent de réaliser des restrictions fortes sur la surface de prix initiale.

### Extrapolation de la courbe de taux

Certaines données extraites ont des maturités totales supérieures à 30 ans. Sur les 120 prix, cela représente 24 couples "maturités  $\times$  ténors", soit 20% des produits. Or, pour chacun de ces produits, il est nécessaire d'actualiser les flux futurs avec la courbe de taux retenue, disponible uniquement pour des maturités inférieures à 30 ans.

Il conviendrait donc d'extrapoler la courbe des taux entre 30 et 60 ans pour être en capacité d'utiliser toutes les données lors du calibrage. Malgré l'existence de méthodes pour prolonger des courbes, un tel travail n'est pas nécessairement souhaitable, pour deux raisons principales :

- Comme évoqué précédemment, le modèle de taux suit moins bien les prix de marché lorsqu'il se base sur un grand nombre de produits.
- La proportion des *swaptions* en portefeuille (les produits de gré à gré sur lesquels est calculée la CVA) possédant une maturité totale supérieure à 30 ans est très faible.

Les *swaptions* dont la maturité totale est supérieure à 30 ans sont exclues des valeurs cibles.

### Étude du portefeuille

L'étape suivante consiste à étudier les *swaptions* en portefeuille pour déterminer la surface de prix la plus pertinente à utiliser.

Il apparaît que plus de 90% des *swaptions* en portefeuille possèdent une maturité totale comprise entre 1,25 an et 5 ans.

### Remarque

Il est nécessaire de souligner deux éléments pour calibrer un modèle de taux :

- Un modèle, une fois calibré, se rapprochera plus facilement du prix de marché d'une *swaption* si elle fait partie de l'échantillon de calibrage, que si elle en est exclue. Cet argument tend à étendre au maximum les valeurs cibles, pour réduire les erreurs, notamment sur les maturités et ténors extrêmes.
- Un modèle calibré sur peu de produits permet, en général, d'avoir des écarts de prix très faibles sur l'échantillon cible. Ce second argument nuance le précédent, puisqu'il tend à réduire le plus possible le nombre de valeurs cibles pour en limiter les erreurs. Néanmoins, si les erreurs au sein de l'échantillon sont faibles, ce choix a un impact très négatif sur les produits hors valeurs cibles.

Ces deux affirmations sont confirmées quantitativement lors de la réalisation de tests de sensibilité sur la surface de prix utilisée au 8.1.

L'objectif de cette étude n'est pas la construction d'un moteur de CVA pour l'ensemble des produits en portefeuille mais le calibrage optimal de G2++. Il n'apparaît pas primordial de calibrer sur une surface de prix couvrant l'ensemble des produits en portefeuille. Compte tenu de la part importante des *swaptions* dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans, il est choisi d'utiliser les produits cotés qui satisfont ces caractéristiques comme échantillon de calibrage. Cela représente 18 produits, soit 15% des produits de l'extraction initiale.

**Cette étude se base sur 18 prix cibles associés aux *swaptions* cotées dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans.**

## 7.2 L'optimisation

Cette partie présente la méthodologie utilisée pour optimiser les valeurs des paramètres du modèle, à l'aide des données d'entrée choisies précédemment. L'obtention des valeurs optimales nécessite de minimiser les écarts entre les prix de marché et les prix théoriques de G2++. Mathématiquement, le problème se traduit par l'équation suivante :

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \Theta} \left\{ \sum_{i \in I} \omega_i f \left( \Pi_i^{obs}, \Pi_i^{mod}(\theta) \right) \right\}$$

avec :

- $\theta = (a, b, \sigma, \eta, \rho)$  représente le vecteur à optimiser, c'est-à-dire les paramètres du modèle G2++.
- $\Theta$  représente l'ensemble des contraintes pour chaque paramètre.
- $I$  représente l'échantillon cible avec les 18 *swaptions*.

- $\omega_i$  représente le poids accordé à la *swaption*  $i$ .
- $f$  est une fonction qui représente la distance utilisée.
- $\Pi_i^{obs}$  est le prix de marché de la *swaption*  $i$ .
- $\Pi_i^{mod}$  est la fonction, dépendant des paramètres, du prix théorique de G2++ de la *swaption*  $i$ .

Les paragraphes suivants ont pour objectif de présenter les choix possibles pour chacune de ces variables, et de justifier les décisions prises.

### 7.2.1 La distance

Une distance est une valeur réelle qui symbolise la longueur entre deux points. Dans cette étude, l'objectif est de mesurer l'écart entre deux prix.

La fonction choisie pour la distance doit être positive et faire appel à la différence entre les deux prix. Ainsi, de nombreuses fonctions peuvent être choisies : la valeur absolue, la fonction carré ou encore d'autres fonctions puissances d'ordres supérieurs pairs. Concernant les modèles de taux, la fonction carré est la plus répandue (voir Brigo et Mercurio [6], page 168), notamment car elle représente un compromis satisfaisant pour la sensibilité aux valeurs aberrantes. Le lecteur pourra se référer aux travaux d'Eléonore Haguet [7] et de Valentine Poutçou [12].

**Il est choisi de minimiser l'erreur quadratique entre les prix :**

$$\sum_{i \in I} \left( \Pi_i^{obs} - \Pi_i^{mod}(\theta) \right)^2$$

### 7.2.2 L'erreur

Le choix de l'erreur est représenté par les  $(\omega_i)_{i \in I}$  dans le cadre de cette étude. Il existe deux principaux types d'erreurs :

- L'erreur absolue. Elle considère l'écart entre une valeur attendue et une valeur obtenue :  $|valeur_{attendue} - valeur_{obtenue}|$ .
- L'erreur relative. Elle considère l'écart entre une valeur attendue et une valeur obtenue, rapporté à la valeur attendue :  $\frac{|valeur_{attendue} - valeur_{obtenue}|}{valeur_{attendue}}$ .

Mathématiquement, l'erreur absolue dépend des valeurs en jeu : si les données sont très volatiles, l'erreur absolue donnera davantage d'importance aux grandes valeurs qu'aux petites. A l'inverse, en rapportant l'erreur absolue à la valeur attendue, l'erreur relative accorde la même pondération à chaque couple de données.

Compte tenu de la surface de prix extraite, et de la croissance du prix avec la maturité et le ténor, il n'apparaît pas pertinent d'utiliser l'erreur absolue. De plus, cela constitue la pratique recommandée par le document d'orientation concernant

les générateurs de scénarios économiques, publié par l'Institut des Actuaire en 2018 [11]<sup>1</sup>, ainsi que la méthode utilisée par Brigo et Mercurio [6]<sup>2</sup>. **Il est choisi d'utiliser l'erreur relative en complément de l'erreur quadratique.**

Cela se traduit par :

$$\forall i \in I, \omega_i = \left( \frac{1}{\Pi_i^{obs}} \right)^2$$

**L'écart entre le prix de marché et le prix de G2++ est défini par l'erreur quadratique relative, le problème se réécrit :**

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{i \in I} \left( \frac{\Pi_i^{obs} - \Pi_i^{mod}(\theta)}{\Pi_i^{obs}} \right)^2 \quad (7.1)$$

### 7.2.3 L'algorithme d'optimisation

Le but d'un algorithme d'optimisation est de trouver la solution optimale, lorsqu'elle existe, à un problème mathématique. Compte tenu de l'importance des enjeux sous-jacents et des quantités de données toujours plus importantes, l'optimisation est aujourd'hui réalisée avec des algorithmes numériques.

La qualité du modèle de taux dépend largement de la résolution numérique, puisque la théorie du modèle induit des propriétés qui ne sont valables qu'avec les paramètres optimaux. En effet, la complexité de la fonction à optimiser rend très difficile l'atteinte de la solution globale.

Les paragraphes suivants présentent les algorithmes d'optimisation, l'implémentation des contraintes liées au problème et enfin l'algorithme retenu.

#### Le fonctionnement

Les algorithmes d'optimisation peuvent être très différents les uns des autres, mais ils possèdent deux caractéristiques communes :

- Une fonction objectif. Il s'agit d'une fonction réelle ou vectorielle, dont l'argument est lui-même réel ou vectoriel.
- Une condition d'arrêt, relative à la précision recherchée et/ou au temps de calibrage, à travers une durée ou un nombre d'évaluation maximal de la fonction objectif.

---

1. Voir page 49 au 5.3.7.1

2. Voir 4.2.7 *Examples of Calibration to Real-Market Data*, page 168.

### Les contraintes

Le problème d'optimisation à résoudre inclut des contraintes de plusieurs natures : dimension des solutions, caractéristiques de la fonction objectif, présence de seuils pour les paramètres. Ces problématiques font l'objet des paragraphes suivants.

### La dimension du problème

Le modèle de taux G2++ contient 5 paramètres qu'il faut estimer. De ce fait, la recherche de solutions au problème d'optimisation est effectuée dans l'espace  $\mathbb{R}^5$ .

Il est évident que la difficulté de résolution croît avec le nombre de dimensions d'un problème. C'est d'ailleurs particulièrement le cas lorsque la fonction objectif est complexe.

### Les caractéristiques de la fonction objectif

La fonction de minimisation, notée  $f^*$ , est :

$$f^* : \begin{cases} \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & f^*(\theta) \end{cases}$$

avec :

$$f^*(\theta) = \sum_{i \in I} \left( \frac{\Pi_i^{obs} - \Pi_i^{mod}(\theta)}{\Pi_i^{obs}} \right)^2$$

L'appel à la fonction associée au prix de modèle s'avère impactant pour la fonction  $f^*$ . En effet, il n'est pas possible d'obtenir une expression simple de la dérivée de  $\Pi_i^{mod}$ . Ainsi, aucune information n'est disponible sur  $f^*$  pour faciliter la résolution du problème : la connaissance de l'expression de la jacobienne permet d'accélérer largement la plupart des algorithmes.

### Les seuils des paramètres

Le modèle G2++ impose, par construction, des seuils sur ses paramètres :

$$\begin{cases} a, b, \sigma, \eta > 0 \\ \rho \in [-1, 1] \end{cases} \quad (7.2)$$

La mise en place de l'algorithme requiert d'indiquer des bornes supérieures aux paramètres  $a, b, \sigma$  et  $\eta$ .

Il n'est pas souhaitable que ces nouvelles bornes soient contraignantes pour l'algorithme puisque l'objectif est de le laisser obtenir la valeur optimale, peu importe



les valeurs intermédiaires atteintes. Compte tenu des valeurs optimales obtenues dans la littérature, les contraintes des paramètres finalement implémentées sont :

Contraintes
$a \in [10^{-4}; 10]$
$b \in [10^{-4}; 10]$
$\sigma \in [10^{-4}; 10]$
$\eta \in [10^{-4}; 10]$
$\rho \in [-1; 1]$

TABLE 7.1 – Valeurs retenues pour les contraintes des paramètres de G2++

### Le choix de l'algorithme

Il existe de nombreuses méthodes différentes pour minimiser une fonction. Pour un problème en dimension 5, avec des bornes sur les paramètres et sans expression analytique de dérivées, les deux algorithmes fondateurs utilisables sont :

- Algorithme de Gauss-Newton. Il représente une extension en plusieurs dimensions de la méthode de Newton. Pour rappel, la méthode de Newton permet de trouver les racines de fonctions réelles à valeurs réelles avec l'approximation  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ . Néanmoins, elle n'assure pas la convergence et est très sensible au set initial.
- Méthode du gradient conjugué. Elle consiste à calculer à chaque itération le gradient de la fonction objectif pour déterminer une direction pour le prochain point. L'inconvénient réside dans la prise en compte des seuils des paramètres puisqu'il n'est possible de pénaliser que certaines zones choisies dans l'espace, ce qui s'avère complexe.

Néanmoins, ces algorithmes datent du XXème et ont été amélioré depuis leur création. A date d'étude, les travaux réalisés utilisent davantage les évolutions suivantes :

- Algorithme de Levenberg-Marquardt. Il se base sur les deux méthodes précédentes, et est adapté aux problème de moindres carrés non linéaires. Cependant, la convergence de l'algorithme est difficile si le set initial est loin de la solution optimale.
- Algorithme L-BFGS-B (*Limited-memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno with Box Constraints*). Il s'agit d'une amélioration de l'algorithme BFGS, basé sur la descente de gradient et la Hessienne, prenant en compte des

bornes et optimisant la mémoire machine. Comme la plupart des algorithmes d'optimisation, il est sensible à l'initialisation et la convergence n'est pas assurée pour les problèmes complexes. C'est un algorithme très utilisé, particulièrement dans le domaine de l'Intelligence Artificielle où l'utilisation limitée de la mémoire machine est primordiale à cause des volumes de données traités.

Des tests simples ont été réalisés avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt ainsi que le L-BFGS-B. Les deux méthodes donnent des résultats similaires, cependant l'algorithme L-BFGS-B s'avère plus rapide. Il a donc été choisi pour cette étude. Des sensibilités seront réalisées avec l'algorithme Levenberg-Marquardt au 8.4.

### Remarque

L'algorithme retenu est déterministe et n'assure pas la convergence vers le set optimal. Par conséquent, il est nécessaire d'effectuer de nombreux calibrages et d'en étudier précisément les sorties pour espérer l'approcher au mieux. Ceci fait l'objet de la partie 7.3.1.

Afin d'assurer la convergence, une alternative serait d'utiliser un algorithme stochastique de type génétique ou encore réseau de neurones. Cependant, de tels algorithmes sont complexes à mettre en place et la convergence vers l'optimum requiert de laisser l'algorithme s'exécuter sans contrainte de temps. Au vu de la complexité du problème et de la problématique de cette étude, de tels algorithmes ne seront pas considérés.

## 7.2.4 La détermination du prix de modèle

L'implémentation nécessite de déterminer numériquement les valeurs théoriques des prix de *swaptions*. Ce paragraphe détaille le calcul numérique de l'équation 6.5.

L'intégration gaussienne est la méthode numérique la plus utilisée pour approximer la valeur d'une intégrale entre deux bornes. Elle repose sur l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)$$

où :

- Les constantes  $a > b$  représentent les bornes d'intégration choisies.
- La fonction  $f$  est l'intégrande du problème.
- $n$  est le nombre de "noeuds" du problème, appelés aussi points de quadrature. La valeur de cette constante définit également le nombre d'équations non linéaires à résoudre pour déterminer la valeur de  $\bar{y}$  dans la variable  $h_1$ . Numériquement, ces équations sont résolues par la méthode de la sécante via

la fonction `scipy.optimize.newton`. Ainsi, plus  $n$  est grand, plus il apporte de précision au calcul numérique de l'intégrale, mais plus l'exécution est longue.

- $(\omega_i)_{i \in [1, n]}$  sont les poids associés à chaque noeud. Ils doivent être choisis spécifiquement en fonction de la distribution des points.

Plus précisément, la forme de l'intégrande dans la fonction du prix de G2++ tend à utiliser la quadrature de Gauss-Hermite, qui approxime les fonctions suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx$$

En effet, le changement de variable  $u = \frac{x - \mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x}$  permet d'obtenir :

$$\prod_{G2++}^{Swaption}(0, T, N, K) = N\omega P(0, T) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \tilde{f}(u) du$$

avec :

$$\tilde{f}(u) = \Phi\left(-\omega h_1\left(\frac{u - \mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)\right) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{u - \mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right) e^{\kappa_i\left(\frac{u - \mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)} \Phi\left(-\omega h_2\left(\frac{u - \mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)\right)$$

### Implémentation avec la quadrature de Gauss-Hermite

Cette méthode utilise les propriétés de la distribution de la loi normale pour choisir les noeuds du problème ainsi que les poids associés.

Les points  $x_i$  correspondent ainsi aux racines des polynômes d'Hermite. Pour rappel, les polynômes d'Hermite sont de la forme :

$$\forall n > 1, H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

La racine du polynôme d'ordre  $n$  est analytiquement :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

Et les poids sont donnés par :

$$\omega_i = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_i)]^2}$$

Les  $x_i$  et  $w_i$  sont déterminés en utilisant la fonction `scipy.special.roots_hermite` de la bibliothèque `Scipy`.

La durée d'exécution s'avère beaucoup trop importante pour que cette méthode soit retenue pour le calibrage. En effet, l'optimisation requiert d'évaluer un très grand nombre de fois la fonction objectif. Pour répondre aux contraintes du moteur de calcul, il est préférable d'obtenir le prix de modèle d'une autre manière.

## L'approximation de Schrager et Pelsser

David Schrager et Antoon Pelsser ont proposé en 2004 une approximation du prix d'une *swaption* par le modèle G2++ [13]. La formule est réputée pour approcher de manière très précise le pricing théorique de G2++. Le prix d'une *swaption* payeuse s'écrit en conservant les notations du 6.5 comme suit :

$$P_{SP}^{Swaption}(t, T, N, K) = \frac{\sigma_{SP}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^n \tau_i P(0, T_i)$$

avec :

- $\sigma_{SP} = \left[ \sigma^2 C_{(1)}^2 \frac{e^{2aT_1-1}}{2a} + \eta^2 C_{(2)}^2 \frac{e^{2bT_1-1}}{2b} + 2\rho\sigma\eta C_{(1)}C_{(2)} \frac{e^{(a+b)T_1-1}}{a+b} \right]^{\frac{1}{2}}$
- $C_{(1)} = \frac{1}{a} \left[ e^{-aT_1} P^A(0, T_1) - e^{-aT_1} P^A(0, T_n) - K \sum_{i=1}^n \tau_i e^{-aT_i} P^A(0, T_i) \right]$
- $C_{(2)} = \frac{1}{b} \left[ e^{-bT_1} P^A(0, T_1) - e^{-bT_1} P^A(0, T_n) - K \sum_{i=1}^n \tau_i e^{-bT_i} P^A(0, T_i) \right]$
- $P^A(0, T_i) = \frac{P(0, T_i)}{\sum_{i=1}^n \tau_i P(0, T_i)}$
- $\tau_i = T_i - T_{i-1}$

Le temps de calcul d'un prix est considérablement réduit avec cette approximation.

**Le prix de modèle d'une *swaption* est calculé avec l'approximation de Schrager et Pelsser.**

## 7.3 Les résultats

Les paragraphes suivants présentent les résultats obtenus en lien avec le modèle de taux, à travers la mesure des erreurs lors du calibrage et la reconstruction de la courbe de taux.

### 7.3.1 Les sorties du calibrage

Ce passage présente les résultats concernant l'implémentation du calibrage du modèle de taux G2++. Les chiffres mentionnés ci-dessous ont été obtenus en implémentant l'ensemble des choix détaillés dans les paragraphes *supra*.

### La mesure de l'erreur

Il existe de multiples manières de mesurer les erreurs en sortie du calibrage. La plus évidente est l'analyse des écarts entre les prix de modèle et les prix de marché sur les produits présents dans l'échantillon. Deux possibilités :

- L'écart absolu consiste à observer la différence en *bps* entre les deux prix pour chaque produit.
- L'écart relatif en pourcentage, indiquant cette même différence rapportée au prix de marché de chaque produit.

Comme expliqué précédemment, il est préféré l'écart relatif, exprimé en pourcentage.

### La détermination du set optimal

Afin de s'approcher au mieux de l'optimum du problème en utilisant l'algorithme L-BFGS-B, il est nécessaire d'utiliser un set initial proche du set optimal. L'objectif est *in fine* que le set en sortie de l'algorithme soit quasiment identique à celui d'entrée, auquel cas l'optimisation pourra être considérée réussie.

Sans *a priori* sur l'optimum, il est nécessaire de tester plusieurs sets initiaux. Pour ce faire, chacun des paramètres est généré aléatoirement dans ses bornes respectives.

En fonction de la durée d'exécution, il est choisi de lancer l'algorithme un certain nombre de fois avec des sets différents générés de façons aléatoires et indépendantes avec le module *random* de Python.

Parmi toutes les optimisations effectuées, le set associé à l'erreur relative moyenne est retenu. Il sert ensuite lui-même de set initial à un nouveau lancement de l'algorithme.

Il existe deux possibilités :

- L'erreur relative moyenne ainsi que les valeurs de chaque paramètre sont proches des précédentes. Dans ce cas, le dernier set de sortie est admis comme l'optimum du problème.
- L'erreur relative moyenne et/ou les valeurs de chaque paramètre se sont écartées des précédentes. Alors, l'optimisation n'est pas concluante : le set initial est manifestement éloigné du set optimal. Il est nécessaire de reproduire la méthode en relançant un plus grand nombre de fois l'algorithme avec des sets aléatoires.

**Ici, l'algorithme a été lancé avec des sets aléatoires à 100 reprises.**

La valeur minimale de l'erreur relative moyenne obtenue est :

Erreur relative moyenne	2,13 %
-------------------------	--------

TABLE 7.2 – Erreur relative moyenne sur les *swaptions* de l'échantillon de calibrage au 30/11/2022

L'erreur relative moyenne est faible, ce qui est satisfaisant compte tenu des restrictions imposées sur la surface de prix utilisée.

Le tableau suivant expose les écarts relatifs entre le prix de marché et le prix de modèle pour chaque produit de l'échantillon, arrondi au pourcentage près :

		Ténoir			
		1	2	3	4
Maturité	0,25	3	0	0	-3
	0,5	-2	-1	-1	-4
	1	-1	4	2	-1
	2	0	5	2	
	3	-2	3		
	4	-5			

TABLE 7.3 – Erreur relative entre les prix de marché et les prix théoriques, arrondie au pourcentage près pour chaque *swaption* de l'échantillon de calibrage

Ces valeurs sont proches de celles déterminées par Brigo et Mercurio [6]<sup>3</sup>. Sur les 18 produits dans l'échantillon de calibrage, l'erreur relative maximale est de 5%. Cette valeur est faible en comparaison de celle obtenue dans l'étude similaire menée par Valentine Poutçou [12]<sup>4</sup>. Néanmoins ce travail date de 2022 et se base sur un échantillon de calibrage plus large, ce qui nuance ce constat.

Ces valeurs seront analysées de manière détaillée lors des tests de sensibilité sur l'échantillon de calibrage au 8.1.

Le set de paramètres obtenu est :

3. Voir 4.2.7 *Examples of Calibration to Real-Market Data*.

4. Voir page 48 "Calibrage sur les *swaptions*."

$a$	$b$	$\sigma$	$\eta$	$\rho$
43,9%	21,3%	5,0%	7,2%	-95,0%

TABLE 7.4 – Set de paramètres optimal obtenu en calibrant avec des *swaptions* dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans

### Remarques

- La valeur de  $\rho$  est proche de sa valeur seuil  $-1$ , en s'en écartant légèrement. Il n'est pas souhaitable qu'un paramètre atteigne un seuil puisque cela signifierait que l'algorithme s'est arrêté avant de converger.
- La valeur de  $a$  est supérieure à celle de  $b$ . Les rôles des processus  $(x_t)_{t \geq 0}$  et  $(y_t)_{t \geq 0}$  étant symétriques, rien ne justifie que la seconde valeur  $b$  prenne l'ascendant sur  $a$ .

**Les différentes valeurs obtenues à l'issue de ce calibrage apparaissent cohérentes.**

### 7.3.2 La reconstruction de la courbe de taux initiale

Un des avantages majeurs qui a conduit au choix du modèle de taux  $G2++$  est sa capacité à très bien reproduire la courbe de taux initiale. Ce paragraphe vise à vérifier ce point en utilisant le set de paramètres obtenu *supra*.

Pour reconstruire la courbe de taux zéro-coupon, l'équation 6.9 a été implémentée à l'aide d'une grille de temps annuelle entre 0 et 30 ans :

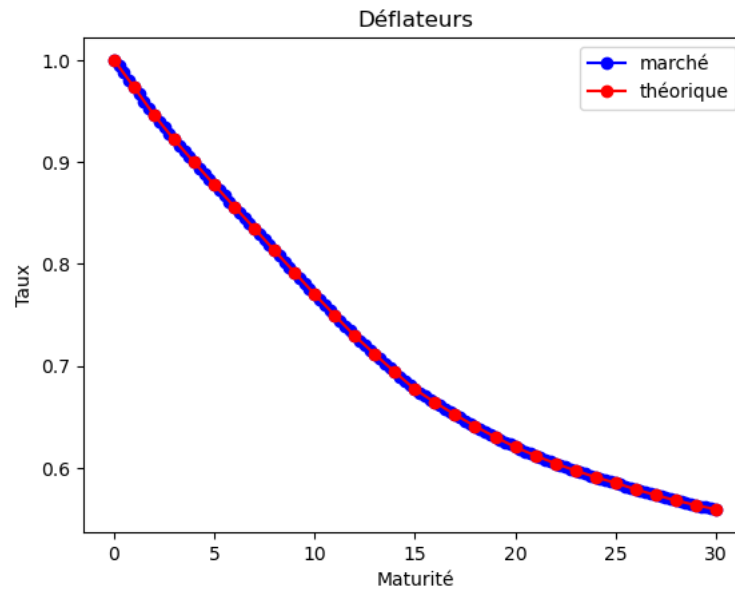


FIGURE 7.4 – Comparaison des déflateurs issus du calibrage de G2++ et des déflateurs de marché

Graphiquement, les déflateurs issus de G2++ semblent correspondre parfaitement à ceux extraits des marchés. En réalité, les deux jeux de données étudiés sont identiques jusqu'au millième de pourcent près.

Ces résultats étaient prévisibles puisque la fonction  $\varphi$  permet au modèle de reproduire à l'identique la courbe de taux initiale. De ce fait, les erreurs observées résultent des valeurs conservées des paramètres (arrondies au centième de pourcentage près).

**La reconstruction de la courbe des déflateurs a permis de vérifier la propriété centrale du modèle G2++, ce qui valide le calibrage réalisé.**



## Quatrième partie

# **L'analyse des résultats et tests de sensibilité**

Cette dernière partie présente les différentes réflexions issues de l'analyse des résultats. Des tests de sensibilité sont réalisés afin de corroborer ou non les choix et hypothèses présentés dans la partie précédente.

# Chapitre 8

## Les sensibilités du modèle de taux

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Modification de la surface de prix</b>	<b>72</b>
<b>8.2</b>	<b>Changement de distance</b>	<b>74</b>
<b>8.3</b>	<b>Changement d'erreur</b>	<b>76</b>
<b>8.4</b>	<b>Algorithmes alternatifs</b>	<b>78</b>
<b>8.5</b>	<b>D'autres tests de sensibilité</b>	<b>79</b>
	Tests de robustesse temporelle	79
	Convention de récupération des volatilités implicites	79
	Détermination de poids spécifiques	79

---

Ce chapitre présente l'analyse des résultats du modèle de taux G2++ qui a été implémenté. Les tests de sensibilité opérés portent sur le choix de la surface de prix pour calibrer, les effets d'un changement d'erreur ou de distance, et l'utilisation d'un autre algorithme d'optimisation.

### 8.1 Modification de la surface de prix

Le choix de l'échantillon utilisé pour calibrer est central dans l'étude. Pour mesurer les impacts quantitativement, il convient d'exécuter le modèle en modifiant les décisions précédentes.

Il apparaît pertinent de mesurer les impacts liés à l'utilisation de la surface la plus large possible. L'hypothèse de ne pas extrapoler la courbe des taux d'entrée est néanmoins conservée. Ainsi, la surface utilisée est celle présentée à la figure 7.3.

Après 20 lancements de l'algorithme sur des sets aléatoires, l'erreur minimale et le set associé obtenus sont :

Erreur relative moyenne		5,23 %		
$a$	$b$	$\sigma$	$\eta$	$\rho$
7,6%	0,2%	3,6%	0,2%	36,9%

TABLE 8.1 – Erreur relative moyenne minimale et set associé obtenus en calibrant sur les *swaptions* dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 30 ans

Deux éléments sont remarquables :

- La valeur de  $\rho$  est très écartée de sa valeur attendue proche de  $-1$ . Ceci est inhabituel et constitue un argument en défaveur de G2++. En effet, si les deux mouvements browniens sont corrélés positivement, alors la génération d'un unique aléa suffit pour capter les fluctuations des marchés.
- Les valeurs des paramètres  $b$  et  $\eta$ , liés au processus  $(y_t)_{t \geq 0}$ , sont respectivement très inférieures à celles de  $a$  et  $\sigma$  liés au processus  $(x_t)_{t \geq 0}$ . Ceci indique que le processus  $(y_t)_{t \geq 0}$  n'affecte que peu le modèle, ce qui renvoie également à la pertinence d'un modèle de taux à deux facteurs.

Les écarts entre les prix de marché et ceux de modèle sont les suivants :

		Ténoir								
		1	2	3	4	5	7	10	15	20
Maturité	0,25	10	-5	-1	0	1	1	-4	-11	-17
	0,5	5	-6	-2	0	1	-1	-6	-13	-18
	1	3	-1	2	3	3	0	-6	-13	-18
	2	-2	0	4	5	4	1	-4	-11	-17
	3	-5	-2	3	4	4	2	-2	-8	-14
	4	-6	-4	2	4	4	3	0	-6	-12
	5	-6	-5	1	4	5	4	2	-4	-9
	7	-1	-6	0	4	6	7	5	0	-6
	10	6	-6	0	4	7	9	8	4	-2
	15	-3	-2	3	6	8	10	10	7	
	20	-5	0	5	7	9	10	10		

TABLE 8.2 – Erreurs relatives arrondies au pourcentage près entre les prix de modèle et de marché en calibrant avec des *swaptions* dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 30 ans

Il apparaît que les plus grandes erreurs sont associées aux *swaptions* avec des maturités et/ou ténors longs, notamment pour ceux supérieurs à 10 ans. Il est remarquable que le modèle :

- sous-estime les prix des *swaptions* ayant des grands ténors (écarts négatifs importants).
- sur-estime les prix des *swaptions* ayant des grandes maturités (écarts positifs importants).

Cette difficulté à se rapprocher des prix de marché en élargissant l'échantillon était prévisible, notamment sur des longues maturités totales compte tenu des anticipations volatiles des investisseurs. Il n'est cependant pas aisé d'expliquer le changement du signe de l'erreur entre les grandes maturités et les grands ténors. Une explication pourrait être que les acteurs sont davantage prêts à investir dans des maturités longues (l'option est flexible donc attrayante dans un contexte volatil, ce qui crée une hausse des prix) que dans de longs *swaps* (qui contraignent les versements des flux futurs).

Une dernière remarque porte sur les erreurs des plus petits ténors (à 1 an) comparées à celles des plus petites maturités (à 0,25 an). Il apparaît que, sans prendre en compte les grands ténors  $\times$  maturités, le modèle se rapproche mieux des prix de marché pour les options à court terme que pour les *swaps* de courte durée.

Cette optimisation n'est pas satisfaisante : l'extension de l'échantillon cible complique l'explication des résultats, ce qui renforce le choix de calibrer sur des maturités totales comprises entre 1,25 an et 5 ans pour cette étude.

## 8.2 Changement de distance

Une autre approche pour mesurer l'importance des choix de calibrage est d'utiliser une distance différente. Ici, le moteur a été exécuté en utilisant la valeur absolue plutôt que la fonction carré.

La fonction objectif s'écrit alors, avec les notations de la partie 7.2 :

$$f^*(\theta) = \sum_{i \in I} \frac{|\Pi_i^{obs} - \Pi_i^{mod}(\theta)|}{\Pi_i^{obs}}$$

L'algorithme a été lancé pour 100 sets aléatoires différents, l'erreur relative moyenne minimale obtenue est :

Erreur relative moyenne		2,08 %		
$a$	$b$	$\sigma$	$\eta$	$\rho$
30,8%	24,9%	20,8%	22,4%	-99,3%

TABLE 8.3 – Erreur relative moyenne minimale et set associé obtenus en calibrant sur les *swaptions* dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans en modifiant la distance

Cette erreur est plus faible que celle obtenue au 7.2. Il semble donc pertinent de privilégier la valeur absolue comme distance.

Néanmoins, cette valeur n'a pas pu être obtenue une seconde fois compte tenu des arrondis causés par la génération de nombres aléatoires. Cela est causé par la grande sensibilité de l'algorithme aux valeurs d'entrée. En relançant ce dernier avec, en entrée, les valeurs des paramètres en sortie arrondis au centième de pourcentage près, l'erreur relative moyenne obtenue est proche de 6%. Cela est très éloigné de la valeur précédente et n'est pas satisfaisant.

De plus, il est remarquable que les valeurs obtenues pour les 5 paramètres sont atypiques :

- $\rho$  est proche de la valeur  $-1$ , ce qui indique que l'ajout d'un second facteur aléatoire n'est pas pertinent.
- Les termes de volatilité  $\sigma$  et  $\eta$  sont très élevés.

Il n'est pas souhaitable que la volatilité du modèle explose puisque cet effet impacterait également les trajectoires de taux simulés, et donc les montants de provisions. Cette séquence n'est pas étudiée davantage.

Parmi les 99 réalisations restantes, la seconde valeur minimale de l'erreur est de :

Erreur relative moyenne	2,14 %
-------------------------	--------

TABLE 8.4 – Seconde erreur relative moyenne minimale obtenue en calibrant sur les *swaptions* dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans en modifiant la distance

Cette valeur d'erreur relative moyenne, arrondie au centième de pourcent près, a été obtenue suite à cinq réalisations différentes. Cette fois, la réalisation de secondes optimisations (avec des sets initiaux égaux aux précédents sets de sorties) a livré des valeurs d'erreurs comprises entre 2,15% et 2,21%, soit très proches de 2,14%.

Les 5 sets de paramètres associés ne sont pas identiques : celui présenté ci-après possède le  $\rho$  le plus éloigné de -1 et les volatilités les plus faibles.

$a$	$b$	$\sigma$	$\eta$	$\rho$
57,2%	18,2%	3,6%	5,4%	-85,6%

TABLE 8.5 – Second set de paramètres optimal obtenu en calibrant avec des *swaptions* dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans en modifiant la distance

Ce set implique une erreur de 2,17%. Les valeurs sont cohérentes avec les anticipations.

En conclusion, l'utilisation de la valeur absolue comme distance a mis en lumière l'importante sensibilité de l'algorithme au set de paramètres initial, ainsi que la difficulté à résoudre de tels problèmes d'optimisation. Les résultats retenus sont cohérents et similaires à ceux obtenus en premier lieu en utilisant l'erreur quadratique. Néanmoins, malgré des valeurs très proches, la valeur absolue livre des résultats moins précis. La distance quadratique est préférée.

### 8.3 Changement d'erreur

En complément du changement de distance, il est étudié un changement d'erreur.

L'erreur relative ayant été retenue précédemment, ce paragraphe présente les résultats obtenus en implémentant l'erreur absolue.

La fonction objectif s'écrit alors, avec les notations de la partie 7.2 :

$$f^*(\theta) = \sum_{i \in I} \left( \prod_i^{obs} - \prod_i^{mod}(\theta) \right)^2$$

L'algorithme a été lancé pour 100 sets aléatoires différents, l'erreur relative moyenne minimale obtenue lors de 2 exécutions et les sets associés sont :

Erreur relative moyenne		2,28 %		
$a$	$b$	$\sigma$	$\eta$	$\rho$
21,6%	25,6%	21,9%	19,8%	-99,4%
24,8%	22,2%	30,9%	33,0%	-99,7%

TABLE 8.6 – Erreur relative moyenne minimale et sets associés obtenus en calibrant sur les *swaptions* dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans en modifiant le type d’erreur

Ces deux sets ne correspondent pas du tout aux anticipations sur les valeurs de paramètres. Ce phénomène est similaire à celui observé *supra* lors du changement de distance. La valeur d’erreur n’a pas pu être retrouvée en utilisant les sets de sorties comme entrées d’une nouvelle réalisation. Ce n’est pas satisfaisant. La seconde valeur minimale de l’erreur et le set associé sont :

Erreur relative moyenne		2,38 %		
$a$	$b$	$\sigma$	$\eta$	$\rho$
59,4%	15,5%	1,2%	4,3%	-98,5%

TABLE 8.7 – Seconde erreur relative moyenne minimale et set associé obtenus en calibrant sur les *swaptions* dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans en modifiant le type d’erreur

Le set de paramètres est cohérent. La valeur de l’erreur est acceptable mais supérieure à celle obtenue en utilisant l’erreur relative. De plus, il est à noter que la valeur obtenue avec le changement d’erreur est plus importante qu’avec le changement de distance.

**Remarque**

Dans la grande majorité des réalisations, l’erreur relative moyenne obtenue est proche de 2,60%. Cette valeur est presque tout le temps associée à des sets de paramètres dont la valeur de  $a$  atteint son seuil fixé à 10. Cela tend à conclure que l’utilisation de l’erreur absolue favorise la divergence lors de l’optimisation.

Ces résultats renforcent le choix d’utiliser l’erreur relative plutôt que l’erreur absolue.

## 8.4 Algorithmes alternatifs

Des tests ont été réalisés en utilisant l'algorithme de Levenberg-Marquardt plutôt que le L-BFGS-B. L'implémentation repose sur l'utilisation de la fonction `scipy.optimize.leastsquares` de la bibliothèque *Scipy*.

Cette méthode nécessite une durée plus longue pour l'exécution. Afin de la contrôler, il a été choisi de limiter l'algorithme à 1000 évaluations de la fonction objectif. Cette décision ne permet pas à l'algorithme d'atteindre la fin de sa recherche, mais elle est nécessaire pour répondre aux contraintes opérationnelles.

De plus, l'exécution prend en moyenne dix fois plus de temps que celle avec L-BFGS-B. De ce fait, l'algorithme a été lancé 20 fois.

L'erreur relative moyenne et le set associé sont :

Erreur relative moyenne		2,38 %		
$a$	$b$	$\sigma$	$\eta$	$\rho$
49,2%	22,1%	6,4%	7,6%	-92,5%

TABLE 8.8 – Erreur relative moyenne minimale et set associé obtenus en calibrant sur les *swaptions* dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans en utilisant l'algorithme de Levenberg-Marquardt

La valeur de l'erreur est identique à celle retenue pour la sensibilité précédente avec l'erreur absolue. De même, les valeurs des paramètres sont de mêmes ordres que ceux retenus précédemment. Ces valeurs ne sont pas aberrantes bien que l'algorithme ait été stoppé avant la fin de son exécution.

Néanmoins, les autres réalisations livrent des résultats très volatils :

- Les valeurs des erreurs évoluent entre 2,55% et 41,57%.
- Sur les 19 autres séquences, 5 contiennent des atteintes de seuils.

Ces résultats ne sont pas satisfaisants.

L'algorithme de Levenberg-Marquardt nécessite davantage de temps pour converger vers un minimum. Il ne permet pas d'obtenir des résultats convenables en répondant à la contrainte de durée d'exécution.



## 8.5 D'autres tests de sensibilité

D'autres tests de sensibilités sont pertinents pour mesurer l'influence des choix de calibrage.

### Tests de robustesse temporelle

Les tests de robustesse temporelle mesurent la capacité d'adaptation du modèle à d'autres dates. L'objectif est d'observer les conséquences des changements structurels et conjoncturels sur les valeurs des paramètres et les niveaux d'erreurs. Ce test est particulièrement pertinent dans le contexte actuel de remontée des taux : il est souhaitable que le modèle puisse s'adapter à d'autres environnements de marché.

### Convention de récupération des volatilités implicites

Il a été choisi d'utiliser le modèle de Bachelier plutôt que le modèle de Black pour récupérer les volatilités implicites des *swaptions*. Puisque les taux actuels permettent d'exploiter le modèle log-normal, il serait intéressant de choisir des prix avec cette convention et d'analyser les potentielles différences en sortie du calibrage.

### Détermination de poids spécifiques

Il a été choisi au 7.2.2 d'utiliser des poids qui ne sur-pondèrent aucun produit. Ce choix peut être remis en cause. En effet, il apparaît pertinent de pondérer davantage les maturités les plus présentes dans le portefeuille, au détriment des autres. Néanmoins, cet argument est à nuancer puisque le modèle de taux choisi n'a pas vocation à être revu très régulièrement. Les pondérations ne pourront donc pas être fixées arbitrairement à un instant donné, mais devront évoluer en fonction du portefeuille.

De plus, ce test n'est pas mis en place dans cette étude puisque la décision a été prise de ne considérer qu'un échantillon restreint du portefeuille.

**Ces tests représentent des ouvertures possibles à cette étude.**

# Conclusion

L'objectif de cette étude est la construction d'un modèle de taux dans le cadre du calcul de provisions CVA. L'enjeu consiste en l'analyse quantitative des impacts des choix de calibrage sur les résultats.

Le modèle de taux retenu est le modèle gaussien à deux facteurs G2++. Son choix est motivé par les capacités limitées des modèles à un facteur et la trop grande complexité des modèles plus sophistiqués. Il est nécessaire d'implémenter le modèle à l'aide de données de marché. Pour ce faire, une courbe de taux *swap* est utilisée afin de reproduire au mieux les prix d'un échantillon de *swaptions*.

L'optimisation numérique est réalisée avec l'algorithme L-BFGS-B. Il vise à déterminer, sous contraintes, les paramètres minimisant l'erreur quadratique relative entre les prix de modèle et les prix de marché.

Les résultats obtenus sont satisfaisants. En effet, un écart faible est observé avec les prix de marché. De plus, l'implémentation permet de retrouver exactement la courbe de taux initiale, ce qui est une des propriétés principales de G2++.

Des tests ont été réalisés pour mesurer la sensibilité du calibrage. Il apparaît que l'erreur globale est croissante avec la taille de l'échantillon cible, ce qui soutient l'utilisation d'une surface de prix réduite pour cette étude. En outre, les tests indiquent qu'il est préférable d'utiliser l'erreur relative à l'erreur absolue. En revanche, le choix de la distance n'est pas déterminant. La dernière analyse, exploitant l'algorithme de Levenberg-Marquardt, renvoie à l'arbitrage nécessaire entre précision souhaitée et contrainte opérationnelle de durée d'exécution.

Il est à noter que l'ensemble des conclusions de cette étude ne peuvent s'appliquer qu'aux données utilisées. Il convient de ne pas extrapoler les résultats à des marchés et dates différentes.

Afin de compléter cette étude, des analyses de sensibilité complémentaires sont

pertinentes à réaliser. Un test de robustesse temporelle pourrait être mis en place afin de vérifier la stabilité des résultats sur des marchés similaires ou encore d'analyser la dispersion des paramètres. Il serait également intéressant, dans un contexte de remontée des taux, de comparer le modèle de Bachelier avec celui de Black pour la récupération des volatilités implicites. Enfin, une modélisation plus fine des poids associés à chaque produit pourrait être étudiée afin d'inclure davantage la représentativité du portefeuille au sein du calibrage.

# Liste des figures

1	Courbe de taux euro <i>swap</i> au 30/11/2022 . . . . .	iv
2	Comparaison des déflateurs issus du calibrage de G2++ et de marché	vii
3	Euro swap interest rate curve on the 30/11/2022 . . . . .	x
4	Comparison of deflators from G2++ calibration and market . . . . .	xiii
2.1	Agrégation des provisions CVA . . . . .	17
4.1	Pyramide des contrôles . . . . .	29
7.1	Comparaison de la courbe de taux <i>swap</i> utilisée avec celle publiée par l'EIOPA au 30/11/2022 . . . . .	51
7.2	Courbe de taux euro <i>swap</i> au 30/11/2022 . . . . .	51
7.3	Surface des prix de marché des <i>swaptions</i> au 30/11/2022, en bps . .	57
7.4	Comparaison des déflateurs issus du calibrage de G2++ et des déflateurs de marché . . . . .	70

# Liste des tableaux

1	Set de paramètres optimal obtenu en calibrant avec des <i>swaptions</i> dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans . . . . .	vii
2	Optimal set of parameters obtained by calibrating with swaptions of total maturity is between 1.25 and 5 years . . . . .	xii
1.1	Volume des échanges (en Mds €) sur les marchés dérivés en 2021 . . .	6
1.2	Volume des échanges (en Md €) sur les marchés dérivés de taux en 2021 . . . . .	11
7.1	Valeurs retenues pour les contraintes des paramètres de G2++ . . . .	63
7.2	Erreur relative moyenne sur les <i>swaptions</i> de l'échantillon de calibrage au 30/11/2022 . . . . .	68
7.3	Erreur relative entre les prix de marché et les prix théoriques, arrondie au pourcentage près pour chaque <i>swaption</i> de l'échantillon de calibrage . . . . .	68
7.4	Set de paramètres optimal obtenu en calibrant avec des <i>swaptions</i> dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans . . . . .	69
8.1	Erreur relative moyenne minimale et set associé obtenus en calibrant sur les <i>swaptions</i> dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 30 ans . . . . .	73
8.2	Erreurs relatives arrondies au pourcentage près entre les prix de modèle et de marché en calibrant avec des <i>swaptions</i> dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 30 ans . . . . .	73
8.3	Erreur relative moyenne minimale et set associé obtenus en calibrant sur les <i>swaptions</i> dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans en modifiant la distance . . . . .	75
8.4	Seconde erreur relative moyenne minimale obtenue en calibrant sur les <i>swaptions</i> dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans en modifiant la distance . . . . .	75

8.5	Second set de paramètres optimal obtenu en calibrant avec des <i>swaptions</i> dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans en modifiant la distance . . . . .	76
8.6	Erreur relative moyenne minimale et sets associés obtenus en calibrant sur les <i>swaptions</i> dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans en modifiant le type d'erreur . . . . .	77
8.7	Seconde erreur relative moyenne minimale et set associé obtenus en calibrant sur les <i>swaptions</i> dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans en modifiant le type d'erreur . . . . .	77
8.8	Erreur relative moyenne minimale et set associé obtenus en calibrant sur les <i>swaptions</i> dont la maturité totale est comprise entre 1,25 an et 5 ans en utilisant l'algorithme de Levenberg-Marquardt . . . . .	78

# Bibliographie

- [1] Mathieu Le Bellac et ARNAUD VIRICEL. *Mathématiques des marchés financiers*. français. EDP Sciences Les Ulis, 2012.
- [2] Antoine BURG. *Etude de la calibration du modèle de taux LMM+*. français. 2018. URL : <https://www.institutdesactuaires.com/se-documenter/memoires/memoires-d-actuariat-4651?id=c16be0e568b516504d48c75715c18b12>.
- [3] *Cartographie des marchés et des risques 2022*. Rapp. tech. Autorité des Marchés Financiers (AMF), 2022. URL : <https://www.amf-france.org/fr/actualites-publications/publications/rapports-etudes-et-analyses/cartographie-2022-des-marches-et-des-risques>.
- [4] Areski COUSIN. “Support de cours DUAS3 - Modèles financiers en assurance”. In : (2022).
- [5] Alexandre DELACROIX. *Evaluation du risque de contrepartie Credit Valuation Adjustment*. français. 2016. URL : <https://www.institutdesactuaires.com/se-documenter/memoires/memoires-d-actuariat-4651?id=83687ea6addda8197d285cfde0cfeecc>.
- [6] Damiano Brigo et FABIO MERCURIO. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. anglais. 2nd édition. Springer, 2006. ISBN : 3-540-41772-9.
- [7] Eléonore HAGUET. *Calibrage d'un modèle de taux gaussien à 2 facteurs*. français. 2012. URL : [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/769998e0a65ea348c1257052003eb94f/0a33bd1dc884f52bc1257b24003a\\$FILE/Rapport\\_stage\\_HAGUET\\_El%C3%A9onore.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/769998e0a65ea348c1257052003eb94f/0a33bd1dc884f52bc1257b24003a$FILE/Rapport_stage_HAGUET_El%C3%A9onore.pdf).
- [8] John HULL. *Options, futures et autres actifs dérivés*. français. Trad. par Patrick ROGER. 10ème édition. Pearson, 2017. ISBN : 9782326001565.
- [9] Wadie JOUILI. *La modélisation du Wrong Way Risk dans le calcul de la CVA*. français. 2015. URL : <https://www.institutdesactuaires.com/se-documenter/memoires/memoires-d-actuariat-4651?id=d63d63bce4ebcddb64342c9c2a7a>.

- [10] *Loi-type sur la compensation et Guide ISDA 2018*. Rapp. tech. International Swaps et Derivatives Association (ISDA), 2018. URL : <https://www.isda.org/a/svQTE/2018-ISDA-Model-Netting-Act-and-Guide-French-Translation.pdf>.
- [11] Amélie MOURENS et MICHAËL DONIO ET CO. *Document d'Orientation - Les Générateurs de scénarios économiques*. Rapp. tech. Institut des Actuaires, 2018. URL : [https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news\\_link=2018162907\\_document-d-orientation-gse-institut-des-actuaires-nov-2018-002.pdf&fg=1](https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news_link=2018162907_document-d-orientation-gse-institut-des-actuaires-nov-2018-002.pdf&fg=1).
- [12] Valentine POUTÇOU. *Calibrage et impacts du modèle G2++ sur le bilan d'une société d'assurance vie*. français. 2022. URL : <https://www.institutdesactuaires.com/se-documenter/memoires/memoires-d-actuariat-4651?id=2d7f7cb56b25fb6b25a987702f3fd7c2>.
- [13] David F. SCHRAGER et Antoon A.J. PELSSER. “Pricing Swaptions and Coupon Bond Options in Affine Term Structure Models”. In : *Mathematical Finance* (2004). URL : [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=630402](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=630402).
- [14] *Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures*. Rapp. tech. European Insurance et Occupational Pensions Authority (EIOPA), 2022. URL : <https://www.eiopa.europa.eu/system/files/2022-09/eiopa-bos-22-409-technical-documentation.pdf>.
- [15] Oldrich VASICEK. “An equilibrium characterization of the term structure”. In : *Journal of Financial Economics* 5.2 (1977), p. 177-188. ISSN : 0304-405X. DOI : [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(77\)90016-2](https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304405X77900162>.



# Annexe

## A. Processus d'Orstein-Uhlenbeck

Un processus d'Orstein-Uhlenbeck est un processus stochastique permettant de modéliser une variable qui converge vers sa moyenne. Ces processus ont été découverts dans les années 1930 par Leonard Ornstein et George Uhlenbeck. Ils sont très utilisés en finance, particulièrement pour l'étude des taux d'intérêt.

Ils sont décrits par l'équation suivante :

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$$

Dans le contexte de modélisation des taux d'intérêt :

- $X_t$  est le taux qui évolue dans le temps.
- $\theta$  représente la vitesse de retour à la moyenne de  $X_t$ .
- $\mu$  représente la moyenne de  $X_t$ .
- $\sigma$  est l'écart type du processus, représentant la volatilité.
- $W_t$  est un mouvement brownien standard.

Ces processus permettent de capter la volatilité des taux d'intérêt à travers la réversion à la moyenne. Ils sont utilisés dans la caractérisation du modèle G2++.