



**Mémoire présenté pour la validation de la Formation
« Certificat d'Expertise Actuarielle »
de l'Institut du Risk Management
et l'admission à l'Institut des actuaires
le**

Par : Gautier Weber

Titre : Calibration des USP et leurs impacts sur la solvabilité d'une captive de réassurance non-vie

Confidentialité : ☒ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des
actuares :

Membres présents du jury de l'Institut du Risk
Management :

Secrétariat :

Bibliothèque :

Entreprise : KPMG Tax and Advisory S.à r.l.
39, Avenue John F. Kennedy
Nom : KPMG Luxembourg-1855 Luxembourg

Signature et Cachet : *Géraldine HASLER*
Head of People and Culture

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Bertrand Segui

Signature : *Bertrand Segui*

Invité :

Nom : _____

Signature : _____

**Autorisation de publication et de mise en
ligne sur un site de diffusion de documents
actuariels**

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Géraldine HASLER
Head of People and Culture

10 *[Signature]*

Signature(s) du candidat(s)

[Signature]

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à **Bertrand Segui**, mon tuteur en entreprise, pour son accompagnement attentif, la richesse de nos échanges et la qualité de ses conseils tout au long de cette expérience. Son expertise, sa disponibilité et sa rigueur m'ont permis de développer une réflexion structurée et de mener à bien la rédaction de ce mémoire dans les meilleures conditions. Son regard professionnel m'a été d'une grande aide pour progresser tant sur le plan technique que méthodologique.

Je remercie également **Imene Seghouani**, ma tutrice académique, pour sa bienveillance, sa réactivité et ses orientations précieuses. Ses retours constructifs et son regard critique ont largement contribué à renforcer la pertinence de mon travail.

Mes remerciements s'adressent aussi à **l'ensemble du corps enseignant du Centre d'Expertise Actuarielle**, dont la qualité des enseignements, l'implication et la passion pour la discipline ont constitué un socle fondamental dans mon parcours de formation.

Je souhaite également remercier chaleureusement **mes collègues de KPMG Luxembourg**, et en particulier mon équipe, pour leur accueil, leur soutien au quotidien, ainsi que pour la richesse de nos échanges professionnels. L'environnement stimulant et bienveillant dans lequel j'ai évolué a grandement nourri ma réflexion et mon apprentissage.

Enfin, je voudrais adresser un remerciement tout particulier à **mes parents** et à **ma compagne**, pour leur soutien indéfectible, leur patience et leur présence constante, sans lesquels ce projet n'aurait pas pu voir le jour. Leur confiance et leur encouragement ont été pour moi une source essentielle de motivation tout au long de cette aventure.

Abréviations et anglicismes

CAA : Commissariat aux Assurances

PPD : Pertes Pécuniaires Diverses

MCR : Minimum Capital Requirement

PFS : Provision pour Fluctuation de Sinistralité

SCR : Solvency Capital Requirement

BE : Best Estimate / Meilleur estimation

EIOPA : European Insurance and Occupational Pensions Authority

IBNR : Incurred But Not Reported

GRH : Groupe de Risques Homogènes

LDF : Loss Development Factor / Facteur de développement

MAT : Marine, Aviation, Transport

LoB : Line of Business / Ligne d'activité

ORSA : Own Risk and Solvency Assessment / Evaluation interne des risques et de la solvabilité

USP : Undertaking Specific Parameters / Paramètres spécifiques à l'entreprise

NP : Non Proportionnelle

RM : Risk Margin / Marge de risque

QRT : Quantitatives Reporting Templates

SFCR : Solvency and Financial Conditions Report / Rapport sur la solvabilité et la situation financière

RSR : Regular Supervisory Report / Rapport régulier au contrôleur

Résumé

Depuis l'entrée en vigueur de la directive européenne Solvabilité II en 2016, les organismes d'assurance et de réassurance sont tenus de calculer leur Capital de Solvabilité Requis (SCR) conformément aux dispositions du règlement délégué (UE) 2015/35. Dans le secteur des captives, le recours à des modèles internes, qu'ils soient partiels ou complets, demeure marginal. C'est donc majoritairement la Formule Standard qui est utilisée pour l'évaluation des exigences réglementaires.

Toutefois, le calibrage de cette Formule Standard, en particulier les paramètres de volatilité relatifs aux risques de primes et de provisions, a été effectué à l'échelle paneuropéenne. Il en résulte que ces paramètres ne reflètent pas toujours de manière adéquate les spécificités du profil de risque de certaines entités, notamment les captives dont les portefeuilles sont souvent très spécifiques voir atypiques.

Dans ce contexte, la directive permet aux assureurs d'introduire des paramètres spécifiques à l'entreprise (Undertaking Specific Parameters, alias USP) dans les calculs du premier et du deuxième pilier. Ces USP offrent une alternative intermédiaire entre l'approche standardisée et le modèle interne complet, permettant une évaluation plus fidèle du risque propre à l'entreprise tout en évitant la complexité et la charge de travail inhérentes à l'élaboration d'un modèle interne.

Le présent mémoire porte sur l'implémentation des USP dans une captive de réassurance non-vie basée au Grand-Duché de Luxembourg. Cette entité, filiale d'un groupe industriel actif dans le transport maritime international, présente un profil de risque déviant sensiblement de la moyenne européenne ayant servi de référence à la Formule Standard. Une analyse préliminaire du SCR montre que les modules relatifs aux risques de primes et de provisions constituent les principaux contributeurs à la consommation de capital. La mise en œuvre des USP s'inscrit dans la volonté des actionnaires d'améliorer la compréhension des risques souscrits, de quantifier leurs volatilités propres sur le risque de primes et de réserve et les impacts sur les besoins en SCR, et potentiellement d'optimiser et de libérer une partie des fonds propres de la captive de réassurance vers la société mère du groupe.

Ce mémoire est structuré en quatre parties. La première décrit le paysage des captives. La deuxième présente les fondements de la directive Solvabilité II et détaille la structure du SCR, en se focalisant sur les modules de primes et de réserves. La troisième partie expose les méthodes de calcul des USP prévues par les Actes Délégués (2015/35/UE), en lien avec le profil de risque de la captive étudiée. Enfin, la quatrième partie est consacrée au calibrage des USP par ligne d'activité (LoB), avec une attention particulière portée à la validité des hypothèses méthodologiques sous-jacentes et à leur robustesse statistique.

Il convient de souligner que la nature même des risques assurés dans les captives, souvent liés à des expositions non assurables sur le marché traditionnel, introduit une volatilité élevée qui rend l'application rigoureuse des USP plus complexe. Ces risques compromettent notamment la vérifiabilité empirique des hypothèses, ce qui pose des défis spécifiques à la validation des méthodes prévues par les Actes délégués. Ce constat appelle donc à une interprétation prudente des résultats présentés.

Mots-clefs : Solvabilité II, Capital de Solvabilité Requis (SCR), ORSA (Own Risk and Solvency Assessment), Paramètres propres (USP), Risque de primes et réserve, Formule Standard, Captive de réassurance, Qualité des données, Ligne d'activité (LoB)

Abstract

Since the European Solvency II Directive came into force in 2016, insurance and reinsurance undertaking have been required to calculate their Solvency Capital Requirement (SCR) in accordance with the Delegated Regulation (EU) 2015/35. In the captive sector, the use of internal models, whether partial or full, remains marginal. Consequently, the Standard Formula is predominantly used for evaluating regulatory requirements.

However, the calibration of this Standard Formula, particularly the volatility parameters for premium and reserve risks, was conducted at a pan-European level. As a result, these parameters do not always adequately reflect the specific risk profiles of certain entities, especially captives whose portfolios are often highly specialized or even atypical.

In the context, the Directive allows insurer to introduce Undertaking Specific Parameters (USP) into their Pillar 1 and Pillar 2 calculations. These USP offer an intermediate alternative between the standardized approach and a full internal model, enabling a more accurate assessment of the company's specific risk while avoiding the complexity and workload inherent in developing a full internal model.

This thesis focuses on the implementation of USP in a non-life reinsurance captive based in the Grand Duchy of Luxembourg. This entity, a subsidiary of an industrial group active in international maritime transport, exhibits a risk profile that significantly deviates from the European average used as reference the Standard Formula. A preliminary analysis of the SCR indicates that the modules relate to premium and reserve risk are the main contributors to capital consumption. The implementation of the USP is part of the shareholder's strategy to improve the understanding of underwritten risks, quantify their specific volatility on premium and reserve risks. This initiative aims to potentially optimize and release a portion of the reinsurance captive's capital to the group's parent company.

This thesis is structured into four parts. The first part describes the captive landscape. The second presents the foundations of the Solvency II Directive and details the SCR structure, focusing on the premium and reserve modules. The third part outlines the USP calculations methods provided by the Delegated Acts (2015/35/UE), in relation to the studied captive's risk profile. Finally, the fourth part is dedicated to the calibration of USP by Line of Business (LoB), with particular attention to the validity of the underlying methodological assumptions and their statistical robustness.

It's important to emphasize that the nature of risks insured by captives, often linked to exposures not insurable in the traditional market, introduces high volatility. This makes the rigorous application of USP more complex. Such risk particularly compromises the empirical verifiability of assumptions, posing specific challenges to the validation of methods prescribed by the Delegated Acts. This observation therefore calls for a prudent interpretation of the presented results.

Key Words: Solvency II, Solvency Capital Requirement (SCR), ORSA (Own Risk and Solvency Assessment), Undertaking Specific Parameters (USP), Risk of premium and reserve, Standard Formula, Reinsurance captive, Data quality, Line of Business (LoB)

Synthèse

Avec l'entrée en vigueur de la directive européenne Solvabilité II en 2016, les organismes d'assurance et de réassurance sont tenus de calculer leurs besoins en Capital de Solvabilité Requis (SCR). Le SCR représente le capital cible pour absorber des pertes inattendues dans 99,5 % des cas sur un horizon d'un an. Plusieurs approches sont possibles, telles que la formule standard (simplifiée, sans ou avec paramètres spécifiques) ou par un modèle interne (partiel ou complet). Ces méthodes permettent une granularité croissante dans l'évaluation des risques, offrant ainsi la possibilité de s'adapter au profil spécifique de l'entreprise tout en respectant le principe de proportionnalité.

Le processus de calibration de la Formule Standard de Solvabilité II a permis d'établir des paramètres, notamment les paramètres de volatilité liés au risque de primes et réserve. Il en résulte que cette calibration peut ne pas toujours refléter adéquatement le profil de risque et les structures de rétrocession des risques propre à chaque entité. Cela est particulièrement vrai pour les captives de réassurance, dont les portefeuilles de risques sont très spécifiques et ne s'alignent pas avec les calibrages de la formule standard.

Une entreprise captive est une entité détenue par un groupe industriel ou commercial mettant en place un mécanisme d'auto-assurance. Elle couvre des risques trop coûteux, mal couverts ou non-assurable par le marché traditionnel, que ce soit pour des raisons de coût ou de disponibilité. Elle s'intègre ainsi dans une stratégie globale de gestion des risques de son propriétaire, visant à en optimiser le pilotage, notamment par une meilleure maîtrise des primes, des franchises et des niveaux de couverture. L'essence même d'une captive réside dans sa vocation exclusive à couvrir les risques propres du groupe auquel elle appartient. Contrairement aux assureurs classiques, elle ne mutualise pas les risques entre assurés tiers, mais construit des solutions de couverture sur mesure, adaptées aux spécificités opérationnelles de son propriétaire. Elle bénéficie en outre d'une plus grande flexibilité en matière de tarification. Dans un contexte de marché difficile, caractérisé par une hausse significative des primes et une réduction de la capacité offerte par les assureurs traditionnels, les captives s'affirment comme des leviers efficaces de transfert alternatif des risques.

La captive de réassurance analysée dans ce mémoire couvre les risques d'un groupe industriel opérant dans le transport maritime international depuis la Belgique et les Pays-Bas. Engagé dans des opérations offshores complexes, particulièrement la construction d'éoliennes en mer, ainsi que diverses activités connexes de logistique et de transit. La captive de réassurance souscrit des programmes adaptés aux spécificités des projets éoliens offshores, structurés comme suit :

- **Réassurance proportionnelle en acceptation** : Deux traités couvrant les risques maritime, aériens, de transport et les pécuniaire diverses y afférente.
- **Réassurance non proportionnelle en acceptation** : Deux traités dédiés aux risques de dommages et aux risques maritime, aériens et de transport.
- **Rétrocession multilignes** : Un traité unique s'appliquant aux traités non proportionnelle dommages et maritime, aérienne et de transport.

Le risque de souscription non-vie représente une part prépondérante du SCR de base (BSCR) de l'entité captive de réassurance étudiée à hauteur de 75%. Ce risque se décompose en module de risques de primes et réserve (60%) et un risque de catastrophe (40%). La faible diversification du profil de risque de l'entité s'explique par la nature spécifique et la concentration des expositions au risque du groupe propriétaire. Il est à noter que le risque de primes évalue le risque de sous-tarification, et le risque de réserve concerne l'évaluation du risque de sous-provisionnement des engagements en portefeuille.

La captive considérée dans le cadre de ce mémoire, s'interroge sur l'écart de son profil de risque par rapport aux hypothèses qui sous-tendent au capital de solvabilité requis de la formule standard, et plus particulièrement au niveau de son **SCR de primes et réserve**. Pour améliorer la compréhension et la quantification des risques de primes et de réserves, une analyse approfondie des **paramètre propres (USP)** est effectuée. Cette démarche vise à évaluer leur impact sur le besoin en SCR et, potentiellement, à optimiser et à libérer une partie des fonds propres de la captive vers la société mère.

Les USP permettent d'évaluer et de challenger le profil de risque par rapport à la Formule Standard, sans engendrer une charge de travail aussi importante qu'un modèle interne, et ce, sur les données propres à l'entreprise. Les méthodes sont définies et explicitées dans les **Actes Délégués (2015/35/CE)** pour déterminer le niveau de fonds propres pour couvrir le risque à horizon 1 an.

L'objectif principal de ce mémoire est de calibrer, tester et analyser les différentes méthodes de calcul des USP proposées par les Actes Délégués assujettis à la captive de réassurance non-vie luxembourgeoise en question, en tenant compte des enjeux liés à la qualité des données, à la validation et la robustesse des hypothèses sous-jacentes, ainsi qu'à la capacité de ces méthodes à refléter plus fidèlement le profil de risque propre à la structure.

La méthode d'évaluation du **risque de primes** est l'approche **log-normale** du risque de primes par maximum de vraisemblance. Elle consiste à estimer l'erreur de tarification observée sur l'historique à partir de l'analyse des ratios de sinistres sur primes acquises sur un horizon d'un an. Les hypothèses clés de cette méthode sont la proportionnalité des pertes cumulées aux primes acquises sur an, et la distribution Log-Normale de ces pertes. Des tests statistiques (*Student* sur les coefficients des régressions linéaires, *Shapiro Wilk*) et des analyses graphiques (QQ-plot, graphique des résidus) sont notamment réalisés pour valider les hypothèses de la méthode.

La méthode de la **réassurance non proportionnelle**, fondée sur l'estimation d'un facteur d'ajustement pour la récession des risques non proportionnel. Cette méthode suppose que les montants des sinistres à l'ultime suivent une distribution Log-Normale y compris dans la queue de distribution. Des tests statistiques de *Shapiro Wilk* et des analyses graphiques avec la méthode du QQ-plot sont réalisés pour valider les hypothèses de la méthode.

Il existe deux méthodes pour évaluer le **risque de réserve**. La première est la méthode log-normale du risque de réserves, similaire à la méthode proposée par les Actes Délégués pour le risque de primes. La distinction majeure réside dans les volumes sous risques et à certaines notations. Cette méthode analyse les boni/mali pour estimer l'erreur de prédiction des sinistres historiques sur un horizon d'un an. La procédure de validation des hypothèses est similaire à la méthode de calibrage du risque de primes.

La seconde méthode du risque de réserve, est basée sur l'estimation de la volatilité du risque de réserve par la **méthode de Merz et Wüthrich** appliqué aux triangles de paiements, permet d'estimer la volatilité des provisions Best Estimate à horizon 1 an. Les fondements de cette méthode résident dans la méthode déterministe de *Chain-Ladder* et dans la vision stochastique introduite par *Mack* dans les années 1990. La méthode de Merz-Wüthrich repose sur trois hypothèses principales. L'existence d'un facteur de développement, vérifié graphiquement et par un test statistique de *Student* sur les coefficients de la régression linéaire. La deuxième hypothèse est l'indépendance des années de survénance. Sa vérification est menée par une analyse graphique des facteurs individuels de développement en fonction des années de survénance, complétée par un test de détection d'effet diagonal. Un test statistique de tendance entre les années de survénance et les coefficients de passage, ainsi qu'un test statistique de corrélation linéaire entre les vecteurs de passage de coefficients individuels. La troisième hypothèse de la méthode est la présence d'un facteur de variance, vérifié par une étude graphique des résidus en fonction des paiements pour confirmer le caractère aléatoire des résidus de *Pearson*.

Pour les **traités de réassurance proportionnelle**, le risque de primes est évalué par la méthode Log-Normale, tandis que pour le risque de réserve, les méthodes Log-Normale et de Merz-Wüthrich sont mise en œuvre.

Les **traités de réassurance non proportionnelle**, sont analysés uniquement par la méthode dédiée à la réassurance non proportionnelle. Ce choix est justifié par la nature volatile, le caractère atypique et la faible fréquence des risques couverts par ces traités de réassurance.

Une phase de retraitement des données est essentielle pour la mise en œuvre des USP. L'historique des sinistres et des primes, couvrant la période 2015-2024, est disponible. Les sinistres à charge de la captive sont à développement court et se clôturant après trois années. Les primes acquises par année de souscription correspondent aux primes comptables à la date de clôture annuelle des états financiers. Grâce

à la stabilité et au non-déclenchement du programme de rétrocession non-proportionnelle multilignes, les provisions pour sinistres brutes et nettes (comptables et Best Estimate) sont équivalentes.

La disponibilité des Best Estimate historiques, conformes à Solvabilité II, a simplifié l'application de la méthode « as-if » sur la base de données et le recalcul des données de sinistres. Cette approche a impliqué des retraitements spécifiques des frais de gestion, des franchises locales et de la rétention par sinistre afin de modéliser le risque des 12 prochains mois. Les critères de la qualité des données sont respectés, elles sont considérées exhaustives, exactes et appropriées.

Les résultats des calibrages des USP sont présentés ci-dessous, par méthode par ligne d'activité :

Risque	Méthode	MAT Proportionnelle	PPD Proportionnelle	Dommages Non Proportionnelle	MAT Non Proportionnelle
Risque de primes	Log-Normale	40.56%	5.19%	Non applicable	Non applicable
	Réassurance non proportionnelle	Non applicable	Non applicable	100.00%	94.49%
Risque de réserve	Log-Normale	29.38%	37.87%	Non applicable	Non applicable
	Triangle Merz-Wüthrich	56.81%	15.06%	Non applicable	Non applicable

La validation des hypothèses présente plusieurs faiblesses notables. Premièrement les tests statistiques sont effectués sur un nombre limité de données, ce qui augmente le risque d'erreur de Type I et la fiabilité des résultats. Deuxièmement, les tests statistiques (*Shapiro-Wilk*, *Durbin Watson* etc.) se montrent sensibles aux valeurs aberrantes. Enfin, les données de la captive sont volatiles et peu granulaires, ce qui combiné aux défis de la qualité des données rend la validation des hypothèses méthodologiques complexe.

La validation des hypothèses méthodologiques n'est globalement pas satisfaisante. Cette difficulté tient à la nature spécifique des risques assurés par la captive de réassurance, qui proviennent d'exposition non assurables sur le marché traditionnel. Leur volatilité intrinsèque rend l'application rigoureuse des USP complexe. Cette volatilité des données de sinistre compromet la vérifiabilité des hypothèses et posant des défis significatifs à la validation des méthodes prévues par les Actes Délégués. Ce constat appelle donc à une interprétation prudente des résultats présentés.

Les résultats ci-dessous présentent les calibrages des USP sur l'écart-type du risque de primes et réserve, le SCR de primes et réserve, le SCR total et le taux de couverture du SCR :

	Ecart-type du risque de primes et réserve	SCR Primes et réserve	SCR	Ratio de couverture du SCR
Formule Standard	10.05%	4 982 861	11 899 715	153.82%
Avec USP sélectionnés	31.15%	15 446 203	19 853 456	92.20%

L'intégration des USP retenus par méthode se traduit par une **augmentation significative de l'écart-type du risque de primes et réserve de 10.05% à 31.15%**. En conséquence, le **ratio de couverture du SCR** diminue de 61.62% pour atteindre **92.20%**, ce qui est inférieur au minimum réglementaire de 100%.

Les résultats obtenus à partir du calibrage des USP sur les données propres à la captive font apparaître une augmentation significative du SCR par rapport aux estimations issues de la Formule Standard. Cela suggère que le profil de risque de l'entité se situe au-delà des hypothèses de marché implicites dans la calibration standard, justifiant pleinement le recours à une approche sur mesure.

La mise en place des USP pour une captive de réassurance est confrontée à plusieurs défis majeurs. Le portefeuille de risque est souvent peu diversifié, concentré sur les risques du groupe propriétaire, exposant la captive à des risques uniques difficiles à assurer et à tarifier. L'influence du groupe propriétaire est

également un défi supplémentaire, en effet, les USP doivent s'aligner sur la stratégie et toute modification d'activité (expansion géographique, nouveaux produits etc.) impacte directement le profil de risque. Enfin, un aléa moral potentiel peut surgir, incitant le groupe à transférer des risques de mauvaise qualité à la captive.

De plus, les données internes sont limitées et l'absence de données de marché comparables ainsi qu'une granularité souvent insuffisante par ligne d'activité plutôt que par sous-garantie, compliquant la modélisation des risques.

L'adoption des UPS est plus pertinente lorsque les risques sont moins volatiles. Un modèle semi-interne ou interne devient envisageable si la captive est de grande taille, avec un portefeuille de risque diversifié et peu complexes. Idéalement, la captive gérerait des risques à forte fréquence et à faible sévérité, comme la flotte automobile du groupe ou la responsabilité civile.

Synthesis

With the entry into force of the European Solvency II Directive in 2016, insurance and reinsurance undertakings are required to calculate their Solvency Capital Requirement (SCR). The SCR represents the target capital designed to absorb unexpected losses with a 99.5% confidence level over a one-year horizon. Several approaches are possible, such as the Standard Formula (simplified, with or without specific parameters) or an internal model (partial or full). These methods allow for increasing granularity in risk assessment, thereby offering the flexibility to adapt to the specific risk profile of the undertaking while adhering to the proportionality principle.

The calibration process for the Solvency II Standard Formula established parameters notably those related to premium and reserve risk volatility. Consequently, this calibration may not always adequately reflect the risk profile and risk transfer structures specific to each entity. This is particularly true for reinsurance captives, whose risk portfolios are often highly specific and not align with the default calibrations of the Standard Formula.

A captive undertaking is an entity owned by an industrial or commercial group that implements a self-insurance mechanism. It covers risk that are too costly, poorly covered, or uninsurable by the traditional market, whether for reasons of cost or availability. It thus integrates into its owner's global risk management strategy, aiming to optimize risk control, particularly through better mastery of premiums, deductibles, and coverage levels. The essence of captive lies in its exclusive purpose: to cover the specific risk of its parent group. Unlike conventional insurers, it does not mutualize risk among third-party policyholders but builds tailor-made coverage solutions adapted to its owner's operational specificities. It also benefits from greater flexibility in pricing. In a challenging market context, captives are asserting themselves as effective levers for alternative risk transfer.

The reinsurance captive analyzed in this thesis covers the risks of an industrial group operating in international maritime transport from Belgium and the Netherlands. This group is involved in complex offshore operations, particularly the construction of offshore wind turbines, as well as various related logistics and transit activities. The reinsurance captive underwrites programs adapted to the specificities of offshore wind projects, structured as follows:

- **Proportional Reinsurance (Inward):** Two treaties covering marine, aviation, and transport risks, and related miscellaneous financial losses.
- **Non-Proportional Reinsurance (Inward):** Two treaties dedicated to property risks and marine, aviation, and transport risks.
- **Multi-Line Retrocession:** A single treaty applying to both non-proportional property and marine, aviation and transport treaties.

Non-life underwriting risk represents a predominant share, amounting to 75% of the Basic Solvency Capital Requirement (BSCR) for the studied reinsurance captive entity. The risk is broken down into a premium and reserve risk module (60%), and a catastrophe risk module (40%). The limited diversification of the entity's risk profile stems from the specific nature and concentrated risk exposures of the parent groups. It should be noted that the premium risk assesses the risk of underpricing, while reserve risk concerns the assessment of under-reserving for in-force commitments.

The captive considered in this thesis questions the deviation of its risk profile from the assumptions underlying the Solvency Capital Requirements of the Standard Formula, particularly regarding its **premium and reserve SCR**. To improve the understanding and quantification of premium and reserve risks, a thorough analysis of **Undertaking Specific Parameters (USP)** is conducted. This approach aims to evaluate their impact on the SCR and, potentially, to optimize and release a portion of the captive's own funds to the parents' company.

USPs allow for the assessment and challenging of the risk profile against the Standard Formula, without generating a workload as significant as an internal model, and this, based on the undertaking's own data.

The methods are defined and explained in the **Delegated Acts (2015/35/CE)** to determine the level of own funds required to cover risk over a one-year horizon.

The main objective of this thesis is to calibrate, test, and analyze the various USP calculation methods proposed by Delegated Acts applicable to the specific Luxembourgish non-life reinsurance captive, considering the challenges related to data quality, the validation and robustness of underlying assumptions, and the capacity of these methods to reflect the structure's own profile more accurately.

The method used for assessing **premium risk** is the **log-normal** approach by maximum likelihood. It consists of estimating the observed pricing error from historical data by analyzing loss-to-earned premium ratios over a one-year horizon. The key assumptions of this method are the proportionality of cumulative losses to earned premiums over one year, and the log-normal distribution of these losses. Statistical tests (*Student's t-test* on linear regression coefficients, *Shapiro Wilk*) and graphical analyses (QQ-plot, residual plot) are notably performed to validate the method's assumptions.

The **non-proportional reinsurance** method is based on the estimation of an adjustment factor for non-proportional risk retrocession. This method assumes that ultimate loss amount follows a log-normal distribution, including in the tail of the distribution. *Shapiro Wilk* statistical test and graphical analyses using the QQ-plot method are performed to validate the method's assumptions.

There are two methods for evaluating **reserve risk**. The first is the **log-normal** method for reserve risk, which is like the method proposed by the Delegated Acts for premium risk. The main distinction lies in the volume under risk and certain notations. This method analyzes profit/loss adjustment to estimate the historical claims prediction error over a one-year horizon. The assumptions validation procedure is like the premium risk calibration method.

The second method for reserve risk is based on estimating the volatility of reserve risk using **the Merz and Wüthrich method**, applied to payment triangles, which allows for estimating the volatility of Best Estimate provisions over a one-year horizon. The foundations of this method lie in the deterministic *Chain-Ladder* method and the stochastic vision introduced by Mack in the 1990s. The *Merz and Wüthrich* method relies on three main assumptions. Firstly, the existence of a development factor verified graphically and by a *Student's t-test* on the linear regression coefficients. Secondly, the independence of occurrence years is verified through a graphical analysis of individual development factors as a function of occurrence years, complemented by a diagonal effect development detection test, a statistical linear correlation test between individual link ratio vectors. Thirdly, the presence of a variance factor is verified by a graphical study of residuals payments to confirm random nature of *Pearson* residuals.

For **proportional reinsurance treaties**, premium risk is assessed using the Log-Normal method, while for reserve risk, both the Log-Normal and Merz-Wüthrich methods are implemented.

Non-proportional reinsurance treaties are analyzed solely by the method dedicated to non-proportional reinsurance. This choice is justified by the volatile nature, atypical character, and low frequency of the risk covered by these reinsurance treaties.

A data reprocessing phase is essential for the implementation of USP. The historical claims and premium data, covering the 2015-2024 period, is available. Claims attributable to the captive are short-tailed and close after three years, showing no development tail. Earned premiums per underwriting year correspond to accounting premiums at the annual financial statement closing date. Thanks to the stability and non-triggering of the multi-line non-proportional program, gross and net claims provisions (accounting and Best Estimate) are equivalent.

The availability of historical Best Estimates, compliant with Solvency II, simplified the application of the "as-if" method on the data and the recalculation of claims data. This approach involved specific adjustments for management expenses, local deductibles, and per-claim retention on order to model the risk for the next 12 months. Data quality criteria are met as the data is considered exhaustive, accurate and appropriate.

The results of the USP calibrations are presented below, by method and by line of business:

Risk	Method	MAT Proportionnelle	PPD Proportionnelle	Dommages Non Proportionnelle	MAT Non Proportionnelle
Premium Risk	Log-Normal	40.56%	5.19%	Not applicable	Not applicable
	Non-proportional Reinsurance	Not applicable	Not applicable	100.00%	94.49%
Reserve Risk	Log-Normal	29.38%	37.87%	Not applicable	Not applicable
	Merz-Wüthrich Triangle	56.81%	15.06%	Not applicable	Not applicable

The validation of assumptions presents several notable weaknesses. Firstly, statistical tests are performed on a limited number of data points, which increases the risk of a Type I error and impacts the reliability of the results. Secondly, statistical test (*Shapiro-Wilk*, *Durbin Watson*, etc.) prove sensitive to outliers. Finally, the captive's data is volatile and lacks granularity, which combined with data quality challenges, makes the validation of methodological assumptions complex.

The validation of methodological assumptions is not satisfactory overall. This difficulty stems from the specific nature of the risks insured by the reinsurance captive, which originate from exposures not insurable in the traditional market. Their intrinsic volatility makes the rigorous application of USP complex. This volatility in claims data compromises the verifiability of assumptions and poses significant challenges to the validation of methods prescribed by the Delegated Acts. This finding therefore calls for a prudent interpretation of the results presented.

The results below present the USP calibrations for the standard deviations of premium and reserve risk, the premium and reserve SCR, the total SCR, and the SCR coverage ratio:

	Standard deviation of premium and reserve	Premium and Reserve SCR	SCR	SCR coverage ratio
Standard Formula	10.05%	4 982 861	11 899 715	153.82%
With USP	31.15%	15 446 203	19 853 456	92.20%

The integration of the selected USP by method leads to a **significant increase in the standard deviation of premium and reserve risk, ranging from 10.05% to 31.15%**. Consequently, the **SCR coverage ratio** decreases by 61.62% to reach **92.20%**, which is below the regulatory minimum of 100%.

The results obtained from the USP calibration using the captive's own data show a significant increase in the SCR compared to estimates derived from the Standard Formula. This suggests that the entity's risk profile lies beyond the implicit market assumptions in the standard calibration, fully justifying the use of a tailored approach.

The implementation of USP for a reinsurance captive faces several major challenges. The risk portfolio is often undiversified, concentrated on the parent group's risks, exposing the captive to unique risks that are difficult to insure and price. The influence of the parent group is also an additional challenge, indeed, USPs must align with the group's strategy, and any change in activity (geographical expansion, new products, etc.) directly impacts the risk profile. Finally, a potential moral hazard may arise, incentivizing the group to transfer poor-quality risk to the captive.

Furthermore, internal data is limited and the absence of comparable market data, coupled with often insufficient granularity per line of business rather than per sub-guarantee, complicates risk modeling.

The adoption of USPs is more pertinent when risk is less volatile. A semi or fully internal model becomes feasible if the captive is large, with a diversified and less complex risk portfolio. Ideally the captive would manage high-frequency, low-severity risks, such as the group's automobile fleet or general liability.

Introduction

Dans un contexte de marché difficile, dit « *hard market* », caractérisé par une hausse significative des primes et une réduction de la capacité offerte par les assureurs traditionnels, les captives d'assurance et de réassurance s'affirment comme des leviers efficaces de transfert alternatif des risques. Ces entités, détenues par des groupes industriels ou commerciaux, permettent de gérer directement une partie de leurs aléas, en particulier ceux jugés non assurables ou trop onéreux à céder au marché traditionnel.

La mise en place d'une captive traduit une volonté stratégique de ses actionnaires : mieux comprendre, gérer et prévenir les menaces, tout en renforçant la culture d'entreprise en matière de gestion des risques. Fonctionnant en complémentarité avec les mécanismes traditionnels d'assurance, la captive offre ainsi des leviers supplémentaires pour optimiser la protection financière globale du groupe.

L'essor des captives doit néanmoins s'inscrire dans un cadre réglementaire rigoureux, notamment celui de la directive européenne **Solvabilité II**, qui impose aux organismes d'assurance et de réassurance de justifier d'une solvabilité en lien avec leur profil de risque. L'un des piliers fondamentaux de ce cadre est le rapport ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*), véritable outil d'auto-évaluation des risques et de la solvabilité. Ce mémoire s'intéresse particulièrement à la pertinence du recours à des **paramètres spécifiques propres** (*Undertaking Specific Parameters – USP*), dans les modules de primes et de réserve, qui constituent généralement les principaux consommateurs de capital dans une captive de réassurance non-vie.

L'objectif principal de ce mémoire est de **calibrer, tester et analyser les différentes méthodes de calcul des USP proposées par les Actes Délégués (2015/35/CE)** pour une captive de réassurance non-vie luxembourgeoise, en tenant compte des enjeux liés à la qualité des données, à validité et la robustesse des hypothèses, ainsi qu'à la capacité de ces méthodes à refléter plus fidèlement le profil de risque propre à la structure.

À travers des tests de sensibilité par méthode, ce mémoire analysera l'écart entre les résultats obtenus via les USP et ceux issus de la formule standard, afin d'évaluer dans quelle mesure ces paramètres permettent un pilotage plus efficace du besoin en capital de solvabilité (SCR). Ce travail vise ainsi à éclairer les conditions de mise en œuvre et les limites de cette approche, et à proposer des pistes d'optimisation du dispositif de gestion des risques de la captive.

Contents

Remerciements.....	2
Abréviations et anglicismes	3
Résumé	4
Abstract	5
Synthèse	6
Synthesis	10
Introduction	13
I. Contexte et cadre de l'étude	17
1. Chiffres clés du portefeuille étudié	17
1.1 Programmes de réassurance.....	17
1.2 SCR au 31.12.2024.....	18
1.3 Périmètre de l'étude	20
2. Les captives d'assurance et de réassurance	20
2.1 Aspect historique	20
2.2 Définitions	20
2.3 Types de structure des sociétés captives	21
2.4 Principe de fonctionnement.....	22
2.5 Captive d'assurance versus captive de réassurance	24
2.6 Avantages et bénéfices pour un groupe de disposer d'une captive de réassurance	25
2.7 Contraintes pour un groupe de disposer d'une captive de réassurance	26
2.8 Risque assurable et non-assurable.....	26
2.9 Particularité comptable luxembourgeoise : La provision d'égalisation	28
2.10 Les captives dans le monde.....	29
II. Solvabilité 2 et la décomposition du SCR	30
3. Les trois piliers de Solvabilité 2	30
3.1 Best Estimate sous Solvabilité 2	31
3.2 Décomposition SCR & MCR	33
3.3 SCR Non-Vie - Risque de primes et de réserve.....	35
4. ORSA: Own Risk and Solvency Assessment.....	39
4.1 Définition et références réglementaires	39
4.2 Écart du profil de risque par rapport à la Formule Standard	39
III. Méthodes et données pour le calibrage des USP.....	40
5. Approche USP – Concept généraux	40
5.1 Références réglementaires	40
5.2 Paramètres propres à l'entreprise	42
5.3 Processus d'approbation	42
5.4 Facteur de crédibilité par ligne d'activité.....	43
6. Qualité des données au sens de Solvabilité 2	45

7.	Méthodes du risque de primes – Méthode Log-Normale	46
7.1	Méthode et notations	46
7.2	Présentation des hypothèses	48
7.3	Paramètre propre à l'entreprise	50
8.	Méthode de la réassurance non-proportionnelle.....	51
8.1	Méthode et notations	51
8.2	Présentation des hypothèses	52
8.3	Paramètre propre à l'entreprise	52
9.	Méthode du risque de réserve - Méthode Log-Normale.....	53
9.1	Méthode et notations	53
9.2	Présentation des hypothèses	56
9.3	Paramètre propre à l'entreprise	57
10.	Méthode du risque de réserve : Méthode Merz-Wüthrich	57
10.1	Méthode et notations	57
10.2	Présentation des hypothèses	60
10.3	Paramètre propre à l'entreprise	65
IV.	Calibrage des USP au portefeuille de la captive	67
11.	Cadre de l'étude et qualité des données	67
11.1	Données dans le cadre de l'étude	67
11.2	Retraitement des données	67
11.3	Conclusion de la qualité des données	72
12.	Analyse du risque de primes de la méthode Log-Normale.....	72
12.1	Présentation des données.....	72
12.2	Validation des hypothèses de la méthode	73
12.3	Conclusion sur la validité des hypothèses de la méthode	86
12.4	Résultat de la méthode Log-Normale du risque de primes	87
13.	Analyse de la méthode de réassurance non-proportionnelle	89
13.1	Présentation des données.....	89
13.2	Validations des hypothèses de la méthode	90
13.3	Conclusion de la validité des hypothèses de la méthode	91
13.4	Résultat de la méthode réassurance non-proportionnelle	92
14.	Analyse du risque de réserve de la méthode Log-Normale.....	94
14.1	Présentation des données.....	94
14.2	Validation des hypothèses de la méthode	96
14.3	Conclusion de la validité des hypothèses de la méthode	103
14.4	Résultat de la méthode risque de réserve Log-Normale.....	105
15.	Analyse du risque de réserve de la méthode de Merz-Wüthrich.....	107
15.1	Présentation des données.....	107
15.2	Validation des hypothèses de la méthode	107
15.3	Conclusion de la validité des hypothèses de la méthode	118

15.4	Résultat de la méthode de méthode de Merz-Wüthrich	119
16.	Synthèse et USP sélectionnés	121
16.1	Validation des hypothèses par méthode	121
16.2	USP sélectionnés par méthode	121
Conclusion.....		123
Liste des Figures		125
Liste des Tableaux		127
Bibliographie.....		128
Annexes		129
	Annexe 1 – Engagements d’assurance – lignes d’activité	129
	Annexe 2 – Matrice de corrélation pour le risque de primes et de réserve en non-vie.....	130
	Annexe 3 – Nombre de captives dans le monde	131
	Annexe 4 – Textes Règlementaires.....	132
	Annexe 5 – Test statistique de Shapiro-Wilk.....	132
	Annexe 6 – Résultats risque de primes méthode Log-Normale	133
	Annexe 7 – Résultats risque de primes méthode réassurance non-proportionnelle.....	133
	Annexe 8 – Résultats risque de réserve méthode Log-Normale	133
	Annexe 9 – Résultats risque de réserve méthode Merz-Wüthrich	134

I. Contexte et cadre de l'étude

1. Chiffres clés du portefeuille étudié

La captive de réassurance analysée dans ce mémoire a pour mission de couvrir les risques d'assurance d'un groupe industriel opérant dans le transport maritime international depuis la Belgique et les Pays-Bas. Ce groupe mène des opérations offshore complexes, notamment dans la construction d'éoliennes en mer, ainsi que diverses activités connexes de logistique et de transit. Nous nommerons la captive CAP RE par la suite.

1.1 Programmes de réassurance

Au 31 décembre 2024, CAP RE souscrit plusieurs traités de réassurance, répartis comme suit :

- Le traité de réassurance **proportionnelle** « **maritime, aviation et transport** » (abrégé MAT Proportionnelle) couvre les risques liés au transport de composants d'éoliennes et de matériel technique par cargos spécialisés, depuis les sites de construction jusqu'aux plateformes offshore. Les garanties portent sur la cargaison transportée par les navires.
- Le traité de réassurance **proportionnelle** « **pertes pécuniaires diverses** » (abrégé PPD Proportionnelle) couvre les pertes d'exploitation consécutives à l'arrêt d'un chantier offshore en raison de retards critiques dans les chaînes logistiques de livraison des composants et équipements techniques d'éoliennes.
- Le traité de réassurance **non proportionnelle** « **incendie et autres dommages aux biens** » (abrégé Dommages NP) couvre les incendies survenant dans les entrepôts portuaires où sont stockés les composants d'éoliennes et autres matériels techniques. Il s'étend également aux sinistres conjoints, tels que les collisions entre navires du groupe ou les dommages causés aux équipements des plateformes offshore.
- Le traité de réassurance **non proportionnelle** « **maritime, aérienne et transport** » (abrégé MAT NP) couvre la perte partielle ou totale de cargaisons sensibles, telles que les pales d'éoliennes, câbles sous-marins, transformateurs et composants électriques de pointe. Les risques exceptionnels liés à la navigation en zones sensibles sont inclus, notamment les actes de piraterie ou les passages maritimes à fort risque, comme les goulots d'étranglement stratégiques.

Les deux traités de réassurance non proportionnels bénéficient d'une protection jointe en rétrocession par un traité non proportionnel multilignes structuré à hauteur de EUR 25.000.000 en excédent de EUR 50.000.000 par événement.

Les programmes de souscription de CAP RE sont résumés dans le tableau suivant :

Lignes d'activités	Lignes d'activités et Segment S2	Type de réassurance	Période	Franchise de la captive	Limites Acceptation	Limites Rétrocession
Assurance maritime, aérienne et transport et réassurance proportionnelle y afférente	Ligne d'activité 18 LoB 3	Réassurance proportionnelle sur la cargaison. Réassurance proportionnelle Quote-part 100%, sans prime de reconstitution	Renouvellement annuel 01.01-31.12.	EUR 1 ^{er}	EUR 2.000.000 par sinistre sans agrégat annuel	Pas de rétrocession
Assurance pertes pécuniaire diverses et réassurance proportionnelle y afférente	Ligne d'activité 24 LoB 9	Réassurance proportionnelle Quote-part 100%, sans prime de reconstitution	Renouvellement annuel 01.01-31.12.	EUR 1 ^{er}	EUR 300.000 par sinistre EUR 1.500.000 par an	Pas de rétrocession
Réassurance dommages non proportionnelle	Ligne d'activité 28 LoB 12	Réassurance non proportionnelle , sans prime de reconstitution	Renouvellement annuel 01.01-31.12	EUR 50.000 (1 ^{ère} ligne)	EUR 500.000 XS EUR 50.000	EUR 25 M XS EUR 50 M Rétrocession sur traités dommages non proportionnelle et maritime, aérienne et transport non proportionnelle
Réassurance maritime, aérienne et transport non proportionnelle	Ligne d'activité 27 LoB 11	Réassurance non proportionnelle , sans prime de reconstitution.	Renouvellement annuel 01.01-31.12	EUR 100.000 (1 ^{ère} ligne)	EUR 75 M XS EUR 100.000	

Tableau 1 - Programmes de souscription de CAP RE

1.2 SCR au 31.12.2024

CAP RE utilise la formule standard pour calculer ses besoins en capital de SCR et MCR au 31.12.2024. Le graphique ci-dessous présente la ventilation du SCR de base (BSR) par sous module de risque avant diversification :

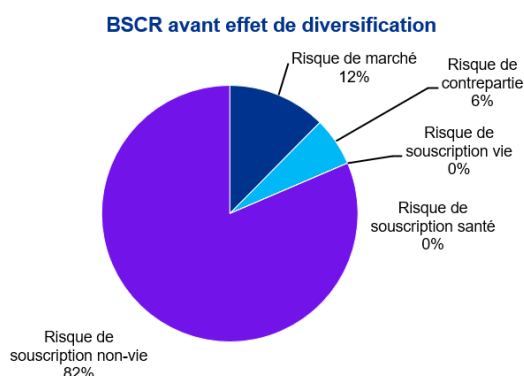


Figure 1 - Ventilation du BSCR au 31.12.2024 avant diversification

Le risque de marché et le risque de contrepartie représentent respectivement 17% et 8% du BSCR avant prise en compte des effets de diversification. L'actif au 31.12.2024 est composé principalement d'un prêt intragroupe et de trois comptes courants de ratings respectifs A, A et AAA.

Le risque de souscription non-vie compose le BSCR à hauteur de 75%, avant prise en compte des effets de diversification. Le module de souscription non-vie est le plus consommateur des besoins de capitalisation au 31.12.2024.

Les volumes de primes et des provisions *Best Estimate* pour l'ensemble des LoB, proportionnelles et non-proportionnelles, sont $V_{(prem,s)} = 7.198.884 \text{ EUR}$ et $V_{(res,s)} = 12.231.707 \text{ EUR}$.

La ventilation des primes par LoB est la suivante :

- 3.673.884 EUR LoB proportionnelles MAT
- 2.500.000 EUR LoB proportionnelles PPD
- 1.500.000 EUR la LoB MAT NP
- 25.000 EUR LoB Dommages NP

La ventilation des provisions *Best Estimate* par LoB est la suivante :

- 9.950.081 EUR LoB proportionnelles MAT
- 1.004.452 EUR LoB proportionnelles PPD
- 1.273.547 EUR la LoB MAT NP
- 3.628 EUR LoB Dommages NP

Le coefficient de diversification géographique DIV_s est égale à 27% pour les branches MAT et à 100% pour les branches PPD.

Le graphique ci-dessous présente la décomposition du module de risque non-vie au 31.12.2024 avant effets de diversification :

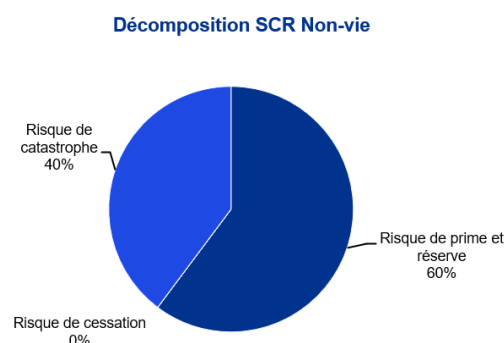


Figure 2 - Ventilation du module SCR non-vie au 31.12.2024 avant diversification

Les modules de risque de catastrophe et risque de primes et réserve composent respectivement à hauteur de 59% et 41% le SCR non-vie avant prise en compte des effets de diversification. La captive n'est pas sujette au de risque de cessation non-vie car le groupe industriel propriétaire ne résilie pas les primes versées.

La captive de réassurance considérée dans le cadre de ce mémoire, CAP RE, s'interroge sur l'écart de son profil de risque par rapport aux hypothèses qui sous-tendent au capital de solvabilité requis de la formule standard, et plus particulièrement au niveau de son SCR non-vie. Afin d'améliorer la compréhension des risques souscrits, de quantifier leurs volatilités propres sur le risque de primes et de réserve et les impacts sur les besoins en SCR, une analyse approfondie de la mise en place de paramètres propres est effectuée.

1.3 Périmètre de l'étude

Pour les traités de **réassurance proportionnelle MAT et PPD**, la méthode Log-Normale du risque de primes sera étudiée, et la méthode Log-Normale et celle du triangle de Merz-Wüthrich pour le risque de réserve.

Les traités de **réassurance non-proportionnelles, Dommages et PPD**, feront l'objet d'une analyse exclusive avec la méthode de la réassurance non proportionnelle compte tenue de la nature volatile, atypique et peu fréquente des risques sous-jacents.

Avant d'étudier le calibrage des paramètres propres à CAP RE, il est important de définir ce qu'est une captive de réassurance ainsi que les aspects réglementaires de Solvabilité II en lien avec les paramètres propres. **L'analyse se fera en partie IV.**

2. Les captives d'assurance et de réassurance

2.1 Aspect historique

La première captive d'assurance européenne est apparue en Angleterre dans les années 1920, avec la création d'Imperial Chemicals Insurance Limited par une compagnie industrielle. En France, une décennie plus tard, les groupes Peugeot et Citroën ont été les premiers industriels à mettre en place une structure captive.

Sur le plan historique, l'expression « captive mine » a été introduite par Frédéric Reiss pour désigner une société d'assurance couvrant plusieurs entités minières appartenant à un même groupe : la Youngstown Sheet & Tube Company, basée aux États-Unis.

2.2 Définitions

Il n'existe pas de définition universellement partagée de la notion de société « captive », celle-ci variant d'un pays à l'autre. La directive européenne 2009/138/CE (Solvabilité II), à son Article 13, propose cependant une définition harmonisée au niveau de l'Union Européenne. Elle y définit une entreprise captive d'assurance comme une entité « détenue soit par une entreprise financière, autre qu'une entreprise d'assurance ou de réassurance ou qu'un groupe d'entreprises d'assurance ou de réassurance au sens de l'Article 212, paragraphe 1, point c), soit par une entreprise non financière, et qui a pour objet la fourniture d'une couverture d'assurance portant exclusivement sur les risques de l'entreprise ou des entreprises auxquelles elle appartient, ou bien les risques d'une ou plusieurs autres entreprises du groupe dont elle fait partie ». Le même article définit également l'« entreprise captive de réassurance » selon des modalités analogues, mais appliquées à la réassurance.

Ce mémoire se concentre spécifiquement sur **une entreprise captive de réassurance non-vie** domiciliée au sein de l'Union Européenne, et plus précisément au **Grand-Duché de Luxembourg**. Dans ce pays, la législation locale, telle que publiée dans le Mémorial – Journal Officiel du Grand-Duché de Luxembourg (Recueil de législation du 6 décembre 2007, page 3661) – offre une définition plus concise : « Captive de

réassurance : une entreprise de réassurance détenue par une entreprise autre qu'une entreprise d'assurances ou de réassurance et ne faisant pas partie d'un groupe d'entreprises d'assurances ou de réassurance relevant de la directive 98/78/CE, et qui a pour objet la fourniture de produits de réassurance couvrant exclusivement les risques de l'entreprise ou des entreprises auxquelles elle appartient ou d'une ou de plusieurs entreprises du groupe dont elle fait partie ».

En France, l'Article L.350-2 du Code des assurances fournit également un encadrement juridique des captives d'assurance et de réassurance, confirmant leur spécificité dans le paysage assurantiel.

En synthèse, une entreprise captive d'assurance ou de réassurance est une entité détenue par un groupe industriel ou commercial dans le but de mettre en place un mécanisme d'auto-assurance. Elle permet de couvrir des risques trop coûteux ou mal couverts par le marché traditionnel, que ce soit pour des raisons de coût ou de disponibilité. Elle s'intègre ainsi dans une stratégie globale de gestion des risques, visant à en optimiser le pilotage, notamment par une meilleure maîtrise des primes, des franchises et des niveaux de couverture.

L'essence même d'une captive réside dans sa vocation exclusive à couvrir les risques propres du groupe auquel elle appartient. Contrairement aux assureurs classiques, elle ne mutualise pas les risques entre assurés tiers, mais construit des solutions de couverture sur mesure, adaptées aux spécificités opérationnelles de son propriétaire. Elle bénéficie en outre d'une plus grande flexibilité en matière de tarification.

Enfin, au Grand-Duché de Luxembourg, les captives de réassurance peuvent recourir à des mécanismes spécifiques de provisionnement, tels que la **provision pour fluctuation de sinistralité (PFS)**, leur permettant de lisser les effets d'une sinistralité variable dans le temps, et de renforcer leur solidité financière.

2.3 Types de structure des sociétés captives

Il existe plusieurs types de structures de captives, chacune répondant à des besoins spécifiques en matière de gestion des risques et d'organisation capitalistique :

- **Les captives dites « pures ».**

Majoritaires en Europe, elles sont détenues directement ou indirectement à 100 % par leur(s) assuré(s), généralement une maison mère ou un groupe industriel. Leur objet est exclusivement limité à la souscription et à la gestion des risques internes du groupe propriétaire. Elles fonctionnent de manière similaire à un assureur ou réassureur traditionnel : elles perçoivent des primes, couvrent les risques spécifiques à l'entreprise, et indemnisent les sinistres. Une captive pure détenue par un seul actionnaire est qualifiée de **captive monoparentale**. Lorsqu'elles sont détenues par plusieurs entités, celles-ci appartiennent en général à un même groupe industriel ou partagent des profils de risques comparables, comme certains groupements de réassureurs. Il est également possible que des captives pures appartiennent à des assurés issus de secteurs très différents, sans lien capitalistique ni opérationnel, ce qui entraîne une gestion de risques hétérogènes.

- **Les captives collectives.**

Ces structures sont créées et détenues conjointement par plusieurs entreprises appartenant à un même secteur d'activité ou partageant des intérêts communs. Elles émergent souvent lorsque leurs membres ne trouvent pas de couverture adéquate pour des risques spécifiques à un prix raisonnable sur le marché traditionnel. Ce type de captive est fréquent dans des secteurs tels que le nucléaire civil, l'artisanat ou les collectivités territoriales.

- **Les captives sponsorisées.**

Dans ce modèle, la structure captive est détenue par une entité tierce, extérieure aux assurés, qui ne possède aucun lien capitalistique avec ces derniers. Cette entité tierce, appelée sponsor, est généralement issue du secteur de la gestion des risques ou de l'assurance, et dispose des autorisations réglementaires requises. Le **sponsor** met en place la structure captive, participe à son capital et conserve un droit de regard sur les activités des assurés. Les captives sponsorisées ne mutualisent pas les risques entre les assurés. Les comptes sont ségrégés, chaque assuré disposant de son propre compartiment indépendant au sein de la structure. En règle générale, les assurés paient un droit d'entrée pour accéder à cette forme de couverture.

- **Les captives à compartiments ou Protected Cell Companies.**

Ces structures sont généralement domiciliées dans des juridictions telles que Malte ou les Bermudes. Elles se composent de compartiments autonomes et juridiquement séparés, affectés à chaque assuré. Ces compartiments permettent aux assurés de gérer leurs risques de manière indépendante tout en profitant d'un cadre structurel commun. Cette forme de captive est souvent utilisée comme solution transitoire. Elle permet aux entreprises de tester le modèle tout en capitalisant les excédents générés dans leur compartiment. Le sponsor met à disposition le capital requis pour la mise en risque et assure la gouvernance du véhicule. Les assurés versent en contrepartie des frais de gestion et un droit d'entrée. Les actifs d'un compartiment sont exclusivement destinés à couvrir ses propres engagements, sauf clause spécifique de solidarité. En cas de défaut ou de faillite d'un compartiment, seul le sponsor peut être amené à couvrir les passifs restants. Ce modèle est particulièrement adapté aux entreprises de taille modeste, présentant des risques spécifiques non couverts de manière satisfaisante par le marché traditionnel de l'assurance ou de la réassurance.

2.4 Principe de fonctionnement

Une captive d'assurance ou de réassurance repose sur le **principe d'auto-assurance**. Elle offre à son propriétaire des couvertures sur mesure pour pouvoir gérer au mieux les risques et les besoins en fonction de sa stratégie et de sa politique de risque en prenant en compte les moyens financiers à sa disposition. Une captive permet à son propriétaire une optimisation des primes et des flux financiers dans la gestion quotidienne de ses sinistres et de ses actifs financiers. Bien que juridiquement structuré, il demeure un véhicule relativement peu complexe dans sa gestion quotidienne et généralement, afin de réaliser des économies d'échelle et des gains de temps, la captive ne dispose pas d'employés propres au sein du groupe propriétaire. Ainsi le propriétaire délègue à un tiers la gestion quotidienne en passant par un gestionnaire de captive, qui dispose des compétences et de l'honorabilité requises pour la gestion quotidienne des tâches administratives, comptables, légales, et de l'actuariat.

Une captive d'assurance est une société d'assurance à part entière. Elle exerce donc les mêmes fonctions qu'un assureur direct. Concrètement, elle souscrit les risques d'assurance d'un groupe commercial et de ses filiales en contrepartie du paiement de primes. En cas de sinistre couvert par les conditions contractuelles, elle indemnise le groupe selon les modalités prévues.

Comme toute entreprise d'assurance, une captive peut également recourir au marché de la réassurance afin de transférer une partie des risques qu'elle couvre et ainsi optimiser sa propre gestion du capital et de la solvabilité. La figure ci-dessous illustre la structure des principaux flux financiers d'une captive d'assurance.

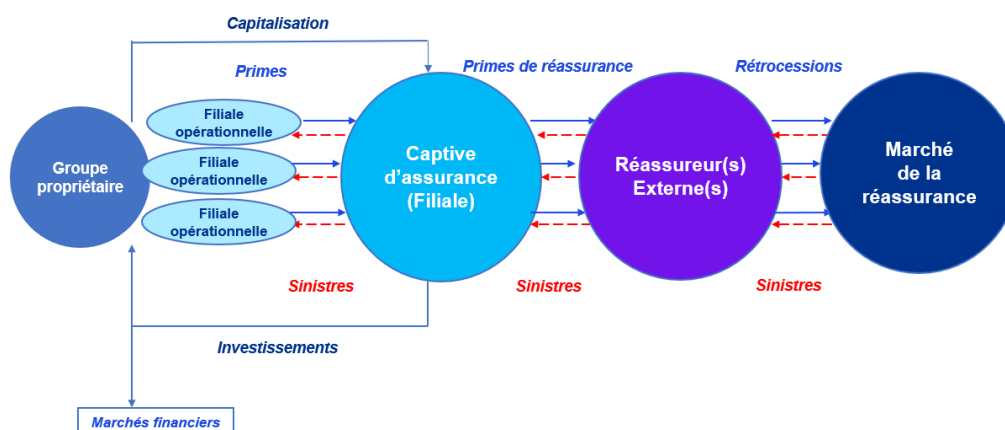


Figure 3 - Structure des flux financiers d'une captive d'assurance

Une captive de réassurance constitue un maillon supplémentaire dans la chaîne de gestion des risques et exerce les mêmes fonctions qu'un réassureur traditionnel. Elle intervient en tant que cessionnaire de risques couverts initialement par une entité d'assurance du groupe ou par une compagnie tierce.

Dans le cadre de ce mémoire, l'analyse portera exclusivement sur la captive de réassurance dite « captive pure », utilisée comme outil de transfert de risques au bénéfice d'un groupe industriel.

La structure organisationnelle type d'une captive de réassurance peut être représentée de la manière suivante :

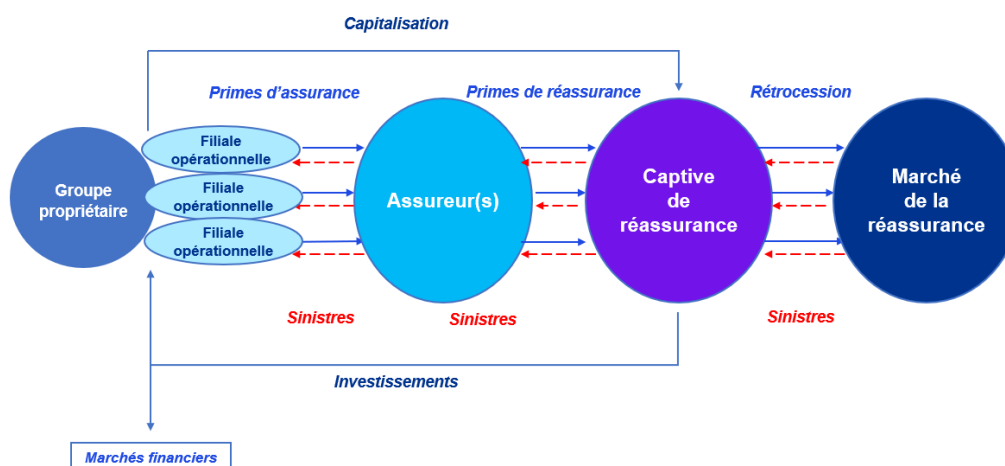


Figure 4 - Structure des flux financiers d'une captive de réassurance

Qu'il s'agisse de couvrir un nouveau risque ou de s'inscrire dans le cadre d'une police existante, l'assureur émet une police d'assurance dont les conditions sont établies sur la base des informations de souscription fournies par le groupe industriel ou par son courtier. L'assureur procède à l'évaluation des engagements, puis détermine la tarification de la couverture applicable au groupe et à ses filiales.

L'ensemble des tâches administratives liées à la ou aux polices d'assurance (émission, avenants, gestion contractuelle) est généralement assuré par l'assureur ou, le cas échéant, par le courtier mandaté par le groupe. En contrepartie de ce service, la captive de réassurance verse à l'assureur une commission dite de « fronting ».

La réassurance est une opération par laquelle un assureur transfère, moyennant une prime et une commission, tout ou partie des expositions initialement assurées. Dans ce contexte, l'assureur direct, également appelé cédante, cède une partie de ses engagements à un réassureur. Ce dernier devient alors le réassureur du risque initialement porté par la cédante. Si ce réassureur décide à son tour de transférer une fraction des expositions qu'il a reçues, il fait appel à un rétrocessionnaire.

Dans une approche intégrée, l'assureur peut, en accord avec le groupe industriel, se réassurer directement auprès de la captive de réassurance détenue par le groupe, sur tout ou partie des risques qu'il a souscrits. Il convient de noter qu'une captive de réassurance n'est pas habilitée à émettre des polices d'assurance et ne peut donc pas percevoir de primes directement des filiales du groupe. Elle doit nécessairement passer par un assureur tiers agréé, appelé assureur « fronteur ».

Cet assureur « fronteur » est ainsi chargé de l'émission des polices, de la gestion administrative et du règlement des sinistres. Ce n'est qu'ensuite qu'il procède à la rétrocession des risques à la captive. En échange de l'utilisation de son agrément réglementaire et de son infrastructure opérationnelle, l'assureur perçoit de la part de la captive une rémunération spécifique, correspondant à la commission de fronting. D'un point de vue légal, l'assureur « fronteur » demeure responsable de ses engagements à l'égard des assurés finaux. Pour garantir sa propre exposition, il exige fréquemment des garanties ou des collatéraux de la part de la captive : lettre de garantie, nantissement d'actifs, dépôts en espèces, ou encore titres négociables.

Enfin, la captive peut à son tour céder une part des engagements assumés au marché de la réassurance traditionnelle. Dans ce cas, elle devient cédante vis-à-vis de ses propres réassureurs, appelés rétrocessionnaires. Si cette opération de rétrocession engendre un coût non négligeable, elle permet néanmoins de préserver l'équilibre financier de la captive, en particulier durant ses premières années de fonctionnement, lorsqu'elle constitue progressivement ses marges de solvabilité.

2.5 Captive d'assurance versus captive de réassurance

Les avantages et les inconvénients liés à la détention d'une captive varient en fonction des caractéristiques spécifiques du groupe propriétaire, de son appétence au risque, de sa structure organisationnelle ainsi que de ses objectifs stratégiques en matière de gestion des risques.

Il convient également de prendre en compte le **coût total du risque**, c'est-à-dire l'ensemble des dépenses liées non seulement aux sinistres mais aussi aux frais administratifs, au capital mobilisé, aux charges réglementaires, aux coûts de rétrocession, ainsi qu'aux éventuelles exigences de collatéraux.

Les principales différences entre une captive d'assurance et une captive de réassurance peuvent être résumées comme suit :

	Captive d'assurance	Captive de réassurance
Assureur « fronteur »	Nécessité d'avoir recours à un assureur « fronteur » locale dans certaines zones géographiques mais pas au Luxembourg.	Souscription des risques limités par l'assureur « fronteur » qui peut exiger une commission de « fronting » (en particulier en cas de réassurance proportionnelle) et exige généralement la constitution de sûretés (lettre de confort, nantissement) sur la créance de réassureur à son actif.
Autonomie de souscription	Liberté et flexibilité accrues dans la souscription, dans les limites des branches autorisées par l'agrément d'assurance.	Dépend de l'assureur « fronteur » et de la localisation géographique des risques.

Règlementation	Encadrement strict par le régulateur, incluant des contrôles sur les données de souscription, la gestion et le paiement des sinistres.	Règlementation et une supervision par le régulateur plus souple pour les entités de réassurance.
Gestion administrative	L'assureur ou le courtier gère l'émission des polices, les avenants et les déclarations de sinistres.	Pas de personnel propre dédié à la gestion administrative, car celle-ci est assurée par l'assureur cédant.
Souscription	Spécialisation possible par ligne d'activité : vie ou non-vie.	Possibilité de souscrire des risques vie et non-vie simultanément.
Assurance et réassurance	Il est possible, dans certains cas, de combiner une activité d'assurance avec de la réassurance.	Une captive de réassurance ne peut pas souscrire directement des risques d'assurance.
AMCR/Seuil plancher du MCR	4 millions d'Euros.	1.3 million d'Euros, sauf pour certaines captives ayant des souscriptions dans des lignes crédit 3.9 millions d'Euros.

Tableau 2 - Captive d'assurance versus captive de réassurance

2.6 Avantages et bénéfices pour un groupe de disposer d'une captive de réassurance

La détention d'une captive de réassurance présente de nombreux avantages pour la maison mère propriétaire, à la fois en termes de gestion des risques et d'optimisation économique. Les principaux avantages sont :

- La possibilité de mutualiser les risques entre les différentes entités opérationnelles du groupe, permet d'optimiser les niveaux de franchise supportés en interne.
- Une meilleure maîtrise de la rétention des risques, grâce à la mise en place de programmes de couverture adaptés au profil de risque du groupe et à son seuil de tolérance, tout en facilitant l'accès au marché de l'assurance et de la réassurance dans des conditions plus avantageuses.
- Une flexibilité renforcée dans la souscription des risques, permettant d'adapter les couvertures aux besoins spécifiques du groupe.
- La capacité de couvrir des risques peu ou non assurables sur le marché traditionnel, notamment en cas de franchises élevées, de primes trop coûteuses ou de garanties insuffisantes, tout en tenant compte de la capacité financière du groupe.
- Une réduction et une stabilisation des coûts d'assurance, rendues possibles par le choix stratégique des assureurs « fronteurs » et la modulation de la rétention et du périmètre assuré en fonction des cycles de marché (hausse des primes, restriction des garanties, augmentation des franchises, etc.).
- Un pilotage centralisé des risques assurés, permettant une harmonisation des couvertures au sein du groupe et une gestion proactive des contrats d'assurance et de réassurance. Cela favorise également l'ajustement continu de la politique de gestion des risques en fonction des évolutions de l'environnement économique et assurantiel.

- L'externalisation de certaines fonctions (comme l'administration ou la gestion des sinistres) peut générer des économies d'échelle, notamment si la captive est gérée par un prestataire spécialisé.
- La constitution de réserves techniques sur la base des excédents générés (résultats techniques positifs, produits financiers issus des primes), permettant de mieux se prémunir pour faire face à des risques difficiles à transférer.
- Le renforcement d'une stratégie de gestion des risques sur le long terme, cohérente et intégrée à la politique globale du groupe.

2.7 Contraintes pour un groupe de disposer d'une captive de réassurance

En complément des avantages précédemment exposés, la détention d'une captive de réassurance comporte également plusieurs contraintes pour le groupe propriétaire. Parmi les principales limites, il convient de mentionner :

- Des frais initiaux et récurrents significatifs, liés à la création et à la gestion annuelle de la structure captive.
- Un délai de carence plus ou moins long pour l'obtention de l'agrément par l'autorité de régulation compétente, selon la juridiction choisie.
- Un risque de pression fiscale exercée par le pays de résidence du groupe lorsque la captive est localisée dans une autre juridiction. Ce scénario peut être observé dans le cadre des relations entre la France et le Grand-Duché de Luxembourg.
- L'obligation d'immobiliser des fonds propres pour répondre aux exigences réglementaires de solvabilité, ce qui est une contrainte financière directe pour le groupe propriétaire.
- La nécessité de justifier les primes perçues par la captive sur la base de critères actuariels objectifs et conformes aux conditions de marché. Cette exigence vise à éviter la fixation de primes excessives ou artificielles, historiquement observées dans certains montages à finalité fiscale.
- Un risque de défaillance en cas de sinistralité exceptionnelle ou de mauvaise calibration des primes, pouvant conduire à une détérioration financière de la captive et, par ricochet, impacter négativement les états financiers consolidés du groupe.
- L'exigence, de la part de l'assureur « fronteur », de garanties financières telles que le nantissement d'actifs, les lettres de confort, les dépôts collatéraux ou encore les garanties bancaires, afin de se protéger contre un éventuel défaut de la captive.
- Des obligations de reporting de plus en plus complexes et évolutives, notamment en lien avec les normes IFRS 17, la directive Solvabilité II, les référentiels comptables locaux (comme Lux-GAAP).

2.8 Risque assurable et non-assurable

Les captives de réassurance peuvent souscrire des risques relevant de lignes d'activité (Line of Business – LoB) traditionnelles, disponible en Annexe 1, correspondant souvent aux branches suivantes (liste non exhaustive) :

- Assurance des frais médicaux (LoB 1).
- Assurance de protection du revenu (LoB 2).
- Assurance d'indemnisation des travailleurs (LoB 3).
- Assurance de responsabilité civile automobile (LoB 4).

- Autre assurance des véhicules à moteur (LoB 5).
- Assurance maritime, aérienne et transport (LoB 6).
- Assurance incendie et autres dommages aux biens (LoB 7).
- Assurance de responsabilité civile générale (LoB 8).
- Assurance de crédit et cautionnement (LoB 9).
- Assurance de protection juridique (LoB 10).

Un ensemble de risques reste cependant difficilement transférable au marché traditionnel de l'assurance, en raison de l'insuffisance des garanties proposées ou du niveau de prime exigé, jugé excessif au regard de la couverture apportée. Ces risques, lorsqu'ils ne sont pas couverts, peuvent menacer la stabilité financière du groupe, car ils demeurent latents dans son bilan. En cas de sinistre, la perte associée viendrait impacter directement le compte de résultat et, par conséquent, les fonds propres.

Pour ce type de risques, les contrats d'assurance sont en général émis dans la LoB 16 (Pertes pécuniaires diverses), qui prévoit le versement d'une indemnité à l'assuré en cas de perte de chiffre d'affaires ou de perte financière consécutive à un événement garanti. Cette LoB permet de couvrir des risques dits « catastrophiques » ou « inassurables », caractérisés par une faible fréquence mais une intensité potentiellement élevée. Compte tenu de la nature personnalisée de ces garanties, adaptées aux spécificités du groupe, les assureurs traditionnels se montrent souvent peu enclins à les souscrire, du fait de leur faible standardisation.

Certains assureurs spécialisés ou de niche sont en revanche plus disposés à proposer ce type de garanties, permettant ainsi au groupe de les transférer à sa captive. Les risques les plus fréquemment concernés sont les suivants:

- Rachat de franchises.
- Risque de fraude.
- Risque politique.
- Risque lié à la recherche et développement.
- Risque d'interruption ou d'arrêt de production.
- Désamiantage.
- Carence de fournisseurs.
- Rupture de contrats.
- Kidnapping et risque de rançon.
- Atteinte à l'environnement (pollution historique, pollution graduelle, impact sur la biodiversité, incluant parfois les frais de démantèlement ou de dépollution).
- Garantie de performance financière.
- Perte d'image de marque.
- Risque de fluctuation du prix des matières premières.
- Risques climatiques.
- Risque de crédit et cautions.
- Pénalités de retard.
- Impossibilité d'accès aux sites.
- Risques émergents, tels que le risque cyber, encore difficilement modélisable.

2.9 Particularité comptable luxembourgeoise : La provision d'égalisation

Au Grand-Duché de Luxembourg, les entreprises de réassurance ont l'obligation de constituer une **provision pour fluctuation de la sinistralité (PFS)** par branche d'activité, conformément au règlement grand-ducal du 5 décembre 2007 relatif aux conditions d'agrément et d'exercice des sociétés de réassurance.

Cette réserve a pour objectif de protéger les réassureurs contre l'impact financier de sinistres futurs imprévus, de forte intensité ou de nature exceptionnelle. Elle permet de lisser la charge de sinistralité d'un exercice à l'autre, en autorisant la constitution d'une réserve en période de faible sinistralité.

Le mécanisme de la PFS prévoit l'affectation du résultat technique et d'une partie du résultat financier de l'exercice au sein de cette provision, dans la limite d'un plafond défini. Ce plafond est calculé pour chaque catégorie de risque comme le produit de la moyenne des primes acquises sur les cinq derniers exercices comptables par un coefficient déterminé statistiquement, correspondant à six fois l'écart-type du rapport sinistres à primes observée.

La PFS est fiscalement déductible et contribue au renforcement des fonds propres de la captive sous Solvabilité II. En cas de cessation d'activité, le transfert de la PFS vers une autre entreprise de réassurance ou vers une captive de réassurance de droit luxembourgeois est envisageable, sous réserve de certaines conditions et avec l'approbation préalable du Commissariat aux Assurances (CAA).

Ce dispositif, longtemps perçu comme une spécificité luxembourgeoise attractive, a inspiré d'autres juridictions. À titre d'anecdote, la France a introduit récemment une disposition comparable dans ses normes locales avec la création de la « provision pour résilience ». Bien que les modalités d'application diffèrent, l'esprit reste similaire avec une allocation de 90% du résultat technique dans la réserve.

Le tableau ci-dessous présente les principales différences entre le Luxembourg et la France pour les captives de réassurance :

	Luxembourg	France
Aspect	Provision pour fluctuation de sinistralité	Provision pour résilience
Objectif	Lisser les résultats techniques non-vie et vie face à la volatilité de la sinistralité.	Lisser les résultats techniques non-vie face à la volatilité de la sinistralité.
Base légale	Règlement grand-ducal du 5 décembre 2007.	Code des assurances français.
Catégorie de risque	L'ensemble des risques non-vie et vie .	L'ensemble des risques non-vie , exclusion des risques de crédit et vie.
Dotations	Résultat technique + une part ou la totalité du résultat financier.	90% du bénéfice technique des catégories de risques concernés.
Plafonnement	Multiple accordé à la maille branche d'activité multiplié par la prime acquise moyenne sur les 5 dernières années.	La provision pour résilience est plafonnée à 10 fois le MCR moyen des 3 dernières années.
Durée	Sa constitution peut être maintenue tant que le profil de risque le justifie.	L'amortissement est plafonné à 15 années maximum.
Comptabilisation	Au passif du bilan au sein des provisions techniques.	Au passif du bilan aussi de provisions techniques spécifiques.

Tableau 3 - Différences principales entre le Luxembourg et la France

2.10 Les captives dans le monde

L'année 2024 a été marquée par une forte croissance pour le secteur des captives, portée par des conditions économiques défavorables aux marchés de l'assurance et de la réassurance (catastrophes naturelles, changement climatique, hausse des taux d'intérêts, inflation ...) poussant les entreprises à rechercher des solutions de couverture financièrement abordables, voire à créer leur propre structure.

Les captives à compartiments, les captives de groupe et les captives à parent unique représentent plus de 50% des nouvelles créations dans le monde en 2024, illustrant la flexibilité des structures de type captives à répondre aux besoins spécifiques et variés des acteurs économiques. La flexibilité de souscription à des risques émergents tels que les risques politiques ou les besoins de couvertures de santé participe à cette dynamique. L'ouverture d'une juridiction de domiciliation de captives en France, la consolidation de juridictions bien établies comme le Luxembourg et les Etats-Unis participent également au dynamisme des créations de structures captives. La répartition des captives par domicile est fournie en Annexe 3.

Dans la figure 5 ci-dessous, il est constaté que le nombre de captives a diminué entre 2017 et 2020, principalement en raison de fusions, acquisitions ou de liquidation d'entités captives dans un contexte de marché de l'assurance favorable (prix bas et des capacités de couverture élevées). A partir de 2020, l'augmentation du nombre de captives est expliquée principalement par la détérioration des conditions économiques, défavorables aux marchés de l'assurance et de la réassurance.

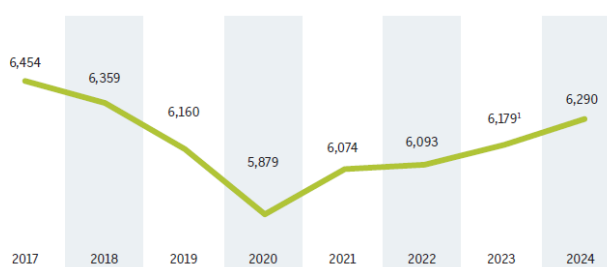


Figure 5 - Evolution du nombre de captives dans le monde

La figure 6 ci-dessous présente en pourcentage la répartition des 6.290 captives dans le monde en 2024, hors captives sponsorisées et captives à compartiments :

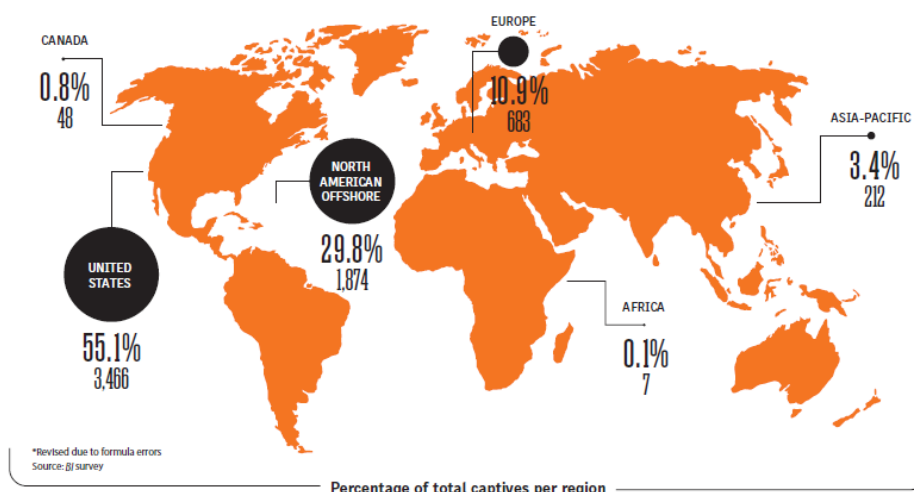


Figure 6 - Répartition géographique de captives dans le monde

Source : Business Insurance 2025, Captive Managers and Domiciles.

Ayant détaillé le rôle et le fonctionnement des captives, il convient de présenter les impacts majeurs sur la gestion et les exigences en capital de la Directive Européenne Solvabilité II.

II. Solvabilité 2 et la décomposition du SCR

3. Les trois piliers de Solvabilité 2

Depuis le 1er janvier 2016, la Directive Européenne Solvabilité II est en vigueur et s'applique aux organismes européens d'assurance et réassurance. Les captives sont soumises à ces mêmes règles. Dans le cadre de ce mémoire, la solvabilité de la captive sera estimée sur la base de deux indicateurs principaux que sont le SCR et le MCR.

La Directive Européenne Solvabilité 2 s'articule autour de trois piliers :

- Le pilier 1 pour les exigences quantitatives en capital de solvabilité.
- Le pilier 2 pour la surveillance prudentielle.
- Le pilier 3 pour la diffusion de l'information au public et à l'autorité de marché.

a) Pilier 1 : Exigences quantitatives

Le pilier 1 établit les exigences quantitatives en matière de valorisation du bilan économique (valorisation des actifs, des passifs et des fonds propres). Les passifs sont évalués en fonction des risques supportés en vision *Best Estimate* (BE) auxquels s'ajoute une *marge pour risque* (RM). Le pilier 1 a pour objectif d'assurer la capacité d'une société à faire face à ses engagements sur un horizon d'un an, avec un niveau de probabilité élevé de 99.5 %.

Ce pilier calcule deux seuils réglementaires en matière de capital, sur base du bilan économique :

- Le *Solvency Capital Requirement* (SCR) correspond au capital cible requis pour absorber des pertes inattendues dans 99,5 % des cas sur un horizon d'un an.
- Le *Minimum Capital Requirement* (MCR) constitue le niveau minimal en deçà duquel l'entreprise n'est plus autorisée à exercer son activité. Il est fixé dans une fourchette comprise entre 25 % et 45 % du SCR, mais ne peut être en dessous d'un seuil absolu nommé AMCR.

b) Pilier 2 : Exigences qualitatives

Le pilier 2 établit un ensemble d'exigences qualitatives relatives à la gouvernance, la gestion des risques et au pilotage prudentiel des compagnies. Il impose à ces organismes la mise en place d'un dispositif de gouvernance solide et structuré, capable de garantir une gestion responsable et durable des activités, en cohérence avec les objectifs à moyen terme.

Dans ce cadre, le processus ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*) occupe une place centrale. Introduit par l'Article 45 de Solvabilité II, il constitue un outil de pilotage prospectif permettant d'évaluer de manière continue la solvabilité de l'entreprise au regard de son profil de risque. Généralement déployé sur un horizon de cinq ans, l'ORSA oblige chaque entité à :

- Démontrer sa capacité à identifier, évaluer et gérer ses risques de manière prospective et intégrée.
- Assurer la cohérence entre sa stratégie commerciale, sa politique de souscription et son appétence au risque.

c) Pilier 3 : La communication des informations à destination du public et du superviseur

L'objectif du pilier 3 est de communiquer un ensemble d'informations au public et aux autorités de contrôle. Ces *reporting* sont à remettre tous les ans, dans certains cas chaque trimestre et les autorités de contrôle sont en droit d'exiger des informations complémentaires.

Les supports de communication à destination de l'autorité de contrôle du public doivent être cohérents et auditables et sont principalement :

- *Quantitative Reporting Templates* (QRT) : *Reporting* quantitatif au niveau de l'entité et du groupe, à soumettre trimestriellement ou une fois par an au Luxembourg si les primes brutes émises ne dépassent pas 100 millions d'euros annuel.
- *Regular Supervisory Reporting* (RSR) : Rapport quantitatif et narratif sur la situation financière de l'entité à destination de l'autorité de contrôle. Ses exigences sont définies aux articles 290 à 300 des Actes Délégués.
- *Solvency and Financial Conditions Reporting* (SFCR) : Rapport quantitatif et narratif sur la situation financière de l'entité à destination du public. Ses exigences sont définies aux articles 300 à 303 des Actes Délégués.

3.1 Best Estimate sous Solvabilité 2

Les références réglementaires applicables dans le cadre du calcul de la « meilleure estimation » des engagements, *Best Estimate* (BE), sont les suivantes :

- Sous-section 3, Articles 17 - 36 des Actes Délégués.
- Section 2 – Règles relatives aux provisions techniques - Directive Européenne 2009/138/CE.

Dans le cadre de la réglementation Solvabilité 2, les Actes Délégués définissent la juste valeur des passifs d'assurance non-vie comme étant la somme des flux futurs de trésorerie des contrats (primes, sinistres, dépenses, recours...) pour le calcul de la meilleure estimation, correspond à la valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs prévisionnels actualisé au taux sans risque. Le BE se décompose en BE de primes et BE de sinistres.

Pour pouvoir calculer le BE, trois approches sont généralement acceptées, lesquelles se déclinent en : une approche par simulation, une démarche déterministique et une méthode analytique.

L'approche déterministique est commune en assurance non-vie, où il n'y a pas d'interaction entre l'actif et le passif du bilan, et correspond à l'approche suivie par notre captive de réassurance étudiée. Les sinistres à charge de la captive sont volatiles, peu fréquents et le profil de risque est peu complexe, la démarche déterministique par le principe de proportionnalité est considérée comme suffisante et est acceptée par l'autorité de marché locale.

Le BE de primes correspond à l'espérance des flux futurs sur les sinistres des contrats en portefeuille.

Le BE de sinistres correspond à l'espérance des flux futurs sur les sinistres déjà survenus à la date d'évaluation.

$$Best\ Estimate = \sum_t^T \frac{Flux_t}{(1+r_t)^t}$$

Où :

- $Flux_t$: correspond aux flux de trésorerie des prestations futures, incluant les frais de gestion des sinistres.
- T : horizon de projection des prestations futurs sur la durée de vie totale du portefeuille.
- r_t : taux sans risque de l'European Insurance and Occupational Pension Authority (EIOPA).

a) Ligne d'activités

Les références réglementaires applicables aux notions de lignes d'activités sont les suivantes :

- Article 80 - Segmentation - Directive Européenne 2009/138/CE.
- Articles 55 et annexe I des Actes délégués.
- Article R321-1 du Code des assurances.

Le BE se calcule à la maille par groupe de risques homogènes (GRH) et au minimum par ligne d'activité ou *Line of business* (LoB), afin de calculer le *Best Estimate* des engagements d'assurance et de réassurance de la manière la plus juste possible. La segmentation des engagements suit le principe de prédominance de la substance économique sur la forme juridique. Les risques sont segmentés de manière homogène en fonction de la nature du risque sous-jacent en fonction qu'ils soient issus de techniques d'assurance non-vie ou vie.

b) Frontière des contrats

L'**horizon de projection** des flux futurs s'effectue dans la limite de la frontière des contrats comme défini dans les Actes Délégués à l'Article 18. L'Article 83 de la directive 2009/138/CE, définit la frontière des contrats comme la date à partir de laquelle l'entreprise à :

- (i) le droit unilatéral de résilier le contrat ;
- (ii) le droit unilatéral de refuser les primes à payer dans le cadre du contrat ;
- (iii) la capacité de modifier unilatéralement les primes et les garanties d'assurance qui résultent des risques souscrits.

Le calcul du SCR doit prendre en compte à la fois le portefeuille de risque en cours et les affaires nouvelles dont la souscription est prévue au cours des 12 mois suivants.

c) Taux d'actualisation

L'actualisation des flux de trésorerie entrants et sortants s'effectue au taux sans risque pour prendre en compte le passage du temps. L'actualisation s'effectue en utilisant la courbe des taux de *swap* ajustée du risque de crédit donné par l'*European Insurance and Occupational Pensions Authority* (EIOPA), avec la possibilité de valoriser les engagements à long termes en incluant un ajustement de volatilité dit « *Volatility Adjustment* » tel que :

$$\text{Taux d'actualisation} = \text{Taux Swap de Marché} - \text{Crédit Risk Adjustment} + \text{Volatility Adjustment}$$

Où :

- *Taux Swap de Marché* : courbe des taux *swaps* de marché.
- *Crédit Risk Adjustment* : Ajustement permettant de retirer la jambe variable du taux de swap. Il sert à compenser la perte potentielle que pourrait subir la partie receveuse du taux variable en cas de défaut de la contrepartie.
- *Volatility Adjustment* : Ajustement pour lisser l'impact des fluctuations des *spreads* de crédit « *corporates* » et souverains sur le taux sans risque à la date de calcul.

Dans le cadre de ce mémoire, la courbe des taux sans risque sans « *Volatility Adjustment* » est utilisée, étant donné que la captive de réassurance souscrit des risques non-vie à développement court et moyen terme.

Le calcul du BE est effectué pour les entités à la maille non-vie, vie, santé similaire à la vie et santé non-similaire à la vie. Le calcul s'effectue à la maille par LoB, avec la prise en compte des engagements existants et avec la possibilité de prendre en compte d'éventuels versements de primes pour les contrats en stock à la date d'évaluation, comme défini à l'Article 17 dans les Actes Délégués.

Pour calculer la provision Best Estimate :

- (+) les sinistres
- (+) les frais (administratif, gestion etc.)
- (+) commission à payer
- (-) les primes
- (-) commissions à recevoir d'un rétrocessionnaire

3.2 Décomposition SCR & MCR

Selon l'Article 101 de la directive 2009/138/CE, le calcul du SCR repose sur l'hypothèse de continuité d'exploitation. Il doit être calibré de manière à intégrer l'ensemble des risques quantifiables auxquels l'entreprise est exposée. Pour estimer le capital nécessaire à la couverture des fluctuations futures de sinistralité, il convient de disposer d'une distribution projetée des fonds propres à un an.

Différentes approches sont prévues pour la détermination du SCR :

- Formule standard simplifiée.
- Formule standard.
- Formule standard avec paramètres propres (USP) à l'entreprise.
- Modèle interne partiel.
- Modèle interne complet.

Dans le cadre de cette étude, nous appliquons la formule standard ainsi que la formule standard intégrant des paramètres USP. Le calcul du SCR s'articule sur une modélisation structurée en modules et sous-modules de risques, qui seront présentés dans la section suivante.

La figure 7 ci-dessous présente l'arborescence de la formule standard pour le calcul du SCR :

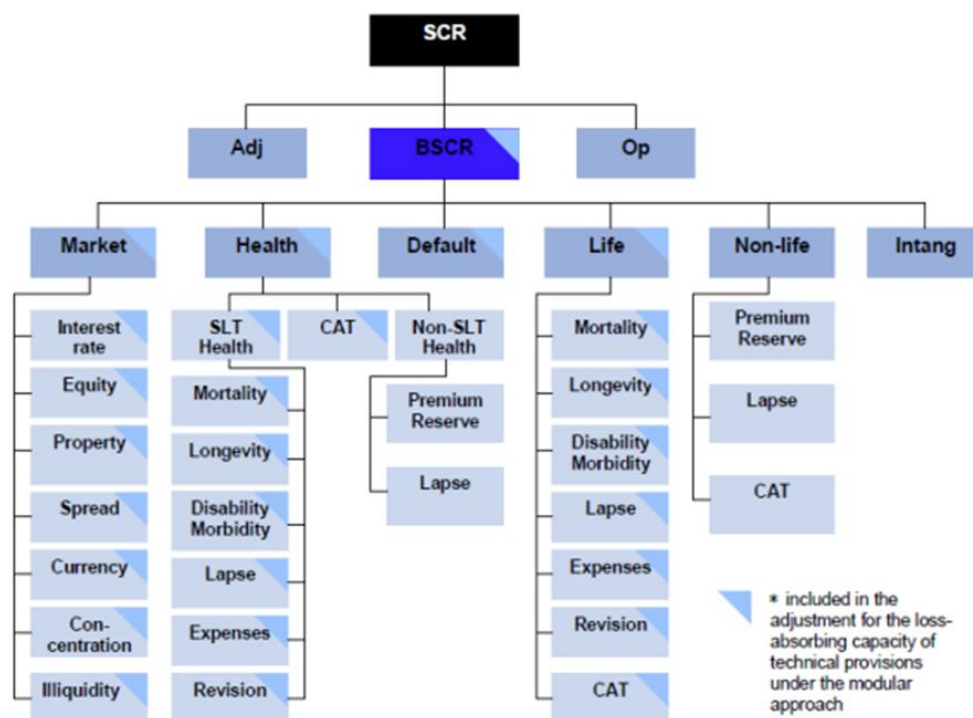


Figure 7 - Arborescence de la formule standard pour le SCR de Solvabilité 2

Le SCR sous la formule standard est la somme des composantes suivantes :

$$SCR = BSCR + Adj + SCR_{op}$$

Où :

- *BSCR* : *Basic Solvency Capital Requirement*, soit le Capital de Solvabilité Requis de base brut de capacité d'absorption des pertes.
- *Adj* : Ajustement qui permet de tenir compte de la capacité d'absorption des pertes par les impôts différés et par les provisions techniques.
- *SCR_{op}* : le capital de solvabilité requis pour le risque opérationnel, équivalent à une défaillance des systèmes et des processus de gestion.

La formule fermée du BSCR :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j} + SCR_{int}$$

Où :

- *SCR_i* Et *SCR_j* correspondent respectivement au SCR des modules de risque *i* et *j*.
- *SCR_{int}* : SCR lié aux immobilisations incorporelles.
- *Corr_{i,j}* : matrice de corrélation entre les modules de risque *i* et *j*.

La matrice de corrélation entre les différents modules de risques dans la formule standard pour le calcul du SCR par l'annexe IV, Directive 2009/138/CE :

i\j	Marché	Défaut	Vie	Santé	Non-vie
Marché	100%	25%	25%	25%	25%
Défaut	25%	100%	25%	25%	25%
Vie	25%	25%	100%	25%	0%
Santé	25%	25%	25%	100%	0%
Non-vie	25%	25%	0%	0%	100%

Tableau 4 - Matrice de corrélation entre les modules de risque i et j de la formule standard

Dans le cadre de ce mémoire, le module le plus consommateur de capital et levier de notre étude est celui de primes et réserve. La captive de réassurance étudiée n'est pas sujette au de risque de cessation non-vie car le groupe industriel propriétaire ne résilie pas les contrats pour lesquels les primes ont été versées ou ne met pas fin aux garanties souscrites. Le SCR non-vie est donc composé uniquement des sous-modules de risque de primes et réserve et catastrophe non-vie.

3.3 SCR Non-Vie - Risque de primes et de réserve

a) SCR Non-Vie

Risque de souscription non-vie : Incertitude liées à l'évaluation des engagements d'assurance non-vie. L'incertitude peut être liée à la tarification, au provisionnement, au comportement des assurés ou par suite d'événements catastrophiques. Le risque de souscription non-vie est défini dans le Code des Assurances, Article R352-1 comme étant : le risque de perte ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, en raison d'hypothèses inadéquates en matière de tarification et de provisionnement. Le module du risque de souscription non-vie se divise en 3 sous-modules que sont le risque de primes, le risque de réserve et le risque catastrophe.

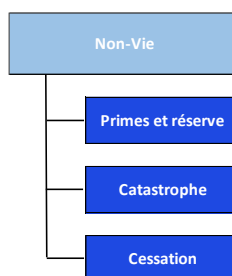


Figure 8 - Structure du risque de souscription en non-vie de la formule standard

L'exigence en capital du risque de souscription non-vie est calculé de la façon suivante :

$$SCR_{Non-Life} = \sqrt{\sum_{i,j} CorrNL_{(i,j)} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

Où :

- SCR_i Et SCR_j : SCR des modules i et j .
- $CorrNL_{(i,j)}$: Coefficient de corrélation relatif au risque de souscription non-vie pour les sous-modules i et j . La matrice de corrélation est présente en annexe 2.

Risque de primes : Evaluation du risque de sous-tarification des contrats en portefeuille. C'est-à-dire le risque que les primes ne suffisent pas à couvrir les sinistres initialement prévus lors de la tarification du risque pour donner suite à une variation de la sévérité et de la fréquence des sinistres à 1 an. L'erreur de tarification est la différence entre le résultat prévu et le résultat obtenu.

Risque de réserve : Evaluation du risque de sous-provisionnement des contrats en portefeuille. Le risque trouve son origine dans les cadences de règlement des paiements en lien avec le montant des sinistres déjà survenus à horizon un an.

Le SCR de primes et réserve est :

$$SCR_{NL\ Prem, Res} = 3 \cdot \sigma_{NL} \cdot V_{NL}$$

Où :

- σ_{NL} : Ecart-type du risque de primes et de réserve non-vie.
- V_{NL} : Mesure du volume du risque de primes et réserves non-vie.

Volume sous risque pour le risque de primes du segment d'activité s :

$$V_{(prem,s)} = \max[P_s; P_{(last,s)}] + FP_{(existing,s)} + FP_{(future,s)}$$

Où :

- P_s : Volume de primes acquises, nettes de réassurance, attendu sur les 12 prochains mois pour le segment d'activité s .
- $P_{(last,s)}$: Volume de primes acquises, nettes de réassurance, durant les 12 derniers mois pour le segment d'activité s .
- $FP_{(existing,s)}$: Valeur actuelle du montant prévisionnel de primes, nettes de réassurance, acquises au-delà des 12 mois à venir et relatives aux contrats en portefeuille à la date d'évaluation, pour le segment d'activité s .
- $FP_{(future,s)}$: Valeur actuelle du montant prévisionnel de primes, nettes de réassurance, acquises au-delà des 12 mois à venir et relatives aux contrats en portefeuille durant les 12 mois suivants la date d'évaluation, pour le segment d'activité s .

Volume pour le risque de réserve pour le segment s :

$$V_{(res,s)} = \max(0; PCO_s)$$

Où :

- PCO_s : Best Estimate de la provision pour sinistres nette de réassurance à la date d'évaluation à payer pour le segment s .

Le volume pour le **risque de prime et de réserve** par segment s :

$$V_s = (V_{(prem,s)} + V_{(res,s)}) \cdot (0,75 + 0,25 \cdot DIV_s)$$

Où :

- DIV_s : Facteur de diversification géographique du risque de primes et réserve du segment s .
- $V_{(prem,s)}$: Volume sous-risque pour le risque de primes du segment s .
- $V_{(res,s)}$: Volume sous-risque pour le risque de réserve du segment s .

La liste des segments d'activité est en annexe 2.

Le **facteur de diversification géographique** se calcule par zone géographique r et par segment d'activité s à l'exception de la LoB crédit (6) et de la réassurance non-proportionnelle non-vie (LoB 10, 11 et 12). Le facteur de diversification géographique par zone géographique j et par segment d'activité s :

$$DIV_s = \frac{\sum_r (V_{(prem,r,s)} + V_{(res,r,s)})^2}{[\sum_j (V_{(prem,r,s)} + V_{(res,r,s)})]^2}$$

Où :

- $V_{(prem,r,s)}$: Volume sous-risque pour le risque de primes du segment s et la zone géographique r .
- $V_{(res,r,s)}$: Volume sous-risque pour le risque de réserve du segment s et la zone géographique r .

Le **volume global sous risque** correspond à la somme de chaque segment d'activité s du risque de prime et de réserve à la date d'évaluation :

$$V_{NL} = \sum_s V_s$$

Le **coefficient de variation globale pour le segment d'activité s** , net de réassurance, est le ratio entre les écart-types des sous-modules de risque de primes et de réserve en tenant compte d'un niveau de corrélation de 50% sur le volume globale sous-risque.

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{\sigma_{(prem,s)}^2 \cdot V_{(prem,s)}^2 + \sigma_{(prem,s)} \cdot V_{(prem,s)} \cdot \sigma_{(res,s)} \cdot V_{(res,s)} + \sigma_{(res,s)}^2 \cdot V_{(res,s)}^2}}{V_{(prem,s)} + V_{(res,s)}}$$

La partie au numérateur correspond à l'écart-type agrégé.

Où :

- $\sigma_{(prem,s)}$: Ecart-type du risque de prime non-vie pour le segment s qui peut se calculer avec des données nettes de réassurance ou brutes auxquels cas il faut appliquer le facteur d'ajustement de la réassurance non-proportionnelle fixé par l'EIOPA.
- $\sigma_{(res,s)}$: Ecart type du risque de réserve non-vie pour le segment s qui se calcule uniquement avec des données nettes de réassurance.
- $V_{(prem,s)}$: Mesure du volume de primes pour le segment s .
- $V_{(res,s)}$: Mesure du volume de réserve pour le segment s .

Lors du calcul du **coefficient de variation global**, tous les segments d'activités non-vie sont agrégés, sont évalués en agréant les écarts-types des segments d'activité, puis en divisant par le volume total :

$$\sigma_{NL} = \frac{1}{V_{NL}} \cdot \sqrt{\sum_{s,t} CorrS_{(s,t)} \cdot \sigma_s \cdot V_s \cdot \sigma_t \cdot V_t}$$

Où :

- V_{NL} : Volume total de primes et de réserve pour le risque de prime et réserve non-vie.
- $CorrS_{(s,t)}$: Coefficient de variation pour les risques de primes et réserve en non-vie.
- σ_s et σ_t : Ecart-types respectifs des segments d'activités s et t du risques de prime et réserve non-vie.
- V_s et V_t : Mesure du volume respectifs des segments d'activités s et t du risque de primes et réserve en non-vie.

Le facteur d'ajustement pour la réassurance non proportionnelle pour le risque de primes :

$$\sigma_{(prem,s)} = \sigma_{(prem,s,brute)} \times NP_s$$

Où :

- $\sigma_{(prem,s)}$: Ecart-type du risque de primes non-vie pour le segment s qui peut se calculer avec des données nettes de réassurance ou brutes auxquels cas il faut appliquer le facteur d'ajustement de la réassurance non-proportionnelle fixé par l'EIOPA.
- $\sigma_{(prem,s,brute)}$: Ecart-type du risque de primes non-vie pour le segment s brut de réassurance.
- NP_s : Facteur d'ajustement pour prendre en compte la réassurance non-proportionnelle pour le segment s.

Le tableau ci-dessous, présente les coefficients de variation du risque de primes et de réserve par segment sous Solvabilité 2 :

	Coefficient de variation – risque de primes $\sigma_{(prem,s)} = \sigma_{(prem,s,brute)} \times NP_s$		Coefficient de variation – risque de réserve
Segment Solvabilité II	$\sigma_{(prem,s,brute)}$	NP	$\sigma_{(res,s)}$
1. Responsabilité civile (RC) Automobile	10%	80% ou 100%*	9%
2. Dommages Automobiles	8%	100%	8%
3. Marine, aviation, transport (MAT)	15%	100%	11%
4. Incendie et autres dommages aux biens (DAB)	8%	80% ou 100%*	10%
5. Responsabilité Civile (RC) Générale	14%	80% ou 100%*	11%
6. Crédits et cautions	12%	100%	19%
7. Protection juridique	7%	100%	12%
8. Assistance	9%	100%	20%
9. Pertes pécuniaires diverses (PPD)	13%	100%	20%
10. Réassurance accidents non-proportionnelle	17%	100%	20%
11. Réassurance non-proportionnelle MAT	17%	100%	20%
12. Réassurance dommages non-proportionnelle	17%	100%	20%

* Les facteurs d'ajustement pour la réassurance non-proportionnelle pour les LoB1, 4 et 5 sont fixés à 80% et à 100% autrement.

Tableau 5 - Coefficient de variations par type de risque et par segment d'activité

4. ORSA: Own Risk and Solvency Assessment

4.1 Définition et références réglementaires

Les références réglementaires applicables dans le cadre de l'ORSA sont les suivantes :

- Article 45 – Évaluation interne des risques et de la solvabilité – Directive 2009/138/CE.
- Article 110 – Écarts significatifs par rapport aux hypothèses de la formule standard – Directive 2009/138/CE, disponible en Annexe 4.
- Article 246 des Actes délégués (modèle interne).
- Lignes directrices de l'EIOPA sur l'ORSA (EIOPA-BoS-14/259).

L'ORSA est un processus imposé par le Pilier 2 de Solvabilité II. Il vise à améliorer la compréhension et la gestion des risques. Il doit être réalisé au moins une fois par an, ou à la suite de tout changement significatif du profil de risque, comme l'obtention d'un nouvel agrément de réassurance. Le rapport est soumis à l'autorité de contrôle après validation par le conseil d'administration.

Ce processus prospectif permet d'évaluer la capacité d'une entreprise à identifier, mesurer et gérer les facteurs susceptibles d'affecter sa situation financière et sa solvabilité. L'ORSA constitue un outil stratégique de pilotage interne, structuré autour de trois volets :

- L'évaluation du besoin global de solvabilité en fonction du profil de risque, de la tolérance au risque et de la stratégie à court, moyen et long terme.
- L'évaluation prospective du respect continu des exigences réglementaires (SCR, MCR, provisions techniques), sur la base d'un *business plan* et de *stress tests*.
- L'analyse de l'écart entre le profil de risque réel de l'entreprise et les hypothèses utilisées dans le calcul du SCR via la formule standard.

Les volets un et trois sont essentiels, ils permettent de juger de l'adéquation de la formule standard au profil de risque de l'entreprise et de vérifier sa capacité à faire face à ses engagements dans 99,5 % des cas sur une base annuelle.

L'ORSA permet donc d'évaluer les spécificités du profil de risque d'une captive de réassurance. Souvent peu diversifié et concentré sur les risques de la maison mère, le profil d'une captive peut s'écarter du calibrage moyen prévu par la formule standard. D'où l'intérêt d'envisager l'usage d'USP, adaptés aux particularités de la captive non-vie.

Contrairement au Pilier 1, l'ORSA autorise différentes méthodes de calibration des USP. Ce mémoire se concentre sur celles définies par les Actes délégués, qui s'imposent à la captive concernée.

4.2 Écart du profil de risque par rapport à la Formule Standard

La troisième exigence de l'ORSA vise à analyser l'écart du profil de l'entreprise par rapport à la formule standard. Cette troisième évaluation peut se résumer en trois étapes :

- Analyse qualitative de l'écart entre le profil de risque « réel » de l'entreprise et les hypothèses sous-jacentes du calcul du SCR dans la formule standard.
- Cohérence entre l'ensemble des risques pris en compte dans le calcul du SCR et ceux auxquels l'entreprise est réellement sujette.
- Évaluation de la pertinence des corrélations appliquées dans le calcul du SCR au regard du profil de risque de l'entreprise.

Tous les risques quantifiables ne sont pas nécessairement pris en compte dans la formule standard. Pour certains risques, il est généralement admis que l'exposition n'est pas suffisamment matérielle et donc une quantification dans le cadre d'une formule standard n'est pas adaptée. Ces risques sont alors gérés de manière qualitative.

La formule standard étant calibrée sur un panel de portefeuilles européens, les caractéristiques suivantes ne sont pas prises en compte dans la calibration :

- La fréquence et le coût des sinistres impactent les méthodes de tarification et de provisionnement.
- La taille du portefeuille et sa diversification impactent la volatilité et la distribution des sinistres.
- Des techniques d'atténuation du risque telle que les structures de réassurance non-proportionnelle en excédents de sinistres (XS), les structures *Stop-loss* et la réassurance par tranche sont absentes.

En sus, les risques suivants ne sont pas explicitement formulés dans le modèle standard :

- **Risque d'inflation** : la sensibilité de la valeur des actifs, des passifs et des instruments financiers aux changements des taux d'inflation ou de la volatilité des taux d'inflation n'est pas modélisé en tant que sous module de risque distinct. Toutefois, pour les affaires non-vie, le risque d'inflation est supposé indirectement inclus dans le calibrage des chocs à la hausse et à la baisse des taux d'intérêt et dans le paramètre de volatilité des réserves.
- **Risque de liquidité** : le risque que l'entreprise soit incapable de réaliser ses investissements en vue d'honorer ses obligations financières à leur échéance n'est pas explicitement visé dans la formule standard. Il est supposé que l'exigence de capital pour couvrir le risque de liquidité soit insuffisante et doit être couverte par une politique de gestion du risque de liquidité explicite au sein du système de gestion globale des risques mis en place.
- **Risque réglementaire et législatif** : le risque que l'entreprise soit incapable d'adapter son profil de risque en réponse aux changements soudains ou inattendus de l'environnement juridique.
- **Risque de primes et de réserve** : la segmentation des engagements d'assurance peut être en substance moins diversifiée par le nombre de ligne d'activités pour une entreprise captive que la structure moyenne du portefeuille utilisé pour calibrer la formule standard.
- **Risque de réputation** : le risque de réputation correspond à tout ce qui pourrait avoir un impact négatif sur la réputation d'une organisation (actions, événements, circonstances...). Ce risque comprend :
 - Un risque d'image se définissant comme l'écart entre l'image que se donne l'entreprise en interne et l'image perçue à l'extérieur.
 - Un risque d'organisation, conséquence d'un risque interne à l'entreprise (risque opérationnel, risque financier, etc.)

III. Méthodes et données pour le calibrage des USP

5. Approche USP – Concept généraux

5.1 Références réglementaires

Les références réglementaires applicables dans le cadre des paramètres spécifiques à l'entreprise (USP) sont les suivantes :

- Article 104 - Conception du capital de solvabilité requis de base, 7, de la Directive 2009/138/CE, disponible en Annexe 4.
- Section 12 - Paramètres propres à l'entreprise, Articles 218 à 220, des Actes Délégués.

- Annexes XVII – Actes Délégués – Méthodes standardisées pour calculer les paramètres propres à l'entreprise.
- Norme d'exécution des USP du Journal Officiel de L'Union Européenne 24 mars 2015.

Une modification des paramètres propres à l'entreprise peut s'effectuer sur :

- La volatilité du risque de primes des modules non-vie et santé non-similaire à la vie.
- La volatilité du risque de réserve des modules non-vie et santé non-similaire à la vie.
- Le facteur d'ajustement de la réassurance non-proportionnelle des modules non-vie et santé non-similaire à la vie.
- Le risque de révision des modules vie et santé et santé similaire à la vie.

La figure 9 ci-dessous présente le périmètre d'application des USP par module et sous-module de risque au sein des Actes Délégués.

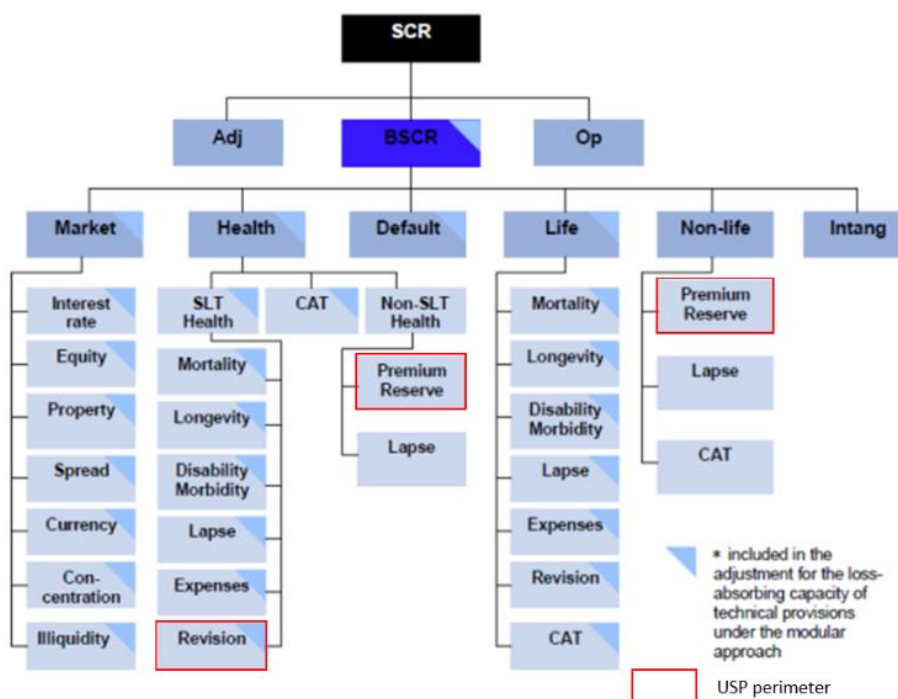


Figure 9 - Périmètre d'application des USP

Il existe au sein des Actes Délégués plusieurs méthodes pour calculer les paramètres propres à l'entreprise, à savoir :

- La méthode du risque de prime par la méthode du maximum de vraisemblance.
- La méthode de la réassurance non proportionnelle.
- La méthode du risque de réserve par la méthode du maximum de vraisemblance.
- La méthode du risque de réserve par la méthode de Merz et Wuthrich.
- La méthode du risque de révision.

Dans le cadre de ce mémoire, la captive de réassurance étudiée, CAP RE, ne souscrit pas de risque santé et n'est donc pas concernée par la méthode du risque de révision, qui ne sera pas traitée dans ce mémoire.

5.2 Paramètres propres à l'entreprise

L'utilisation de paramètres spécifiques à l'entreprise (USP) permet de remplacer certains paramètres de la formule standard, qui ont été définis pour refléter une moyenne des acteurs européens, par des paramètres estimés à partir des données propres à l'entité et représentatifs de ses risques souscrits.

Dans le cadre du Pilier 1, l'EIOPA autorise ce remplacement pour le calcul du SCR ou dans l'ORSA, considérant que la formule standard, conçue avec prudence, ne reflète pas toujours fidèlement le profil de risque de chaque acteur.

L'approche USP constitue une solution intermédiaire entre formule standard et modèle interne. Elle présente l'avantage d'une mise en œuvre plus simple et rapide, tout en permettant une meilleure adéquation avec le profil de risque réel. Elle peut également servir d'étape préparatoire vers un modèle interne.

L'objectif est de corriger certaines distorsions de la formule standard, notamment lorsqu'elle aboutit à une surestimation du capital requis. Dès lors que la volatilité des ratios sinistres/primes est bien comprise ou maîtrisée, le recours aux USP devient pertinent.

Les méthodes autorisées par les Actes Délégués sont présentées à partir de la section 7, ainsi que les tests statistiques exigés pour qu'une demande d'agrément soit recevable par l'autorité de contrôle, en l'occurrence le Commissariat aux Assurances (CAA) du Grand-Duché de Luxembourg.

Ce mémoire examine la mise en place d'USP dans les calculs du pilier 1 pour répondre aux limites constatées en matière de diversification et de pondération du module primes et réserve dans le calcul du SCR de CAP RE. L'analyse se limite aux méthodes prévues dans les Actes Délégués. À ce stade, aucune demande d'agrément n'a été engagée.

5.3 Processus d'approbation

Afin de mettre en œuvre des paramètres propres à l'entreprise (en remplacement de ceux par défaut dans la formule standard), une procédure d'approbation doit être engagée par l'organisme concerné via la soumission d'un dossier à l'autorité de contrôle, ici le CAA. Ce dossier doit inclure :

- Une démonstration que les paramètres de la formule standard ne correspondent pas au profil de risque de l'entreprise.
- Justification que les données exploitées sont complètes, fiables et adaptées à l'estimation de ces paramètres.
- Une liste complète des paramètres de la formule standard que l'entreprise souhaite remplacer, en évitant tout arbitrage opportuniste visant à optimiser artificiellement le capital requis.
- La date envisagée pour l'entrée en vigueur des paramètres propres à l'entreprise.
- Une présentation des méthodes de calibrage utilisées, accompagnée des calculs, résultats et validation des hypothèses sous-jacentes.
- Des preuves que les méthodes de calibrage sont conformes aux Actes Délégués, avec validation et acceptabilité des hypothèses utilisées.
- Une justification du choix de la méthode retenue, notamment en cas d'alternatives, en privilégiant celle qui est soit la plus adaptée aux données disponibles, soit la plus prudente.
- Un document attestant de la mise en œuvre d'un processus interne garantissant l'application rigoureuse des paramètres propres à l'entreprise.

Le CAA vérifie la qualité et la cohérence :

- De la justesse des résultats obtenus.
- De l'adéquation des méthodes appliquées aux données disponibles.
- De la validité des paramètres retenus et des méthodes de calcul.
- Du respect des hypothèses propres à chaque méthode.

- De la correspondance des données au profil de risque de l'entreprise.
- Du décalage entre le profil de risque de l'entreprise et celui présumé par la formule standard, sur un horizon de 12 mois

Le CAA évalue également la pertinence des paramètres et la robustesse de la méthode de calcul, avec une révision au moins annuelle. Une fois l'approbation accordée, le retour à la formule standard n'est possible que si l'entreprise démontre que les hypothèses initiales ne sont plus valables.

5.4 Facteur de crédibilité par ligne d'activité

La valeur de l'USP calibré est ajustée d'un facteur de crédibilité « c » pour prendre en compte le caractère « crédible » de l'estimation en fonction de la profondeur de l'historique au regard des données à disposition de l'entreprise par segment d'activité s .

L'annexe XVII des Actes Délégués présente la formule de l'USP final comme étant :

$$X_{(s, USP)} = c \times X_{(s, U)} + (1 - c) \times X_{(s)}$$

- $X_{(s, USP)}$: le paramètre USP final.
- $X_{(s, U)}$: le paramètre USP « intermédiaire » du segment d'activité s et calibré par une des méthodes standards proposées.
- $X_{(s)}$: le paramètre de la Formule Standard du segment d'activité s .
- c : le facteur de crédibilité du segment d'activité s en fonction de la profondeur d'historique disponible.

Les facteurs de crédibilité des segments d'activité Responsabilité Civile Automobile, Responsabilité Civile Générale et Crédits et Caution, respectivement les LoB 1, 5 et 6 visés à l'annexe II des Actes Délégués, en fonction de la profondeur d'historique sont :

Profondeur d'historique (années)	Facteur de crédibilité c
5	34%
6	43%
7	51%
8	59%
9	67%
10	74%
11	81%
12	87%
13	92%
14	96%
15 et plus	100%

Figure 10 - Facteur de crédibilité pour les segments 1, 5 et 6.

Les facteurs de crédibilité pour les autres LoB non-vie visés à l'annexe II des Actes Délégués, en fonction de la profondeur d'historique sont :

Profondeur d'historique (années)	Facteur de crédibilité c
5	34%
6	51%
7	67%
8	81%
9	92%
10 et plus	100%

Figure 11 - Facteur de crédibilité pour les segments 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11 et 12.

La **durée** correspond pour la méthode du risque de primes pour le modèle Log-Normale au nombre d'**années d'accident** pour lesquelles des données sont disponibles.

Pour la méthode du risque de réserve, la durée dans le modèle Log-Normale correspond au **nombre d'exercices** pour lesquels des données sont disponibles. Quant au modèle de Merz-Wüthrich, la durée est égale au **nombre d'années d'accident** pour lesquelles des données sont disponibles. Enfin, la durée pour la méthode de la réassurance non proportionnelle correspond au **nombre d'années de déclarations** pour lesquelles des données sont disponibles.

Il est important de noter qu'un minimum de cinq années d'historiques est requis quelle que soit la LoB considérée. Le facteur de crédibilité est en fonction de la profondeur d'historique et non du volume de primes ou de réserve.

a) Paramètres pouvant être remplacés par des USP

Les paramètres de la formule standard pouvant être remplacés par des paramètres propres à l'entreprise sont au niveau des sous-modules du risque de primes et de réserve non-vie et santé non assimilable à la vie. Comme détaillé dans l'introduction de ce mémoire, la captive de réassurance non-vie étudiée suscite uniquement des risques non-vie.

Pour le **risque de primes**, les paramètres suivants peuvent être remplacés par des USP :

- Le coefficient de variation associé au risque de primes brut de réassurance $\sigma_{(prem,s,gross)}$.
- Le coefficient de variation associé au risque de primes net de réassurance $\sigma_{(prem,s)}$.
- Le facteur d'ajustement de la réassurance non-proportionnelle du segment d'activité s NP_s .

Pour le **risque de réserve**, le coefficient de variation associé au risque de réserve net de réassurance $\sigma_{(res,s)}$ peut être remplacé par un paramètre propre à l'entreprise.

b) Point d'attention et contraintes d'application des USP

Pour un segment d'activité s , il n'est pas possible d'utiliser simultanément un paramètre propre associé à un coefficient de variation de primes ($\sigma_{(prem,s,gross)}$ ou $\sigma_{(prem,s)}$) et NP_s . De plus, le facteur d'ajustement de la réassurance non-proportionnelle NP_s ne peut être calibré uniquement s'il existe un contrat de réassurance en excédent de sinistres sur le segment d'activité s considéré.

Ci-dessous un résumé des méthodes étudiées pour le calibrage des USP des Actes Délégués dans le cadre de ce mémoire :

Risque	Méthode	Captive assujettie
Risque de primes	Log-Normale	Oui
	Réassurance non proportionnelle	Oui
Risque de réserves	Log-Normale	Oui
	Triangle Merz-Wüthrich (Chain Ladder)	Oui
Risque de révision		Non

Tableau 6 - Liste des méthodes des Actes Délégués pour calibrer les USP

CAP RE n'est pas assujettie à la méthode de révision, définie par les Actes Délégués, car elle ne souscrit pas de risques santé non-similaire à la vie.

6. Qualité des données au sens de Solvabilité 2

Afin de garantir une évaluation des risques probante, de perfectionner les processus en cours et d'éclairer la prise de décision, la qualité des données s'avère un concept fondamental de la gouvernance des données au sein du cadre prudentiel Solvabilité 2. D'après l'Article 19 des Actes Délégués, les données utilisées doivent être **complètes, exactes et appropriées**.

Les références réglementaires applicables pour la qualité des données sont les suivantes :

- Article 82 de la Directive 2009/138/CE, Qualité des données et application d'approximations, y compris par approches au cas par cas, pour les provisions techniques.
- Article 48 Directive 2009/138/CE, Fonction actuarielle.
- Chapitre III, Section 2 des Actes Délégués, Qualité des données.
- Article 19 des Actes Délégués, Données utilisées dans le calcul des provisions techniques.
- Article 20 des Actes Délégués, Limites des données.
- Article 21 des Actes Délégués, Utilisation appropriée d'approximations pour le calcul de la meilleure estimation.
- Article 219 Actes Délégués, Critères relatifs aux données pour les paramètres propres à l'entreprise.
- Article 272 Actes Délégués, Fonction actuarielle.
- Guidelines on undertaking-specific parameters, EIOPA-BoS-14/178.

La source de données de l'entreprise peut être **interne** ou **externe** à l'organisme. Dans le cas de données externes, l'organisme doit être en mesure de justifier leur utilisation par rapport aux données internes ainsi que leurs origines en accord avec l'Article 19 des Actes Délégués.

L'**exhaustivité** des données est assurée lorsque :

- Les données doivent permettre d'identifier les principaux groupes de risques homogènes de l'engagement évalué.
- Une granularité suffisante pour identifier les tendances et l'évolution des risques sous-jacents sur l'année à venir.
- Les retraitements de données sont justifiés.

L'**exactitude** des données est assurée lorsque :

- Elles ne présentent pas d'erreurs matérielles ou d'omissions.
- Elles sont cohérentes sur la période étudiée.
- Les informations sont stockées de manière fiable et mise à jour fréquemment.

Les données sont considérées comme **appropriée** lorsque :

- Elles sont adaptées à l'usage qui leur est destiné (valorisation des provisions techniques, l'établissement d'hypothèses ...).
- Les données reflètent les risques auxquels est exposé l'assureur actuelle et à venir.
- Elles sont cohérentes avec la structure du portefeuille, le contexte économique et légal à venir.
- Tout ajustement vise à améliorer le caractère représentatif des données pour l'année à venir.

Une amélioration continue des process de qualité des données et de traçabilité est nécessaire sur base de la Directive Solvabilité II. Un système et un cadre de contrôle auditable par le réviseur d'entreprise et les autorités de contrôle (CAA, EIOPA) sont également requis.

Dans le cadre des USP, les données utilisées ne peuvent pas conduire à une augmentation de l'erreur d'estimation.

Les retraitements nécessaires effectués et la qualité des données dans le cadre de ce mémoire sont en section 11.

Ces exigences de qualité des données sont particulièrement critiques dans l'application des méthodes de calibrage des USP, notamment celle du risque de primes, détaillée ci-après.

7. Méthodes du risque de primes – Méthode Log-Normale

7.1 Méthode et notations

La méthode du risque de primes est présentée ci-dessous pour une seule ligne d'activité *s*, dans un souci de simplification et de ne pas alourdir les notations présentes.

a. Données pour le risque de primes – méthode Log-Normale.

Les données nécessaires pour l'application de la méthode Log-Normale du risque de primes sont définies dans l'annexe XVII des Actes Délégués, paragraphe B.

Les données servant à l'estimation de l'écart type de la méthode Log-Normale associés au risque de primes sont les suivantes :

- Les primes acquises par année de survenance et par ligne d'activité.
- Les pertes cumulées (ou charge de sinistre) en vision un an par année de survenance et par ligne d'activité. Les pertes cumulées correspondent à la somme :
 - Des paiements versés durant la première année de développement des sinistres incluant les frais de gestion des engagements.
 - Du *Best Estimate* des provisions pour sinistre à payer, évalué après la première année de développement, incluant les frais de gestion des engagements.
- Le nombre total de sinistre par année de survenance.
- Le montant de pertes cumulées par sinistre sont disponibles sur toute la période d'historique.

Les données doivent respecter l'ensemble des exigences suivantes :

- Être représentatives du risque sur les 12 mois à venir.
- Être disponibles pour cinq années de survenance consécutives et couvrir au moins un cycle complet.
- Les pertes cumulées contiennent les frais encourus pour la gestion des engagements d'assurance et de réassurance.
- Lorsque les données sont nettes de réassurance ou de véhicule de titrisation, elles doivent refléter la structure de réassurance sur les 12 mois à venir.

Remarques : les données doivent être écartées des sinistres catastrophiques qui sont évalués dans le sous-module catastrophe à cet effet lors du calcul du SCR.

Notations

Notation	Définition
T	Nombre d'années d'historique disponible avec $(5 \leq T \leq 20)$.
t	$t^{\text{ième}}$ Année de survenance avec $t \in \{1, \dots, T\}$.
j	$j^{\text{ième}}$ Année de développement avec $j \in \{1, \dots, J\}$.
X_t	Primes acquises pour l'année de survenance t à la ligne d'activité s .
Y_t	Pertes cumulées de sinistralité en vision un an par année de survenance et par ligne d'activité s .
β	Ratios sinistres à primes, $(\frac{\text{Sinistres}}{\text{Primes}})$.
δ	Paramètre de mélange obtenu par le processus du maximum de vraisemblance avec la contrainte $0 \leq \delta \leq 1$.
σ	Écart-type du risque étudié.
$D_{t,j}$	Paiements incrémentaux pour l'année de survenance t et de développement j .
$PCO_{t,j}$	<i>Best Estimate</i> des provisions pour sinistre à payer, évalué après la première année de développement incluant les frais de gestion des engagements.

Tableau 7 - Risque de primes : notations de la méthode Log-Normale

La variable Y_t représente les pertes cumulées de sinistralité (charge de sinistres) en vision un an par année de survenance et par ligne d'activité s , se détermine par la relation suivante :

$$Y_t = D_{t,j} + PCO_{t,j}$$

La figure 12 ci-dessous représente le *Best Estimate* des provisions pour sinistre à payer par année de survenance et années de développement.

		Année de développement					
Année de survenance	i \ j	1	2	3	4	5	6
	1	$PCO_{1,1}$	$PCO_{1,2}$	$PCO_{1,3}$	$PCO_{1,4}$	$PCO_{1,5}$	$PCO_{1,6}$
	2	$PCO_{2,1}$	$PCO_{2,2}$	$PCO_{2,3}$	$PCO_{2,4}$	$PCO_{2,5}$	
	3	$PCO_{3,1}$	$PCO_{3,2}$	$PCO_{3,3}$	$PCO_{3,4}$		
	4	$PCO_{4,1}$	$PCO_{4,2}$	$PCO_{4,3}$			
	5	$PCO_{5,1}$	$PCO_{5,2}$				
	6	$PCO_{6,1}$					

Figure 12 - Triangle des Best Estimate des provisions sinistres par année de survenance et de développement

La figure 13 ci-dessous représente les paiements incrémentaux par année de survenance et de développement.

		Année de développement					
Année de survénance	i\j	1	2	3	4	5	6
	1	$D_{1,1}$	$D_{1,2}$	$D_{1,3}$	$D_{1,4}$	$D_{1,5}$	$D_{1,6}$
	2	$D_{2,1}$	$D_{2,2}$	$D_{2,3}$	$D_{2,4}$	$D_{2,5}$	
	3	$D_{3,1}$	$D_{3,2}$	$D_{3,3}$	$D_{3,4}$		
	4	$D_{4,1}$	$D_{4,2}$	$D_{4,3}$			
	5	$D_{5,1}$	$D_{5,2}$				
	6	$D_{6,1}$					

Figure 13 - Triangle des paiements incrémentaux par année de survénance et de développement

A titre d'exemple, pour 6 années de survénance, les pertes cumulées de sinistralité en vision un an par année de survénance sont des variables aléatoires de la forme suivante :

$$Y_1 = D_{1,1} + PCO_{1,1}$$

$$Y_2 = D_{2,1} + PCO_{2,1}$$

...

$$Y_6 = D_{6,1} + PCO_{6,1}$$

7.2 Présentation des hypothèses

Les données utilisées doivent respecter les hypothèses suivantes :

1. Pour une année de survénance t , les pertes cumulées en vision un an sont proportionnelles aux primes acquises, ainsi on a : $E(Y_t) = \beta X_t$.
2. Le ratio sinistre à primes, β est constant.
3. Pour une année de survénance t , la variance des pertes est une expression quadratique par rapport aux primes acquises, ainsi on a : $V(Y_t) = \sigma^2([1 - \delta]\bar{X}X_t + \delta X_t^2)$.

Avec :

- $\bar{X} = \sum_{t=1}^T X_t / T$
- Lorsque $\delta = 0$, la variance des pertes devient proportionnelle à l'exposition $V(Y_t) = \sigma^2(\bar{X}X_t)$.
- Lorsque $\delta = 1$, la variance des pertes devient proportionnelle au carré de l'exposition : $V(Y_t) = \sigma^2(X_t^2)$.

4. La distribution des pertes cumulée en vision 1 an suit une distribution Log-Normale de moyenne μ_t et de variance ω_t^2 , ainsi on a : $Y_t \sim LN(\mu_t, \omega_t^2)$.

$$\begin{cases} Y_1 \sim LN(\mu_1, \omega_1^2) \\ \dots \\ Y_{15} \sim LN(\mu_{15}, \omega_{15}^2) \end{cases}$$

5. La méthode du maximum de vraisemblance est adaptée pour l'estimation des paramètres du modèle.

b. Remarque

Dans le cas de l'hypothèse 4, la variable Y_t suit une distribution Log-Normale de paramètre μ_t et ω_t^2 , si la variable aléatoire $LN(Y_t)$ suit une loi normale de paramètre μ_t et ω_t^2 .

L'espérance et la variance de la charge des sinistres Y_t sont :

- $E(Y_t) = e^{(\mu_t + 0.5\omega_t)} = \beta X_t$
- $V(Y_t) = (e^{\omega_t^2} - 1)(\beta X_t)^2 = \sigma^2([1 - \delta]\bar{X}X_t + \delta X_t^2)$

c. Nota Bene

Les paramètres β et σ^2 sont estimés sur base des données de CAP RE. En isolant les paramètres μ_t et ω_t^2 de la loi Log-Normale que l'on cherche à estimer en fonction du paramètre de mélange δ , avec l'optimisation par la méthode du maximum de vraisemblance :

- $\mu_t = LN(\beta X_t) - 0.5\omega_t^2$
- $\omega_t^2 = LN\left(1 + \frac{V(Y_t)}{(\beta X_t)^2}\right) = LN\left(1 + \frac{\sigma^2([1-\delta]\bar{X}X_t + \delta X_t^2)}{(\beta X_t)^2}\right)$
 - Lorsque $\delta = 0$, $\omega_t^2 = LN\left(1 + \frac{\sigma^2(\bar{X}X_t)}{(\beta X_t)^2}\right)$
 - Lorsque $\delta = 1$, $\omega_t^2 = LN\left(1 + \frac{\sigma^2(X_t^2)}{(\beta X_t)^2}\right)$

En prenant $\gamma = LN\left(\frac{\sigma}{\beta}\right)$, équivalent à $e^\gamma = \frac{\sigma}{\beta}$, ce changement de variable simplifie la variance tel que :

- $\omega_t^2 = LN\left(1 + \left(\frac{[1-\delta]\bar{X}}{X_t} + \delta\right)e^{2\gamma}\right) = \frac{1}{\pi_t(\delta, \gamma)}$
- $\pi_t(\delta, \gamma) = \frac{1}{LN\left(1 + \left(\frac{[1-\delta]\bar{X}}{X_t} + \delta\right)e^{2\gamma}\right)}$

d. Méthodologie de calcul de la fonction du critère d'estimation

La fonction de la densité f de la variable aléatoire Y_t de la loi Log-Normale sur R^+ est :

$$f(y, \mu, \omega) = \frac{1}{y\omega\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\omega^2}\right) = \frac{1}{y} f_Y(\ln(y); \mu; \omega)$$

L'objectif de la méthode est de trouver une estimation de σ et de β en fonction du paramètre de mélange δ à optimiser par la méthode du maximum de vraisemblance.

La fonction de vraisemblance de Y_t avec f la fonction de la densité de la loi log-normale est :

$$L(y_1, \dots, y_T | \sigma, \delta, \beta) = \prod_{t=1}^T f(y_t, \sigma, \delta, \beta)$$

$$L(y_1, \dots, y_T | \sigma, \delta, \beta) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{y_t \omega_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(y_t) - \mu_t)^2}{2\omega_t^2}\right)$$

La fonction de log-vraisemblance est alors :

$$Ln L(y_1, \dots, y_T | \sigma, \delta, \beta) = Ln \left\{ \prod_{t=1}^T \frac{1}{y_t \omega_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(y_t) - \mu_t)^2}{2\omega_t^2}\right) \right\}$$

$$Ln L(y_1, \dots, y_T | \sigma, \delta, \beta) = \sum_{t=1}^T \left(-Ln(y_t \sqrt{2\pi}) + Ln\left(\frac{1}{\omega_t}\right) - \left(\frac{(\ln(y_t) - \mu_t)^2}{2\omega_t^2}\right) \right)$$

Les termes constants de l'équation ne dépendent pas des paramètres σ, δ, β que nous cherchons à optimiser et peuvent donc être supprimés. On obtient alors l'équation suivante :

$$Ln L(y_1, \dots, y_T | \sigma, \delta, \beta) = \sum_{t=1}^T \left(Ln\left(\frac{1}{\omega_t}\right) - \left(\frac{(\ln(y_t) - \mu_t)^2}{2\omega_t^2}\right) \right)$$

L'équation peut se simplifier en posant $\mu_t = \text{Ln}(\beta X_t) - \frac{1}{2}\omega^2$ et $\omega_t^2 = \frac{1}{\pi_t(\delta, \gamma)}$, la fonction de log-vraisemblance devient alors :

$$\text{Ln } L(y_1, \dots, y_T | \sigma, \delta, \beta) = \sum_{t=1}^T \left(-\text{Ln} \left(\sqrt{\omega_t^2} \right) - \frac{1}{2} \pi_t \left((\text{Ln}(y_t) - \text{Ln}(\beta x_t) + \frac{1}{2} \omega^2)^2 \right) \right)$$

$$\text{Ln } L(y_1, \dots, y_T | \sigma, \delta, \beta) = \sum_{t=1}^T \left(-\text{Ln} \left(\sqrt{\omega_t^2} \right) - \frac{1}{2} \pi_t \left(\text{Ln} \left(\frac{y_t}{x_t} \right) - \text{Ln}(\beta) + \frac{1}{2} \omega_t^2 \right)^2 \right)$$

En prenant $Z_t = \text{Ln} \left(\frac{y_t}{x_t} \right)$ et multipliant la fonction de log-vraisemblance par un facteur (-1), l'estimation des paramètres σ, δ et β s'obtient par un processus de minimisation. La fonction à minimiser est la suivante :

$$\text{Ln } L(z_1, \dots, z_T | \sigma, \delta, \beta) = \sum_{t=1}^T \left(\frac{1}{2} \text{Ln}(\omega_t^2) + \frac{1}{2} \pi_t \left(z_t - \text{Ln}(\beta) + \frac{1}{2} \omega_t^2 \right)^2 \right)$$

$$\text{Ln } L(z_1, \dots, z_T | \sigma, \delta, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \pi_t \left(z_t + \frac{1}{2} \omega_t^2 - \text{Ln}(\beta) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \text{Ln}(\omega_t^2)$$

Un second changement de variable est requis, tel que $u_t = z_t + \frac{1}{2} \omega_t^2 + \gamma$

Pour rappel, $\gamma = \text{Ln} \left(\frac{\sigma}{\beta} \right)$, alors la fonction du critère d'estimation devient :

$$\text{Ln } L(u_1, \dots, u_T | \sigma, \delta, \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \pi_t (u_t - \text{Ln}(\sigma))^2 + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \text{Ln}(\omega_t^2)$$

L'optimisation analytique de l'équation ci-dessus pour σ , conditionnellement à δ et γ , revient à résoudre l'expression suivante :

$$\frac{d \text{Ln } L(u_1, \dots, u_T | \sigma, \delta, \gamma)}{d\sigma} = 0$$

L'expression de σ est :

$$\text{Ln } \hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) = \text{Ln } \hat{\sigma} = \frac{\sum_{t=1}^T u_t \pi_t}{\sum_{t=1}^T \pi_t} \text{ et donc } \hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) = \exp \left(\frac{\sum_{t=1}^T u_t (\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \pi_t (\hat{\delta}, \hat{\gamma})}{\sum_{t=1}^T \pi_t (\hat{\delta}, \hat{\gamma})} \right)$$

7.3 Paramètre propre à l'entreprise

La fonction du critère d'estimation à deux paramètres, δ et γ , qui minimise la fonction de log-vraisemblance est :

$$\text{Ln } L(u_1, \dots, u_T | \delta, \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \pi_t (u_t - \text{Ln } \hat{\sigma}(\delta, \gamma))^2 + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \text{Ln}(\omega_t^2)$$

A l'optimum global de la fonction de vraisemblance, si l'exposition varie peu au cours du temps, la valeur optimale de δ s'obtient en 0 ou en 1. Le biais du paramètre $\hat{\sigma}$ peut être corrigé par le facteur de correction

$\sqrt{\frac{T+1}{T-1}}$ pour déterminer un estimateur sans biais de l'**écart-type propre pour le risque de primes** :

$$\sigma_{USP} = \hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \times \sqrt{\frac{T+1}{T-1}}$$

Le ratio « sinistres à primes » est donc $\beta = \frac{\sigma}{e^\gamma}$

Ainsi, l'écart-type propre à l'entreprise du risque de primes est calculé ainsi :

$$\sigma_{(s,final)} = c \times \hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \times \sqrt{\frac{T+1}{T-1}} + (1-c) \times \sigma_{(s,EIOPA)}$$

8. Méthode de la réassurance non-proportionnelle

La méthode de la réassurance non-proportionnelle est présentée ci-dessous pour une seule ligne d'activité s , afin de simplifier l'exposé et d'alléger les notations.

Les références règlementaires applicables pour le risque de réassurance non-proportionnelle sont présentes dans les Actes Délégués, annexes XVII, f), page 280.

a. Données pour la méthode de réassurance non-proportionnelle

Les données nécessaires à l'estimation du facteur d'ajustement de la réassurance non proportionnelle sont détaillées ci-après :

- Coût ultime des sinistres d'assurance ou de réassurance déclarés dans le segment d'activité s au cours des derniers exercices.
- Nombre total de sinistres par année de survenance.

Données à fournir sous réserve du respect des critères suivants :

- Représentativité de l'exposition au risque sur les 12 mois à venir.
- Disponibilité et représentativité sur cinq années de survenance consécutives.
- Montant des sinistres ultimes estimés déclaré dans l'année de déclaration du sinistre.
- Montant des sinistres excluant les frais de gestion des engagements.
- Cohérence avec l'hypothèse selon laquelle les montants ultimes suivent une distribution Log-Normale, y compris dans la queue de distribution.

8.1 Méthode et notations

Notation	Définition
N	Nombre de sinistres pour lesquels les données sont disponibles.
i	Indexation du nombre de sinistres $i \in \{1, \dots, N\}$.
Y_i	Coût d'un sinistre individuel i à l'ultime estimés dans l'année de déclaration.
μ	Moment d'ordre 1 de la distribution du montant des sinistres.
ω	Moment d'ordre 2 de la distribution du montant des sinistres.
b_1	Le montant de la priorité du contrat de réassurance en excédent de sinistres.
b_2	Le montant de la portée du contrat de réassurance en excédent de sinistres.
NP_s	Facteur d'ajustement de la réassurance non-proportionnelle pour le segment activité s de la Formule Standard.
NP'_s	Facteur d'ajustement de la réassurance non-proportionnelle estimés.
C	Facteur de crédibilité.

Tableau 8 - Risque de primes : notations de la méthode de la réassurance non proportionnelle

Les moments d'ordre 1 et 2 de la distribution du montant des sinistres sont :

- $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$
- $\omega = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Y_i^2)$

La figure 14 ci-dessous illustre la structure d'un traité de réassurance non-proportionnelle :

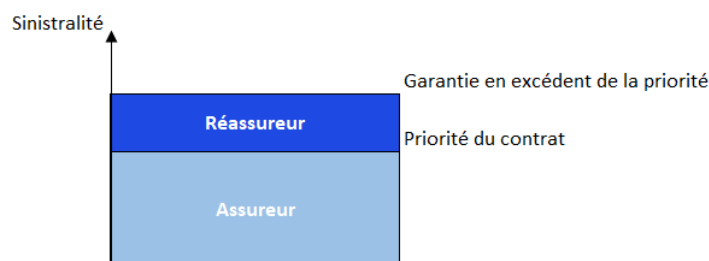


Figure 14 - Schéma d'un traité de réassurance non-proportionnelle

Traité de réassurance non-proportionnelle en excédent de perte annuelle :

Un traité de réassurance non-proportionnelle est une couverture permettant à un assureur (compagnie cédante) de se protéger contre un afflux de sinistralité (couverture contre des pics extrêmes). Le réassureur prend en charge la part des sinistres excédant une priorité (franchise), dans la limite d'une portée (plafond), telle que définie dans le contrat, sur une période de couverture (généralement d'un an).

La priorité et la portée sont exprimées soit en montant, soit en pourcentage via le ratio sinistres payés ou encourus sur primes (émises ou acquises) de la période.

8.2 Présentation des hypothèses

Les données utilisées doivent respecter l'hypothèse suivante :

Les montants des sinistres à l'ultime, suit une distribution Log-Normale qui inclut une queue de distribution, tel que $Y_i \sim LN(\mu, \omega)$.

b. Remarque

Pour un segment d'activité s , il n'est pas autorisé par les Actes Délégués d'utiliser simultanément l'écart-type propre à l'entreprise du risque de primes $\sigma_{(prem,s,brute)}$ et le facteur d'ajustement NP_s . Le facteur d'ajustement de la réassurance non-proportionnelle du segment d'activité s , NP_s ne peut être calibré que dans le cas d'existence d'un contrat de réassurance en excédent de sinistres sur le segment considéré.

8.3 Paramètre propre à l'entreprise

Le facteur d'ajustement de la réassurance non-proportionnelle dans le cas où le contrat contient une portée est :

$$NP' = \sqrt{\frac{w_1 - w_2 + \omega + 2(b_2 - b_1)(\mu_2 - \mu)}{\omega}}$$

Avec :

- $\mu_2 = \mu \Phi\left(\frac{\ln(b_2) - \vartheta}{\eta}\right) + b_2 \Phi\left(-\frac{\ln(b_2) - \vartheta}{\eta}\right)$
- $\omega_1 = \omega \Phi\left(\frac{\ln(b_1) - \vartheta}{\eta}\right) + b_1^2 \Phi\left(-\frac{\ln(b_1) - \vartheta}{\eta}\right)$

- $\omega_2 = \omega \Phi\left(\frac{\ln(b_2) - \vartheta}{\eta}\right) + b_2^2 \Phi\left(-\frac{\ln(b_2) - \vartheta}{\eta}\right)$
- $\vartheta = 2\ln(\mu) - \frac{1}{2}\ln(\omega)$
- $\eta = \sqrt{\ln(\omega) - 2\ln(\mu)}$
- $\ln$: le logarithme népérien naturel.
- Φ : la fonction de répartition cumulée d'une loi normale centrée réduite.
- $V_{prem,s}$: le volume du risque de primes pour le segment d'activité s .
- NP'_s : le facteur d'ajustement de la réassurance non-proportionnelle pour le segment d'activité s .

Dans le cas où le contrat **ne contient pas de portée**, le facteur d'ajustement de la réassurance non-proportionnelle devient : $NP' = \sqrt{\frac{w_1}{\omega}}$.

Si la réassurance non-proportionnelle contient **plusieurs groupes de risques homogènes**, le facteur d'ajustement de la réassurance non-proportionnelle devient : $NP' = \frac{\sum_s V_{prem,s} NP'_s}{\sum_s V_{prem,s}}$.

Le facteur d'ajustement propre à l'entreprise pour la réassurance non proportionnelle est calculé comme suit :

$$NP_{s,USP} = c.NP'_s + (1 - c).NP_s$$

9. Méthode du risque de réserve - Méthode Log-Normale

9.1 Méthode et notations

Les références réglementaires applicables pour le risque de réserve de la méthode Log-Normale sont présentes dans les Actes Délégués, Annexe XVII, Actes Délégués, paragraphe C.

La méthode du risque de réserve Log-Normale est présentée ci-dessous pour une seule ligne d'activité s , dans un souci de simplification et de ne pas alourdir les notations présentes.

a. Données pour le risque de réserve – méthode Log-Normale

Les données qui servant à l'estimation de l'écart type de la méthode Log-Normale associés au risque de réserve sont les suivantes :

- Le montant des *Best Estimate* des provisions pour sinistres en fin d'exercice $t - 1$, y compris les frais de gestion des engagements, par ligne d'activité.
- Les prestations payées lors de l'exercice t pour les sinistres en stock à la fin de l'exercice $t - 1$, y compris les frais de gestion des engagements, par ligne d'activité.
- Le montant des *Best Estimate* des provisions pour sinistres en fin d'exercice t relatives aux sinistres en stock en fin d'exercice $t - 1$, y compris les frais de gestion des engagements, par ligne d'activité.

Les données doivent respecter l'ensemble des exigences suivantes :

- Être représentative du risque sur les 12 mois à venir.
- Être disponibles pour cinq années de survenance consécutive et couvrir au moins un cycle complet.
- Les pertes cumulées contiennent les frais encourus pour la gestion des engagements d'assurance et de réassurance.

- Lorsque les données sont nettes de réassurance ou de véhicule de titrisation, elles doivent refléter la structure de réassurance sur les 12 mois à venir.

Remarque : les données doivent être écrêtées des sinistres catastrophiques qui sont évalués dans le sous-module catastrophe.

La méthode Log-Normale du risque de réserve est semblable à la méthode Log-Normale du risque de primes, présenté à la section 7, mais les volumes sous-risques et les notations changent. La méthode Log-Normal du risque de réserve se base sur approche par boni-mali qui se fonde sur l'estimation de l'erreur de prédiction des sinistres observés à charge de l'entreprise.

Dans le cadre de cette méthode, le facteur de crédibilité s'applique aux années comptables.

Notation	Définition
A	Année comptable.
i	Année de survenance avec $i \in \{1, \dots, I\}$.
j	Année de développement avec $j \in \{1, \dots, J\}$.
β	Taux de boni-mali des réserves.
δ	Paramètre de mélange obtenu par le processus du maximum de vraisemblance avec la contrainte $0 \leq \delta \leq 1$.
σ	Écart-type du risque de réserve étudiée.
$D_{i,j}$	Paielements incrémentaux pour l'année de survenance i et de développement j .
$PCO_{i,j}$	<i>Best Estimate</i> des provisions pour sinistre à payer de l'année de survenance i , vu à la fin de l'année j , incluant les frais de gestion des engagements.
V_A	Somme des <i>Best Estimate</i> des provisions pour sinistres à payer vu au début de l'année calendaire A , c'est-à-dire le <i>Best Estimate</i> total de l'année comptable A .
R_A	Pour les années de survenance $< A$, les paiements survenus au cours de l'année comptable A et le <i>Best Estimate</i> des provisions pour sinistres à payer en fin d'année comptable A (somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an).

Tableau 9 - Risque de réserve : notations de la méthode Log-Normale

On obtient les équations suivantes dans le cadre de la méthode Log-Normale du risque de réserve :

$$V_A = \sum_{i+j=A} PCO_{i,j}$$

$$R_A = \sum_{i+j=A+1 \text{ avec } i \neq A} PCO_{i,j} + \sum_{i+j=A+1 \text{ avec } i \neq A} D_{i,j}$$

La figure 15 ci-dessous présente le triangle des *Best Estimate* par année de développement et par année de survenance :

		Année de développement					
Année de survenance	i\j	1	2	3	4	5	6
	1	$PCO_{1,1}$	$PCO_{1,2}$	$PCO_{1,3}$	$PCO_{1,4}$	$PCO_{1,5}$	$PCO_{1,6}$
	2	$PCO_{2,1}$	$PCO_{2,2}$	$PCO_{2,3}$	$PCO_{2,4}$	$PCO_{2,5}$	
	3	$PCO_{3,1}$	$PCO_{3,2}$	$PCO_{3,3}$	$PCO_{3,4}$		
	4	$PCO_{4,1}$	$PCO_{4,2}$	$PCO_{4,3}$			
	5	$PCO_{5,1}$	$PCO_{5,2}$				
	6	$PCO_{6,1}$					

Figure 15 - Triangle des Best Estimate par année de survenance et de développement pour le risque de réserve avec la méthode Log-Normale

A titre d'exemple, pour l'année comptable 6, la variable V_6 est la somme des *Best Estimate* vu en début d'année comptable, autrement dit, il s'agit des provisions *Best Estimate* vu en fin d'année comptable précédente soit l'année de survenance 5 :

$$V_6 = PCO_{5,1} + PCO_{4,2} + PCO_{3,3} + PCO_{2,4} + PCO_{1,5}$$

La figure 16 ci-dessous présente le triangle des paiements incrémentaux par année comptable et de développement :

		Année de développement					
Année de survenance	i\j	1	2	3	4	5	6
	1	$D_{1,1}$	$D_{1,2}$	$D_{1,3}$	$D_{1,4}$	$D_{1,5}$	$D_{1,6}$
	2	$D_{2,1}$	$D_{2,2}$	$D_{2,3}$	$D_{2,4}$	$D_{2,5}$	
	3	$D_{3,1}$	$D_{3,2}$	$D_{3,3}$	$D_{3,4}$		
	4	$D_{4,1}$	$D_{4,2}$	$D_{4,3}$			
	5	$D_{5,1}$	$D_{5,2}$				
	6	$D_{6,1}$					

Figure 16 - Triangle des paiements incrémentaux par année de survenance et de développement pour le risque de réserve avec la méthode Log-Normale

Une année plus tard, toujours pour l'année comptable 6, des paiements sont effectués et une nouvelle évaluation des *Best Estimate* est effectuée dans l'année. La variable R_6 est donc vu 1 an plus tard, la somme des *Best Estimate* additionné des paiements incrémentaux de l'année comptable. Soit :

$$R_6 = (PCO_{5,2} + PCO_{4,3} + PCO_{3,4} + PCO_{2,5} + PCO_{1,6}) + (D_{5,2} + D_{4,3} + D_{3,4} + D_{2,5} + D_{1,6})$$

9.2 Présentation des hypothèses

Hypothèses

Les données utilisées dans le cadre de la méthode doivent respecter les hypothèses suivantes :

1. Pour une année de calendrier A, la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an est proportionnelle au *Best Estimate* total de l'année comptable A, ainsi on a : $E(R_A) = \beta V_A$.
2. Le taux de boni-mali des réserves β est constant sur la période.
3. Pour une année comptable, la variance de la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an est une expression quadrique *Best Estimate* total de l'année comptable A, ainsi on a : $V(R_A) = \sigma^2([1 - \delta]\bar{V}V_A + \delta V_A^2)$.

Où :

- $\bar{V} = \sum_{A=1}^T V_A / \text{Card}(A)$
 - Lorsque $\delta = 0$, la variance de la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an devient proportionnelle à l'exposition : $V(R_A) = \sigma^2(\bar{V}V_A)$.
 - Lorsque $\delta = 1$, la variance de la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an devient proportionnelle au carré de l'exposition : $V(R_A) = \sigma^2(V_A^2)$.
4. La distribution de la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an suit une distribution Log-Normale de moyenne μ_A et de variance ω_A^2 , ainsi on a : $R_A \sim LN(\mu_A, \omega_A^2)$.

$$\begin{cases} R_1 \sim LN(\mu_1, \omega_1^2) \\ \vdots \\ R_{15} \sim LN(\mu_{15}, \omega_{15}^2) \end{cases}$$
 5. La méthode du maximum de vraisemblance est adaptée pour l'estimation des paramètres du modèle.

Remarque

En effectuant le changement de variables suivant $\gamma = LN\left(\frac{\sigma}{\beta}\right)$, équivalent à :

$e^\gamma = \frac{\sigma}{\beta}$, la variance se simplifie :

- $\omega_t^2 = LN\left(1 + \left(\frac{[1-\delta]\bar{X}}{X_t} + \delta\right) e^{2\gamma}\right) = \frac{1}{\pi_t(\delta, \gamma)}$
- $\pi_t(\delta, \gamma) = \frac{1}{LN\left(1 + \left(\frac{[1-\delta]\bar{X}}{X_t} + \delta\right) e^{2\gamma}\right)}$

En effectuant un second changement de variable tel que : $u_t = z_t + \frac{1}{2}\omega_t^2 + \gamma$

Avec, pour rappel, $\gamma = LN\left(\frac{\sigma}{\beta}\right)$, la fonction du critère d'estimation est la suivante :

$$Ln L(u_1, \dots, u_T | \sigma, \delta, \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \pi_t (u_t - Ln(\sigma))^2 + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T Ln(\omega_t^2)$$

La fonction de log-vraisemblance ci-dessus se minimise donc en fonction de δ et γ .

9.3 Paramètre propre à l'entreprise

A l'optimum globale de la fonction de vraisemblance, si l'exposition varie peu au cours du temps, la valeur optimale de δ est soit égal à 0, soit à 1.

Le biais du paramètre $\hat{\sigma}$ peut être corrigé par le facteur de correction $\left(\frac{Card(A)+1}{Card(A)-1}\right)^{0.5}$ pour déterminer un estimateur sans biais de l'écart-type propre pour le risque de primes :

$$\sigma_{USP} = \hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \times \left(\frac{Card(A) + 1}{Card(A) - 1}\right)^{0.5}$$

Le taux de boni-mali des réserves est ainsi $\beta = \frac{\sigma}{e^{\gamma}}$

L'écart-type du risque de réserve est calculé ainsi :

$$\sigma_{(s,final)} = c \times \hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \times \left(\frac{Card(A) + 1}{Card(A) - 1}\right)^{0.5} + (1 - c) \times \sigma_{(s,EIOPA)}$$

10. Méthode du risque de réserve : Méthode Merz-Wüthrich

10.1 Méthode et notations

Les références réglementaires applicables pour la méthode du risque de réserve avec la méthode de Merz-Wüthrich sont présentes dans les Actes Délégués, annexes XVII, d), en page 276.

a) Données pour le risque de réserve– méthode Merz-Wüthrich

Les données nécessaires à l'estimation de l'écart type de la méthode Merz-Wüthrich sont les suivantes :

- Paiements cumulés relatifs aux sinistres du segment d'activité s pour chaque année de survenance et chaque année de développement des sinistres.

Les données doivent respecter l'ensemble des exigences suivantes :

- Être représentatives de l'exposition au risque de réserve sur les 12 mois à venir.
- Être disponibles et représentatives pour cinq années de survenance consécutives au minimum.
- Pour la première année d'accident, les données sont disponibles pour un développement minimum de 5 années consécutives.
- Pour la première année de survenance, le montant des paiements cumulés de la première année développement où les données sont disponibles inclut tous les paiements de l'année de survenance à quelques différences non significatives près.
- Le nombre d'années de survenance disponibles n'est pas inférieur au nombre d'années de développement consécutives de la première année pour laquelle les données sont disponibles.
- Le montant des sinistres cumulés sont ajustés pour tenir compte des montants recouvrables au titre des couvertures en réassurance mises en place pour les 12 mois à venir.
- Le montant des sinistres cumulés inclut les frais de gestion des engagements d'assurances et de réassurances.

Les données doivent respecter les hypothèses suivantes :

- Les sinistres cumulés sont stochastiquement indépendants les uns des autres.
- Les sinistres incrémentiels sont stochastiquement indépendants par année d'accident.
- Les sinistres cumulés d'une année de développement sont proportionnels aux sinistres cumulés de l'année de développement précédente.
- La variance du montant des sinistres cumulés est proportionnelle au montant des sinistres cumulés de l'année de développement précédente pour toutes années de survénance.

La méthode de Merz-Wüthrich du risque de réserve calcule l'estimation de la volatilité de l'écart-type du risque de réserve des boni-mali sur un an, c'est-à-dire l'erreur de prédiction de la réévaluation des provisions *Best Estimate* chaque année. Cette méthode a été mise en place par Mario V. Wüthrich, Michael Merz et Natalia Lysenko dans l'article qui se nomme *Uncertainty of the Claims Development Result in the Chain Ladder Method* en 2008.

Une adaptation et une simplification de cette méthode a été proposée à la suite de l'introduction de Solvabilité 2 par Mario V. Wüthrich, Michael Merz dans l'article *Modelling the Claims Development Result for Solvency Purposes*.

Notation	Définition
i	$i^{ième}$ Année de survénance avec $i \in \{0, \dots, I\}$.
j	$j^{ième}$ Année de développement avec $j \in \{0, \dots, J\}$.
$C_{i,j}$	Paielements cumulés de l'année de survénance i et l'année de développement j .
$PCO_{Chain Ladder}$	Provision pour sinistres à payer estimée avec la méthode de provisionnement de Chain-Ladder.
$MSEP$	Ecart-type de l'erreur de prédiction – Mean Square Error of Prediction.

Tableau 9 - Risque de réserve : notations de la méthode Merz-Wüthrich

b) Remarque

Afin de satisfaire aux notations de la méthode de Merz-Wüthrich, les indices des années de survénance et de développement sont indicés à partir de 0. Ci-dessous quelques notations supplémentaires :

- $Y_{i,j}$ Paiements incrémentaux de l'année de survénance i et développement j .
- $C_{i,j}$ Paiements cumulés de l'année de survénance i et développement j avec :

$$C_{i,j} = Y_{i,0} + Y_{i,1} + \dots + Y_{i,j}$$
- D_I est une tribu mathématique et correspond à l'information disponible des paiements cumulés connus à la date de survénance I soit :

$$D_I = \{C_{i,j} | i + j \leq I, i \leq I\}$$

La figure 17 ci-dessous présente le développement des paiements cumulés connus à la date de survénance I vue en D_I :

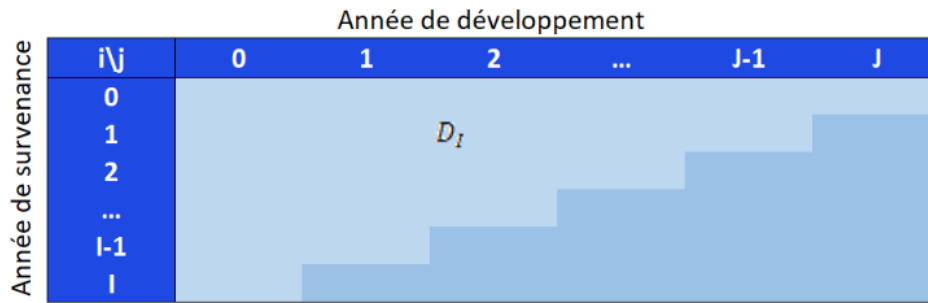


Figure 17 - Développement des sinistres vue avec D_I

- D_{I+1} une tribu mathématiques et correspond à l'information disponible des paiements cumulés connus à la date de survénance $I+1$ soit :

$$D_{I+1} = \{C_{i,j} | i + j \leq I + 1, i \leq I\} = D_I \cup \{C_{i,I-i+1} | i \leq I\}$$

- D_{I+1} dispose d'une diagonale supplémentaire de paiements cumulés en comparaison avec D_I .

La figure 18 ci-dessous présente le développement des paiements cumulés connus à la date de survénance I vue en D_{I+1} :

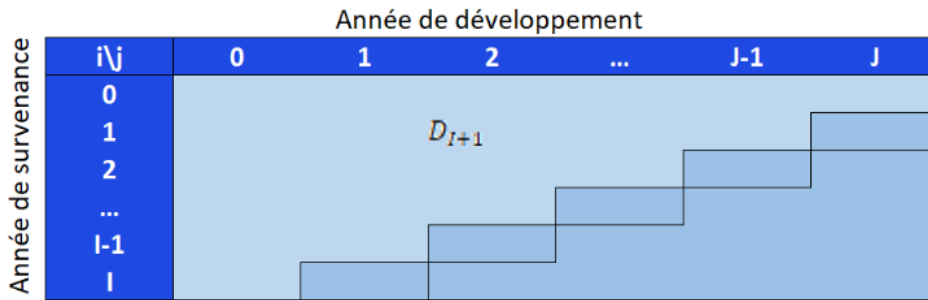


Figure 18 - Développement des sinistres vue avec D_{I+1}

- Pour une année de survénance $i \in \{0, \dots, I\}$, par simplicité, il est assumé que $I=J$ et il est défini la provision pour sinistre vus à la date I et à la date $I+1$ comme étant :

$$R_i^I = C_{i,J} - C_{i,I-i}$$

$$R_i^{I+1} = C_{i,J} - C_{i,I-i+1}$$

- S_j^I est déterminé avec l'information des années de développement de 0 à j pour l'année de survénance $I-1$, tel que $\forall j \in \{0, 1, \dots, J-1\}$:

$$S_j^I = \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}$$

- S_j^{I+1} est déterminé avec les informations à la fin de l'année de survénance I pour les années de développement de 0 à J , tel que $\forall j \in [0, 1, \dots, J]$:

$$S_j^{I+1} = \sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j} = S_j^I + C_{I-1,j} \text{ avec } S_j^I = C_{0,j}$$

	S_0^I	S_1^I	S_2^I	$S_{\dots}^I$	S_{J-1}^I	
$i \backslash j$	0	1	2	...	J-1	J
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$	...	$C_{0,J-1}$	$C_{0,J}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	$C_{1,J-1}$	
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	...		
...	...	...	...			
I-1	$C_{I-1,0}$	$C_{I-1,1}$				
I	$C_{I,0}$					
Total	S_0^{I+1}	S_1^{I+1}	S_2^{I+1}	...	S_{J-1}^{I+1}	S_J^{I+1}

Figure 19 - Triangle de paiements cumulés par année de survenance i et de développement j

10.2 Présentation des hypothèses

Les hypothèses de la méthode de Merz-Wüthrich sont similaires à la méthode de provisionnement stochastique de Mack avec une propriété supplémentaire, sur le processus de chaîne de Markov des paiements cumulés.

Les données utilisées dans le cadre de la méthode de Merz-Wüthrich doivent respecter les hypothèses suivantes :

1. Les paiements cumulés $C_{i,j}$, pour chaque année de survenance i et de développement j , sont indépendants pour les différentes années de survenance i .
2. Les sinistres cumulés dans la même année de survenance ($C_{i,j}$) avec $j \in \{0, \dots, J\}$ sont des processus de Markov et il existe des constantes $f_j > 0$ et $\sigma_j > 0$ avec $0 \leq i \leq I$ et $1 \leq j \leq J$ telles que
 - $\forall i, E(C_{i,j} | C_{i,j-1}) = f_{j-1} \times C_{i,j-1}$
 - $\forall i, \text{Var}(C_{i,j} | C_{i,j-1}) = \sigma_{j-1}^2 \times C_{i,j-1}$

a) Remarques

Les paiements cumulés doivent être positifs afin de satisfaire l'hypothèse numéro 2 de la variance.

Le facteur de crédibilité pour la méthode du risque de réserve basée sur la formule de Merz-Wüthrich s'applique en fonction du nombre d'années d'accidents.

A l'aide des propriétés de l'espérance conditionnelle et des hypothèses ci-dessus, nous pouvons déduire que :

$$E(C_{i,j} | D_I) = C_{i,I-i} \times \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j$$

$$E(C_{i,j} | D_{I+1}) = C_{i,I-i+1} \times \prod_{j=I-i+1}^{J-1} f_j$$

Dans le cadre de la méthode de Merz et Wüthrich, il y a deux types de facteurs de développement en fonction de l'information disponible pour $\forall j \in \{0, \dots, I-1\}$, tels que :

- Lorsque $t = I$, avec l'information disponible D_I , les facteurs de développement de la méthode de Chain-Ladder sont estimés tel que : $\hat{f}_j^I = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{S_j^I}$ car $S_j^I = \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}$.

- Lorsque $t = I+1$, avec l'information disponible D_{I+1} , les facteurs de développement de la méthode de Chain-Ladder sont estimés tel que : $\hat{f}_j^{I+1} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j}} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{S_j^{I+1}}$ car $S_j^{I+1} = \sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j}$.

Les estimateurs non-biaisés de $E(C_{i,j}|D_I)$ et $E(C_{i,j}|D_{I+1})$ sont alors :

$$\hat{C}_{i,j}^I = \prod_{k=I-i}^{j-1} \hat{f}_k^I \times C_{i,I-i}$$

$$\hat{C}_{i,j}^{I+1} = \prod_{k=I-i+1}^{j-1} \hat{f}_k^{I+1} \times C_{i,I-i+1}$$

b) Claims development result

Le **Claims development result (CDR)** correspond à la différence d'estimation successive entre deux périodes I et $I+1$ du *Best Estimate* auquel il est ajouté les paiements incrémentaux de l'année de survenance I survenus en $I+1$. Autrement dit, il s'agit de la différence entre la charge des sinistres estimées, en vision *Best Estimate*, à la date I et celles estimées à la date $I+1$, diminuée des paiements entre $[I; I+1]$ des sinistres survenus pendant l'année de survenance I . En cas de revue de la charge estimées à la hausse, la captive enregistre des *Mali*, c'est-à-dire que les réserves constituées étaient insuffisantes. Dans le cas contraire, la captive enregistre des *Boni*. Le risque de provisionnement dans ce cadre est le risque de réestimation des provisions de la charge à l'ultime entre deux clôtures (deux inventaires, deux années calendaires).

Le CDR se définit comme étant la différence successive de prédiction de charge à l'ultime.

Il existe une deux visions pour le CDR, une vision prospective, qui correspond à l'étude de la déviation autour de 0 du CDR observable. La vision prospective s'approche de la vision des risques sous Solvabilité II. Une vision rétrospective qui étudie la qualité de la prédiction du CDR par rapport au CDR observable. Cette vision est utile dans le cas d'un *backtesting* de l'évaluation des provisions entre l'année de survenance n et $n+1$.

c) Claims development result "réel"

Le *Claims development result réel*, CDR_i , correspond aux boni-mali de l'année de survenance i qui impacte le résultat de l'année comptable $I+1$, on a alors :

$$CDR_i(I+1) = E(C_{i,I}|D_I) - E(C_{i,I}|D_{I+1})$$

$$CDR_i(I+1) = E(R_i^I|D_I) - (Y_{i,I-i+1} + E(R_i^{I+1}|D_{I+1}))$$

Avec $Y_{i,I-i+1} = C_{i,I-i+1} - C_{i,I-i}$ correspond aux paiements incrémentaux sur la période comptable $[i; i+1]$ pour tout $i \in \{1, \dots, I\}$.

Le CDR agrégé "réel" est :

$$CDR \text{ agrégé "réel"} = \sum_{i=1}^I CDR_i(I+1)$$

En utilisant la propriété de martingale pour $E(C_{i,I}|D_{I+1})$, on en déduit :

$$E[(CDR_i(I+1)|D_I)] = 0$$

Ce résultat signifie que dans le cas de facteurs de développement connus avec la méthode de provisionnement de Chain-Ladder, sous conditions que les hypothèses sous-jacentes à ce modèle soient respectées, le résultat du CDR réel par la propriété de martingale est nulle ; par conséquent, aucun boni-mali n'est constaté pour l'année de survenance i .

d) Claims development result « observable »

Le *Claims development result* « observable » par année de survenance i tel que $0 \leq i \leq I$ et pour l'année comptable $[i ; i+1]$ est défini comme suit :

$$\begin{aligned}\widehat{CDR}_i(I+1) &= \hat{R}_i^{D_I} - (Y_{i,I-i+1} + \hat{R}_i^{I+1}) \\ \widehat{CDR}_i(I+1) &= \hat{C}_{i,I}^I - \hat{C}_{i,I}^{I+1}\end{aligned}$$

L'estimateur sans biais de $E(R_i^I | D_I)$ est $\hat{R}_i^{D_I} = \hat{C}_{i,I}^I - C_{i,I-i}$, avec i tel que $0 \leq i \leq I$.

L'estimateur sans biais de $E(R_i^{I+1} | D_{I+1})$ est $\hat{R}_i^{D_{I+1}} = \hat{C}_{i,I}^{I+1} - C_{i,I-i+1}$, avec i tel que $0 \leq i \leq I$.

Le **CDR agrégé observable** est défini comme suit :

$$CDR \text{ agrégé observé} = \sum_{i=1}^I \widehat{CDR}_i(I+1)$$

Les informations qui sont disponibles en I sont aussi connus en $I+1$ et donc il est possible d'écrire la relation suivante entre D_I et D_{I+1} :

$$D_{I+1} = \{C_{i,j} | i+j \leq I+1, i \leq I\} = D_I \cup \{C_{i,I-i+1} | i \leq I\}$$

e) Mesure de l'erreur d'estimation du CDR

L'incertitude de l'erreur d'estimation du CDR est évaluée autour de la valeur 0, en comparaison avec le CDR observé en fin d'année comptable. CAP RE doit disposer d'un capital suffisant pour absorber les fluctuations du CDR autour de cette valeur.

Dans l'article *Modelling the Claims Development Result for Solvency Purposes* de Mario V. Wüthrich et Michael Merz, une approche prospective et rétrospective est présentée. Ce mémoire se concentre uniquement sur la vision prospective, qui permet d'évaluer l'incertitude de la prédiction autour de la valeur 0 et de la comparer au CDR observé en fin d'exercice.

Estimateur conditionnel de l'erreur quadratique moyenne de prédiction (MSEP) pour une seule année d'accident

Pour estimer l'incertitude du CDR observable vu en I , soit en 0, l'équation suivante est nécessaire :

$$\begin{aligned}MSEP(\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I)(0) &= E\left[\left(\widehat{CDR}_i(I+1) - 0\right)^2 | D_I\right] \\ MSEP(\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I)(0) &= \widehat{VAR}(CDR_i(I+1)|D_I) = E[C_{i,I}^2 | D_I] \times \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / \hat{f}_{I-i}^2}{C_{i,I-i}}\end{aligned}$$

On remplace $E[C_{i,I}^2 | D_I]$ par son estimateur $\hat{C}_{i,I}^I$:

$$MSEP(\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I)(0) = \widehat{VAR}(CDR_i(I+1)|D_I) = (\hat{C}_{i,I}^I)^2 \times \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / \hat{f}_{I-i}^2}{C_{i,I-i}}$$

On mesure l'incertitude de la prédiction en 0 par rapport au CDR observable à la fin de l'année comptable. L'incertitude de l'espérance du CDR observable vu en I pour l'année de survenance i tel que $0 \leq i \leq I$ (vision prospective) est l'équation que nous cherchons à estimer soit :

$$MSEP(\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I)^{(0)} = E[(\widehat{CDR}_i(I+1) - 0)^2 | D_I]$$

On a la variance du CDR « réel » vu en I pour l'année de survenance i est :

$$\widehat{Var}(CDR_i(I+1)|D_I) = (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / (\hat{f}_{I-i}^I)^2}{C_{i,I-i}^I}$$

Afin de quantifier cette la MSEP conditionnelle nous avons besoin d'un estimateur de la variance du paramètre σ_j^2 tel que :

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - f_j \right)^2, \forall j \in \{1, \dots, J-2\}$$

On pose également :

$$\hat{\Psi}_i^I = \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / (\hat{f}_{I-i}^I)^2}{C_{i,I-i}^I}$$

La variance du CDR « réel » devient alors :

$$\widehat{Var}(CDR_i(I+1)|D_I) = (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \hat{\Psi}_i^I$$

La MSEP conditionnelle pour une année d'accident vaut :

$$\widehat{MSEP}(\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I)^{(0)} = (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \times (\hat{\Gamma}_{i,J}^I + \hat{\Delta}_{i,J}^I)$$

Avec :

$$\hat{\Gamma}_{i,J}^I = \hat{\Phi}_{i,J}^I + \hat{\Psi}_i^I$$

$$\hat{\Phi}_{i,J}^I = \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{C_{I-j,j}}$$

$$\hat{\Delta}_{i,J}^I = \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / (\hat{f}_{I-i}^I)^2}{S_{I-i}^I} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{S_j^I}$$

$$\widehat{MSEP}(\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I)^{(0)} = (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \left(\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / (\hat{f}_{I-i}^I)^2}{C_{i,I-i}^I} + \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / (\hat{f}_{I-i}^I)^2}{S_{I-i}^I} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{S_j^I} \right)$$

f) Estimateur conditionnel de la MSEP en agréant les années d'accident

L'agrégation des années de survenance $i \in \{1, \dots, I\}$ pour l'année comptable $[I ; I+1]$, permet d'obtenir l'erreur quadratique moyenne en vision prospective :

$$\widehat{MSEP}_{\sum_{i=1}^I \widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) = \sum_{i=1}^I \widehat{MSEP}_{\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) + 2 \sum_{k>i>0} \hat{C}_{i,J}^I \hat{C}_{k,J}^I [\hat{\Xi}_{i,J}^I + \hat{\Lambda}_{i,J}^I]$$

Avec :

$$\hat{\Xi}_{i,J}^I = \hat{\Phi}_{i,J}^I + \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / (\hat{f}_{I-i}^I)^2}{S_{I-i}^{I+1}}$$

$$\hat{\Lambda}_{i,J}^I = \frac{C_{i,I-i}}{S_{I-i}^{I+1}} \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / (\hat{f}_{I-i}^I)^2}{S_{I-i}^I} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{S_j^I}$$

On remplace alors dans l'équation :

$$\begin{aligned} \widehat{MSEP}_{\sum_{i=1}^I \widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) \\ = \sum_{i=1}^I \widehat{MSEP}_{\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) + 2 \sum_{k>i>0} \hat{C}_{i,J}^I \hat{C}_{k,J}^I \left[\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / (\hat{f}_{I-i}^I)^2}{S_{I-i}^I} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{S_j^I} \right] \end{aligned}$$

Avec l'équation suivante, il est possible de simplifier les formules de MSEP pour une seule année d'accident et pour les années agrégées :

$$S_j^{I+1} = \sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j} = S_j^I + C_{I-1,j}$$

g) MSEP pour une seule année d'accident

$$\widehat{MSEP}_{(\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I)}(0) = (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \left(\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / (\hat{f}_{I-i}^I)^2}{C_{i,I-i}} + \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / (\hat{f}_{I-i}^I)^2}{S_{I-i}^I} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{S_j^I} \right)$$

h) MSEP en agréant les années d'accident

$$\begin{aligned} \widehat{MSEP}_{(\sum_{i=1}^I \widehat{CDR}_i(I+1)|D_I)}(0) \\ = \sum_{i=1}^I \widehat{MSEP}_{(\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I)}(0) \\ + 2 \sum_{k>i>0} \hat{C}_{i,J}^I \hat{C}_{k,J}^I \left[\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / (\hat{f}_{I-i}^I)^2}{S_{I-i}^I} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{S_j^I} \right] \end{aligned}$$

10.3 Paramètre propre à l'entreprise

a) Estimation des paramètres du triangle des sinistres cumulés

1. L'objectif est d'estimer la charge ultime des sinistres avec la méthode de provisionnement de Chain-Ladder sur base du triangle des sinistres cumulés. Les facteurs de développement sont :

- $\forall j \in (0, \dots, J-1)$ alors $\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = \frac{S'_{j+1}}{S_j}$
- Lorsque $j = J$ alors $\hat{f}_j = 1$

Il est possible de compléter le triangle des paiements cumulés tel que :

i \ j	0	1	2	...	J-1	J
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$	...	$C_{0,J-1}$	$C_{0,J}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	$C_{1,J-1}$	$C_{1,J}$
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	...	$C_{2,J-1}$	$C_{2,J}$
...	...	...	...	...	...	...
I-1	$C_{I-1,0}$	$C_{I-1,1}$	...	...	$C_{I-1,J-1}$	$C_{I-1,J}$
I	$C_{I,0}$	$C_{I,1}$	...	...	$C_{I,J-1}$	$C_{I,J}$

Figure 20 - Triangle de paiements cumulés complété par la méthode de Chain-Ladder

L'application de la méthode de Chain-Ladder permet de déterminer la Provisions de Sinistres à Payer telle que :

$$PCO_{Chain\ Ladder} = \sum_{i=0}^I (\hat{C}_{i,J} - C_{i,J-1})$$

2. Calculons ensuite l'estimateur sans biais de la volatilité du règlement des sinistres tel que :

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - f_j \right)^2, \forall j \in \{1, \dots, J-2\}$$

$$\begin{cases} \sigma_j^2 = 0, \text{ pour } j = J-1 \text{ si } \hat{f}_j = 1 \\ \sigma_j^2 = \min \left(\sigma_{j-2}^2, \sigma_{j-3}^2, \frac{\sigma_{j-2}^4}{\sigma_{j-3}^2} \right), \text{ pour } j = J-1 \text{ sinon} \\ \sigma_j^2 = 0, \text{ pour } j = J \end{cases}$$

b) Erreur de prédiction sur les provisions

3. On calcule ensuite l'erreur quadratique moyenne de prédiction (MSEP) du CDR. Introduisons d'abord le ratio Q_j tel que :

$$\begin{cases} \forall j \in \{1, \dots, J-1\}, Q_j = \frac{\sigma_j^2}{f_j^2} \\ \text{Pour } j = J, Q_j = \sigma_j^2 = 0 \end{cases}$$

L'étape suivante consiste à calculer l'erreur quadratique moyenne de prédiction (MSEP) du CDR comme défini par les Actes Délégués :

$$MSEP = \sum_{i=1}^I (\hat{C}_{i,J})^2 \times \left(\sum_{j=l-i+1}^{J-1} \left(\frac{C_{l-j,j}}{S'_j} \right)^2 \times \frac{\hat{Q}_j}{C_{l-j,j}} + \frac{\hat{Q}_{l-i}}{C_{i,l-i}} + \frac{\hat{Q}_{l-i}}{S_{l-i}} + \sum_{j=l-i+1}^{J-1} \left(\frac{C_{l-i,j}}{S'_j} \right)^2 \times \frac{\hat{Q}_j}{S_j} \right) \\ + 2 \sum_{i=0}^I \sum_{k=i+1}^I \hat{C}_{i,J} \times \hat{C}_{k,J} \\ \times \left(\sum_{j=l-i+1}^{J-1} \left(\frac{C_{l-j,j}}{S'_j} \right)^2 \times \frac{\hat{Q}_j}{C_{l-j,j}} + \frac{\hat{Q}_{l-i}}{S'_{l-i}} + \frac{C_{i,l-i}}{S'_{l-i}} \times \frac{\hat{Q}_{l-i}}{S'_{l-i}} + \sum_{j=l-i+1}^{J-1} \left(\frac{C_{l-i,j}}{S'_j} \right)^2 \times \frac{\hat{Q}_j}{S_j} \right)$$

Il est possible simplifier la formule avec $\forall j \in \{0,1, \dots, J-1\}$, avec $S'_j = S_j + C_{l-i,j}$.

$$\sum_{j=l-i+1}^{J-1} \left(\frac{C_{l-j,j}}{S'_j} \right)^2 \times \frac{\hat{Q}_j}{C_{l-j,j}} + \sum_{j=l-i+1}^{J-1} \left(\frac{C_{l-j,j}}{S'_j} \right)^2 \times \frac{\hat{Q}_j}{S_j} + \frac{\hat{Q}_{l-i}}{S'_{l-i}} + \frac{C_{i,l-i}}{S'_{l-i}} \times \frac{\hat{Q}_{l-i}}{S'_{l-i}} = \frac{\hat{Q}_{l-i}}{S_{l-i}}$$

Après simplification, le MSEP prend la forme suivante :

$$MSEP = \sum_{i=1}^I (\hat{C}_{i,J})^2 \times \left(\frac{\hat{Q}_{l-i}}{C_{i,l-i}} + \frac{\hat{Q}_{l-i}}{S_{l-i}} + \sum_{j=l-i+1}^{J-1} \frac{C_{l-i,j}}{S'_j} \times \frac{\hat{Q}_j}{S_j} \right) + 2 \sum_{i=0}^I \sum_{k=i+1}^I \hat{C}_{i,J} \times \hat{C}_{k,J} \\ \times \left(\frac{\hat{Q}_{l-i}}{S_{l-i}} + \sum_{j=l-i+1}^{J-1} \frac{C_{l-j,j}}{S'_j} \times \frac{\hat{Q}_j}{S_j} \right)$$

4. La volatilité du risque de réserve s'effectue selon la formule présentée ci-après :

$$\sigma_{USP} = \frac{\sqrt{MSEP}}{PCO_{Chain Ladder}}$$

Pour alléger la lecture, la notation est simplifiée de la sorte :

$$MSEP = \widehat{MSEP}_{(\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I)}(0)$$

L'écart-type final du risque de réserve est :

$$\sigma_{(s,final)} = c \times \frac{\sqrt{MSEP}}{PCO_{Chain Ladder}} + (1-c) \times \sigma_{(s,EIOPA)}$$

IV. Calibrage des USP au portefeuille de la captive

11. Cadre de l'étude et qualité des données

11.1 Données dans le cadre de l'étude

Les données requises par méthode USP sont détaillées dans les sections 1 des chapitres 7 à 10.

Les données utilisées dans le cadre de ce mémoire proviennent de la captive de réassurance non-vie CAP RE, propriété d'un groupe industriel actif dans le transport maritime international, domicilié au Grand-Duché de Luxembourg.

a) Les sources et les données pour l'étude

Les données proviennent des sources comptables et financières internes suivantes depuis 2015 :

- Comptes de résultat technique et non-technique par année comptable.
- Etats financiers par année comptable.
- Bases de données des primes et des sinistres, brutes et nettes de rétrocession, à la maille contrat x LoB x année comptable.
- Traités de réassurance/rétrocession à charge de CAP RE à la maille contrat x LoB x année comptable.

Pour le calibrage des USP, l'utilisation de données externes n'a pas été envisagée, car la place luxembourgeoise ne fournit pas de données techniques publiques et pertinentes à cet effet.

b) Les processus de contrôle de la qualité des données

Un an avant la mise en place la Directive Solvabilité II, CAP RE a mis en place un cadre de contrôle pour la qualité des données en implémentant les processus suivants :

- Processus de collecte et d'agrégation des données d'assurance entre les différentes sources internes (filiales) du Groupe propriétaire.
- Processus d'actualisation des données.
- Glossaire et définition des données collectées pour chaque filiale du Groupe propriétaire.
- Cartographie des données (source, caractéristiques et fréquence d'actualisation).
- Liste des contrôles et des responsables des données.
- Liste des retraitements effectués sur les données.
- Rapport d'erreurs dans le processus de qualité des données.
- Formation de gouvernance de la qualité des données auprès du Risk-management du Groupe et des salariés de la captive.

11.2 Retraitement des données

c) Périmètre de l'étude

L'étude des paramètres propres de CAP RE s'appuie sur un historique de données couvrant la période de 2015 à 2024. Sur cette période, les périmètres de la captive sont restés stables (aucune opération de fusion-acquisition ni de rachat de capacité de PFS). Les risques souscrits correspondent exclusivement à des risques non-vie propres à la maison mère du groupe.

Il existe une concordance entre la clôture comptable au 31 décembre de chaque année et la fin de la période de couverture des traités de réassurance annuels. L'année de survenance coïncide donc avec l'année comptable. Il n'existe pas de procédure de « *fast-closing* » dans le cadre de la clôture comptable annuelle.

La zone d'exposition au risque est répartie à l'échelle mondiale, en raison de la nature internationale de l'activité, qui concerne le transport de composants d'éoliennes et de matériel technique par cargos spécialisés à destination de sites de construction. Cette diversification géographique des risques est prise en compte dans le calcul du SCR primes et réserve, à travers le coefficient de diversification géographique et le SCR de catastrophe.

Toutes les données récupérées sont exprimées en euros, les échanges d'information entre le groupe et les cédantes s'effectuant sur cette base.

d) Retraitement des primes

Les primes acquises par année de souscription sont égales aux primes acquises comptable à la date de clôture car les programmes sont annuels du 1^{er} janvier au 31 décembre de chaque année, il n'y a donc pas de provision pour primes non-acquises au bilan. La formule des primes à la date de clôture du 31 décembre de chaque année est la suivante :

$$Prime\ émises_{31.12.N} = Primes\ acquises_{Année\ de\ souscription\ N} = Primes\ acquises_{Année\ comptable\ N}$$

Les données de primes par LoB sont collectées brutes et nette de réassurance à la maille LoB x année comptable. Il n'a été constaté aucun retraitement des primes acquises pour la préparation des données à l'application des différentes méthodes USP.

Les primes des traités MAT proportionnelle et non proportionnelle ont diminué en 2024 consécutivement à un accord entre l'assureur cédant et CAP RE, motivé par les résultats favorables des années antérieures.

L'évolution des primes par exercice pour les 4 programmes de réassurance étudiés :

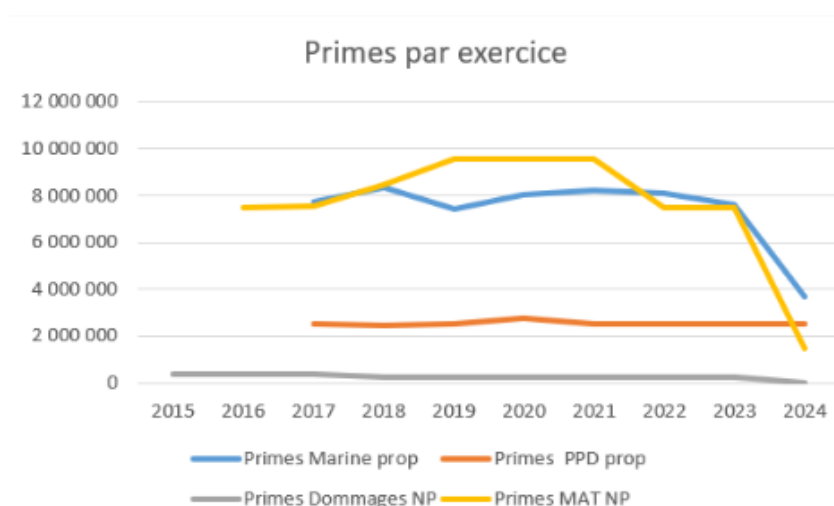


Figure 21 - Primes ultimes par exercice

e) Retraitement des provisions *Best Estimate*

- Retraitements liés à l'évolution des programmes de souscription

Sur la période 2015-2024, les polices des risques acceptés ont fait l'objet d'ajustements mineurs, principalement au niveau des franchises locales ainsi que des seuils par sinistre et par an. De par sa relation exclusive avec sa maison mère, la captive de réassurance dispose d'un historique complet des sinistres, ventilé par branche d'activité, localité et année, à partir du premier euro. CAP RE détient également la traçabilité de l'évolution des garanties et des franchises sur l'ensemble des programmes.

Cette exhaustivité des données de sinistres a facilité la mise en place de l'application de la méthode « *as-if* » sur les données de sinistres au 31.12.2024 pour refléter les risques encourus sur les 12 mois à venir pour CAP RE.

La mise en place des conditions historiques des traités de réassurance aux conditions actuelles des 12 prochains mois à charge de la captive est simple car la captive dispose des statistiques sinistres au premier euro (franchise locale inclus).

Le processus général d'application des conditions des traités de réassurance actuelles aux sinistres historiques est le suivant :

- Pour chaque sinistre brut au 1^{er} euro, les franchises locales actuelles sont appliquées. Si le montant du sinistre est inférieur à la franchise locale actuelle, le sinistre reste à charge du groupe propriétaire.
- Après application des franchises locales, la rétention actuelle par sinistre est prise en compte afin de déterminer la rétention actuelle des sinistres historiques aux conditions actuelles.
- Ensuite, la rétention annuelle est appliquée au cumul de sinistres, dans la limite du traité en vigueur, pour estimer la sinistralité historique ajustée.

L'évolution des structures de réassurance est résumée dans le tableau suivant :

Segment	Période	Franchise captive	Limites Acceptation	Rétrocession
Assurance maritime, aérienne et transport et réassurance proportionnelle y afférente	2017 - 2020	Franchises locales.	EUR 1.500.000 par sinistre sans agrégat annuel.	Pas de rétrocession.
	2021 - 2024	Au 1 ^{er} EUR.	EUR 2.000.000 par sinistre sans agrégat annuel.	
Assurance pertes pécuniaire diverses et réassurance proportionnelle y afférente	2017 - 2019	Franchises locales.	EUR 50.000 par sinistre EUR 1.000.000 par an.	Pas de rétrocession
	2020 - 2023		EUR 200.000 par sinistre EUR 1.000.000 par an.	
	2024	Au 1 ^{er} EUR.	EUR 300.000 par sinistre EUR 1.500.000 par an.	

Réassurance dommages non proportionnelle	2015 - 2018	Franchises locales.	EUR 500.000 XS EUR 120.000.	EUR 25 M XS EUR 50 M – multilignes.
	2019 - 2024		EUR 500.000 XS EUR 50.000.	
Réassurance maritime, aérienne et transport non proportionnelle	2016 - 2024	Franchises locales.	EUR 75 M XS EUR 100.000.	EUR 25 M XS EUR 50 M – multilignes.

Tableau 10 - Evolution des programmes de souscription

- **Retraitements liés à la rétrocession**

Le programme de rétrocession multilignes pour les deux traités de réassurance non-proportionnelle (25 millions XS 50 millions) n'a jamais atteint son seuil de déclenchement et n'a jamais subi de modification (porté et priorité) au cours de la période étudiée. Les données sont collectées brutes et nettes de réassurance à la maille LoB x année comptable. De ce fait, les provisions sinistres brutes sont équivalentes aux provisions sinistres nettes en vision comptable et *Best Estimate*.

- **Retraitement des frais de sinistre et de gestion**

Les honoraires d'experts, frais juridiques et administratifs ainsi que les coûts opérationnels sont inclus et ventilés dans les bordereaux de sinistre en provenance des cédantes. Une évolution du taux de sinistres est appliquée sur la période étudiée sur base des frais stipulés dans les traités de réassurance, passant de 6% de 2017 à 2020 puis 3.5% de 2021 à 2024 pour la branche PPD Proportionnelle.

Le taux est de 5% de 2017 à 2019 puis 3.2% pour la branche MAT Proportionnelle. En ce qui concerne les deux branches non-proportionnelles, les frais administratifs s'élèvent à 5.3% sur toute la période.

- **Retraitement des sinistres catastrophique et catastrophes naturelles**

Il est à noter qu'aucun événement catastrophique n'a été recensé dans les données des traités de réassurance à charge de CAP RE.

- **Retraitement de l'inflation**

L'inflation est implicitement appliquée par les cédantes dans l'évaluation du coût des sinistres en appliquant des indices d'inflation correspondant à la nature des risques encourus.

- **Retraitements liés à la frontière des contrats**

Les quatre traités de réassurance (proportionnelle et non-proportionnelle) ne stipulent aucune clause de reconduction tacite. Chaque année, les traités de réassurance et de rétrocession sont sujet à des renégociations entre les différentes parties prenantes.

- **Reconstitution des provisions Best Estimate**

Les données utilisées pour la calibration des méthodes USP doivent être en vision *Best Estimate* à la maille LoB x année comptable et disposer d'un historique conséquent, avec un minimum de 5 année de développement après la première année de survenance d'un sinistre. Les données sont à disposition sur la période 2015-2024 et le *Best Estimate des provisions pour sinistres* et le *Best Estimate des provisions pour primes* sont calculé par les actuaires de la captive.

- **Cadence de règlement des sinistres**

Les cadences de règlement, moyennes et cumulées, des sinistres historiques par année de développement sont présentées dans le tableau suivant :

Programmes	1	2	3
MAT proportionnelle	15%	25%	60%
	15%	40%	100%
PPD proportionnelle	50%	25%	25%
	50%	75%	100%
Dommages Non proportionnelle	50%	50%	
	50%	100%	100%
MAT Non proportionnelle	15%	25%	60%
	15%	40%	100%

Tableau 11 - Cadence de règlement des sinistres par programme

Les sinistres sont clos après trois années de développement et sont considérés comme étant à développement court.

- **Best Estimate des provisions pour sinistres**

Ci-dessous le processus général d'estimation du *Best Estimate des provisions pour sinistres* :

- 1) Identification de la frontière des contrats actuels et passés sur les provisions des sinistres comptables conformément à l'Article 17 des Actes Délégués.
- 2) Recensement des provisions sinistres et IBNR avec une attention sur les sinistres ouverts sans provision sinistre.
- 3) Application des flux de paiements de sinistre sur base des cadences de règlements propres à chaque traité de réassurance.
- 4) Allocation des dépenses futures que sont les coûts administratifs et les frais généraux, inflation comprise, aux flux de trésorerie futurs proportionnellement à chaque branche d'activité. Les coûts d'acquisition ne sont pas pris en compte car ils sont basés sur les futures primes et ne sont pas éligibles dans le cadre de la frontière des contrats.
- 5) Actualisation des flux de trésorerie futurs au taux sans risque à la date de clôture des états financiers.

- **Best Estimate des provisions pour primes**

La clôture correspondant à la fin de validité des polices, les polices renouvelées entre alors dans la frontière des contrats. Dans la mesure où il n'y a pas de clause établissant un droit unilatéral de la captive de résilier, modifier la prime ou modifier les termes des prestations en cours d'année, c'est bien 100% de la prime annuelle future qui est prise en compte dans la frontière des contrats.

A ceci doivent être également pris en compte la sinistralité future apportée par l'exposition à cette prime (par le biais du *loss ratio*), les coûts d'acquisition (payés généralement peu après l'entrée en vigueur de la nouvelle police) et les autres frais (administratifs principalement). La captive n'est pas exposée à des coûts de gestion des investissements et aucun frais de gestion de sinistre n'est à prévoir vu que ceux-ci sont bien inclus dans les bordereaux des cédantes : le *loss ratio* basé sur l'historique des déclarations en tient donc déjà compte.

11.3 Conclusion de la qualité des données

Le tableau ci-dessous résume les critères de la qualité des données de notre étude :

	Conclusions
Données exhaustives	La longueur maximum de l'historique des données est de 10 années avec une granularité suffisante, ce qui permet d'identifier les tendances de paiements des sinistres (maximum 3 ans) et d'acquisition des primes. Les retraitements effectués sur les données de <i>Best Estimate</i> de provisions pour sinistres sont justifiés sur une base contractuelle. L'hypothèse de données exhaustives est validée en pratique.
Données exactes	Les données proviennent d'états financiers et d'un unique système de gestion des données internes de l'entreprise, audités par un réviseur d'entreprise agréé. L'exactitude des données est considérée comme vérifiée.
Données appropriées	Les données reflètent les risques à charge de la captive de réassurance. Pour certaines données (primes et sinistres), une volatilité significative est observée rendant leur adéquation aux méthodologies prescrites par les Actes Délégués sujette à caution. Une granularité insuffisante des données (à la maille LoB et non par garantie) incite à multiplier les hypothèses lors de la modélisation du risque. Le faible volume de sinistres, souvent inférieur à 100 par programme de souscription et par an, constitue une contrainte majeure pour l'application de modèles actuariels robustes. L'hypothèse que les données sont appropriées est vérifiée car elles représentent fidèlement les risques auxquels la captive de réassurance est soumise, malgré une granularité et un nombre de sinistres par an insuffisant.

Tableau 10 - Résumé de la qualité des données

Ayant établi les critères de la qualité des données de notre étude, il est donc désormais possible de poursuivre notre analyse en procédant à une analyse de la vérification de la validité des hypothèses par méthode USP et par LoB.

12. Analyse du risque de primes de la méthode Log-Normale

12.1 Présentation des données

Lorsque les données requises pour l'application d'une méthode USP sont disponibles, il est crucial de vérifier les hypothèses sous-jacentes à cette méthode. Il convient de garder à l'esprit que les statistiques présentées ci-dessous sont basées sur des échantillons de petite taille, ce qui limite la robustesse et la significativité des résultats. Cette faiblesse est confirmée par les tests de sensibilité réalisés sur les résultats par méthode dans le cadre de ce mémoire.

L'écart-type du risque de primes peut être calculé en net ou en brut de réassurance. Lorsque les calculs sont effectués en brut de réassurance, il convient d'appliquer le facteur d'ajustement de la réassurance non proportionnelle de la formule standard.

Dans le présent cas, les données sont nettes de réassurance, la captive ne disposant pas de programme de rétrocession pour les risques proportionnels souscrits. Ces données incluent les frais de gestion des sinistres ainsi que les dépenses engagées au titre de la gestion des engagements de réassurance de la captive. Elles ne présentent pas de sinistres catastrophiques, ce qui permet de supposer que les sinistres sont

indépendants et identiquement distribués. Les données, nettes de réassurance pour le risque de primes, sont donc conformes aux exigences de la méthode.

- MAT Proportionnelle

Années	Primes X_t	Charges Y_t	Y_t/X_t	$LN(Y_t/X_t)$
2017	7 753 939	3 561 806	46%	-78%
2018	8 331 141	5 957 524	72%	-34%
2019	7 449 304	4 766 943	64%	-45%
2020	8 032 209	1 362 146	17%	-177%
2021	8 208 241	2 551 792	31%	-117%
2022	8 080 223	5 898 617	73%	-31%
2023	7 583 005	2 124 947	28%	-127%
2024	3 673 884	7 554 246	206%	72%

Tableau 11 - Données MAT Proportionnelle

- PPD Proportionnelle

Années	Primes X_t	Charge Y_t	Y_t/X_t	$LN(Y_t/X_t)$
2017	2 500 000	575 000	23%	-147%
2018	2 456 009	583 100	24%	-144%
2019	2 500 000	700 000	28%	-127%
2020	2 765 589	596 700	22%	-153%
2021	2 500 000	725 000	29%	-124%
2022	2 500 000	600 500	24%	-143%
2023	2 500 000	735 400	29%	-122%
2024	2 500 000	709 300	28%	-126%

Tableau 12 - Données PPD Proportionnelle

12.2 Validation des hypothèses de la méthode

Hypothèse 1 : Pour une année de survenance t , les pertes cumulées en vision un an sont proportionnelles aux primes acquises, ainsi on a : $\forall t, E(Y_t) = \beta X_t$.

a) Validation graphique

Dans un premier temps, une analyse graphique est réalisée en traçant les charges de sinistres ultimes après 1 an en fonction des primes acquises par LoB pour vérifier la relation de proportionnalité entre les pertes cumulées en vision un an et les primes acquises.

- MAT Proportionnelle

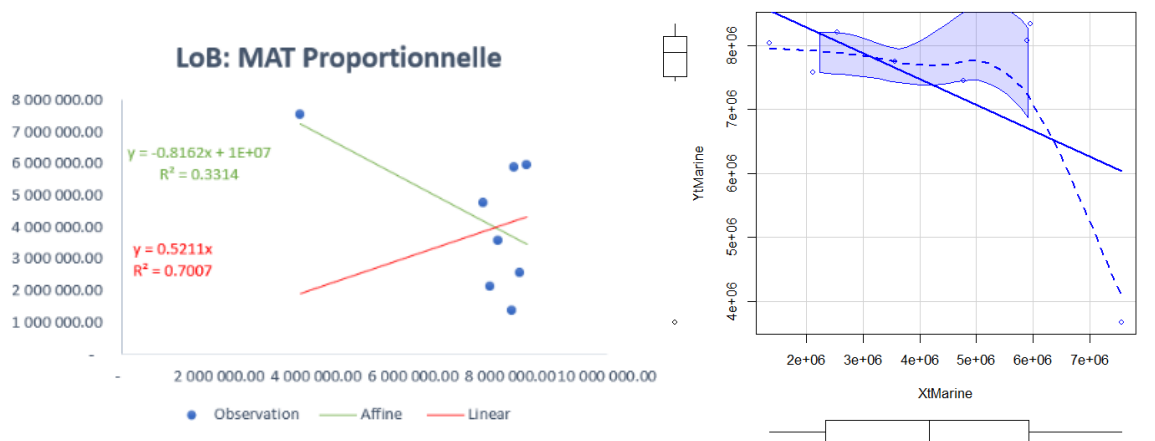


Figure 22 - Charge sinistre après 1 an en fonction des primes acquises - MAT Proportionnelle

Il est observé une faible relation de proportionnalité entre primes acquises et pertes agrégées dans le cadre de la relation linéaire, droite en rouge sur le graphique de gauche, pour la LoB MAT Proportionnelle. Le coefficient de régression R^2 est égale à 0.7007, cette valeur est insuffisante pour confirmer l'hypothèse de linéarité. La droite de régression, trait plein bleu sur le graphique de droite avec le logiciel R-Studio, n'est pas comprise dans l'intervalle de confiance.

L'historique complet a été utilisé, soit huit observations, afin d'évaluer la robustesse des résultats obtenus. Idéalement, il faudrait retirer l'année 8 qui présente une charge supérieure aux autres années avec un ratio S/P de 206% mais avec 8 points de données, ce qui est faible pour interpréter convenablement les résultats statistiques, il est préférable de conserver l'ensemble des points de données à ce stade de l'analyse.

- PPD Proportionnelle

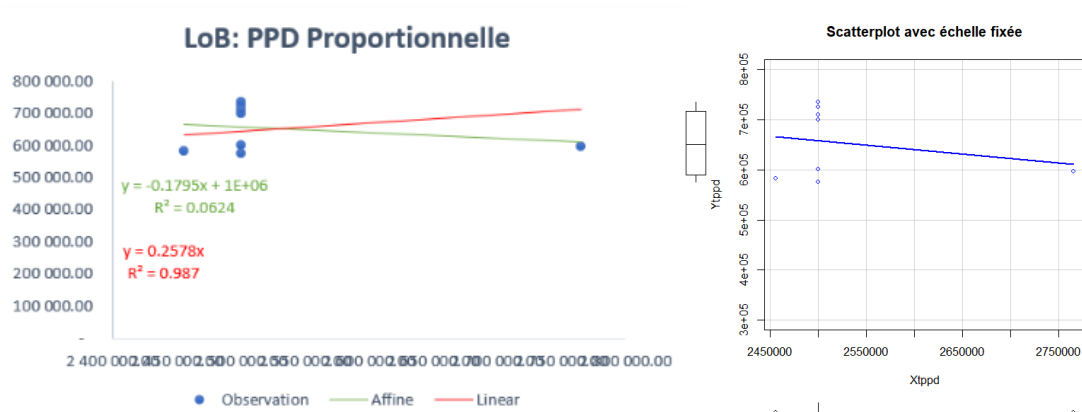


Figure 23 - Charge sinistre après 1 an en fonction des primes acquises - PPD Proportionnelle

Graphiquement, il semble y avoir une relation de proportionnalité entre les primes acquises et les pertes pour la LoB PPD Proportionnelle, droite en rouge sur le graphique de gauche. Les primes varient peu sur la période étudiée et les ratios S/P oscillent entre 22% et 29%. La faible variation des primes sur la période

concentre les points sur la même abscisse. Le coefficient de régression R^2 est égal à 0.987, ce qui semble conforter l'idée d'une relation de proportionnalité.

Il est nécessaire d'effectuer une validation numérique pour confirmer ou infirmer, la relation de proportionnalité entre les primes acquises et les pertes à vision 1 an.

b) Validation numérique

Pour confirmer la relation de proportionnalité graphique entre nos deux variables pour les programmes de réassurance MAT et PPD Proportionnelles, il convient d'effectuer une validation numérique avec une régression linéaire d'ordre 1 de la forme :

$$Y_t = \beta X_t + b_0 + \varepsilon \quad (1)$$

L'objectif est d'écarter le paramètre d'origine b_0 . Et dans un second temps, une validation numérique est requise en effectuant une seconde régression linéaire d'ordre 1 sans paramètre d'origine b_0 de la forme :

$$Y_t = \beta X_t + \varepsilon \quad (2)$$

Test de Student

Un test de Student au seuil de 5% est appliqué aux paramètres des régressions (1) et (2) afin de valider leur significativité. Les conditions d'application d'un test de Student sur les variables d'une régression linéaire sont :

- **Normalité des résidus** : Les résidus (différences entre les valeurs observées et les valeurs prédites) doivent suivre approximativement une loi normale.
- **Homoscédasticité** : La variance des résidus doit être constante pour toutes les valeurs des variables explicatives.
- **Indépendance des observations** : Les observations doivent être indépendantes les unes des autres.

Formulation des hypothèses de test pour l'équation (1)

Hypothèse de test pour le **paramètre d'origine b_0** de l'équation (1) :

$$\begin{cases} H_0: b_0 = 0 \\ H_1: b_0 \neq 0 \end{cases}$$

Hypothèse de test pour la **pente β** de l'équation (1) :

$$\begin{cases} H_0: \beta = 0 \\ H_1: \beta \neq 0 \end{cases}$$

Formulation des hypothèses de test pour l'équation (2)

Hypothèse de test pour la **pente β** de l'équation (2) :

$$\begin{cases} H_0: \beta = 0 \\ H_1: \beta \neq 0 \end{cases}$$

Calcul de la statistique de test pour l'équation (1)

Un **premier test de Student** à $n-p-1$ degrés de libertés est effectué pour tester la significativité des paramètres de la régression avec un seuil de significativité de 5%. La statistique de Student est telle que :

$$T_n = \frac{\widehat{b_0}}{\sigma_i} \sim T(n-p-1)$$

Où :

- n : nombre d'observations, soit 8 années.
- p : nombre de paramètres ($p=2$ dans la régression (1) et $p=1$ dans la régression (2)).

Avec :

- $|T_{b_0}| \geq t_{\frac{\alpha}{2}, n-p-1}$, l'hypothèse H_0 est rejetée.
- $|T_{b_0}| \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-p-1}$, l'hypothèse H_0 n'est pas rejetée.
- Si la $p - value = \mathbb{P}(|T_{b_0}| > |t| | H_0)$. L'hypothèse H_0 est rejetée si $p - value \leq \alpha$.

Un **deuxième test de Student** est effectuée à $n-p-1$ degrés de libertés dans le cadre de l'équation (1) pour tester la significativité des coefficients de la régression avec un seuil de significativité de 5%. La statistique de Student est telle que :

$$T_n = \frac{\widehat{\beta}_i}{\sigma_i} \sim T(n-p-1).$$

Avec :

- $|T_{\beta}| \geq t_{\frac{\alpha}{2}, n-p-1}$, l'hypothèse H_0 est rejetée.
- $|T_{\beta}| \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-p-1}$, l'hypothèse H_0 n'est pas rejetée.
- Si la $p - value = \mathbb{P}(|T_{\beta}| > |t| | H_0)$. L'hypothèse H_0 est rejetée si $p - value \leq \alpha$.

```
> reglmarine<-lm(ytMmarine~xtMmarine)
> summary(reglmarine)

Call:
lm(formula = ytMmarine ~ xtMmarine)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-2362331  -552855   118926   554047  1646662

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  9.103e+06  1.103e+06   8.252 0.000171 ***
xtMmarine    -4.060e-01  2.354e-01  -1.724 0.135381
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1353000 on 6 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3314,    Adjusted R-squared:  0.22
F-statistic: 2.974 on 1 and 6 DF,  p-value: 0.1354

> confint(reglmarine)
                2.5 %      97.5 %
(Intercept)  6.403911e+06 1.180252e+07
xtMmarine    -9.820710e-01 1.700776e-01
```

```
> reglppd<-lm(ytppd~xtppd)
> summary(reglppd)

Call:
lm(formula = ytppd ~ xtppd)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-83096  -63920   14087   55129   77304

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.107e+06  7.184e+05   1.541 0.174
xtppd        -1.795e-01  2.840e-01  -0.632 0.551

Residual standard error: 73160 on 6 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.06239,    Adjusted R-squared: -0.09388
F-statistic: 0.3992 on 1 and 6 DF,  p-value: 0.5508

> confint(reglppd)
                2.5 %      97.5 %
(Intercept) -6.511829e+05 2.864751e+06
xtppd        -8.745051e-01 5.155550e-01
```

Figure 24 - Tests de proportionnalité pour les régressions (1) – risque de primes

Pour la LoB **MAT Proportionnelle**, sur base de la p-value, l'hypothèse H_0 est rejetée pour l'ordonnée à l'origine et est acceptée pour la pente de la régression.

Pour la LoB **PPD Proportionnelle**, l'hypothèse H_0 n'est pas rejetée pour l'ordonnée à l'origine et la pente de la régression sur base de la p-value.

Calcul de la statistique de test pour l'équation (2)

Un test de Student à $n-1$ degrés de libertés est effectué pour tester la significativité des coefficients de la régression, la statistique de Student est telle que : $T_n = \frac{\hat{\beta}_i}{\sigma_i} \sim T(n - p - 1)$, où :

- n : nombre d'observations soit 8 années.
- p : nombre de paramètres ($p=1$ dans la régression).

Avec :

- $|T_\beta| \geq t_{\frac{\alpha}{2}; n-p-1}$, l'hypothèse H_0 est rejetée.
- $|T_\beta| \leq t_{\frac{\alpha}{2}; n-p-1}$, l'hypothèse H_0 n'est pas rejetée.
- Si la $p - value = \mathbb{P}(|T_\beta| > |t| | H_0)$. L'hypothèse H_0 est rejetée si $p - value \leq \alpha$.

Les résultats des régressions (2) sont résumés ci-dessous :

```
> reg2marine<-lm(YtMarine~xtMarine-1)
> summary(reg2marine)

Call:
lm(formula = YtMarine ~ xtMarine - 1)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-6483762  277563  2002089  4738565  6200630

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
xtMarine    1.3446      0.3321   4.048  0.00488 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4402000 on 7 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7007,    Adjusted R-squared:  0.658
F-statistic: 16.39 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.004881

> confint(reg2marine)
                2.5 %    97.5 %
xtMarine 0.5592476 2.130007

> reg2ppd<-lm(Ytppd~xtppd-1)
> summary(reg2ppd)

Call:
lm(formula = Ytppd ~ xtppd - 1)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-116323  -54968    5701   68676   90851

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
xtppd    0.25782      0.01118   23.05 7.33e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 80010 on 7 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.987,    Adjusted R-squared:  0.9851
F-statistic: 531.4 on 1 and 7 DF,  p-value: 7.33e-08

> confint(reg2ppd)
                2.5 %    97.5 %
xtppd 0.2313734 0.2842658
```

Figure 25 - Tests de proportionnalité pour les régressions (2) – risque de primes

L'hypothèse de non-nullité de la pente est confirmée et il existe un lien de linéarité croissante entre les pertes cumulées en vision un an et aux primes acquises pour les LoB **MAT et PPD Proportionnelles** dans le cadre de la régression (2). Le coefficient de régression est plus élevé pour la LoB PPD Proportionnelle ($R^2 = 0.987$) que pour la LoB MAT Proportionnelle ($R^2 = 0.7007$).

Analyse des résidus de la régression linéaire (2)

- Indépendance des résidus

a) Vérification graphique

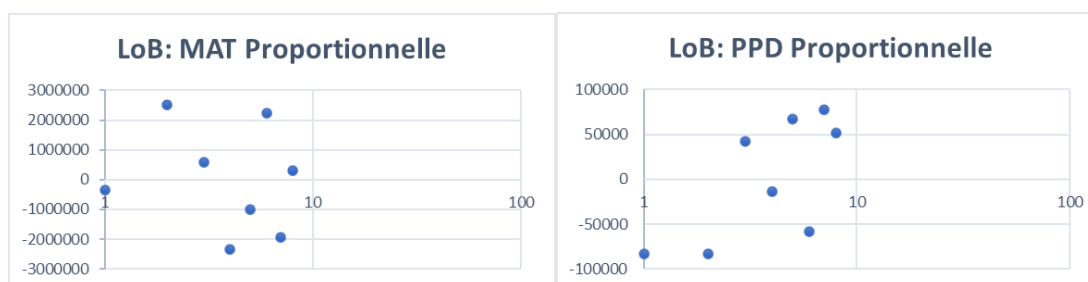


Figure 26 - Nuage de points des résidus de la régression (2)

Les deux graphiques semblent présenter une structure des résidus aléatoires pour les LoB MAT et PPD Proportionnelles.

Diagramme de fonction d'autocorrélation

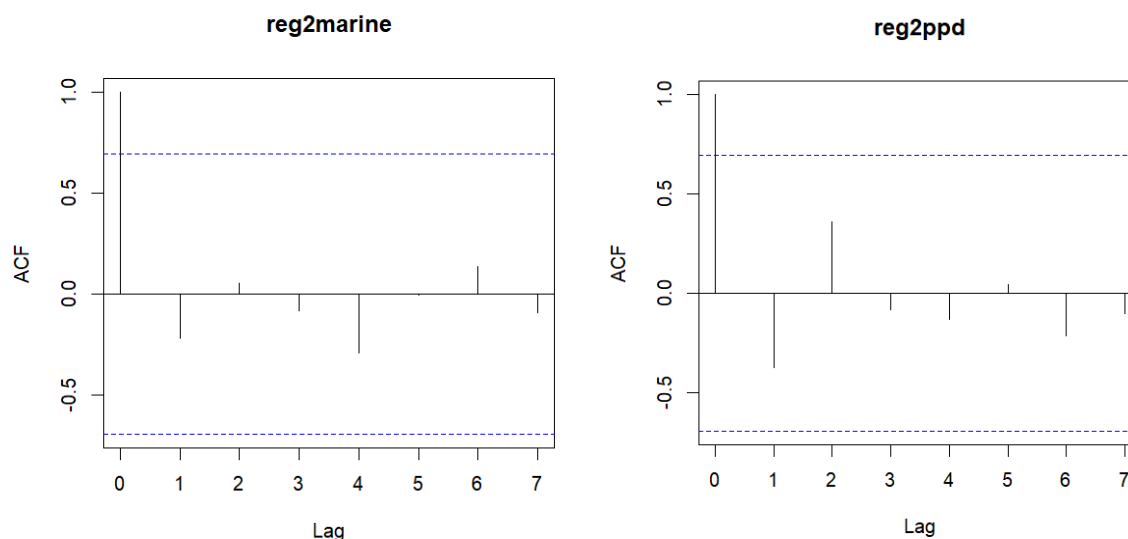


Figure 27 - Lag-plot pour le risque de primes, MAT et PPD Proportionnelles

Les pointillés en bleu sur la figure 27 matérialisent les intervalles de confiance à 95% du coefficient d'autocorrélation des *ACF plot* (Autocorrélation Fonction) pour l'analyse de séries temporelles. Les traits noirs verticaux correspondent au coefficient de corrélation entre les résidus de chaque point de notre jeu de données par LoB. L'analyse des *Lag-plots* ne révèle pas de dépendance structurelle.

Les *Lag-plots* des LoB **Marine** et **PPD Proportionnelles** ne révèlent pas d'autocorrélation significative dans les résidus.

b) Vérification statistique

Test de Durbin-Watson

Un test statistique de *Durbin-Watson* est effectué pour évaluer la présence d'autocorrélation entre les résidus de la régression linéaire (2) par LoB :

$$\begin{cases} H_0: \text{Les résidus ne sont pas autocorrélés} \\ H_1: \text{Les résidus sont autocorrélés} \end{cases}$$

```
> durbinWatsonTest(reg2marine)
lag Autocorrelation D-W Statistic p-value
1      0.05988868      1.505478    0.514
Alternative hypothesis: rho != 0
> durbinWatsonTest(reg2ppd)
lag Autocorrelation D-W Statistic p-value
1     -0.3741132      2.546727    0.438
Alternative hypothesis: rho != 0
```

Figure 28 - Test de Durbin-Watson sur résidus, risque de primes Log-Normale

Pour les deux régressions, la p-value est supérieure à 0.05. En conséquence, au seuil significatif de 5%, l'hypothèse nulle d'absence autocorrélation entre les résidus est acceptée pour les LoB **Marine** et **PPD Proportionnelles**.

- Normalité des résidus

c) Vérification graphique

Une analyse graphique avec QQ-plot est effectuée par branche d'activité dans le but de vérifier la normalité des résidus. Les résidus semblent distribués le long de la droite du QQ-plot pour la LoB MAT Proportionnelle, en revanche, les résidus s'éloignent de la droite dans le cas de la LoB PPD Proportionnelle.

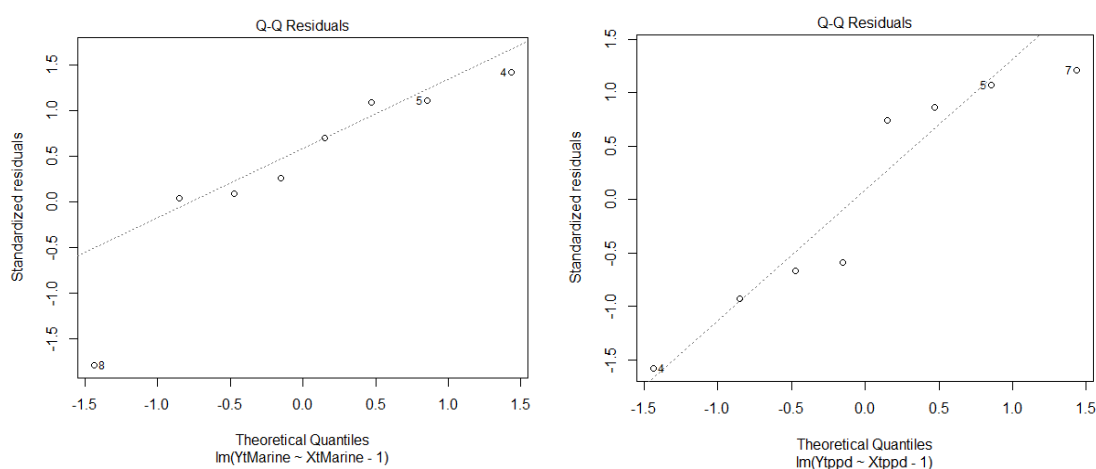


Figure 29 - QQ plots des résidus, risque de primes Log-Normale

d) Vérification statistique

Test de Shapiro-Wilk

Un test statistique de *Shapiro-Wilk*, détaillé théoriquement en Annexe 5, est effectué pour évaluer la normalité des résidus de la régression linéaire (2) par LoB :

$$\begin{cases} H_0: \text{les résidus suivent une loi normale} \\ H_1: \text{Les résidus ne suivent pas une loi normale} \end{cases}$$

```
> shapiro.test(residuals(reg2marine)) > shapiro.test(residuals(reg2ppd))
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data: residuals(reg2marine)
W = 0.89466, p-value = 0.2584
```

Shapiro-wilk normality test

```
data: residuals(reg2ppd)
W = 0.87986, p-value = 0.1878
```

Figure 30 - Tests de normalité de Shapiro-Wilk sur les résidus, risque de primes Log-Normale

Pour les deux LoB, les statistiques de test W sont proche de 1. Les p-values calculées sont supérieurs à 0.05 et l'hypothèse de normalité des résidus H_0 est acceptée au seuil significatif de 5%.

La taille limitée des échantillons ne permet pas de rejeter avec une confiance suffisante l'hypothèse que les jeux de données suivent une distribution Normale.

- Homogénéité des résidus

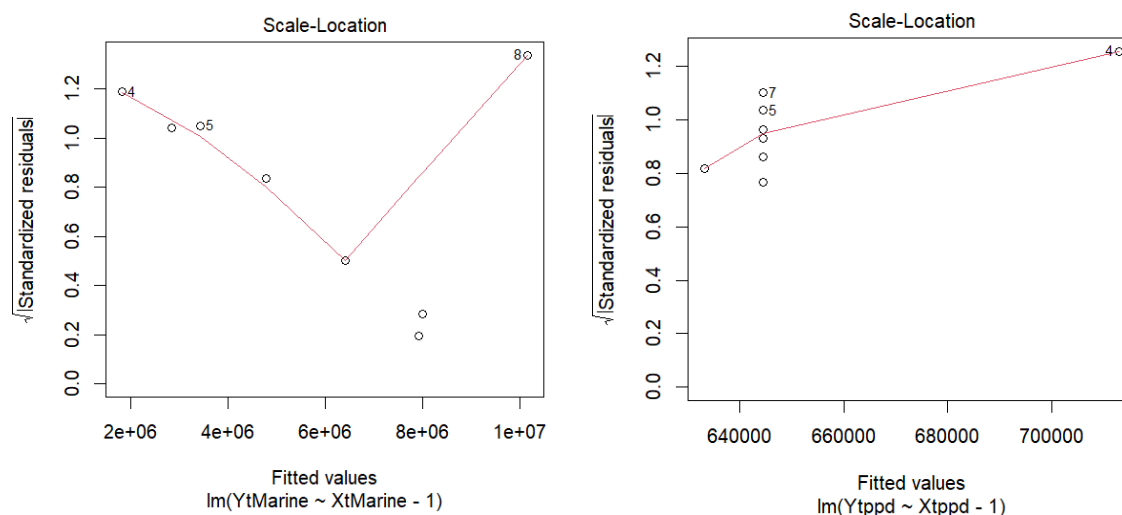


Figure 31 - Tests d'homogénéité des résidus des résidus, risque de primes Log-Normale

Afin d'évaluer visuellement l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus, des graphiques des racines carrées des résidus standardisés en fonction des valeurs ajustées ont été générés dans le but de visualiser la dispersion des résidus sur l'ensemble du domaine de la variable explicative. La courbe rouge sur la figure 31 représente la régression locale des résidus, offrant une indication sur la tendance générale de la variance des résidus.

Pour la LoB **MAT Proportionnelle**, figure de gauche, la courbe de régression est descendante, ce qui suggère que la variance des résidus diminue à mesure que les valeurs prédites augmentent. Au point d'inflexion, la courbe de régression devient ascendante, indiquant que la variance des résidus diminue à mesure que les valeurs prédites augmentent. Concernant, la LoB **PPD Proportionnelle**, la courbe de régression est ascendante.

Pour les deux LoB, l'hypothèse d'homogénéité des résidus est rejetée.

Hypothèse 2 : Le ratio sinistres à primes β est constant.

Dans notre étude, il n'existe pas de différence entre les années de survénance et les années de comptables, en effet, les traités de réassurance proportionnelle PPD et MAT ont des exercices de souscription et comptables en phases, soit du 01/01 au 31/12 de chaque année.

L'évaluation de la stabilité du ratio sinistres à primes (S/P), par année de survénance repose sur deux critères :

- L'absence de tendance linéaire (haussière ou baissière), évalué par l'introduction d'une équation de tendance et l'analyse de la significativité des coefficients de régression associée.
- La faible volatilité des ratios sinistres à primes caractérisé par une faible dispersion d'une année à l'autre. Un seuil a été défini par l'entreprise à hauteur de 10% pour qualifier la volatilité d'acceptable.

Il a été observé que l'ordonnée à l'origine b_0 est non significative, dans le cadre de l'hypothèse 1 pour la régression linéaire (1) au seuil significatif de 5% pour les LoB MAT et PPD Proportionnelles.

a) Vérification graphique

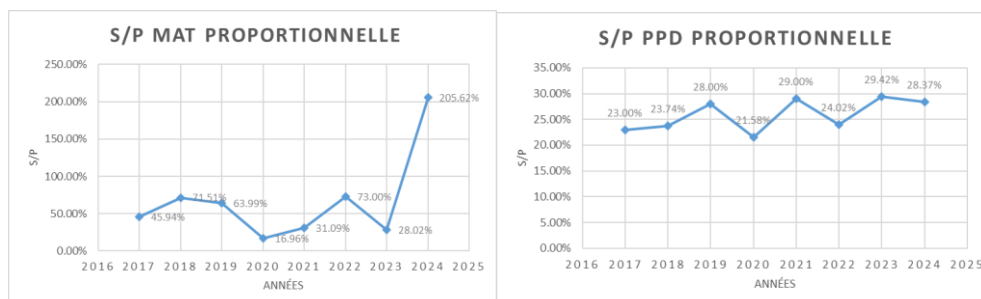


Figure 32 - Ratios sinistres à primes par année de survénance, risque de primes Log-Normale

Graphiquement, le ratio S/P est volatile pour la LoB MAT Proportionnelle.

A l'inverse, le ratio S/P par année de survénance semble stable et peu volatile pour la LoB PPD Proportionnelle.

b) Vérification statistique

	MAT Proportionnelle	PPD Proportionnelle
Mean	67.02%	25.89%
Std	59.81%	3.11%
Max	205.62%	29.42%
Min	16.96%	21.58%
Gap	188.66%	7.84%
Check	FALSE	TRUE

Tableau 13 - Analyse des ratios sinistres à primes, risque de primes Log-Normale

La volatilité du ratio S/P de la LoB MAT Proportionnelle est de 59.81%, ne permettant pas de confirmer l'hypothèse de stabilité de β .

La volatilité du ratio S/P de la LoB PPD Proportionnelle est de 3.11%, inférieur au seuil défini par l'entreprise de 10%, ce qui étaye l'hypothèse 2.

Pour la LoB PPD Proportionnelle, les primes ont fluctué modérément au cours de la période étudiée. Les primes des LoB MAT, tant proportionnelle que non proportionnelle, ont connu une baisse significative en 2024. Cette réduction des primes est une conséquence directe des résultats profitables des années précédentes.

Hypothèse 3 : la variance des pertes est une expression quadratique par rapport aux primes acquises

$$V(Y_t) = \sigma^2([1 - \delta]\bar{X}X_t + \delta X_t^2).$$

L'hypothèse 3 implique qu'une augmentation de la prime acquise engendre une augmentation de l'erreur associée. Généralement, l'optimum est atteint pour $\delta = 0$ ou $\delta = 1$, c'est-à-dire :

- Lorsque $\delta = 0$, la variance des pertes devient proportionnelle à l'exposition $V(Y_t) = \sigma^2(\bar{X}X_t)$.

- Lorsque $\delta = 1$, la variance des pertes devient proportionnelle au carré de l'exposition : $V(Y_t) = \sigma^2(X_t^2)$.

La vérification de cette hypothèse s'opère en réalisant une régression linéaire du carré des résidus entre Y_t et X_t sous condition que la variance des pertes soit une expression quadratique par rapport aux primes acquises telle que :

$$\lambda^2 = V(Y_t) = \sigma^2([1 - \delta]\bar{X}X_t + \delta X_t^2) \times \varepsilon_t^2$$

Avec ε_t les termes d'erreurs de la régression (2) précédente. La simplification de cette équation s'effectue en factorisant le membre de droite par X_t puis en appliquant le logarithme népérien.

On a :

$$\lambda^2 = V(Y_t) = \sigma^2(X_t([1 - \delta]\bar{X} + \delta X_t)) \times \varepsilon_t^2$$

Par l'application du logarithme népérien :

$$\ln(\lambda^2) = \ln(\sigma^2) + \ln(X_t) + \ln([1 - \delta]\bar{X} + \delta X_t) + \ln(\varepsilon_t^2)$$

Le paramètre de mélange obtenu par le processus du maximum de vraisemblance sous la contrainte $0 \leq \delta \leq 1$, avec un optimum atteint pour $\delta = 0$ ou $\delta = 1$, est :

- Pour $\delta = 0$

$$\lambda^2 = \sigma^2(\bar{X}X_t) \times \varepsilon_t^2$$

$$\ln(\lambda^2) = \ln(\sigma^2) + \ln(\bar{X}X_t) + \ln(\varepsilon_t^2)$$

- Pour $\delta = 1$

$$\ln(\lambda^2) = \ln(\sigma^2) + \ln(X_t) + \ln(X_t) + \ln(\varepsilon_t^2)$$

$$\ln(\lambda^2) = \ln(\sigma^2) + \ln(X_t^2) + \ln(\varepsilon_t^2)$$

Les régressions linéaires d'ordre 2, dans la figure 33 ci-dessous, sont effectuées pour tester statistiquement la relation entre la variance de la charge des sinistres et les primes acquises. Il est important de noter que les primes acquises varient peu sur la période étudiée, à l'exception de l'année 2024 pour les LoB MAT proportionnelle et non-proportionnelle.

```
> summary(lm(RESmarine~logXtmarine))
Call:
lm(formula = RESmarine ~ logXtmarine)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.2375 -0.1194  0.3920  0.4528  1.4275

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  80.913    26.905   3.007  0.0238 *
logXtmarine  -3.310     1.704  -1.943  0.1000
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.235 on 6 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3862,    Adjusted R-squared:  0.2839
F-statistic: 3.775 on 1 and 6 DF,  p-value: 0.1
```

```
> summary(lm(RESppd~logXtppd))
Call:
lm(formula = RESppd ~ logXtppd)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.74653 -0.27419 -0.01177  0.23974  0.70131

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -159.255    73.664  -2.162  0.0739 .
logXtppd     12.313     4.997   2.464  0.0488 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.4907 on 6 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.503,    Adjusted R-squared:  0.4201
F-statistic: 6.072 on 1 and 6 DF,  p-value: 0.04885
```

Figure 33 - Test de proportionnalité entre la variance de la charge des sinistres et les primes acquises

L'hypothèse de linéarité d'ordre 2 entre la variance de la charge des sinistres et les primes acquises est rejetée pour la **LoB MAT Proportionnelle** sur base de la p-value égale à 0.1.

Concernant la **LoB PPD Proportionnelle**, l'hypothèse de linéarité d'ordre 2 entre la variance de la charge des sinistres et les primes acquises est acceptée sur base de la p-value égale à 0.04885 qui est inférieure au seuil significatif de 5%. Le coefficient de régression est égal à 50.3%, ce qui indique un pouvoir explicatif non-négligeable. Néanmoins, la fiabilité de cette estimation est limitée par la faible taille de l'échantillon avec 8 points de données. L'interprétation statistique des résultats doit être interprétés avec prudence.

La faible variabilité des primes et le faible pouvoir explicatif des régressions pour les deux LoB Proportionnelles, limitent la robustesse de la validité des conclusions de l'hypothèse 3.

Hypothèse 4 : La distribution des pertes cumulée en vision 1 an suit une distribution Log-Normale.

L'hypothèse centrale de la méthode du risque de primes est que la charge ultime des sinistres suit une loi Log-Normale $Y_t \sim LN(\mu_t, \omega_t^2)$, or une seule valeur de Y_t par année t est disponible. Afin de pallier ce problème, une hypothèse plus restrictive est émise en posant $Z_t = \frac{Y_t}{X_t}$ pour évaluer la conformité des données à une distribution Log-Normale.

Avec $Z_t \sim LN(\mu, \omega^2)$, alors :

$$\begin{aligned} LN(Z_t) &\sim N(\mu, \omega^2) \\ LN(Y_t) - LN(X_t) &\sim N(\mu, \omega^2) \\ LN(Y_t) &\sim N(\mu + LN(X_t), \omega^2) \end{aligned}$$

Montrer que $Y_t \sim LN(\mu_t, \omega_t^2)$ revient donc à montrer que $LN(Z_t) \sim N(\mu, \omega^2)$.

a) Validation statistique

Un test statistique de *Shapiro-Wilk* est effectué pour tester la log-normalité des pertes cumulées à vision 1 an au seuil significatif $\alpha = 5\%$ pour vérifier que le logarithme des ratios sinistres à primes suit une distribution normale.

Hypothèse de test :

$$\begin{cases} H_0: LN(Z_t) \xrightarrow{\text{Suit une loi}} N(\mu, \omega^2) \\ H_1: LN(Z_t) \xrightarrow{\text{Ne suit pas une loi}} N(\mu, \omega^2) \end{cases}$$

Le test de statistique de *Shapiro-Wilk* est utilisé pour tester l'hypothèse de normalité du logarithme de Z_t de notre échantillon. Le test de statistique de *Shapiro-Wilk* est préféré en raison de sa plus grande puissance statistique pour les échantillons de petite taille, 8 points de données dans notre étude.

<code>> shapiro.test(logSP_Marine)</code>	<code>> shapiro.test(logSP_PPD)</code>
Shapiro-Wilk normality test	Shapiro-wilk normality test
data: logSP_Marine	data: logSP_PPD
W = 0.96173, p-value = 0.8264	W = 0.8719, p-value = 0.1573

Figure 34 - Test de log-normalité de Z_t du risque de primes

Pour la LoB MAT Proportionnelle, la statistique de test $W=0.96173$ est proche de 1 et la p-value est supérieur au seuil significatif $\alpha = 5\%$.

Pour la branche PPD Proportionnelle, la statistique de test $W=0.8719$ est proche de 1 et la p-value est supérieur au seuil significatif $\alpha = 5\%$.

Etant donnée que la p-value est supérieur au seuil significatif de 5%, l'hypothèse H_0 n'est pas rejetée et par conséquent les variables $LN(Z_t)$ des deux LoB Proportionnelles peuvent être considérés comment suivant une distribution Log-Normale.

b) Validation graphique

La méthode du QQ-Plot constitue un test visuel permettant de comparer la fonction Log-Normale théorique à une distribution empirique.

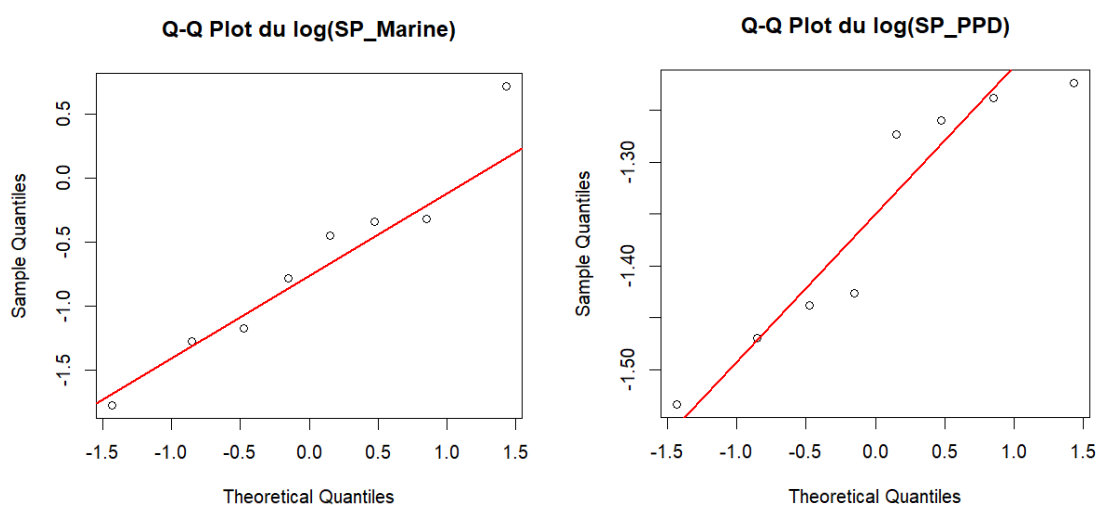


Figure 35 - QQ-plot du logarithme des ratios sinistres à primes pour du risque de primes

Pour la LoB **MAT Proportionnelle**, les points de données s'écartent de la droite rouge, notamment à l'extrémité droite au niveau de la queue de distribution, les logarithmes des données ne suivent donc pas parfaitement une distribution Normale. Le test visuel confirme une déviation par rapport aux quantiles théoriques qui accentué à droite dans la queue de distribution. Le logarithme de Z_t peut être considéré comme suivant partiellement une distribution Normale et donc la charge ultime des sinistres de la branche MAT semble suivre une distribution Log-Normale.

Concernant la LoB **PPD Proportionnelle**, il est observé que les points s'écartent aux extrémités gauches de la droite rouge, ce qui suggère que la queue de distribution inférieure de la distribution est potentiellement plus légère (moins de valeurs extrêmes) que la distribution théorique normale. Il est également constaté une déviation à droite du graphique, ce qui suggère que la queue de la distribution est plus épaisse (plus de valeurs extrêmes) que celle de la distribution théorique normale. A contrario, les points au centre semblent être relativement proche de la droite rouge. Le logarithme de Z_t présente les caractéristiques d'une distribution gaussienne, sans y adhérer parfaitement. Il en découle que la charge ultime des sinistres de la LoB PPD Proportionnelle tend à suivre non parfaitement une loi Log-Normale.

La vérification du caractère log-normal de la sinistralité est centrale quant à son influence sur les autres hypothèses à vérifier dans le cadre de méthode. Dans le cadre méthodologique de ce mémoire, l'analyse du risque de seconde espèce a été délibérément exclue.

Hypothèse 5 : La méthode du maximum de vraisemblance est adaptée.

L'hypothèse 5 requiert que la méthode du maximum de vraisemblance soit adaptée pour la calibration de la volatilité du coefficient de variation intermédiaire, avec le paramètre de mélange δ et le coefficient de variation logarithmique γ qui minimise la formule suivante :

$$\ln L(u_1, \dots, u_T | \delta, \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \pi_t (u_t - \ln \hat{\sigma}(\delta, \gamma))^2 + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(\omega_t^2)$$

La fonction de vraisemblance et/ou la fonction de log-vraisemblance doit pouvoir être optimisée sous condition que les pertes Y_t suivent une distribution Log-Normale, ce qui semble être confirmé partiellement dans la validation de l'hypothèse 4 pour les LoB MAT et PPD Proportionnelles. A l'optimum globale de la fonction de vraisemblance, si l'exposition varie peu au cours du temps, la valeur optimale de δ est soit en 0 ou en 1. Les sinistres doivent être identiquement distribués et indépendants pour que l'estimation par maximum de vraisemblance soit appropriée. C'est-à-dire qu'il doit y avoir indépendance entre la charge des sinistres par année de survenance. En assurance non-vie il est classique de supposer que les exercices de souscription sont indépendants eux.

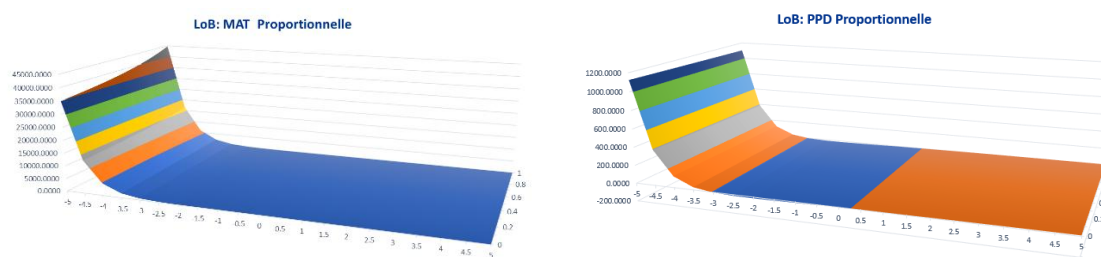


Figure 36 - Fonction de vraisemblance – minimum locale pour le risque de primes.

Dans le cadre de cette hypothèse, les représentations graphiques obtenues pour les deux LoB suggèrent que la fonction de vraisemblance présente une structure favorable à l'optimisation. Plus précisément, la fonction peut être minimisée pour un certain couple de paramètres δ et γ , sans indication graphique d'un minimum local susceptible de compromettre la convergence de l'algorithme. En pratique cette hypothèse est confirmée par la convergence de l'algorithme d'optimisation en 0 pour la **LoB MAT Proportionnelle** et 1 pour la **LoB PPD Proportionnelle**. Ces résultats doivent être interprétés avec prudence étant donné le faible nombre de données à disposition. Le détail des résultats est fourni en Annexe 6.

12.3 Conclusion sur la validité des hypothèses de la méthode

Hypothèse	Tests statistiques élaborés	MAT Proportionnelle	PPD Proportionnelle
Hypothèse 1 : Pour une année de souscription t , les pertes cumulées en vision un an sont proportionnelle aux primes acquises	Analyse graphique de la relation de proportionnalité entre les pertes cumulées en vision un an et les primes acquises.	Alignement partiel	Accepté
	Régressions linéaires (1), (2) et calcul des coefficients d'erreurs.	Coefficient d'erreur trop faible	Accepté
	Test de <i>Student</i> sur les coefficients des régressions linéaires (1) et (2).	(1) Rejeté (2) Accepté	(1) Rejeté (2) Accepté
	Analyse graphique des résidus de la régression linéaire (2).	Partiellement accepté	Partiellement accepté
	Vérification statistique sur les résidus de la régression linéaire (2) : - indépendance - normalité - homogénéité.	- Accepté - Accepté - Rejeté	- Accepté - Accepté - Rejeté
Hypothèse 2 : Le sinistres à primes β est constant.	Analyse graphique des ratios sinistres à primes par année de survenance.	Rejeté	Accepté
	Analyse statistique de β .	Rejeté	Accepté
Hypothèse 3 : La variance des pertes est une expression quadratique par rapport aux primes acquises.	Test de proportionnalité entre la variance de la charge des sinistres et les primes acquises.	Rejeté	Accepté
Hypothèse 4 : La distribution des pertes cumulée en vision 1 an suit une distribution Log-Normale.	Test de statistique de <i>Shapiro-Wilk</i>	Accepté	Accepté
	Analyse graphique avec la méthode du QQ-plot	Partiellement accepté	Partiellement accepté
Hypothèse 5 : La méthode du maximum de vraisemblance est adaptée.	Analyse graphique de l'optimisation de la fonction de vraisemblance.	Partiellement accepté	Partiellement accepté

Tableau 14 - Résumé de la validité des hypothèses du risque de primes de la méthode Log-Normale.

En résumé, il ressort de notre analyse que la validation des hypothèses est difficilement réalisable en pratique. Les ratios sinistres à primes sont volatiles pour les deux LoB proportionnelles étudiées.

Une marge d'erreur de 10% est tolérée concernant la volatilité du ratio sinistres/primes (hypothèse (2) de la méthode), afin de permettre une validation des résultats pour la LoB PPD Proportionnelle.

Le faible nombre de données ne permet pas de valider correctement les hypothèses de la méthode du risque de primes de la méthode Log-Normale pour les deux LoB proportionnelles, apportant des incohérences entre les résultats des tests statistiques asymptotiques en contradiction avec la validation graphique de certaines hypothèses.

Afin de vérifier l'écart du profil de risque de CAP RE par rapport à la formule standard, il a été décidé de poursuivre l'analyse des impacts de la calibration des écart-types intermédiaires et finaux. Bien que les hypothèses sous-jacentes à la méthode du risque de primes ne soient pas entièrement validées avec confiance pour les deux LoB Proportionnelles, cette poursuite s'inscrit dans une démarche pragmatique jugée nécessaire pour progresser dans la compréhension du modèle proposé par les Actes Délégés.

12.4 Résultat de la méthode Log-Normale du risque de primes

a) Résultat des écarts-types de la méthode Log-Normale pour le risque de primes.

Sur base des données présentés à la section 12.1 et de la validation partielle de hypothèses de la méthode Log-Normale du risque de primes pour les LoB MAT et PPD Proportionnelles, les volatilités suivantes ont été obtenues :

Nombre d'années	Full Name	Sigma Basic	Sigma USP	Credibility Factor	Sigma Final
8 ans	Direct and Proportional Marine, Aviation and Transportation	15.00%	41.06%	81.00%	40.56%
8 ans	Direct and Proportional Miscellaneous Financial Loss	13.00%	2.96%	81.00%	5.19%

Tableau 15 -Résultat de la méthode Log-Normale pour le risque de primes

Les résultats pour la LoB **MAT Proportionnelle** sont au-dessus de l'écart-type du risque de prime de la formule standard (Sigma Basic) des Actes Délégés, 15.00% contre 41.06% dans le cas de l'USP. L'écart-type **USP final**, avec un facteur de crédibilité de 81% à la suite de la prise en compte de 8 années d'historique, est de **40.56%**. Il est déduit que l'écart-type de la formule standard sous-évalue le risque de la captive pour la LoB MAT Proportionnelle.

Les résultats pour la **LoB PPD Proportionnelle**, sont inférieurs à l'écart-type du risque de primes de la formule standard, 13.00% contre 2.96% dans notre étude USP. L'écart-type **USP final**, avec un facteur de crédibilité de 81% à la suite de la prise en compte de 8 années d'historique, est de **5.19%**. L'écart-type de la formule standard surévalue donc le risque de la captive pour la LoB PPD Proportionnelle.

b) Résultats des tests de sensibilités de la méthode Log-Normale pour risque de primes.

Des tests de sensibilité ont été effectués par LoB sur tout l'historique à disposition, en retirant les dernières années d'historique de manière itérative.

- MAT Proportionnelle

Nombre d'années	Full Name	Sigma Basic	Sigma USP	Credibility Factor	Sigma Final
8 ans	Direct and Proportional Marine, Aviation and Transportation	15.00%	41.06%	81.00%	40.56%
7 premières années	Direct and Proportional Marine, Aviation and Transportation	15.00%	26.31%	67.00%	25.30%
6 premières années	Direct and Proportional Marine, Aviation and Transportation	15.00%	29.07%	51.00%	24.89%
5 premières années	Direct and Proportional Marine, Aviation and Transportation	15.00%	26.25%	34.00%	20.83%

Tableau 16 - Tests de sensibilités de la méthode Log-Normale pour risque de primes – MAT Proportionnelle

Il est constaté une variation à la baisse de l'écart-type USP final (Sigma Final) du risque de primes de 40.56% à 25.30%, lors du retrait de l'année 2024 qui fut exceptionnelle par une sinistralité élevée. L'écart-type USP final diminue au fur et à mesure que les dernières années sont retirées, accompagné d'une baisse du facteur de crédibilité progressive. L'écart-type USP final (Sigma Final) présente une relative stabilité pour les différentes subdivisions de données exploitées.

L'écart-type USP final est supérieur à l'écart-type du risque de primes de la formule de standard qui est de 15.00%. Cette analyse permet de constater que **l'écart-type du risque de primes pour la branche Marine est très supérieur à l'écart-type standard** défini par les Actes Délgués.

- PPD Proportionnelle

Nombre d'années	Full Name	Sigma Basic	Sigma USP	Credibility Factor	Sigma Final
8 ans	Direct and Proportional Miscellaneous Financial Loss	13.00%	2.96%	81.00%	5.19%
7 premières années	Direct and Proportional Miscellaneous Financial Loss	13.00%	2.95%	67.00%	6.57%
6 premières années	Direct and Proportional Miscellaneous Financial Loss	13.00%	2.64%	51.00%	7.96%
5 premières années	Direct and Proportional Miscellaneous Financial Loss	13.00%	2.89%	34.00%	9.78%

Tableau 17 - Tests de sensibilités de la méthode Log-Normale pour risque de primes – PPD Proportionnelle

Il est constaté une augmentation de l'écart-type USP final (Sigma Final) de 5.19% à 9.78% au fur et à mesure du retrait des dernières années, accompagné d'une baisse du facteur de crédibilité progressive.

L'écart-type final USP pour la branche PPD est inférieur à l'écart-type du risque de prime de la formule de standard des Actes Délgués de 13.00%.

c) Résultat et impact des USP du risque de primes sur le SCR de primes et réserve et le ratio de couverture du SCR.

Le tableau 19 ci-dessous présente les impacts de la modification des paramètres propres par LoB Proportionnelle dans le cadre de méthode du risque de primes sur le SCR primes et réserve, le SCR et le ratio de couverture du SCR :

	Ecart-type du risque de primes et réserve	SCR Primes et réserve	SCR	Ratio de couverture du SCR
Formule Standard	10.05%	4 982 861	11 899 715	153.82%
USP branche MAT proportionnelle	13.83%	6 857 679	13 085 261	139.89%
USP branche PPD proportionnelle	9.32%	4 623 856	11 691 749	156.56%
USP branche MAT et PPD proportionnelles	13.16%	6 525 053	12 863 791	142.29%

Tableau 18 - Résultat et impact des USP du risque de primes

d) Conclusion sur le risque de primes - Log-Normale

Lors de l'application de la méthode USP Log-Normale du primes, telle que décrite dans les Actes Délgués, les limitations suivantes sont observées lorsqu'elle est appliquée au cas présent :

- L'hypothèse (2) suggère que le ratio sinistre à prime β soit constant sur la période étudiée est peu réaliste en pratique. Pour apporter de la souplesse à cette hypothèse, il a été convenu de définir un seuil d'acceptabilité, défini par l'entreprise, de 10%. Ce seuil est considéré comme acceptable étant donné la nature volatile des risques souscrits par la captive de réassurance.

- Les tests statistiques de validité des hypothèses s'effectuent sur un nombre faible de points de données ce qui engendre un risque de fiabilité des résultats (risque d'erreur de type deux (faux négatif).
- Les tests statistiques sont sensibles aux valeurs aberrantes.
- Les données de sinistres de la captive étudiée sont volatiles.
- La volatilité limitée des primes acquises sur la période rend difficile la validation de l'hypothèse (3) d'une relation quadratique entre la variance des pertes et les primes acquises.

En utilisant le paramètre propre du risque de primes uniquement sur la LoB **PPD Proportionnelle**, le SCR de primes et réserve diminue légèrement de 4.982.861 EUR à 4.623.856 EUR. Le gain de 359.005 EUR dans le sous-modules SCR primes et réserve entraîne une diminution des besoins SCR de 207.966 EUR et engendre une augmentation du ratio de couverture du SCR de 2.74% pour atteindre **156.56%**.

La LoB **MAT Proportionnelle** ne valide que très partiellement les hypothèses sous-jacentes à la méthode à la suite d'une forte volatilité des ratios sinistres à primes acquises et l'absence de proportionnalité entre la variance de la charge sinistres et les primes acquises. En utilisant uniquement le paramètre propre de la LoB MAT Proportionnelle, le sous-module SCR primes et réserve entraîne une augmentation des besoins SCR de 1 8074 818 EUR et engendre une diminution du ratio de couverture du SCR de 13.94% pour atteindre **139.89%**.

L'application simultanée des deux USP pour les **deux LoB proportionnelles** entraîne une augmentation des besoins SCR par rapport à la situation sans USP de 964.077 EUR pour atteindre un ratio de couverture du SCR de **142.29%**.

13. Analyse de la méthode de réassurance non-proportionnelle

13.1 Présentation des données

Les données brutes de sinistres ultimes disponibles pour les deux traités de réassurance non-proportionnelles sont les suivantes :

Années	Dommages NP	MAT NP
2015	363 650	
2016	106 856	1 371 999
2017	79 842	1 234 050
2018	318 538	3 569 000
2019	397 146	26 870 426
2020	363 650	8 896 587
2021	141 779	29 626 336
2022	353 750	1 322 961
2023	85 983	6 017 057
2024	396 460	4 374 140

Tableau 19 - Données Dommages et MAT Non proportionnelles

Les deux traités de réassurance non-proportionnels sont couverts en rétrocession par un traité multiligne 25.000.000 EUR XS 50.000.000 EUR par sinistre, renouvelable annuellement. En d'autres termes, la rétrocession intervient pour tout sinistre compris entre 50.000.000 EUR et 75.000.000 EUR.

Sur toute la période observée le traité de rétrocession n'a jamais été touché.

13.2 Validations des hypothèses de la méthode

Hypothèse : Les montants ultimes de sinistres suivent une distribution Log-Normale, y compris dans la queue de distribution.

Dans le cadre de cette méthode proposé par les Actes Délégués, une seule hypothèse est à vérifier, à savoir que les montants ultimes des sinistres estimés dans l'année où ils ont été déclarés suivent une distribution Log-Normale, y compris dans la queue de distribution.

Pour évaluer la conformité des données à une distribution Log-Normale, la démarche est similaire que celle effectuée dans le cadre du risque de primes avec la méthode Log-Normale. Cette démarche inclut un test graphique QQ-plot et un test statistique de *Shapiro-Wilk* à un seuil significatif $\alpha = 5\%$.

a) Validation statistique

Les hypothèses du test statistique de *Shapiro-Wilk* pour tester la log-normalité des pertes cumulées à vision 1 an sont :

$$\begin{cases} H_0: LN(Y_t) \xrightarrow{\text{Suit une loi}} N(\mu, \omega^2) \\ H_1: LN(Y_t) \xrightarrow{\text{Ne suit pas une loi}} N(\mu, \omega^2) \end{cases}$$

<code>> shapiro.test(log(DOM_SIN))</code>	<code>> shapiro.test(log(MAT_SIN))</code>
Shapiro-wilk normality test	Shapiro-wilk normality test
data: log(DOM_SIN)	data: log(MAT_SIN)
W = 0.77857, p-value = 0.007954	W = 0.89869, p-value = 0.2445

Figure 37 - Tests de normalité de Shapiro-Wilk sur les résidus, Dommages et MAT Non Proportionnelles

Pour la LoB **Dommages NP**, la statistique de test $W=0.77857$ et la p-value est inférieure au seuil significatif $\alpha = 5\%$, ce qui indique que l'hypothèse H_0 de normalité est rejetée.

Pour la LoB **MAT NP**, la statistique de test $W=0.89869$ et la p-value est supérieure au seuil $\alpha = 5\%$, l'hypothèse H_0 de normalité est acceptée.

b) Validation graphique

La méthode QQ-Plot consiste en un examen graphique pour vérifier l'adéquation entre la distribution Log-Normale théorique et la distribution empirique issue des données de notre étude.

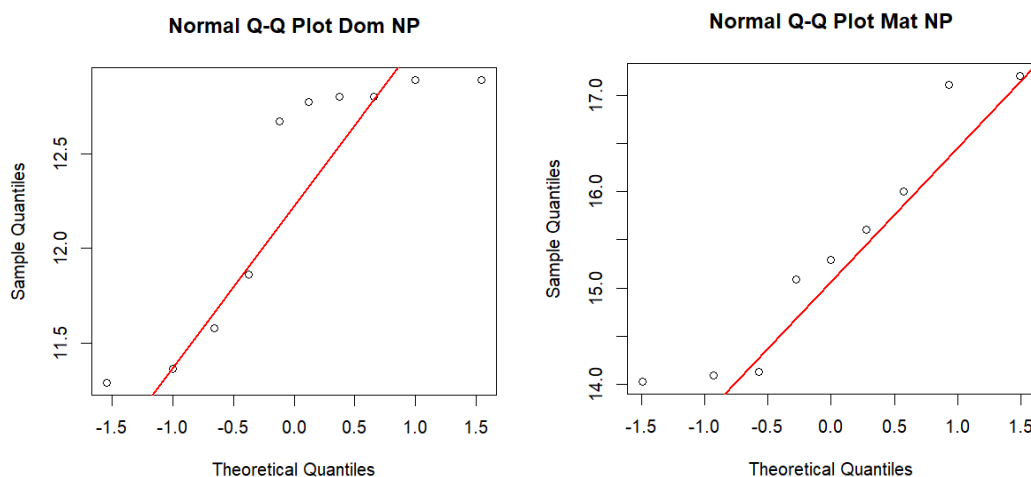


Figure 38 - QQ-plot de la loi Log-Normale pour la méthode réassurance Non Proportionnelle

Pour la LoB **Dommages NP**, il est observé que les points s'écartent de la droite rouge, aux extrémités gauche et droite de la queue de distribution. Les valeurs centrales suggèrent une certaine adéquation avec une distribution gaussienne mais les queues de distributions présentent des anomalies. En effet, la queue inférieure semble plus légère et la queue supérieure plus épaisse qu'une distribution Normale, ce qui conduit à conclure que la distribution empirique s'écarte d'une loi Normale.

Concernant la LoB **MAT NP**, l'analyse est similaire à la LoB précédente. Les valeurs centrales suggèrent une adéquation une distribution Normale mais les queues de distribution présentent des irrégularités, suggérant que la distribution empirique s'écarte d'une distribution Normale.

13.3 Conclusion de la validité des hypothèses de la méthode

Hypothèse	Tests statistiques élaborés	Dommages NP	MAT NP
La distribution des pertes cumulée en vision 1 an suit une distribution Log-Normale.	Test de statistique de <i>Shapiro-Wilk</i>	Rejeté	Accepté
	Analyse graphique avec la méthode du QQ-plot	Rejeté	Partiellement accepté

Tableau 20 - Résumé de la validité des hypothèses - méthode la réassurance non proportionnelle

L'utilisation d'un test statistique de *Shapiro-Wilk* est pertinente sur des échantillons de données de petite taille (puissance élevée) pour valider l'hypothèse que les montants ultimes de sinistres la LoB MAT NP suivent une distribution Log-Normale, ce qui partiellement confirmé graphiquement.

Par opposition, les sinistres de la LoB Dommages NP ne suivent pas une distribution Log-Normale.

Il a été décidé de poursuivre l'analyse des impacts de la calibration des facteurs d'ajustement propres. Bien que les hypothèses sous-jacentes à la méthode ne soient pas entièrement validées avec confiance, cette poursuite s'inscrit dans une démarche pragmatique jugée nécessaire pour progresser dans la compréhension du modèle proposé par les Actes Délégés.

13.4 Résultat de la méthode réassurance non-proportionnelle

Sur base des données présentés à la section 13.1 et de la validation partielle des hypothèses de la méthode, les facteurs de réassurance non-proportionnelle suivants ont été obtenu :

Nombre d'années	Full Name	Credibility Factor	NP'	NP USP	Sigma Basic	Sigma USP
9	Non-Proportional Marine, Aviation and Transportation Reinsurance	92.00%	94.49%	88.29%	17.00%	15.01%
10	Non-Proportional Property Reinsurance	100.00%	100.00%	100.00%	17.00%	17.00%

Tableau 21 - Résultats de la méthode de la réassurance non proportionnelle

Le facteur d'ajustement estimé NP' , avec la méthode de la réassurance non proportionnelle, est 94.49% pour la LoB MAT NP et de 100.00% pour la Lob Dommage NP.

Avec un facteur de crédibilité de 92% pour 9 années d'historiques, le **facteur d'ajustement propre NP USP** de la LoB **MAT NP**, est de **88.29%**, inférieur au 100% de la formule standard.

Les résultats par Lob sont détaillés en Annexe 7.

Le facteur d'ajustement propre de la réassurance non-proportionnelle, NP USP, est multiplié par l'écart-type brute standard (Sigma basic) de la formule standard (17%), afin d'obtenir le **coefficient de variation USP (Sigma USP) de la LoB MAT NP, soit 15.01%**.

Pour la LoB **Dommage NP**, avec un facteur de crédibilité de 100% pour 10 années d'historiques, le **facteur d'ajustement propre** de la réassurance non-proportionnelle obtenu est de **100%**, égale à la formule standard. En multipliant par l'écart-type brute standard (17%) de la formule standard, le **coefficient de variation USP pour la LoB Dommages NP est de 17.00%** et donc toujours égal à au coefficient de variation de la formule standard.

a) Résultats des tests de sensibilités de la méthode de réassurance non proportionnelle.

Il a été effectué des tests de sensibilité par LoB sur la longueur de l'historique, en retirant les dernières années d'historique de manière itérative.

- MAT NP

LoB	Nombre d'années	Sigma Basic	Credibility Factor	NP'	NP USP	Sigma Basic	Sigma USP
NP_MAT	9	17.00%	92.00%	94.49%	94.93%	17.00%	16.14%
NP_MAT	8	17.00%	81.00%	94.28%	95.37%	17.00%	16.21%
NP_MAT	7	17.00%	67.00%	93.83%	95.87%	17.00%	16.30%
NP_MAT	6	17.00%	51.00%	94.34%	97.11%	17.00%	16.51%
NP_MAT	5	17.00%	34.00%	94.91%	98.27%	17.00%	16.71%

Tableau 22 - Résultats des tests de sensibilités de la réassurance non proportionnelle, MAT NP

Au fur et à mesure du retrait des années les plus récentes de l'historique, il est observé que le facteur d'ajustement NP' est globalement stable, oscillant autour de 94%. Cependant un dynamique s'observe pour le **facteur d'ajustement propre NP USP**, qui affiche une progression de 94.93% à 98.27% sur la même période. Cette évolution s'accompagne d'une réduction graduelle du facteur de crédibilité entraînant une variation de coefficient de variation USP (Sigma USP) de 16.14% à 16.71%.

- Dommages NP

LoB	Nombre d'années	Credibility Factor	NP'	NP USP	Sigma Basic	Sigma USP
NP_C	10	100.00%	100.00%	100.00%	17.00%	17.00%
NP_C	9	92.00%	100.00%	100.00%	17.00%	17.00%
NP_C	8	81.00%	100.00%	100.00%	17.00%	17.00%
NP_C	7	67.00%	100.00%	100.00%	17.00%	17.00%
NP_C	6	51.00%	100.00%	100.00%	17.00%	17.00%
NP_C	5	34.00%	100.00%	100.00%	17.00%	17.00%

Tableau 23 - Résultats des tests de sensibilités de la réassurance non proportionnelle, Dommages NP

L'analyse de sensibilité révèle un facteur d'ajustement constant à 100%. Cette invariance a pour conséquence directe que le coefficient de variation USP (Sigma USP) reste stable et égale à 17%.

b) Résultat et impact des USP de la méthode de réassurance non-proportionnelle sur le SCR de primes et réserve et le ratio de couverture du SCR.

Les résultats dans le tableau 25 ci-dessous présentent les impacts de la modification des paramètres propres par LoB non-proportionnelle sur le SCR de primes et réserve, le SCR et le ratio de couverture avec la méthode de réassurance non-proportionnelle :

	Ecart-type du risque de primes et réserve	SCR Primes et réserve	SCR	Ratio de couverture du SCR
Formule Standard	10.05%	4 982 861	11 899 715	153.82%
USP branche MAT et Dommages Non-proportionnelle	10.02%	4 971 292	11 892 909	153.91%

Tableau 24 - Résultat et impact des USP de la méthode de réassurance non proportionnelle

c) Conclusion sur le risque de réassurance non-proportionnelle

Le facteur de réassurance non-proportionnelle de la LoB **Dommages NP** est égal au facteur de la formule standard, son utilisation ne permet pas un gain sur le montant final de SCR. La calibration du paramètre propre de réassurance non proportionnelle pour la LoB Dommage NP est similaire à la calibration de à la formule standard soit **NP = 100%**.

Pour la branche **MAT NP**, le facteur d'ajustement propre **NP = 94.93%** permet au SCR de primes et réserve de diminuer de 11.569 EUR. Les besoins en capital du SCR diminue de 6.806 EUR ce qui engendre une sensible augmentation du ratio de couverture du SCR de 0.09% pour atteindre un niveau de **153.91%**.

La calibration du paramètre propre de réassurance non proportionnelle de la LoB MAT NP est donc inférieure à la calibration de à la formule standard de 100%.

14. Analyse du risque de réserve de la méthode Log-Normale

14.1 Présentation des données

Le calibrage du risque de réserve avec la méthode Log-Normale est équivalent à la méthode de calibrage du risque de primes, à l'exception, des données utilisées et de certaines notations.

Pour les acceptations proportionnelles, les données se retrouvent de facto nettes de rétrocession étant donné que ces risques ne sont pas rétrocédés.

Les données servent à l'estimation de l'écart type de la méthode Log-Normale associés au risque de réserve sont les suivantes :

- Le montant des *Best Estimate* des provisions pour sinistres en fin d'exercice $t - 1$, y compris les frais de gestion des engagements, par ligne d'activité.
- Les prestations payées lors de l'exercice t pour les sinistres en stock à la fin de l'exercice $t - 1$, y compris les frais de gestion des engagements, par ligne d'activité.
- Le montant des *Best Estimate* des provisions pour sinistres en fin d'exercice t relatives aux sinistres en stock en fin d'exercice $t - 1$, y compris les frais de gestion des engagements, par ligne d'activité.

Les paiements incrémentaux sont définis par la notation $D_{i,j}$ comme vu précédemment.

- MAT Proportionnelle

Les montants suivants correspondent aux paiements incrémentaux $D_{i,j}$:

	0	1	2	3	4	5	6	7
2017	534 271	1 383 575	3 010 326	2 059 190	207 277	4 315	0	0
2018	893 629	2 404 418	5 222 566	3 872 858	504 835	30 906	0	
2019	715 041	1 469 501	3 345 943	1 149 120	91 338	0		
2020	204 322	515 444	1 233 945	954 103	577 079			
2021	382 769	1 196 648	2 555 448	2 414 976				
2022	884 793	1 402 582	3 459 686					
2023	318 742	1 115 615						
2024	1 133 137							

Figure 39 - Paiement incrémentaux MAT Proportionnelle

Les montants suivants correspondent aux provisions *Best Estimate* des sinistres impayés $PCO_{i,j}$:

	0	1	2	3	4	5	6	7
2017	3 027 535	4 931 451	2 263 590	211 592	4 315	0	0	0
2018	5 063 895	8 759 726	4 357 089	535 741	30 906	0	0	
2019	4 051 902	4 434 171	1 240 458	91 338	0	0		
2020	1 157 824	1 808 428	1 408 787	760 672	183 592			
2021	2 169 023	4 697 044	2 762 966	513 538				
2022	5 013 824	3 130 761	58 018					
2023	1 806 205	4 586 442						
2024	6 421 109							

Figure 40 - Best Estimate MAT Proportionnelle

Les variables R_t et V_t , définis précédemment, sont déterminées à partir des données $D_{i,j}$ et $PCO_{i,j}$:

Années	Rt	Vt	Vt - Rt
2018	6 315 026	3 027 535	-3 287 491
2019	16 438 060	9 995 346	-6 442 714
2020	17 754 109	15 075 217	-2 678 891
2021	11 530 465	10 160 676	-1 369 789
2022	10 316 939	5 757 966	-4 558 973
2023	11 688 776	11 241 900	-446 876
2024	12 792 910	8 460 604	-4 332 307

Tableau 25 - R_t et V_t MAT Proportionnelle

- PPD Proportionnelle

Les montants suivants correspondent aux paiements incrémentaux $D_{i,j}$:

	0	1	2	3	4	5	6	7
2017	287 500	718 750	488 750	373 750	115 000	63 250	31 625	2 875
2018	291 550	728 225	494 500	354 475	112 700	50 600	33 350	
2019	350 000	710 500	483 000	316 625	34 500	14 375		
2020	298 350	747 825	480 700	315 425	16 100			
2021	362 500	704 250	492 250	295 400				
2022	300 250	728 725	501 625					
2023	367 700	692 750						
2024	354 650							

Figure 41 - Paiement incrémentaux PPD Proportionnelle

Les montants suivants correspondent aux provisions *Best Estimate* des sinistres impayés $PCO_{i,j}$:

	0	1	2	3	4	5	6	7
2017	287 500	718 750	345 000	86 250	86 250	34 500	2 875	0
2018	291 550	728 225	348 725	63 250	83 950	33 350	0	
2019	350 000	710 500	308 000	48 875	14 375	0		
2020	298 350	747 825	331 525	16 100	0			
2021	362 500	704 250	311 000	33 900				
2022	300 250	728 725	351 500					
2023	367 700	692 750						
2024	354 650							

Figure 42 - Best Estimate PPD Proportionnelle

Les variables R_t et V_t , définis précédemment, sont déterminées à partir des données $D_{i,j}$ et $PCO_{i,j}$:

Années	Rt	Vt	Vt - Rt
2018	1 437 500	287 500	-1 150 000
2019	2 290 200	1 010 300	-1 279 900
2020	2 724 225	1 423 225	-1 301 000
2021	2 905 625	1 443 825	-1 461 800
2022	2 880 625	1 567 825	-1 312 800
2023	2 759 550	1 503 350	-1 256 200
2024	2 634 625	1 471 250	-1 163 375

Tableau 26 -- R_t et V_t PPD Proportionnelle

14.2 Validation des hypothèses de la méthode

Les données sont nettes de rétrocession pour le risque de réserve de la méthode Log-Normale et respectent les exigences relatives aux données propres à la méthode. La méthodologie du modèle de risque de primes et son processus de vérification des hypothèses sont employés pour la vérification des hypothèses de la méthode Log-Normale du risque de réserve.

Hypothèse 1 : Pour une année de calendaire A, la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an sont proportionnelle au Best Estimate total de l'année calendaire A, ainsi on a : $E(R_A) = \beta V_A$.

a) Validation graphique

- MAT Proportionnelle

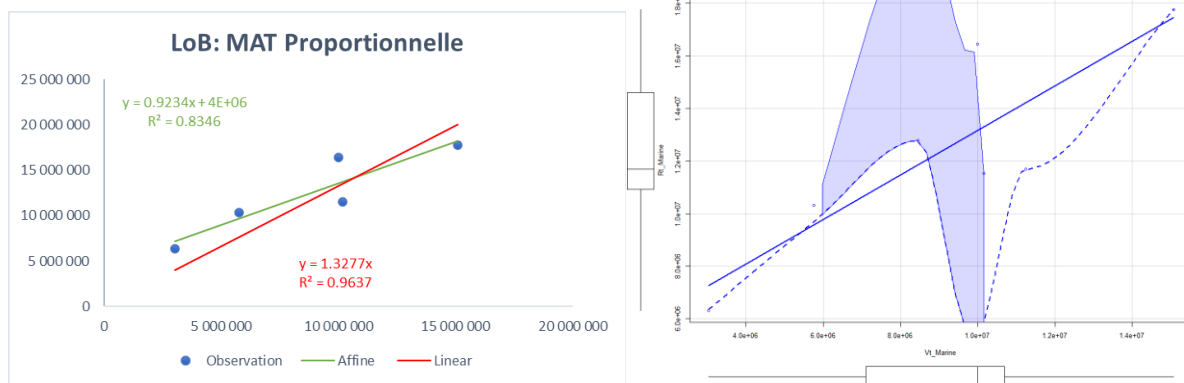


Figure 43 - Somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 en fonction du Best Estimate, MAT Proportionnelle

Graphiquement, il semble y avoir une relation de proportionnalité entre R_A , somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an, et V_A , Best Estimate, dans le cadre de la relation linéaire, droite en rouge sur le graphique de gauche pour la LoB **MAT Proportionnelle**. Le coefficient de régression R^2 est égale à **0.9637**, ce qui semble conforter l'idée d'une relation de proportionnalité. L'historique complet a été utilisé, soit 7 observations.

- PPD Proportionnelle

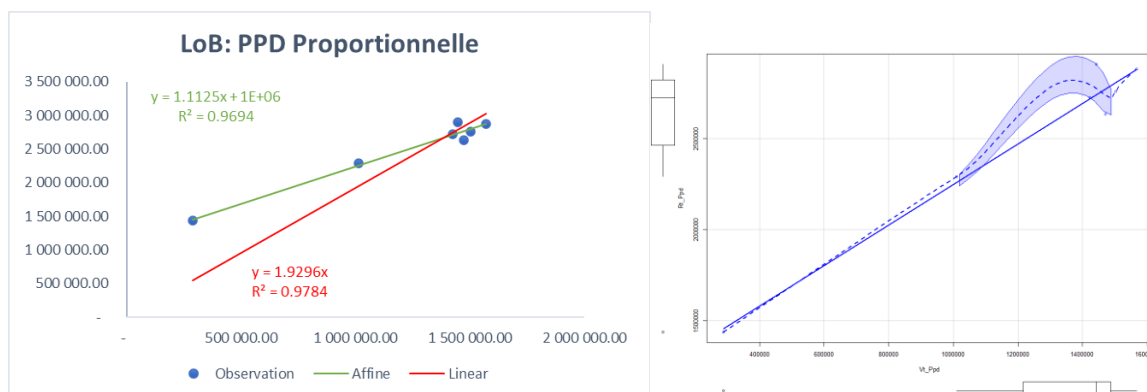


Figure 44 - Somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 en fonction du Best Estimate, PPD Proportionnelle

Graphiquement, il semble y avoir une relation de proportionnalité entre R_A et V_A pour la **LoB PPD Proportionnelle**. Le coefficient de régression R^2 de **0.9874** suggère l'idée d'une relation de proportionnalité. Une validation numérique est requise pour confirmer ou infirmer, la relation de proportionnalité entre R_A et V_A .

b) Validation numérique

Un test *Student* est effectué pour tester la significativité des paramètres des régressions (1) et (2) dans le cadre du risque de réserve avec la méthode Log-Normale.

Calcul de la statistique de test pour l'équation (1)

```
> summary(reg1prov_Marine)
Call:
lm(formula = Rt_Marine ~ Vt_Marine)

Residuals:
    1      2      3      4      5      6      7 
-942774  3276600  288596 -1771074  745710 -2528859  931801 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  4.693e+06  2.189e+06   2.144  0.0849 .
Vt_Marine    8.473e-01  2.236e-01   3.789  0.0128 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2129000 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7417,    Adjusted R-squared:  0.6901 
F-statistic: 14.36 on 1 and 5 DF,  p-value: 0.01277

> summary(reg1prov_Ppd)
Call:
lm(formula = Rt_Ppd ~ Vt_Ppd)

Residuals:
    1      2      3      4      5      6      7 
-17376  31179   5807  164289  1334 -48010 -137223 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.135e+06  1.162e+05   9.768 0.000191 ***
Vt_Ppd       1.113e+00   8.840e-02  12.586 5.62e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 99430 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9694,    Adjusted R-squared:  0.9633 
F-statistic: 158.4 on 1 and 5 DF,  p-value: 5.623e-05
```

Figure 45 - Tests de proportionnalité pour les régressions (1) – risque de réserve

Au seuil significatif de 5%, le coefficient b_0 n'est pas significatif sur base de la p-value pour la **LoB MAT Proportionnelle**. Pour la pente β , l'hypothèse de significativité est acceptée au seuil de 5%.

Le coefficient b_0 et la pente β sont significatifs au seuil significatif de 5% sur base de la p-value dans le cadre de la régression (1) pour la **LoB PPD Proportionnelle**.

Calcul de la statistique de test pour l'équation (2)

```
> summary(reg2prov_Marine)
Call:
lm(formula = Rt_Marine ~ Vt_Marine - 1)

Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-2848152 -1674010  1852483  2635706  3513054 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
Vt_Marine    1.293      0.104   12.44 1.65e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2693000 on 6 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9627,    Adjusted R-squared:  0.9564 
F-statistic: 154.7 on 1 and 6 DF,  p-value: 1.651e-05

> confint(reg2prov_Marine)
                2.5 %    97.5 %
Vt_Marine 1.038687 1.547518

> summary(reg2prov_Ppd)
Call:
lm(formula = Rt_Ppd ~ Vt_Ppd - 1)

Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-204247 -142928  -21980  230216  882750 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
Vt_Ppd       1.930      0.117   16.5 3.16e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 406800 on 6 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9784,    Adjusted R-squared:  0.9748 
F-statistic: 272.2 on 1 and 6 DF,  p-value: 3.161e-06

> confint(reg2prov_Ppd)
                2.5 %    97.5 %
Vt_Ppd 1.643387 2.215743
```

Figure 46 - Tests de proportionnalité pour les régressions (2) – risque de réserve

L'hypothèse de non-nullité de la pente est confirmé pour les deux LoB et il existe un lien de linéarité croissant entre R_A , somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an, et V_A , *Best Estimate*,

pour les LoB **MAT et PPD Proportionnelles** dans le cadre de la régression (2). Le coefficient de régression est plus élevé pour la Lob MAT Proportionnelle ($R^2 = 0.9627$) que pour la Lob PPD Proportionnelle ($R^2 = 0.9784$).

- Analyse des résidus de la régression linéaire (2)

Il est essentiel de vérifier que l'espérance des résidus de la régression linéaire est égale à 0 dans le cadre de la régression linéaire (2) pour le risque de réserve des LoB MAT et PPD Proportionnelles. Un test statistique de normalité de *Shapiro-Wilk* est effectué sur les résidus pour valider l'hypothèse de normalité de ces derniers.

c) Vérification graphique

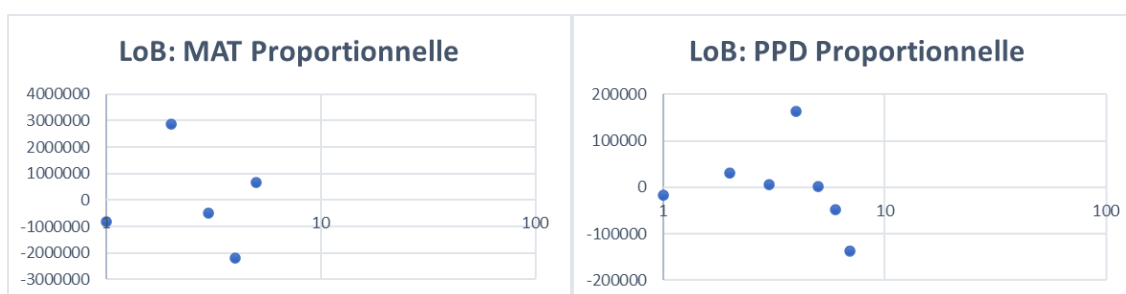


Figure 47 - Résultat de l'analyse graphique des résidus de la régression (2)

La représentation graphique des résidus des LoB **MAT et PPD Proportionnelles** ne semblent pas présenter de tendance ni de structure particulière.

d) Vérification statistique

- Indépendance des résidus

Diagramme de fonction d'autocorrélation

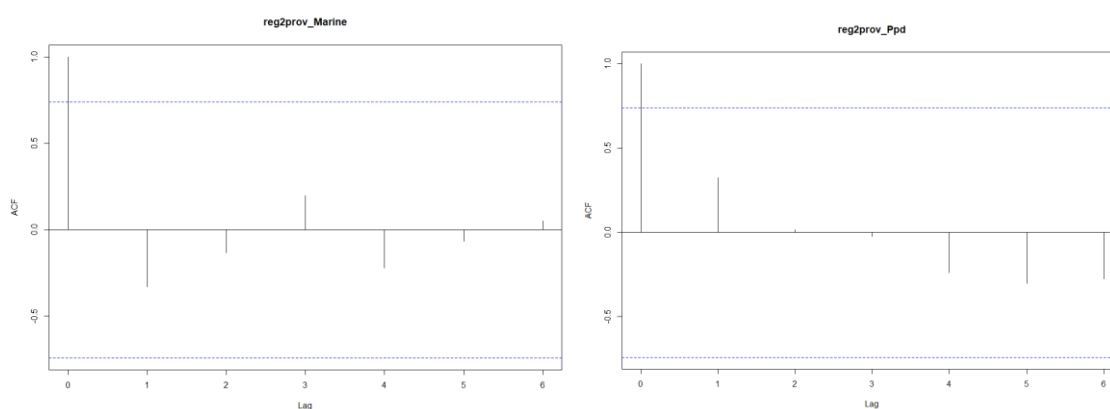


Figure 48 - Lag-plot pour le risque de réserve, MAT et PPD Proportionnelle

Il est constaté sur le *Lag-plot* des deux graphiques, une structure de dépendance dans les deux premiers *Lag*.

Test de Durbin-Watson

Un test statistique de *Durbin-Watson* est effectué pour évaluer la présence d'autocorrélation entre les résidus.

```
> durbinwatsonTest(reg2prov_Marine)
lag Autocorrelation D-W Statistic p-value
1 -0.297769 2.384239 0.542
Alternative hypothesis: rho != 0
> durbinwatsonTest(reg2prov_Ppd)
lag Autocorrelation D-W Statistic p-value
1 0.325017 0.5230053 0.014
Alternative hypothesis: rho != 0
```

Figure 49 - Test de Durbin-Watson pour évaluer l'indépendance des résidus, risque de réserve Log-Normale

Pour la **LoB MAT Proportionnelle**, la p-value est supérieur au seuil significatif de 5% est donc l'hypothèse d'absence autocorrélation significative entre les résidus est acceptée.

Pour la **LoB PPD Proportionnelle**, la p-value est inférieur au seuil significatif de 5% et donc il existe une autocorrélation positive entre les résidus du modèle linéaire.

- **Normalité des résidus**

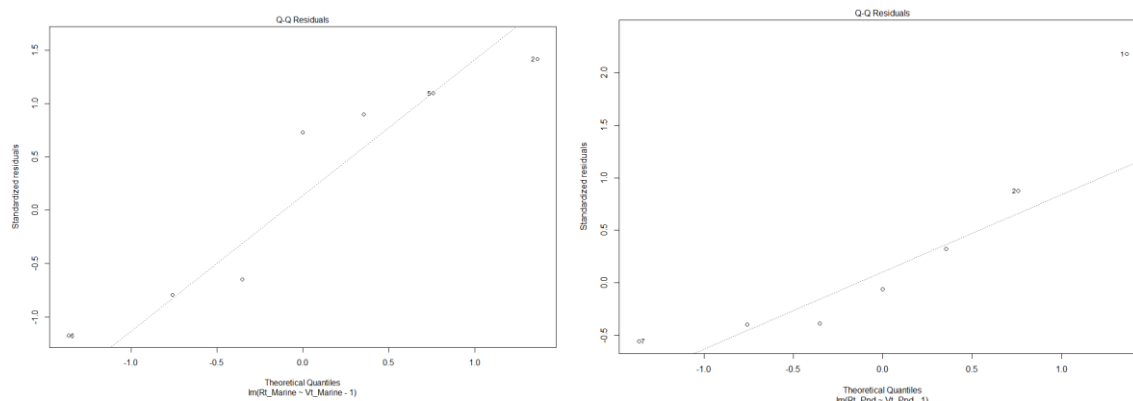


Figure 50 - QQ plots des résidus, risque de réserve Log-Normale

Les QQ plots des résidus pour les deux LoB Proportionnelles semblent indiquer une déviation de la normalité au niveau des queues de distributions. La partie centrale des graphiques semble être conforme à l'hypothèse de normalité.

Test de Shapiro-Wilk

```
> shapiro.test(residuals(reg2prov_Marine)) > shapiro.test(residuals(reg1prov_Ppd))

shapiro-wilk normality test                                shapiro-wilk normality test

data: residuals(reg2prov_Marine)                             data: residuals(reg1prov_Ppd)
W = 0.86332, p-value = 0.1621                                W = 0.93629, p-value = 0.6055
```

Figure 51 - Tests de normalité de Shapiro-Wilk sur les résidus, risque de réserve Log-Normale

Les p-values sont supérieures à 5%, l'hypothèse de normalité des résidus est acceptée au seuil significatif de 5% pour les **deux LoB Proportionnelles**.

- **Homogénéité des résidus**

Pour la LoB **MAT Proportionnelle**, la courbe est descendante, ascendante puis descendante à nouveau.

Pour la LoB **PPD Proportionnelle**, la courbe est descendante puis ascendante. Pour les deux LoB Proportionnelles, l'hypothèse d'homogénéité des résidus est rejetée.

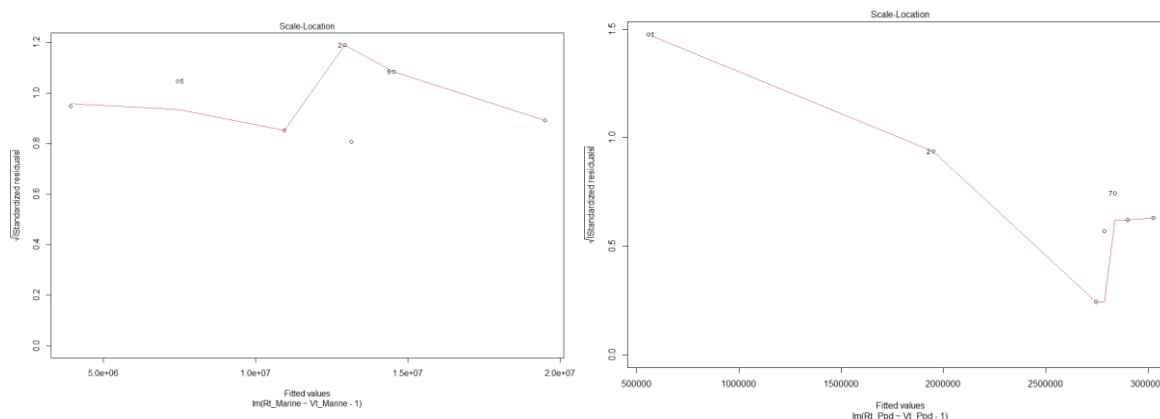


Figure 52 - Tests d'homogénéité des résidus, risque de réserve Log-Normale

Hypothèse 2 : Le taux de boni-mali des réserves β est constant sur la période.

a) **Vérification graphique**

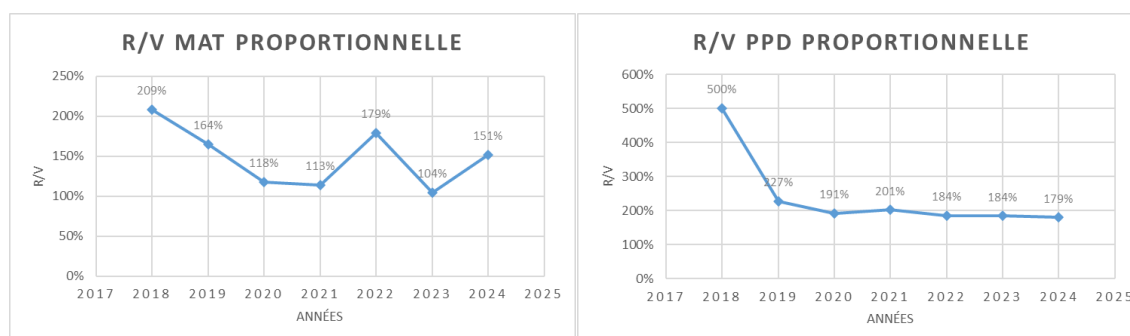


Figure 53 - Taux de boni-mali des réserves, risque de réserves Log-Normale

Le taux de boni-mali des réserves par année calendaire ne semble pas stable pour la LoB **MAT Proportionnelle**.

Graphiquement, le taux de boni-mali par année calendaire semble stable et peu volatile pour la LoB **PPD Proportionnelle**, à l'exception de l'année 2018.

b) Vérification statistique

	MAT Proportionnelle	PPD Proportionnelle
Mean	148.38%	237.96%
Std	38.66%	116.67%
Max	208.59%	500.00%
Min	103.98%	179.07%
Gap	104.61%	320.93%

Check	TRUE	FALSE
--------------	------	-------

Figure 54 - Analyse des taux de boni-mali des réserves, risque de réserve Log-Normale

Conformément à la vérification statistique effectuée dans le cadre de l'hypothèse 1 pour la régression (1), le taux de boni-mali des réserves de LoB **MAT Proportionnelle** est significatif mais le coefficient b_0 ne l'est pas, au seuil significatif de 5%. La volatilité du taux de boni-mali des réserves est de 38.66%, supérieure au seuil de 10% défini par l'entreprise.

Le taux de boni-mali des réserves β et le coefficient b_0 sont significatifs pour la LoB **PPD Proportionnelle** au seuil significatif de 5% dans le cadre de la régression (1). La volatilité du taux de boni-mali des réserves est de 116.67%, excédant le seuil de 10% défini par l'entreprise, et est expliquée principalement par l'année 2018.

Hypothèse 3 : Pour une année calendaire A, la variance de la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an est une expression quadratique du *Best Estimate* total de l'année calendaire A, ainsi on a : $V(R_A) = \sigma^2([1 - \delta]VV_A + \delta V_A^2)$.

```
> summary(lm(RES_prov_Marine~log_vt_Marine))
Call:
lm(formula = RES_prov_Marine ~ log_vt_Marine)

Residuals:
    1      2      3      4      5      6      7 
-0.1950  0.8854 -0.4106 -0.6728  0.3349  0.4971 -0.4390 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  33.5557    7.7770   4.315  0.00761 **
log_vt_Marine -0.2666    0.4882  -0.546  0.60847
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.6317 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.05629, Adjusted R-squared: -0.1325 
F-statistic: 0.2982 on 1 and 5 DF, p-value: 0.6085

> summary(lm(RES_prov_Ppd~log_vt_Ppd))
Call:
lm(formula = RES_prov_Ppd ~ log_vt_Ppd)

Residuals:
    1      2      3      4      5      6      7 
-0.17846  1.20773 -3.37734  0.04952  0.64359  0.48701  1.16795 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   60.462    16.021   3.774  0.0130 *
log_vt_Ppd    -2.618     1.150  -2.276  0.0719 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.727 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5089, Adjusted R-squared:  0.4107 
F-statistic: 5.181 on 1 and 5 DF, p-value: 0.07188
```

Figure 55 - Test de proportionnalité entre la variance de la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an et le *Best Estimate*

L'hypothèse de linéarité d'ordre 2 entre la variance de la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an et le *Best Estimate* total de l'année calendaire A n'est pas vérifié pour les deux **LoB Proportionnelles** étudiées.

La *p-value* du modèle est de 0.6085 pour la LoB **MAT Proportionnelle** et de 0.07188 pour la LoB **PPD Proportionnelle**.

L'hypothèse d'une relation de proportionnalité entre la charge des sinistres et les provisions sinistres à l'ouverture est rejetée et la vérification de l'hypothèse (3) n'est pas accepté.

Hypothèse 4 : La distribution de la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an suit une distribution Log-Normale.**a) Validation statistique**

```
> shapiro.test(logRV_Marine)      > shapiro.test(logRV_Ppd)

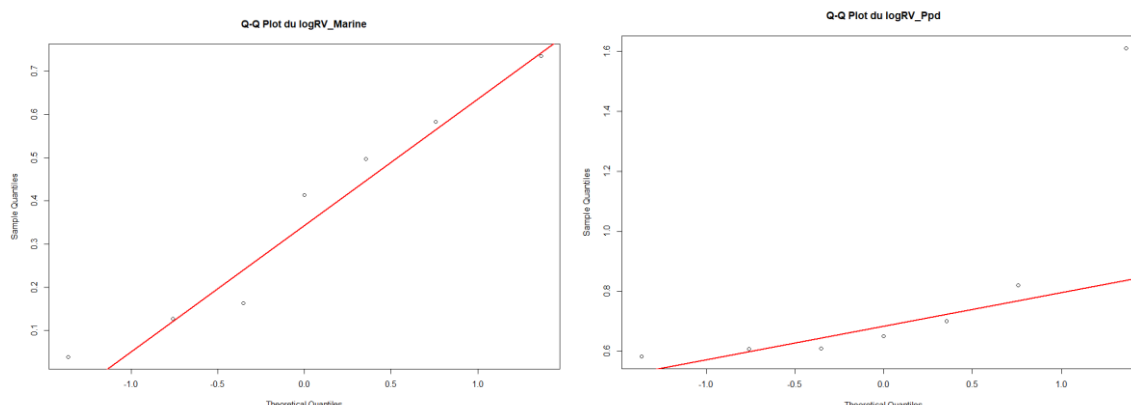
      shapiro-wilk normality test      shapiro-wilk normality test

data: logRV_Marine      data: logRV_Ppd
w = 0.93942, p-value = 0.6335      w = 0.63445, p-value = 0.0006841
```

Figure 56 - Test de log-normalité de Z_t du risque de réserve, MAT et PPD Proportionnelles

Pour la LoB **MAT Proportionnelle**, la statistique de test $W=0.93942$ est proche de 1 et la p-value est supérieur au seuil significatif $\alpha = 5\%$, l'hypothèse nulle n'est pas rejetée. L'hypothèse de log-normalité du logarithme des ratios de liquidation des provisions sinistres Best Estimate est acceptée.

Concernant la LoB **PPD Proportionnelle**, la statistique de test $W=0.63445$ est proche de 1 et la p-value est inférieur au seuil significatif $\alpha = 5\%$. L'hypothèse de log-normalité du logarithme des ratios de liquidation des provisions sinistres Best Estimate n'est pas accepté.

b) Validation graphique**Figure 57 - Q-Q-plot du logarithme des ratios de liquidation des provisions sinistres Best Estimate, MAT et PPD Proportionnelle**

Graphiquement pour la LoB **MAT Proportionnelle**, le Q-Q-plot suggère que le logarithme des ratios de liquidation des provisions sinistres *Best Estimate* s'éloigne d'une distribution Normale. Des déviations sont visibles au niveau de la forme générale et des queues de distribution à gauche et à droite.

Pour la LoB **PPD Proportionnelle**, les points sont éloignés de la droite rouge, indiquant que le logarithme des ratios de liquidation des provisions sinistres Best Estimate ne suit pas une distribution Normale.

L'hypothèse (4) est partiellement acceptée pour la LoB MAT et non-validé pour la LoB PPD.

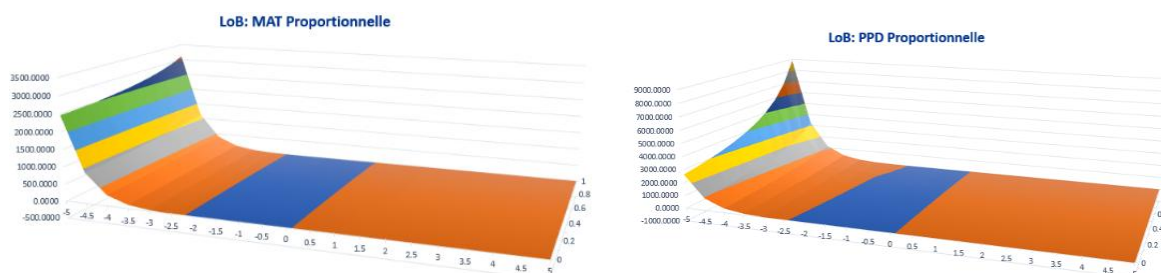
Hypothèse 5 : La méthode du maximum de vraisemblance est adaptée.

Figure 58 - Fonction de vraisemblance – minimum locale pour le risque de réserve, MAT et PPD Proportionnelles

Dans le cadre de cette hypothèse, les représentations graphiques obtenues pour les deux LoB suggèrent que la fonction de vraisemblance présente une structure favorable à l'optimisation. Plus précisément, la fonction peut être minimisée pour un certain couple de paramètres δ et γ , sans indication graphique d'un minimum local susceptible de compromettre la convergence de l'algorithme.

En pratique cette hypothèse est confirmée par la convergence de l'algorithme d'optimisation en 0 pour les LoB **MAT et PPD Proportionnelles**. Les résultats doivent être interprétés avec prudence étant donné le faible nombre de données à disposition. Le détail des résultats est fourni en Annexe 8.

14.3 Conclusion de la validité des hypothèses de la méthode

Hypothèses	Tests statistiques élaborés	MAT Proportionnelle	PPD Proportionnelle
Hypothèse 1 : Pour une année de calendrier A, la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an sont proportionnelle au <i>Best Estimate</i> total de l'année calendrier A	Analyse graphique de la relation de proportionnalité entre la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an et <i>Best Estimate</i> total de l'année calendrier.	Accepté	Accepté
	Régressions linéaires (1), (2) et calcul des coefficients d'erreurs.	Accepté	Accepté
	Test de <i>Student</i> sur les coefficients des régressions linéaires (1) et (2).	(1) Accepté (2) Accepté	(1) Accepté (2) Accepté
	Analyse graphique des résidus de la régression linéaire (2).	Partiellement accepté	Partiellement accepté

	Vérification statistique sur les résidus de la régression linéaire (2) : -indépendance - normalité -homogénéité.	-Partiellement accepté -Partiellement accepté - Rejeté	- Rejeté -Partiellement accepté - Rejeté
Hypothèse 2 : Le taux de boni-mali des réserves β est constant.	Analyse graphique des taux de boni-mali des réserves.	Partiellement accepté	Rejeté
	Analyse statistique de β .	Accepté	Rejeté
Hypothèse 3 : la variance de la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an est une expression quadrique <i>Best Estimate</i> total de l'année calendaire A.	Test de proportionnalité entre la variance de la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an et le <i>Best Estimate</i> total de l'année calendaire A.	Rejeté	Rejeté
Hypothèse 4 : La distribution des de la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an suit une distribution Log-Normale.	Test de statistique de <i>Shapiro-Wilk</i>	Accepté	Rejeté
	Analyse graphique avec la méthode du QQ-plot	Partiellement accepté	Rejeté
Hypothèse 5 : La méthode du maximum de vraisemblance est adaptée.	Analyse graphique de l'optimisation de la fonction de vraisemblance.	Partiellement accepté	Partiellement accepté

Tableau 27 - Résumé de la validité des hypothèses - risque de réserve de la méthode Log-Normale

Afin de permettre une comparaison approfondie du profil des risques par rapport à la formule standard, dans une démarche pragmatique, il a été décidé de poursuivre le processus de calcul des USP de CAP RE malgré la non-validation de l'ensemble des hypothèses de la méthode Log-Normale du risque de réserve.

14.4 Résultat de la méthode risque de réserve Log-Normale

a. Résultat des écarts-types de la méthode Log-Normale pour le risque de réserve.

Sur base des données présentées à la section 14.1 et de la validation partielle des hypothèses de la méthode Log-Normale du risque de réserve pour les LoB MAT et PPD Proportionnelles, les volatilités suivantes ont été obtenues :

Nombre d'années	Full Name	Sigma Basic	Sigma USP	Credibility Factor	Sigma Final
7 ans	Direct and Proportional Marine, Aviation and Transportation	10.00%	29.38%	67.00%	26.36%
7 ans	Direct and Proportional Miscellaneous Financial Loss	20.00%	37.87%	67.00%	35.90%

Tableau 28 - Résultats de la méthode Log-Normale pour le risque de réserve, MAT et PPD Proportionnelles

Les paramètres USP « intermédiaire » (Sigma USP) des LoB MAT et PPD Proportionnelles sont de 29.38% et 37.87% respectivement.

Les écart-type **USP finaux (Sigma Final)**, avec un facteur de crédibilité de 67% à la suite de la prise en compte de 7 années d'historique, pour les LoB **MAT** et **PPD Proportionnelles** sont **26.36%** et **35.90%** respectivement.

Les écart-type USP finaux sont supérieurs aux écart-type du risque de réserve de la formule de standard des Actes Délégués.

b. Résultats des tests de sensibilités de la méthode Log-Normale pour risque de réserve.

Il a été effectué des tests de sensibilité par branche d'activité sur la longueur de l'historique, en retirant les dernières années d'historique de manière itérative.

• MAT Proportionnelle

Nombre d'années	Full Name	Sigma Basic	Sigma USP	Credibility Factor	Sigma Final
7 ans	Direct and Proportional Marine, Aviation and Transportation	10.00%	29.38%	67.00%	26.36%
6 premières années	Direct and Proportional Marine, Aviation and Transportation	10.00%	30.21%	51.00%	23.62%
5 premières années	Direct and Proportional Marine, Aviation and Transportation	10.00%	33.93%	34.00%	21.39%

Tableau 29 - Résultats des tests de sensibilités de la méthode Log-Normale pour risque de réserve, MAT Proportionnelle

L'écart-type USP final diminue au fur et à mesure que les dernières années sont retirées parallèlement accompagné d'une baisse graduelle du facteur de crédibilité. L'écart-type final présente une augmentation progressive pour les différentes subdivisions de données exploitées. L'écart-type final est supérieur à l'écart-type du risque de réserve de la formule de standard qui est de 10.00%. Cette analyse de sensibilité permet de constater que **l'écart-type USP final du risque de réserve pour la LoB MAT Proportionnelle est supérieur à l'écart-type standard** défini par les Actes Délégués.

- PPD Proportionnelle

Nombre d'années	Full Name	Sigma Basic	Sigma USP	Credibility Factor	Sigma Final
7 ans	Direct and Proportional Miscellaneous Financial Loss	20.00%	37.87%	67.00%	35.90%
6 premières années	Direct and Proportional Miscellaneous Financial Loss	20.00%	41.32%	51.00%	34.73%
5 premières années	Direct and Proportional Miscellaneous Financial Loss	20.00%	46.46%	34.00%	32.55%

Tableau 30 - Résultats des tests de sensibilités de la méthode Log-Normale pour risque de réserve, PPD Proportionnelle

Il est constaté une diminution de l'écart-type USP final (Sigma Final) de 35.90% à 32.55% au fur et à mesure que les dernières années sont retirées, parallèlement accompagné d'une baisse graduelle du facteur de crédibilité.

L'écart-type final USP de la LoB PPD Proportionnelle est supérieur à l'écart-type du risque de réserve de la formule de standard des Actes Délégués de 13.00%.

c. Résultat et impact des USP du risque de réserve sur le SCR de primes et réserve et le ratio de couverture du SCR

Le tableau ci-dessous présente les impacts de la modification des paramètres propres par branche d'activité proportionnelle dans le cadre de méthode du risque de réserve sur le SCR primes et réserves, le SCR et le ratio de couverture du SCR :

	Ecart-type du risque de primes et réserve	SCR Primes et réserve	SCR	Ratio de couverture du SCR
Formule Standard	10.05%	4 982 861	11 899 715	153.82%
USP branche MAT proportionnelle	17.16%	8 511 600	14 246 701	128.48%
USP branche PPD proportionnelle	10.65%	5 282 690	12 078 442	151.55%
USP branche MAT et PPD proportionnelles	17.69%	8 774 690	14 439 744	126.76%

Tableau 31 - Résultat et impact des USP du risque de réserve méthode Log-Normale

d. Conclusion sur le risque de réserve – Log-Normale

La méthode USP Log-Normale du risque de réserve présentée dans les Actes Délégués dispose des mêmes faiblesses que la méthode du risque de primes présentées à la section 12.4 de ce mémoire.

En utilisant le paramètre propre du risque de réserve uniquement pour la **LoB MAT Proportionnelle**, le SCR de primes et réserve augmente de 4.982.861 EUR à 8.511.600 EUR. L'augmentation de 3 528 739 EUR dans le sous-module SCR primes et réserves entraîne une augmentation des besoins en SCR de 2 346 986 EUR et engendre une diminution du ratio de couverture de 25.34% pour atteindre **128.48%**.

La **LoB PPD Proportionnelle** ne valide pas en théorie les hypothèses sous-jacentes à la méthode à la suite d'une forte volatilité des taux de boni-mali des réserves β , l'absence de proportionnalité entre la variance de la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 et aussi du fait que la distribution de la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an ne pas suit une distribution Log-Normale. En utilisant uniquement le paramètre propre de la LoB PPD Proportionnelle, le sous-modules SCR primes et réserve entraîne une augmentation des besoins SCR de 299.830 EUR et par conséquent une faible diminution du ratio de couverture de 2.28% pour atteindre **151.55%**.

L'application simultanée des **deux paramètres propres pour les deux LoB proportionnelles**, entraîne une augmentation des besoins SCR par rapport à la situation sans paramètre de 2.540.030 EUR pour un ratio de couverture de **126.76%**.

L'utilisation des USP de la méthode Log-Normale du risque de réserve pour les deux LoB Proportionnelles n'est pas avantageux en termes de capital pour la captive de réassurance étudiée car les besoins de couverture du SCR augmentent et le ratio de couverture du SCR diminue fortement.

15. Analyse du risque de réserve de la méthode de Merz-Wüthrich

15.1 Présentation des données

Les données brutes de sinistres ultimes disponibles pour les deux traités de réassurance proportionnels sont les suivantes :

- MAT Proportionnelle

	0	1	2	3	4	5	6	7
2017	3 561 806	6 849 297	7 191 762	7 198 954	7 198 954	7 198 954	7 198 954	7 198 954
2018	5 957 524	12 057 773	12 877 702	12 929 212	12 929 212	12 929 212	12 929 212	
2019	4 766 943	6 618 714	6 770 944	6 770 944	6 770 944	6 770 944		
2020	1 362 146	2 528 194	3 362 498	3 668 485	3 668 485			
2021	2 551 792	6 276 461	6 897 831	7 063 379				
2022	5 898 617	5 418 136	5 689 043					
2023	2 124 947	6 020 799						
2024	7 554 246							

Figure 59 – Triangle des paiements cumulés, MAT Proportionnelle

- PPD Proportionnelle

	0	1	2	3	4	5	6	7
2017	575 000	1 725 000	1 840 000	1 955 000	2 070 000	2 081 500	2 081 500	2 081 500
2018	583 100	1 748 000	1 863 000	1 932 000	2 065 400	2 065 400	2 065 400	
2019	700 000	1 771 000	1 851 500	1 909 000	1 909 000	1 909 000		
2020	596 700	1 794 000	1 858 400	1 858 400	1 858 400			
2021	725 000	1 771 000	1 870 000	1 888 300				
2022	600 500	1 757 700	1 882 100					
2023	735 400	1 753 200						
2024	709 300							

Figure 60 - Triangle des paiements cumulés, PPD Proportionnelle

Les données doivent vérifier les hypothèses propres à la méthode de Merz-Wüthrich afin de valider l'utilisation des modèles dans le cadre de ce mémoire. La vérification de l'application des hypothèses qui sous-tendent au modèle de provisionnement de Chain-Ladder doivent être vérifiées afin que le modèle puisse être appliqué.

15.2 Validation des hypothèses de la méthode

Les données utilisées dans le cadre de cette méthode sont nettes de réassurance. Les figures 62 et 63 ci-dessous, présentent les paiements cumulés à l'ultime avec la méthode de provisionnement de *Chain-Ladder* sur des données nettes de réassurance pour les LoB proportionnelles.

- MAT Proportionnelle

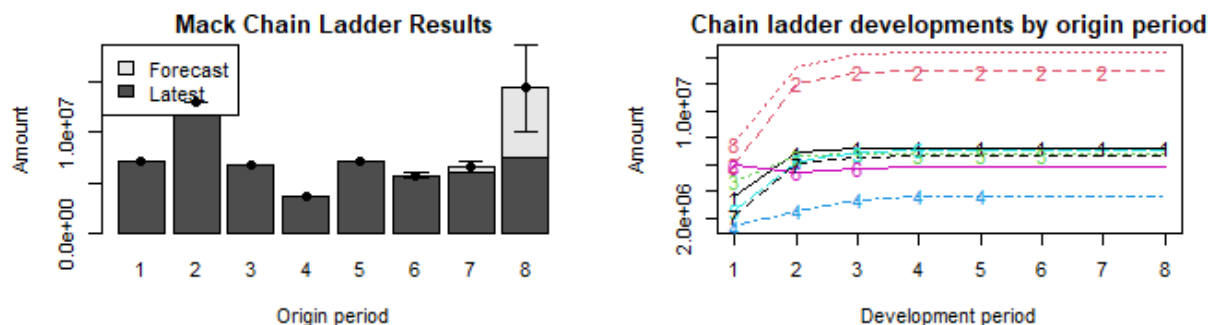


Figure 61 - Méthode de Chain Ladder appliquée aux paiements cumulés - MAT Proportionnelle

- PPD Proportionnelle

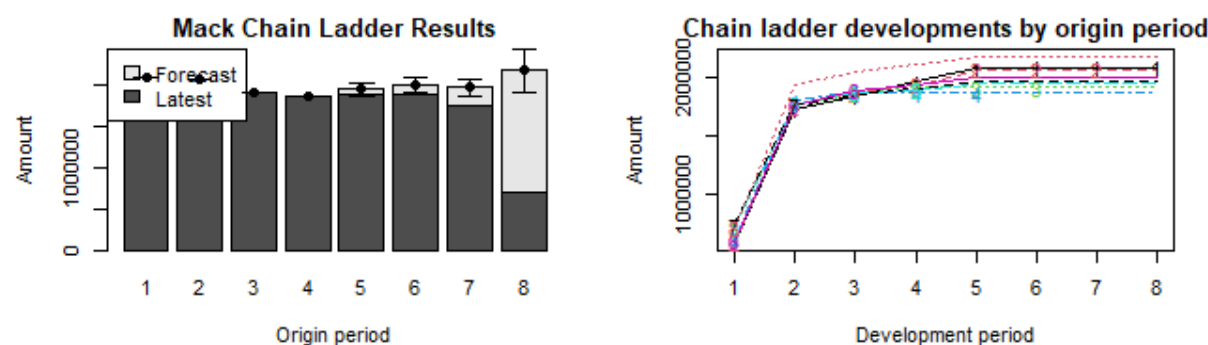


Figure 62 - Méthode de Chain Ladder appliquée aux paiements cumulés - PPD Proportionnelle

Hypothèse 1 : Existence de facteurs de développement.

Pour vérifier cette hypothèse, il est essentiel de démontrer que les facteurs de développement varient uniquement en fonction des années de développement $j \in \{1, \dots, J\}$ et non en fonction des années de de survivance $i \in \{0, \dots, I\}$.

Pour un triangle de paiement cumulés en « run-off » tel que $i + j \leq n + 1$ et des facteurs de développement $f_1, \dots, f_{j-1} > 0$, on a l'hypothèse suivante :

$$\forall i, E(C_{i,j} | C_{i,j-1}) = f_{j-1} \times C_{i,j-1}$$

Pour confirmer cette hypothèse, il est impératif de vérifier l'indépendance des années de développement des sinistres cumulés (partie supérieure du triangle), par un test d'indépendance statistique sur les facteurs de développement, à confirmer également graphiquement.

Pour une année de survivance $i = 1, \dots, n$ il faut vérifier que les paiements cumulés $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$ des différentes années de développement sont alignés sur une droite qui passe par l'origine.

a. Vérification graphique

- MAT Proportionnelle

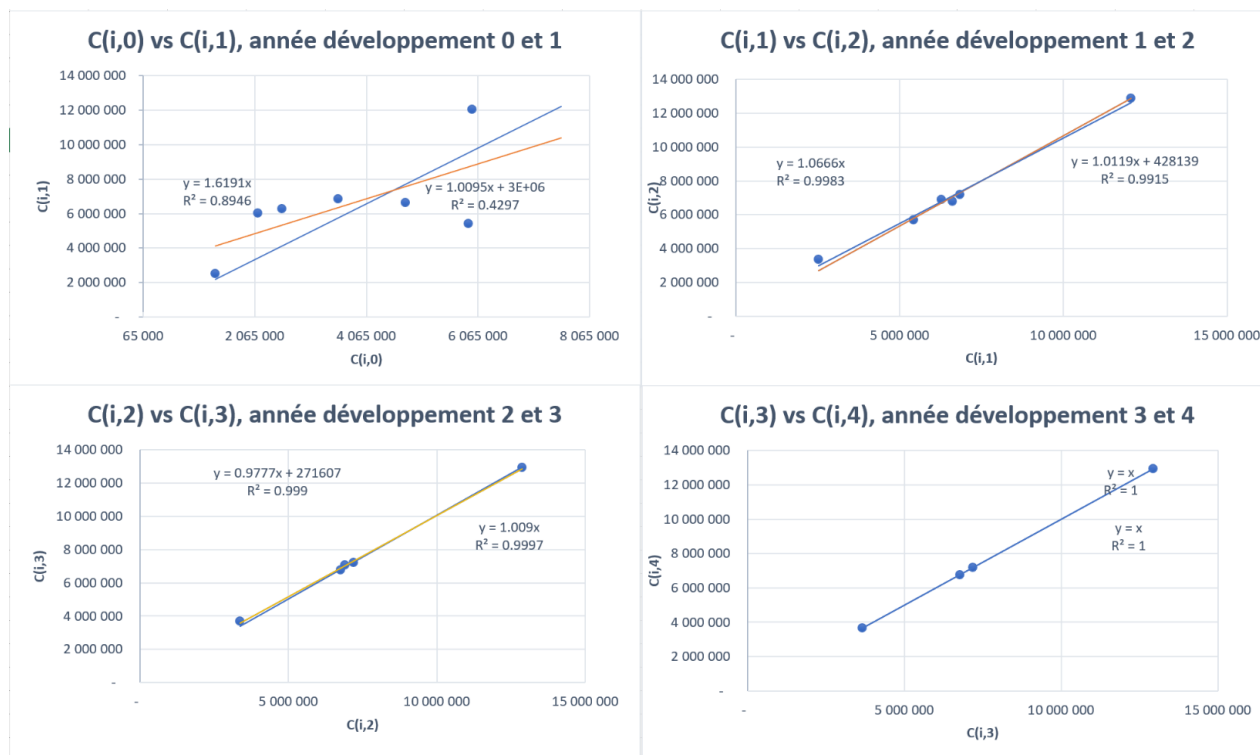


Figure 63 - MAT Proportionnelle - C-C plot des premières années de développement

Pour la LoB **MAT Proportionnelle**, les couples $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$ semblent être alignés et les coefficients de régression sont supérieurs à 0.99, à l'exception de la première année de développement où il est égal à 0.89.

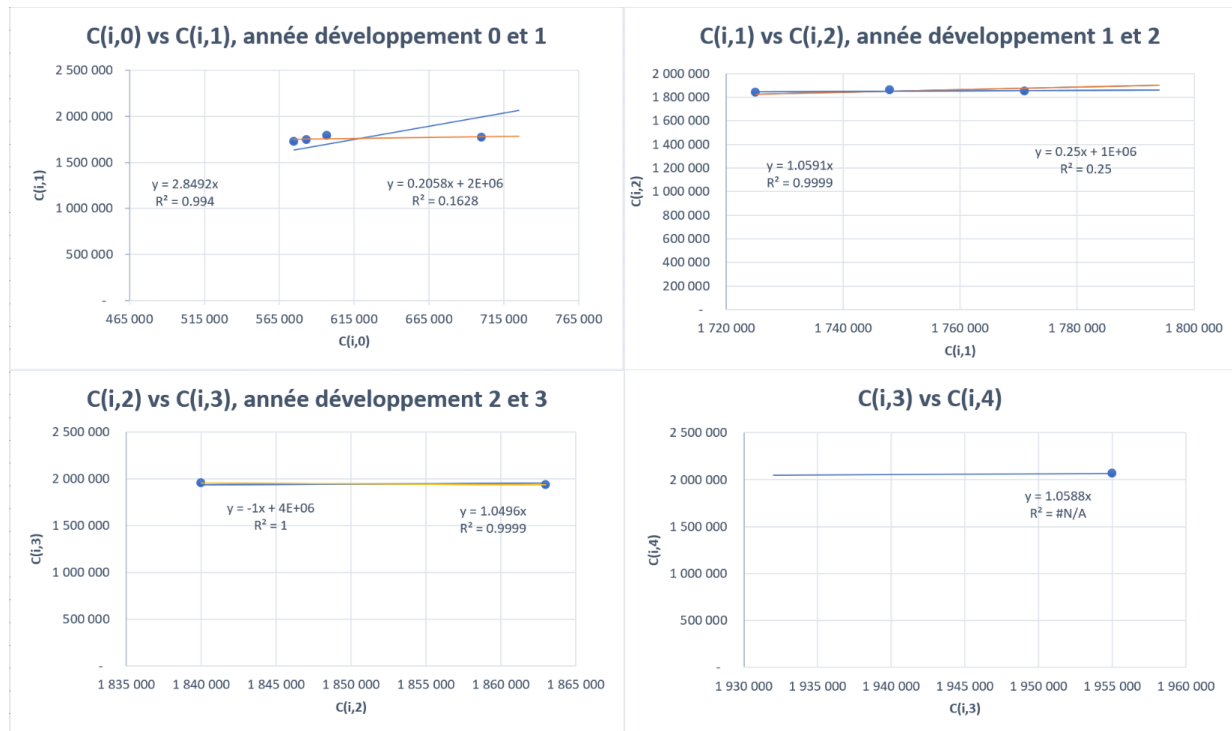


Figure 64 - PPD Proportionnelle - C-C plot des premières années de développement

Concernant la LoB **PPD Proportionnelle**, les couples $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$ semblent être alignés et les coefficients de régression sont supérieurs à 0.99.

b. Vérification statistique

• Régression linéaire simple

Il s'agit de montrer qu'il existe une relation linéaire simple entre les paiements cumulés de deux années de développements successifs $j - 1$ et j .

Le modèle suivant de régression linéaire simple est utilisé :

$$Y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$$

Où :

- a : correspond à la pente de l'équation
- b : correspond à l'ordonnée à l'origine
- ε_i : correspond aux termes d'erreurs avec $E(\varepsilon_i) = 0$

Dans notre cas, $a = f_{j-1}$ et les observations des variables indépendantes $Y_i = C_{i,j}$ aux points $x_i = C_{i,j-1}$ pour $i = 1, \dots, I - j$. L'équation suivante est obtenue :

$$C_{i,j} = f_{j-1}C_{i,j-1} + b + \varepsilon_i$$

Test de Student

Une analyse de la régression linéaire simple est effectuée afin d'étudier la présence de tendance dans les paiements cumulés au cours du temps. Les estimations des paramètres des régressions simples sont présentées pour chaque sous-période pertinentes dans les figures 65 et 66 ci-dessous.

Compte tenu du cycle de développement des sinistres qui n'excède pas 4 ans, les régressions linéaires au-delà ne sont pas présentées car elles ne sont pas pertinentes.

Il est nécessaire de vérifier que la méthode de *Chain Ladder* est appropriée, en réalisant un test de *Student* à $(n - 1)$ degrés de liberté à un seuil significatif de 5%.

Les hypothèses du test statistique de *Student* sont :

$$\begin{cases} H_0: \text{la pente est non nulle et la constante est nulle} \\ H_1: \text{il existe une autre combinaison } H_0 \end{cases}$$

Si la pente de la régression est significative et la constante non-significative au sens statistique pour un seuil de 5%, alors la méthode de Chain Ladder est appropriée.

- MAT Proportionnelle

```
> summary(lm(Ci1~Ci0))
Call:
lm(formula = Ci1 ~ Ci0)

Residuals:
    1      2      3      4      5      6      7 
497018 3286980 -950169 -1603495  943806 -3293190 1119051

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 2.757e+06  2.141e+06   1.288   0.254
Ci0         1.010e+00  5.202e-01   1.941   0.110

Residual standard error: 2346000 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4297,    Adjusted R-squared:  0.3156 
F-statistic: 3.767 on 1 and 5 DF,  p-value: 0.11

> summary(lm(Ci2~Ci1))
Call:
lm(formula = Ci2 ~ Ci1)

Residuals:
    1      2      3      4      5      6 
-167071 248496 -354565 376120 118641 -221621

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 4.281e+05  3.371e+05   1.27   0.273
Ci1         1.012e+00  4.681e-02  21.62 2.71e-05 ***

Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 324100 on 4 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9915,    Adjusted R-squared:  0.9894 
F-statistic: 467.3 on 1 and 4 DF,  p-value: 2.709e-05

> summary(lm(Ci3~Ci2))
Call:
lm(formula = Ci3 ~ Ci2)

Residuals:
    1      2      3      4      5 
-103952  67233 -120533 109405  47846

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 2.716e+05  1.420e+05   1.913   0.152
Ci2         9.777e-01  1.769e-02  55.272 1.3e-05 ***

Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 121300 on 3 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.999,    Adjusted R-squared:  0.9987 
F-statistic: 3055 on 1 and 3 DF,  p-value: 1.304e-05

> summary(lm(Ci4~Ci3))
Call:
lm(formula = Ci4 ~ Ci3)

Residuals:
    1      2      3      4 
3.782e-10 -1.530e-10 2.630e-11 -2.515e-10

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 0.000e+00  4.234e-10  0.00e+00   1
Ci3         1.000e+00  5.077e-17  1.97e+16 <2e-16 ***

Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.394e-10 on 2 degrees of freedom
Multiple R-squared:  1,    Adjusted R-squared:  1 
F-statistic: 3.88e+32 on 1 and 2 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Figure 65 - MAT Proportionnelle - Régression linéaire des paiements cumulés entre deux années de développement successives

L'hypothèse H_0 n'est pas rejetée entre les paiements cumulés de deux années de développements successifs (2, 3 et 4), comme confirmé graphiquement. Néanmoins, l'hypothèse H_0 est rejetée pour le développement successif entre la période 0 et 1.

- PPD Proportionnelle

```
> summary(lm(Ci1_PPD~Ci0_PPD))

Call:
lm(formula = Ci1_PPD ~ Ci0_PPD)

Residuals:
    1     2     3     4     5     6     7 
-29213 -6880  6493 38000  4435  1387 -14222 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.707e+06  8.465e+04  20.163 5.55e-06 ***
Ci0_PPD      8.235e-02  1.305e-01   0.631   0.556
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 22850 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.07372, Adjusted R-squared: -0.1115 
F-statistic: 0.3979 on 1 and 5 DF, p-value: 0.5559

> summary(lm(Ci2_PPD~Ci1_PPD))

Call:
lm(formula = Ci2_PPD ~ Ci1_PPD)

Residuals:
    1     2     3     4     5     6 
-13392  4869 -11370 -9209  7130 21971 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.498e+06  5.164e+05   2.901  0.0441 *
Ci1_PPD      2.060e-01  2.932e-01   0.703   0.5209
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 15420 on 4 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.1099, Adjusted R-squared: -0.1126 
F-statistic: 0.4939 on 1 and 4 DF, p-value: 0.5209

> summary(lm(Ci3_PPD~Ci2_PPD))

Call:
lm(formula = Ci3_PPD ~ Ci2_PPD)

Residuals:
    1     2     3     4     5 
15375 35496 -9064 -46728  4920 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  5.389e+06  2.878e+06   1.873   0.158
Ci2_PPD     -1.875e+00  1.550e+00  -1.210   0.313
---
Residual standard error: 35530 on 3 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3278, Adjusted R-squared:  0.1038 
F-statistic: 1.463 on 1 and 3 DF, p-value: 0.3131

> summary(lm(Ci4_PPD~Ci3_PPD))

Call:
lm(formula = Ci4_PPD ~ Ci3_PPD)

Residuals:
    1     2     3     4 
-5436  45373 -55618 15682 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -2.634e+06  1.393e+06  -1.891   0.1992
Ci3_PPD      2.409e+00  7.280e-01   3.309   0.0804 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 52090 on 2 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8456, Adjusted R-squared:  0.7684 
F-statistic: 10.95 on 1 and 2 DF, p-value: 0.08045
```

Figure 66 - PPD Proportionnelle - Régression linéaire des paiements cumulés entre deux années de développements successifs

L'hypothèse H_0 est toujours rejetée, ce qui est contraire aux observations graphiques. Il est difficile statistiquement d'obtenir des conclusions fiables étant donné que l'analyse est effectuée avec un maximum de 7 points de données. Les résultats non significatifs peuvent être dus à une absence de relations linéaire entre les variables ou à un manque de puissance statistique à la suite d'un nombre trop faible de données.

Hypothèse 2 : Indépendance des années de survenance.

La méthode de provisionnement de *Chain Ladder* repose sur l'indépendance des années de survenance entre elles, c'est à dire qu'il n'existe pas de dépendance entre différentes années d'accidents, qu'elles soient successives ou non. L'objectif est de démontrer l'absence d'effet calendaire sur les diagonales et qu'il n'y a pas de corrélation entre les différentes colonnes des triangles étudiés.

Cette hypothèse se formalise de la sorte :

$\forall i \neq j, \{C_{i,1}, \dots, C_{i,I}\}, \{C_{j,1}, \dots, C_{j,I}\}$ des variables aléatoires indépendantes pour différentes années d'accidents.

La présence d'effets calendaires au sein d'un triangle annihile la possibilité d'appliquer la méthode de provisionnement de *Chain Ladder*. Les causes expliquant la présence d'effets calendaires proviennent généralement de modifications législatives et réglementaires, de fluctuations économiques (exemple de l'inflation), d'une évolution des pratiques de gestions et d'évaluation des sinistres, d'événements catastrophiques ou de modifications tarifaires. Les conséquences de la présence d'effets calendaires sont multiples et engendrent une sous/surestimation des provisions pour sinistres, une incertitude dans la prévision des sinistres futurs et des difficultés à comparer les résultats de souscription d'une année à l'autre.

Une vérification graphique et un test statistique sont nécessaires pour vérifier l'hypothèse d'indépendance des années de survenance.

a. Vérification graphique

Une analyse graphique des facteurs individuels de développement $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ est effectuée. Il est nécessaire de vérifier graphiquement que les points soient le plus proches d'une droite horizontale pour une année de développement. Les figures 68 et 69, ci-dessous, présentent les facteurs individuels $f_{i,j}$ en fonction des années de survénance pour une année de développement j fixée par LoB.

- MAT Proportionnelle

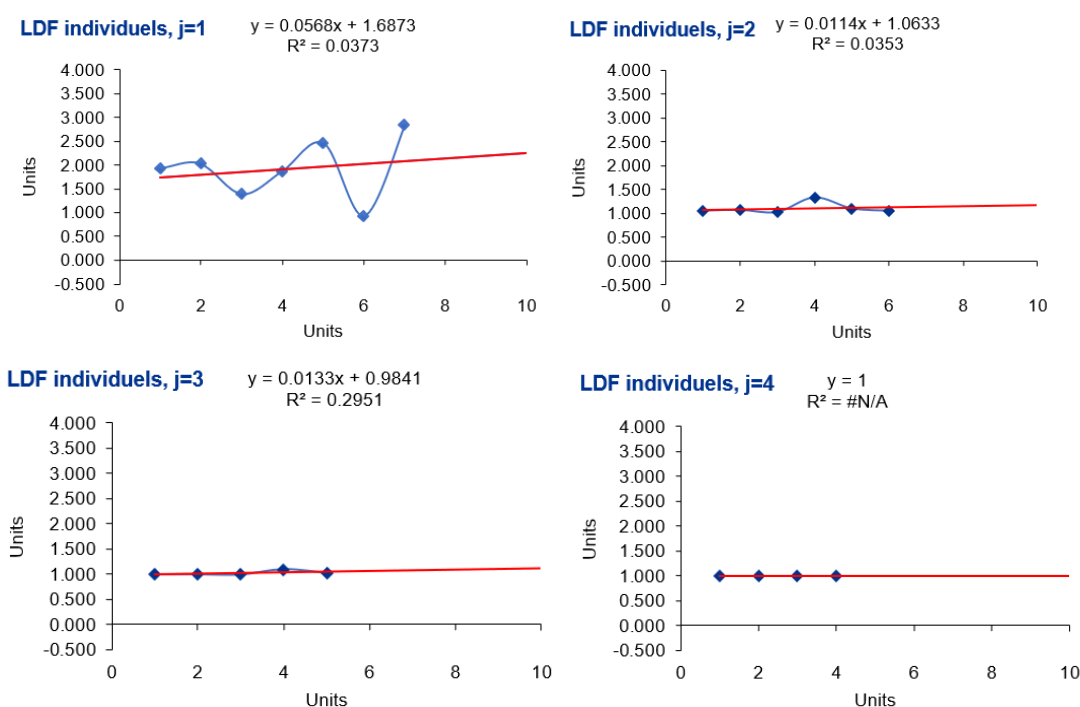
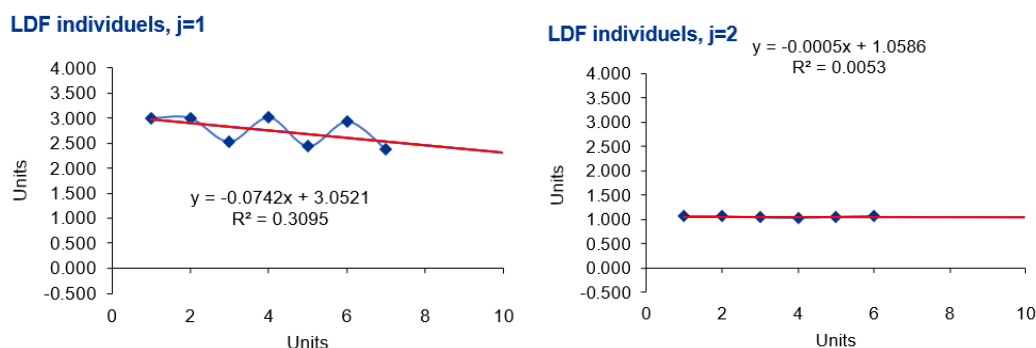


Figure 67 - Facteur de développement individuels par année de survénance, MAT Proportionnelle

- PPD Proportionnelle



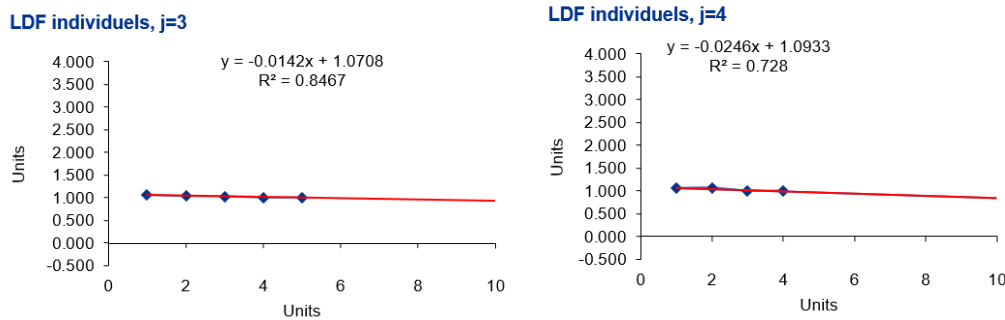


Figure 68 - Facteur de développement individuels par année de survénance, PPD Proportionnelle

Graphiquement, pour les deux LoB proportionnelles, l'année de développement 1 présente une forte volatilité est une absence de comportement stable autour de la droite de régression. Les points sont proches d'une droite horizontale pour les années de développement 2 3 et 4 pour les deux LoB proportionnelles.

L'hypothèse d'indépendance des années de survénance semble se confirmer graphiquement.

b. Vérification statistique

Afin de consolider les conclusions des tests graphiques, un test statistique pour déceler les effets calendaires est mené. La détection de ces effets est cruciale et la présence de ces derniers est la cause principale de rejet d'indépendance des années de survénance généralement.

- **Process du test statistique sur les effets calendaires.**

Il est nécessaire de tester si les triangles de paiements cumulés par LoB présentent des effets calendaires. L'article de Thomas Mack *Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates* présente un processus de test statistiques pour déceler la présence d'effets calendaires.

Les facteurs de développement individuels $f_{i,j}$ sont calculés ainsi que les diagonales $D_j = \{C_{j1}, \dots, C_{1j}\}$. Si le coefficient de développement individuels $f_{i,j}$ est plus petit que la médiane des coefficients individuels de l'année de développement j , il lui est affecté la lettre « S » et s'il est plus grand, la lettre « L ». S'il correspond à la médiane, le symbole « * » est affecté. Le nombre de « S » et de « L » est compté sur chaque diagonale pour obtenir les valeurs S_k et L_k .

Les variables suivantes sont mises en place : $Z_j = \min(S_j; L_j)$ et $Z = \sum_{j=0}^I Z_j$.

Par suite de l'utilisation de la fonction *cyEffTest* du logiciel statistique *R-Studio*, les résultats des tests sur la présence d'effets calendaires par LoB sont les suivants :

```

> summary(Development_Fac_cor_MAT) > summary(Development_Fac_cor_PPD)
$Table
  j S_j L_j Z_j n m E_Zj Var_Zj
1 2 1 1 1 2 0 0.50 0.2500
2 3 2 1 1 3 1 0.75 0.1875
3 4 2 0 0 2 0 0.50 0.2500
4 5 1 2 1 3 1 0.75 0.1875
5 6 1 2 1 3 1 0.75 0.1875
6 7 1 2 1 3 1 0.75 0.1875

$Totals
      Totals
Z      5.00
E[Z]   4.00
var[Z]  1.25

$Range
      value
Lower 1.808694
Upper 6.191306

$Table
  j S_j L_j Z_j n m E_Zj Var_Zj
1 2 0 2 0 2 0 0.50 0.2500
2 3 1 2 1 3 1 0.75 0.1875
3 4 1 3 1 4 1 1.25 0.4375
4 5 2 2 2 4 1 1.25 0.4375
5 6 3 0 0 3 1 0.75 0.1875
6 7 3 1 1 4 1 1.25 0.4375

$Totals
      Totals
Z      5.0000
E[Z]   5.7500
var[Z]  1.9375

$Range
      value
Lower 3.021846
Upper 8.478154

```

Figure 69 - Résultat du test sur les effets calendaires pour MAT et PPD Proportionnelles

Il s'agit de comparer Z et $E(Z)$ pour valider l'hypothèse d'indépendance des années de survenance en s'assurant que la relation suivante soit respectée :

$$E(Z) - 2\sqrt{\text{Var}(Z)} \leq Z \leq E(Z) + 2\sqrt{\text{Var}(Z)}$$

Pour la LoB **MAT Proportionnelle**, Z et $E(Z)$ sont respectivement 5.00 et 4.00. Pour la LoB **PPD Proportionnelle**, Z et $E(Z)$ sont respectivement 5.00 et 5.75.

Les données ne semblent pas présenter d'effets calendaires et donc l'hypothèse d'indépendance des années de survenance est acceptée pour les deux LoB Proportionnelles.

- **Test statistique pour identifier une tendance entre année de survenance et coefficients de passage**

Les coefficients de passage par LoB entre j et $j+1$ sont présentés dans les figures 71 et 72 ci-dessous :

MAT Prop	0->1	1->2	2->3	3->4	4->5	5->6	6->7
2017	1.92	1.05	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2018	2.02	1.07	1.00	1.00	1.00	1.00	
2019	1.39	1.02	1.00	1.00	1.00		
2020	1.86	1.33	1.09	1.00			
2021	2.46	1.10	1.02				
2022	0.92	1.05					
2023	2.83						

Figure 70 - Triangle facteurs de développement individuels branche MAT Proportionnelle

PPD Prop	0->1	1->2	2->3	3->4	4->5	5->6	6->7
2017	3.00	1.07	1.06	1.06	1.01	1.00	1.00
2018	3.00	1.07	1.04	1.07	1.00	1.00	
2019	2.53	1.05	1.03	1.00	1.00		
2020	3.01	1.04	1.00	1.00			
2021	2.44	1.06	1.01				
2022	2.93	1.07					
2023	2.38						

Figure 71 - Triangle facteurs de développement individuels branche PPD Proportionnelle

La figure 73 ci-dessus présente les résultats des régressions linéaires entre les années de survenance et les coefficients de passage par LoB Proportionnelle.

```
> summary(lm(Y1_MAT~X1_MAT))
Call:
lm(formula = Y1_MAT ~ X1_MAT)

Residuals:
    1     2     3     4     5     6     7 
-3.0054 -2.0717 -0.6547  0.0385  0.6425  2.6536  2.3972 

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 2018.7437    2.9864   675.99 1.34e-13 ***
X1_MAT       0.6561     1.4908    0.44  0.678
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.322 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.0373,    Adjusted R-squared: -0.1552 
F-statistic: 0.1937 on 1 and 5 DF,  p-value: 0.6782
```

```
> summary(lm(Y1_PPD~X1_PPD))
Call:
lm(formula = Y1_PPD ~ X1_PPD)

Residuals:
    1     2     3     4     5     6     7 
-1.9794 -0.9887 -1.9409  1.0479 -0.3050  2.7162  1.4498 

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 2031.500    7.717 263.250 1.5e-11 ***
X1_PPD      -4.173     2.788  -1.497  0.195
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.966 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3095,    Adjusted R-squared: 0.1714 
F-statistic: 2.241 on 1 and 5 DF,  p-value: 0.1946
```

Figure 72 – Régression linéaire entre année de survenance et coefficient de passage, MAT et PPD Proportionnelles

L'hypothèse d'absence de tendance entre les années de survenance et les coefficients de passage est acceptée au seuil significatif de 5% sur base des p-values respectives de 0.6782 et de 0.1946 pour les **LoB MAT et PPD Proportionnelles**.

- **Test statistique sur la corrélation linéaire entre deux vecteurs de passage de coefficients individuels**

Les deux tableaux ci-dessous présentent les résultats des tests de corrélation de *Pearson* entre les deux premiers vecteurs des coefficients de passage individuels par branche d'activité.

```
> cor.test(X1_MAT,X2_MAT,method='pearson')
Pearson's product-moment correlation

data: X1_MAT and X2_MAT
t = 0.50959, df = 4, p-value = 0.6372
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.7061525  0.8817779
sample estimates:
cor
0.2469087
```

```
> cor.test(X1_PPD,X2_PPD,method='pearson')
Pearson's product-moment correlation

data: X1_PPD and X2_PPD
t = 0.5354, df = 4, p-value = 0.6208
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.6998382  0.8845249
sample estimates:
cor
0.2585952
```

Figure 73 - Test de tendance entre année de survenance et coefficient de passage

Le test de corrélation de *Pearson* n'est pas significatif pour les deux LoB, avec respectivement une p-value de test de 0.6372 et un coefficient de corrélation $\rho = 0.25$ pour la LoB **MAT Proportionnelle** et une p-value de 0.6208 et un coefficient de corrélation $\rho = 0.24$ pour la LoB **PPD Proportionnelle**. L'hypothèse d'absence de corrélation entre les vecteurs de passage de coefficients individuels est acceptée.

Hypothèse3 : Existence d'un paramètre de variance.

Les sinistres cumulés dans la même année de survenance ($C_{i,j}$) avec $j \in \{0, \dots, J\}$ sont des processus de Markov et il existe une constante $\sigma_j > 0$ avec $0 \leq i \leq I$ et $1 \leq j \leq J$ telle que :

$$\forall i, \text{Var}(C_{i,j}|C_{i,j-1}) = \sigma_{j-1}^2 \times C_{i,j-1}$$

Pour tout j fixé, le graphe des résidus $\frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$, $i = 0, \dots, n - j - 1$ ne doit faire apparaître aucune structure non aléatoire. Il s'agit dans le cadre de cette hypothèse de vérifier la présence d'un paramètre de variance et d'observer le caractère aléatoire des résidus de *Pearson*. Il s'agit d'observer graphiquement l'absence de tendance dans les résidus de Pearson, tels que :

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j \times C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}, 0 \leq i \leq I - j$$

Les figures 75 et 76 ci-dessous présentent les résidus en fonction des paiements cumulés par LoB :

- MAT Proportionnelle

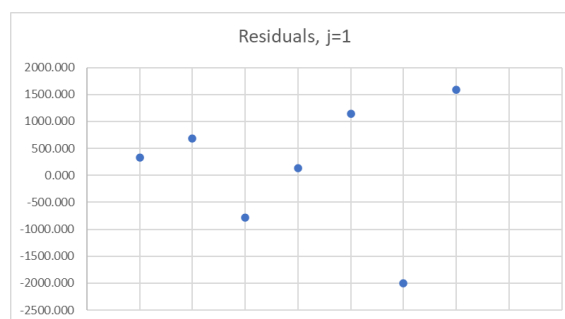


Figure 74 - MAT Proportionnelle - répartition des résidus en fonction des $C(i,j)$

- PPD Proportionnelle

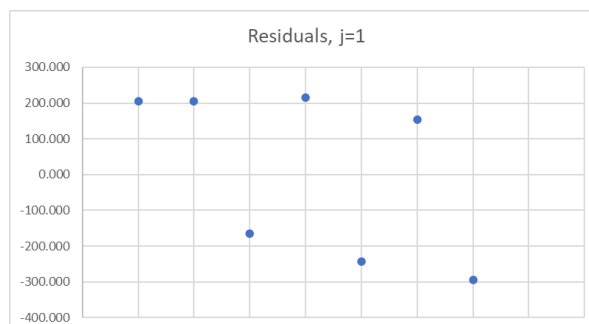


Figure 75 - PPD Proportionnelle - répartition des résidus en fonction des $C(i,j)$

Il est décidé de valider l'hypothèse d'existence de variance à la suite de l'absence de tendance dans les résidus pour les **LoB MAT et PPD Proportionnelles**.

15.3 Conclusion de la validité des hypothèses de la méthode

Hypothèses	Tests statistiques élaborés	MAT Proportionnelle	PPD Proportionnelle
Hypothèse 1 : Existence d'un facteur de développement	Vérification graphique d'alignement des points sur une même droite qui passe par l'origine.	Partiellement accepté	Accepté
	Régression linéaire (calcul du coefficient d'erreur).	Partiellement accepté	Accepté
	Test de <i>Student</i> sur les coefficients de la régression linéaire.	Accepté	Rejeté
Hypothèse 2 : Indépendance des années de survenance	Vérification graphique des facteurs individuels $f_{i,j}$ en fonction des années de survenance (pour une année de développement fixée).	Partiellement accepté	Partiellement accepté
	Test de présence d'effet diagonal (effets annuels calendaire).	Accepté	Accepté
	Test statistique tendance entre année de survenance et coefficients de passage.	Accepté	Accepté
	Test statistique sur la corrélation linéaire entre deux vecteurs de passage de coefficients individuels.	Accepté	Accepté
Hypothèse 3 : Existence d'un facteur de variance	Vérification graphique des résidus.	Partiellement accepté	Partiellement accepté

Tableau 32 - Résumé de la validité des hypothèses – méthode de Merz-Wüthrich

Il ressort de notre analyse que les **hypothèses sous-jacentes à la méthode de Merz-Wüthrich semblent validées**, au moins partiellement, pour les LoB **MAT et PPD Proportionnelles**. Cependant les validations de ces hypothèses ont été effectuées sur un volume limité de données, ce qui introduit une certaine fragilité dans les résultats.

15.4 Résultat de la méthode de méthode de Merz-Wüthrich

a) Résultat des écarts-types de la méthode de Merz-Wüthrich pour le risque de réserve.

Sur base des données présentées en section 15.1 et de la validation des hypothèses de la méthode Merz-Wüthrich du risque de réserve pour les LoB MAT et PPD Proportionnelles, les volatilités suivantes ont été obtenues :

Nombre d'années	Full Name	Sigma Basic	Sigma USP	Credibility Factor	Sigma Final
8 ans	Direct and Proportional Marine, Aviation and Transportation	11.00%	56.81%	81.00%	48.11%
8 ans	Direct and Proportional Miscellaneous Financial Loss	20.00%	15.06%	81.00%	16.00%

Tableau 33 - Résultats de la méthode Merz-Wüthrich, MAT et PPD Proportionnelle

Les paramètres USP « intermédiaire » (Sigma USP) des LoB MAT et PPD Proportionnelles sont de 56.81% et 15.01% respectivement. Les résultats par LoB sont détaillés en Annexe 9.

L'écart-type **USP final (Sigma Final)** de la LoB **MAT Proportionnelle**, avec un facteur de crédibilité de 81% à la suite de la prise en compte de 8 années d'historique, est de **48.11%**. Les écarts-types finaux de la LoB MAT Proportionnelle sont **au-dessus de l'écart-type du risque de réserve de la formule de standard** des Actes Délgués, 11.00% contre 48.11% dans le cas de notre USP.

L'écart-type USP final (Sigma final) de la LoB **PPD Proportionnelle**, avec un facteur de crédibilité de 81% à la suite de la prise en compte de 8 années d'historique, est de **16.00%**. Les résultats de la LoB PPD Proportionnelle sont **inférieurs à l'écart-type du risque de réserve de la formule de standard**.

b) Tests de sensibilités au nombre d'années d'historiques de la méthode de Merz-Wüthrich pour le risque de réserve.

Il a été effectué des tests de sensibilité par branche d'activité sur la longueur de l'historique, en retirant les dernières années d'historique de manière itérative.

- MAT Proportionnelle

Nombre d'années	Full Name	Sigma Basic	Sigma USP	Credibility Factor	Sigma Final
8 ans	Direct and Proportional Marine, Aviation and Transportation	11.00%	56.81%	81.00%	48.11%
7 premières années	Direct and Proportional Marine, Aviation and Transportation	11.00%	86.51%	67.00%	61.59%
6 premières années	Direct and Proportional Marine, Aviation and Transportation	11.00%	36.14%	51.00%	23.82%
5 premières années	Direct and Proportional Marine, Aviation and Transportation	11.00%	46.86%	34.00%	23.19%

Tableau 34 - Résultats des tests de sensibilités de la méthode Merz-Wüthrich, MAT Proportionnelle

L'écart-type USP « intermédiaire » (Sigma USP) enregistre une hausse notable, passant de 56.81% à 85.51%, puis diminue pour atteindre 46.86% à mesure que les années les plus récentes étaient exclues de l'analyse.

L'écart-type final (Sigma Final) est supérieur à l'écart-type du risque de réserve de la formule de standard qui est de 11.00%. Cette analyse permet de constater que l'écart-type du risque de réserve pour la LoB MAT Proportionnelle est supérieur à l'écart-type standard défini par les Actes Délgués.

- PPD Proportionnelle

Nombre d'années	Full Name	Sigma Basic	Sigma USP	Credibility Factor	Sigma Final
8 ans	Direct and Proportional Miscellaneous Financial Loss	20.00%	15.06%	81.00%	16.00%
7 premières années	Direct and Proportional Miscellaneous Financial Loss	20.00%	13.58%	67.00%	15.70%
6 premières années	Direct and Proportional Miscellaneous Financial Loss	20.00%	11.91%	51.00%	15.87%
5 premières années	Direct and Proportional Miscellaneous Financial Loss	20.00%	9.95%	34.00%	16.58%

Tableau 35 - Résultats des tests de sensibilités de la méthode Merz-Wüthrich, PPD Proportionnelle

Il est constaté une certaine stabilité de l'écart-type USP final (sigma final) de 16.00% à 16.58% au fur et à mesure que les dernières années sont retirées, accompagné d'une baisse du facteur de crédibilité progressive.

L'écart-type final USP est inférieur à l'écart-type du risque de réserve de la formule de standard des Actes Délégués de 20.00%.

c) Impact des USP méthode Merz-Wüthrich sur le SCR risque de primes et réserve

Le tableau ci-dessous présente les impacts de la modification des paramètres propres par LoB proportionnelle dans le cadre de méthode du risque de réserve sur le SCR primes et réserve, le SCR et le ratio de couverture du SCR :

	Ecart-type du risque de primes et réserve	SCR Primes et réserve	SCR	Ratio de couverture du SCR
Formule Standard	10.05%	4 982 861	11 899 715	153.82%
USP branche MAT proportionnelle	27.66%	13 718 409	18 376 334	99.61%
USP branche PPD proportionnelle	9.91%	4 915 661	11 860 278	154.33%
USP branche MAT et PPD proportionnelles	27.55%	13 663 784	18 330 311	99.86%

Tableau 36 - Résultat et impact des USP du risque de réserve méthode Merz-Wüthrich

La mise en place d'un USP uniquement pour la LoB **MAT Proportionnelle** entraîne une forte diminution du ratio de couverture du **SCR de 153.82% à 99.61%**, passant sous le seuil minimum légal de 100%. La raison principale de cette forte baisse du ratio de couverture du SCR est l'utilisation de l'écart-type propre sur la LoB MAT Proportionnelle de 27.66% qui est presque 3 fois supérieur à celui obtenu avec la formule standard de 10.05%.

En utilisant uniquement le paramètre propre de la **LoB PPD Proportionnelle**, le sous-modules SCR primes et réserve entraîne une diminution des besoins en SCR de 67 200 EUR et engendre une faible augmentation du ratio de couverture de 0.51%, pour atteindre **154.33%** contre 153.82% avec les paramètres de la formule standard.

L'application des deux paramètres propres pour les **deux LoB proportionnelles** entraîne une augmentation des besoins SCR primes et réserve de 8 680 923 EUR. Cela se traduit par une augmentation du montant total du SCR de 6 430 597 EUR, conduisant à un ratio de couverture de **99.86%**.

Sur base des données propres à CAP RE, une analyse approfondie de la qualité des données, de la validation et robustesse des hypothèses, de chaque méthode USP proposée par les Actes Délégués a été effectué. Le chapitre suivant est consacré à la sélection des USP par LoB et par risque.

16.Synthèse et USP sélectionnés

16.1 Validation des hypothèses par méthode

Le tableau 38 présente une vue d'ensemble de la validation des hypothèses, organisée par méthode USP et par LoB :

Risque	Méthode	MAT Proportionnelle	PPD Proportionnelle	Dommages Non Proportionnelle	MAT Non Proportionnelle
Risque de primes	Log-Normale	non	oui	Non applicable	Non applicable
	Réassurance non proportionnelle	Non applicable	Non applicable	non	oui
Risque de réserves	Log-Normale	oui	non	Non applicable	Non applicable
	Triangle Merz-Wüthrich	oui	oui	Non applicable	Non applicable

Tableau 37 - Synthèse validation des hypothèses par méthode USP

Les hypothèses sous-jacentes à la **méthode du risque de primes Log-Normale** sont validées pour la LoB PPD Proportionnelle, mais pas pour la LoB MAT Proportionnelle.

Pour les LoB non proportionnelles, la validité des hypothèses de la **méthode de réassurance non proportionnelle** est confirmée pour la LoB MAT NP, mais pas pour la LoB Dommages NP.

Concernant le risque de réserve, les hypothèses des **méthodes Log-Normale et Merz-Wüthrich** sont validées pour la LoB MAT Proportionnelle. Pour la LoB PPD Proportionnelle, uniquement les hypothèses de la méthode Merz-Wüthrich sont validées.

16.2 USP sélectionnés par méthode

Le tableau 39 ci-dessous, synthétise les résultats des paramètres USP finaux par méthode et par LoB, avec en vert les USP finaux sélectionnés :

Risque	Méthode	MAT Proportionnelle	PPD Proportionnelle	Dommages Non Proportionnelle	MAT Non Proportionnelle
Risque de primes	Log-Normale	40.56%	5.19%	Non applicable	Non applicable
	Réassurance non proportionnelle	Non applicable	Non applicable	100.00%	94.49%
Risque de réserve	Log-Normale	29.38%	37.87%	Non applicable	Non applicable
	Triangle Merz-Wüthrich	56.81%	15.06%	Non applicable	Non applicable

Tableau 38 - Méthode USP sélectionné par branche d'activité

Pour la LoB MAT Proportionnelle dans le cadre du risque de réserve, les hypothèses sont validées pour les deux méthodes ce qui induit la sélection du paramètre spécifique le plus prudent d'après l'Article 220 des Actes Délégués, à savoir la méthode de Merz-Wüthrich. Le choix de la méthode sélectionnée s'appuie sur les résultats du processus de qualité des données, sur la validité et la robustesse des hypothèses sous-jacentes et les résultats de chaque méthode.

Le tableau 40 ci-dessous présente les impacts de la modification des paramètres de la formule standard par les USP retenus sur le SCR primes et réserve, le SCR et le ratio de couverture du SCR de CAP RE :

	Ecart-type du risque de primes et réserve	SCR Primes et réserve	SCR	Ratio de couverture du SCR
Formule Standard	10.05%	4 982 861	11 899 715	153.82%
Avec USP sélectionnés	31.15%	15 446 203	19 853 456	92.20%

Tableau 39 - Résultat et impact des USP sélectionnés

L'intégration des USP retenus par méthode se traduit par une **augmentation significative de l'écart-type du risque de primes et réserve de 10.05% à 31.15%**. Cette augmentation impacte à la hausse les besoins en SCR du module de primes et réserve de 10 463 342 EUR, et par conséquent les besoins totaux de SCR de 7 953 741 EUR pour atteindre 19 853 456 EUR.

En conséquence, le **ratio de couverture du SCR** diminue de 61.62% pour atteindre **92.20%**, ce qui est inférieur au minimum réglementaire de 100%.

Il ressort de cette analyse que les paramètres propres de la captive de réassurance augmentent les besoins en SCR par rapport aux paramètres de la formule standard. Le SCR de primes et réserve, qui représente la majeure partie du SCR de CAP RE, est significativement plus élevé que les valeurs standard, le plaçant au-dessus du marché européen.

Conclusion

Ce mémoire a permis de questionner l'application de la Formule Standard à une captive de réassurance non-vie luxembourgeoise en calibrant, testant les différentes méthodes de calcul des USP (*Undertaking Specific Parameters*) proposées par les Actes Délégués (2015/35/CE).

Les USP ont permis d'évaluer les spécificités du profil de risque de la captive de réassurance en question, qui dispose d'un profil de risque peu diversifiée et concentrée sur les risques de la maison mère. La calibration des USP sur des données propres a permis de prendre en compte les caractéristiques des risques souscrit par rapport aux valeurs des paramètres de la formule standard, calibrée sur un portefeuille européen moyen.

L'approche USP requièrent une attention minutieuse et des justifications à chaque étape du processus. Il importe de vérifier la robustesse des hypothèses intrinsèques aux modèles et d'arguer quant à leurs utilisations et leurs caractères prudents. Ce processus implique également la démonstration de la fiabilité de la collecte, de la qualité et des retraitements des données propres à l'entité.

Pour l'évaluation du risque de primes, les méthodes Log-Normale et de la réassurance non proportionnelle ont été mises en œuvre. Quant au risque de réserve, l'analyse a été menée au moyen de la méthode Log-Normale et de celle des paiements incrémentaux de Merz-Wüthrich.

Les tests statistiques de validation des hypothèses par méthode ont été effectués sur un faible nombre de points de données, ce qui engendre un risque de fiabilité des résultats, notamment un risque accru d'erreur de type I, c'est-à-dire qu'une hypothèse vraie serait rejetée à tort. De surcroît, les tests statistiques élaborés dans ce mémoire sont sensibles aux valeurs aberrantes, ce qui peut impacter la robustesse des conclusions sur la validation des hypothèses.

L'utilisation des UPS sélectionnés par méthode entraîne une forte augmentation de l'écart-type du risque de primes et réserve de 10.05% à 31.15%. L'impact de l'utilisation des UPS est notable et conséquent sur le ratio de couverture du SCR qui diminue de 61.62%, pour atteindre 92.20%, inférieur au ratio de couverture minimum réglementaire de 100%.

Il ressort de cette étude que les USP pour la captive de réassurance induisent une augmentation totale des exigences en SCR par rapport à la Formule Standard, indiquant le positionnement de l'entité considérée est au-dessous des paramètres standard de marché, justifiant pleinement le recours à une approche sur mesure. Pour l'heure, le déploiement des USP dans le cadre du Pilier 1 n'est pas envisagé. Cette décision est justifiée par l'augmentation des besoins en capital qui en résulterait, ce qui irait à l'encontre de l'objectif de libération de fonds propres *in fine*. De plus, la charge de travail requise pour le processus d'approbation par le Commissariat aux Assurances rend cette option peu attrayante. En revanche, dans le cadre du Pilier 2, la mise en œuvre des USP est envisagée au sein du processus ORSA pour évaluer les spécificités du profil de risque de la captive par rapport à la Formule Standard.

La volatilité inhérente aux risques non assurables, peu diversifié, concentré sur les expositions spécifiques du groupe propriétaire fréquemment rencontrée au sein d'un schéma captif, complexifie l'application des USP. Ces risques, souvent caractérisés par une forte instabilité sur le marché conventionnel, compromettent la vérification en pratique des hypothèses sous-jacentes, complexifiant la validation des méthodes USP proposés par les Actes Délégués. Les données internes disponibles sont limitées, et l'absence de données de marché comparables, associée à une granularité insuffisante (par ligne d'activité plutôt que par sous-garantie), complexifie la modélisation des risques souscrits. L'influence du groupe propriétaire est également un défi supplémentaire, en effet, les USP doivent s'aligner sur la stratégie et toute modification d'activité (expansion géographique, nouveaux produits etc.) impacte directement le profil de risque. Enfin, un aléa moral potentiel peut surgir, incitant le groupe à transférer des risques de mauvaise qualité à la captive.

Ces éléments, bien que pris en compte dans l'analyse, suggèrent la nécessité d'une interprétation prudente des résultats présentés. Les USP gagnent en pertinence lorsque les risques sous-jacents affichent une moindre volatilité. Un exemple probant serait la construction d'un programme de rétrocession avec un

point d'attachement inférieur, ce qui aurait pour effet de réduire la volatilité à charge de la captive. L'opportunité d'adopter une approche USP ou un modèle interne (partiel ou complet) se présente pour les captives de taille significative, caractérisées par un portefeuille de risque à la fois diversifié, de faible complexité, à forte fréquence et faible sévérité, comme la flotte automobile du groupe ou de responsabilité civile.

Liste des Figures

Figure 1 - Ventilation du BSCR au 31.12.2024 avant diversification	19
Figure 2 - Ventilation du module SCR non-vie au 31.12.2024 avant diversification	19
Figure 3 - Structure des flux financiers d'une captive d'assurance	23
Figure 4 - Structure des flux financiers d'une captive de réassurance	23
Figure 5 - Evolution du nombre de captives dans le monde	29
Figure 6 - Répartition géographique de captives dans le monde	29
Figure 7 - Arborescence de la formule standard pour le SCR de Solvabilité 2	34
Figure 8 - Structure du risque de souscription en non-vie de la formule standard	35
Figure 9 - Périmètre d'application des USP	41
Figure 10 - Facteur de crédibilité pour les segments 1, 5 et 6	43
Figure 11 - Facteur de crédibilité pour les segments 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11 et 12	44
Figure 12 - Triangle des Best Estimate des provisions sinistres par année de survenance et de développement	47
Figure 13 - Triangle des paiements incrémentaux par année de survenance et de développement	48
Figure 14 - Schéma d'un traité de réassurance non-proportionnelle	52
Figure 15 - Triangle des Best Estimate par année de survenance et de développement pour le risque de réserve avec la méthode Log-Normale	55
Figure 16 - Triangle des paiements incrémentaux par année de survenance et de développement pour le risque de réserve avec la méthode Log-Normale	55
Figure 17 - Développement des sinistres vue avec DI	59
Figure 18 - Développement des sinistres vue avec DI + 1	59
Figure 19 - Triangle de paiements cumulés par année de survenance i et de développement j	60
Figure 20 - Triangle de paiements cumulés complété par la méthode de Chain-Ladder	65
Figure 21 - Primes ultimes par exercice	68
Figure 22 - Charge sinistre après 1 an en fonction des primes acquises - MAT Proportionnelle	74
Figure 23 - Charge sinistre après 1 an en fonction des primes acquises - PPD Proportionnelle	74
Figure 24 - Tests de proportionnalité pour les régressions (1) – risque de primes	76
Figure 25 - Tests de proportionnalité pour les régressions (2) – risque de primes	77
Figure 26 - Nuage de points des résidus de la régression (2)	77
Figure 27 - Lag-plot pour le risque de primes, MAT et PPD Proportionnelles	78
Figure 28 - Test de Durbin-Watson sur résidus, risque de primes Log-Normale	78
Figure 29 - QQ plots des résidus, risque de primes Log-Normale	79
Figure 30 - Tests de normalité de Shapiro-Wilk sur les résidus, risque de primes Log-Normale	79
Figure 31 - Tests d'homogénéité des résidus des résidus, risque de primes Log-Normale	80
Figure 32 - Ratios sinistres à primes par année de survenance, risque de primes Log-Normale	81
Figure 33 - Test de proportionnalité entre la variance de la charge des sinistres et les primes acquises	82
Figure 34 - Test de log-normalité de Z_t du risque de primes	83
Figure 35 - QQ-plot du logarithme des ratios sinistres à primes pour du risque de primes	84
Figure 36 - Fonction de vraisemblance – minimum locale pour le risque de primes.	85
Figure 37 - Tests de normalité de Shapiro-Wilk sur les résidus, Dommages et MAT Non Proportionnelles	90
Figure 38 - QQ-plot de la loi Log-Normale pour la méthode réassurance Non Proportionnelle	91
Figure 39 - Paiement incrémentaux MAT Proportionnelle	94
Figure 40 - Best Estimate MAT Proportionnelle	94
Figure 41 - Paiement incrémentaux PPD Proportionnelle	95
Figure 42 - Best Estimate PPD Proportionnelle	95
Figure 43 - Somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 en fonction du Best Estimate, MAT Proportionnelle	96
Figure 44 - Somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 en fonction du Best Estimate, PPD Proportionnelle	96
Figure 45 - Tests de proportionnalité pour les régressions (1) – risque de réserve	97

Figure 46 - Tests de proportionnalité pour les régressions (2) – risque de réserve.....	97
Figure 47 - Résultat de l'analyse graphique des résidus de la régression (2)	98
Figure 48 - Lag-plot pour le risque de réserve, MAT et PPD Proportionnelle	98
Figure 49 - Test de Durbin-Watson pour évaluer l'indépendance des résidus, risque de réserve Log- Normale.....	99
Figure 50 - QQ plots des résidus, risque de réserve Log-Normale.....	99
Figure 51 - Tests de normalité de Shapiro-Wilk sur les résidus, risque de réserve Log-Normale.....	99
Figure 52 - Tests d'homogénéité des résidus, risque de réserve Log-Normale	100
Figure 53 - Taux de boni-mali des réserves, risque de réserves Log-Normale.....	100
Figure 54 - Analyse des taux de boni-mali des réserves, risque de réserve Log-Normale.....	101
Figure 55 - Test de proportionnalité entre la variance de la somme des réserves et des paiements incrémentaux à horizon 1 an et le <i>Best Estimate</i>	101
Figure 56 - Test de log-normalité de Ztdu risque de réserve, MAT et PPD Proportionnelles.....	102
Figure 57 - QQ-plot du logarithme des ratios de liquidation des provisions sinistres Best Estimate, MAT et PPD Proportionnelle.....	102
Figure 58 - Fonction de vraisemblance – minimum locale pour le risque de réserve, MAT et PPD Proportionnelles.....	103
Figure 59 – Triangle des paiements cumulés, MAT Proportionnelle	107
Figure 60 - Triangle des paiements cumulés, PPD Proportionnelle	107
Figure 61 - Méthode de Chain Ladder appliquée aux paiements cumulés - MAT Proportionnelle	108
Figure 62 - Méthode de Chain Ladder appliquée aux paiements cumulés - PPD Proportionnelle	108
Figure 63 - MAT Proportionnelle - C-C plot des premières années de développement	109
Figure 64 - PPD Proportionnelle - C-C plot des premières années de développement	110
Figure 65 - MAT Proportionnelle - Régression linéaire des paiements cumulés entre deux années de développement successives	111
Figure 66 - PPD Proportionnelle - Régression linéaire des paiements cumulés entre deux années de développements successifs.....	112
Figure 67 - Facteur de développement individuels par année de survenance, MAT Proportionnelle	113
Figure 68 - Facteur de développement individuels par année de survenance, PPD Proportionnelle	114
Figure 69 - Résultat du test sur les effets calendaires pour MAT et PPD Proportionnelles.....	115
Figure 70 - Triangle facteurs de développement individuels branche MAT Proportionnelle	115
Figure 71 - Triangle facteurs de développement individuels branche PPD Proportionnelle	115
Figure 72 – Régression linéaire entre année de survenance et coefficient de passage, MAT et PPD Proportionnelles.....	116
Figure 73 - Test de tendance entre année de survenance et coefficient de passage	116
Figure 74 - MAT Proportionnelle - répartition des résidus en fonction des $C(i,j)$	117
Figure 75 - PPD Proportionnelle - répartition des résidus en fonction des $C(i,j)$	117

Liste des Tableaux

Tableau 1 - Programmes de souscription de CAP RE	18
Tableau 2 - Captive d'assurance versus captive de réassurance.....	25
Tableau 3 - Différences principales entre le Luxembourg et la France.....	28
Tableau 4 - Matrice de corrélation entre les modules de risque i et j de la formule standard	35
Tableau 5 - Coefficient de variations par type de risque et par segment d'activité	38
Tableau 6 - Liste des méthodes des Actes Délégués pour calibrer les USP	45
Tableau 7 - Risque de primes : notations de la méthode Log-Normale.....	47
Tableau 8 - Risque de primes : notations de la méthode de la réassurance non proportionnelle	51
Tableau 9 - Risque de réserve : notations de la méthode Log-Normale.....	54
Tableau 10 - Résumé de la qualité des données.....	72
Tableau 11 - Données MAT Proportionnelle.....	73
Tableau 12 - Données PPD Proportionnelle.....	73
Tableau 13 - Analyse des ratios sinistres à primes, risque de primes Log-Normale	81
Tableau 14 - Résumé de la validité des hypothèses du risque de primes de la méthode Log-Normale.	86
Tableau 15 -Résultat de la méthode Log-Normale pour le risque de primes	87
Tableau 16 - Tests de sensibilités de la méthode Log-Normale pour risque de primes – MAT Proportionnelle	87
Tableau 17 - Tests de sensibilités de la méthode Log-Normale pour risque de primes – PPD Proportionnelle	88
Tableau 18 - Résultat et impact des USP du risque de primes.....	88
Tableau 19 - Données Dommages et MAT Non proportionnelles	89
Tableau 20 - Résumé de la validité des hypothèses - méthode la réassurance non proportionnelle	91
Tableau 21 - Résultats de la méthode de la réassurance non proportionnelle	92
Tableau 22 - Résultats des tests de sensibilités de la réassurance non proportionnelle, MAT NP.....	92
Tableau 23 - Résultats des tests de sensibilités de la réassurance non proportionnelle, Dommages NP	93
Tableau 24 - Résultat et impact des USP de la méthode de réassurance non proportionnelle	93
Tableau 25 - Rt et Vt MAT Proportionnelle	95
Tableau 26 -- Rt et Vt PPD Proportionnelle	95
Tableau 27 - Résumé de la validité des hypothèses - risque de réserve de la méthode Log-Normale.....	104
Tableau 28 - Résultats de la méthode Log-Normale pour le risque de réserve, MAT et PPD Proportionnelles.....	105
Tableau 29 - Résultats des tests de sensibilités de la méthode Log-Normale pour risque de réserve, MAT Proportionnelle	105
Tableau 30 - Résultats des tests de sensibilités de la méthode Log-Normale pour risque de réserve, PPD Proportionnelle	106
Tableau 31 - Résultat et impact des USP du risque de réserve méthode Log-Normale	106
Tableau 32 - Résumé de la validité des hypothèses – méthode de Merz-Wüthrich	118
Tableau 33 - Résultats de la méthode Merz-Wüthrich, MAT et PPD Proportionnelle.....	119
Tableau 34 - Résultats des tests de sensibilités de la méthode Merz-Wüthrich, MAT Proportionnelle	119
Tableau 35 - Résultats des tests de sensibilités de la méthode Merz-Wüthrich, PPD Proportionnelle.....	120
Tableau 36 - Résultat et impact des USP du risque de réserve méthode Merz-Wüthrich	120
Tableau 37 - Synthèse validation des hypothèses par méthode USP	121
Tableau 38 - Méthode USP sélectionné par branche d'activité	121
Tableau 39 - Résultat et impact des USP sélectionnés.....	122

Bibliographie

Articles

- Thomas Mack (1993), Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates
- Thomas Mack (1993), Distribution-free calculation of the standard error of Chain Ladder reserve estimates.
- Michael Merz and Mario V.Wüthrich(2008), Modelling the claims development result for solvency purposes.
- Michael Merz and Mario V.Wüthrich (2015), Claims run-off uncertainty : the full picture.
- Groupe de travail Captive, Benchmark (2021), Institut des Actuaire.
- Groupe de travail Captives, Note technique (2021), Institut des Actuaire.

Mémoire

- Fabien Besseyre, Le calibrage des « Undertaking Specific Parameters » en Prévoyance, Mémoire CEA, 2015.
- Lucile BEAUNE, Estimate des paramètres de volatilité propres aux assureurs non-vie, Mémoire ENSAE, 2016.
- Cindy MULLER, Utilisation des USP dans le cadre de l'ORSA pour une mutuelle de santé, Mémoire DUAS, 2016.
- Leila WAMBA KENFACK, Analyse du risque de primes et réserves d'une mutuelle à l'aide des « Undertaking Specific Parameters » dans le cadre de l'ORSA, Mémoire ISFA, 2018.

Textes réglementaires

- EIOPA-14-322 (2014), The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation.
- Directive 2009/138/CE du Parlement Européen et du Conseil, 25 novembre 2009.
- Règlement Délégués (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014.
- Mémorial du Journal Officiel du Grand-Duché de Luxembourg, Recueil de législation, 6 décembre 2007.
- Règlement d'exécution (UE) 2015/498 de la commission du 24 mars 2015.
- Code des assurances, Edition 2022 10 02.

Autres documents

- Julien SAC, Marina PETIT & Michael DONIO (2016), Formule Standard & USP, Guide pratique des calculs Solvabilité II.

Annexes

Annexe 1 – Engagements d'assurance – lignes d'activité

A. Engagements d'assurance non-vie

- (1) Assurance des frais médicaux
- (2) Assurance de protection du revenu
- (3) Assurance d'indemnisation des travailleurs
- (4) Assurance de responsabilité civile automobile
- (5) Autre assurance des véhicules à moteur
- (6) Assurance maritime, aérienne et transport
- (7) Assurance incendie et autres dommages aux biens
- (8) Assurance de responsabilité civile générale
- (9) Assurance-crédit et cautionnement
- (10) Assurance de protection juridique
- (11) Assurance assistance
- (12) Assurance pertes pécuniaires diverses

B. Engagements de réassurance proportionnelle en non-vie

Les lignes d'activité 13 à 24 comprennent les engagements de réassurance proportionnelle qui portent sur les engagements visés respectivement aux lignes d'activité 1 à 12.

C. Engagements de réassurance non proportionnelle en non-vie

- (25) Réassurance santé non.
- (26) Réassurance accidents non proportionnelle
- (27) Réassurance maritime, aérienne et transport non proportionnelle
- (28) Réassurance dommages non proportionnelle

D. Engagements d'assurance vie

- (29) Assurance santé
- (30) Assurance avec participation aux bénéfices
- (31) Assurance indexée et en unités de compte
- (32) Autre assurance vie Engagements d'assurance vie autres que les engagements visés aux lignes d'activité 29 à 31, 33 et 34.
- (33) Rentes découlant des contrats d'assurance non-vie et liées aux engagements d'assurance santé
- (34) Rentes découlant des contrats d'assurance non-vie et liées aux engagements d'assurance autres que les engagements d'assurance santé

E. Engagements de réassurance vie

- (35) Réassurance santé
- (36) Réassurance vie

Annexe 2 – Matrice de corrélation pour le risque de primes et de réserve en non-vie

$s \backslash t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0,5	0,5	0,25	0,5	0,25	0,5	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25
2	0,5	1	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25
3	0,5	0,25	1	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,5	0,25
4	0,25	0,25	0,25	1	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,5	0,5
5	0,5	0,25	0,25	0,25	1	0,5	0,5	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25
6	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	1	0,5	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25
7	0,5	0,5	0,25	0,25	0,5	0,5	1	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25
8	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1	0,5	0,25	0,25	0,5
9	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	0,25	0,5	0,25
10	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	1	0,25	0,25
11	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	1	0,25
12	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	1

Annexe 3 – Nombre de captives dans le monde

Rank	Domicile	2024	2023
1	Vermont	683	659
2	Cayman Islands	670	658 ¹
3	Bermuda	631 ¹	633 ¹
4	Utah	462	439
5	North Carolina	293	311
6	Delaware	285	283 ²
7	Barbados	273	261 ²
8	Hawaii	272	263
9	South Carolina	231	221
10	Arizona	201	176
11	Guernsey	197 ¹	204 ^{1,2}
11	Luxembourg	197	195
13	Tennessee	175	165 ²
14	District of Columbia	132	120
15	Isle of Man	95	98
16	Montana	93	100
17	Nevada	92	100
18	Singapore	89	87
19	Texas	85	79
20	Turks & Caicos Islands	80	74
21	Labuan	77	69 ²
22	Nevis	70	94
23	Oklahoma	64	56
24	Dublin	61	63
25	Connecticut	59	53
26	Georgia	54	57
26	Missouri	54	55
28	Alabama	53	55 ²
29	Anguilla	45 ¹	53 ¹
30	British Virgin Islands	44 ¹	45
31	New York	39 ¹	37 ¹
32	Kentucky	34	32
33	Sweden	30	28
34	Alberta	29 ¹	17 ¹
35	Michigan	27	26
35	Switzerland	27 ¹	24 ¹
37	Federated States of Micronesia	25 ²	25
38	St. Lucia	22	23
39	New Jersey	20 ¹	20 ¹
40	British Columbia	19	19
40	France	19 ¹	13 ¹
42	Arkansas	17	16
42	Puerto Rico	17 ¹	20 ¹
44	South Dakota	15	15
45	Malta	13	11 ¹
46	Gibraltar	10	10
47	Bahamas	9	13
47	Germany	9	9
49	Norway	8	7 ²
49	Ohio	8	8
51	Colorado	7	6
51	Egypt	7 ¹	7 ¹
51	Liechtenstein	7	7
54	Curaçao	6	6
54	New Zealand	6 ¹	6 ¹
54	Panama	6 ¹	6 ¹
57	Denmark	5	6
58	Hong Kong	4	4
58	Nebraska	4	4
60	Guam	3	3
60	Maine	3	3
60	Vanuatu	3	5
60	Italy	3 ¹	2 ¹
64	Australia	2	2
64	Illinois	2	2
64	Jersey	2	2
64	Kansas	2	1
64	Mauritius	2	2
69	Dubai	1 ¹	4
69	U.S. Virgin Islands	1	1
71	West Virginia	0	1
	TOTAL	6,290	6,179

Annexe 4 – Textes Règlementaires

Article 104, Conception du capital de solvabilité requis de base, Paragraphe 7, Directive 2009/139/CE

7. Sous réserve de l'accord des autorités de contrôle, les entreprises d'assurance et de réassurance peuvent, lorsqu'elles calculent les modules « risque de souscription en vie », « risque de souscription en non-vie » et « risque de souscription en santé », remplacer, dans la conception de la formule standard, un sous-ensemble de ses paramètres par des paramètres qui sont propres à l'entreprise concernée.

Ces paramètres sont calibrés sur la base des données internes de l'entreprise concernée ou de données directement pertinentes pour les opérations de cette entreprise, sur la base de méthodes standardisées.

Avant de donner leur accord, les autorités de contrôle vérifient l'exhaustivité, l'exactitude et le caractère approprié des données utilisées.

Article 110, Écarts sensibles par rapport aux hypothèses qui sous-tendent le calcul selon la formule standard, Directive 2009/139/CE

Lorsqu'il n'est pas approprié de calculer le capital de solvabilité requis conformément à la formule standard, comme exposé à la sous-section 2, parce que le profil de risque de l'entreprise d'assurance ou de réassurance concernée s'écarte significativement des hypothèses qui sous-tendent le calcul selon cette formule, les autorités de contrôle peuvent, par décision motivée, exiger de l'entreprise concernée qu'elle remplace un sous-ensemble de paramètres utilisés dans le calcul selon la formule standard par des paramètres particuliers à cette entreprise au moment de calculer, conformément à l'Article 104, paragraphe 7, les modules « risque de souscription en vie », « risque de souscription en non-vie » et « risque de souscription en santé ». Ces paramètres particuliers sont calculés de façon à garantir que l'entreprise se conforme à l'Article 101, paragraphe 3.

Annexe 5 – Test statistique de Shapiro-Wilk

Le test statistique de Shapiro-Wilk est utilisé pour tester la normalité de données d'un échantillon $x_1, \dots, x_n$ et apporte de la robustesse pour des échantillons de petite taille [$n < 50$].

- **Statistique de test :** $SW = \frac{[\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)}]^2}{\sum_{i=1}^n [x_i - \bar{x}]^2}$
- **Région de rejet :** $R_{\alpha,n}(H_0) = (SW < SW_\alpha)$
- **Interprétation du test :** Si $SW_\alpha \in R_{\alpha,n}(H_0)$ on rejette l'hypothèse H_0 avec un risque d'erreur α et on déduit que les données ne s'écartent pas de l'hypothèse de normalité.

Avec les notations suivantes :

- $x_{(i)}$: Échantillon trié par ordre croissant
- a_i : La i -ème constante issue de la moyenne et de la matrice de variance-covariance des quantiles d'un échantillon suivant une loi normale de taille n .
- SW_α : Les valeurs critiques pour un échantillon de taille n associé à un risque α présente dans la table de Shapiro-Wilk.

Annexe 6 – Résultats risque de primes méthode Log-Normale

6 & 18 - Direct and Proportional Marine, Aviation					12 & 24 - Direct and Proportional Miscellaneous				
Delta	0				Delta	1			
Gamma	-0.341506366				Gamma	-2.169496715			
Average premium	7 388 993.25				Average premium	2 527 699.75			
To Minimize	0.93				To Minimize	13.38			
Sigma Est	41.06%				Sigma Est	2.96%			
t	Pi	zt	ut	0.5*.....	t	Pi	zt	ut	0.5*.....
1	2.544958	-0.777933253	-0.92297	-0.466	1	77.12929	-1.46967597	-3.63269	-1.689
2	2.701499	-0.335345463	-0.49177	-0.282	2	77.12929	-1.437934256	-3.60095	-1.925
3	2.462242	-0.446415386	-0.58485	-0.336	3	77.12929	-1.272965676	-3.43598	-1.896
4	2.620455	-1.774398186	-1.9251	0.921	4	77.12929	-1.533594437	-3.69661	-0.980
5	2.668186	-1.168342792	-1.32246	-0.241	5	77.12929	-1.237874356	-3.40089	-1.619
6	2.633476	-0.314701555	-0.46634	-0.248	6	77.12929	-1.426283369	-3.5893	-1.991
7	2.498554	-1.272162698	-1.41355	-0.116	7	77.12929	-1.223631442	-3.38665	-1.479
8	1.426446	0.720860376	0.729875	1.694	8	77.12929	-1.259767443	-3.42278	-1.803

Annexe 7 – Résultats risque de primes méthode réassurance non-proportionnelle

27 - Non-Proportional Marine, Aviation and Transportation Reinsurance		28 - Non-Proportional Property Reinsurance	
mu	9 253 617.09	mu	260 765.38
omega	194 680 012 467 129.00	omega	85 128 043 986.30
theta	15.63	theta	12.36
eta	0.91	eta	0.47
mu2	9 175 282.26	mu2	260 765.38
omega1	160 548 361 465 346.00	omega1	85 128 043 986.30
omega2	177 509 313 855 705.00	omega2	85 128 043 986.30
NP'	0.94	NP'	1.00

Annexe 8 – Résultats risque de réserve méthode Log-Normale

6 & 18 - Direct and Proportional Marine, Aviation					12 & 24 - Direct and Proportional Miscellaneous				
Delta	0				Delta	0			
Gamma	-1.535486199				Gamma	-1.673130873			
Average premium	9 102 749.26				Average premium	1 243 896.43			
To Minimize	6.70				To Minimize	7.36			
Sigma Est	29.38%				Sigma Est	37.87%			
t	Pi	zt	ut	0.5*.....	t	Pi	zt	ut	0.5*.....
1	7.660839	0.735183099	-0.73504	-0.099	1	7.051401	1.609437912	0.007215	2.396
2	24.17382	0.49747977	-1.01732	-1.073	2	23.56017	0.818391834	-0.83352	-1.357
3	36.20832	0.163564804	-1.35811	-1.473	3	32.98767	0.649258561	-1.00872	-1.724
4	24.56552	0.126467709	-1.38866	-1.271	4	33.45798	0.699352671	-0.95883	-1.753
5	14.13374	0.583202788	-0.91691	-0.655	5	36.28891	0.608317976	-1.05103	-1.679
6	27.12707	0.038981191	-1.47807	-0.780	6	34.81694	0.607371672	-1.0514	-1.662
7	20.53767	0.413470622	-1.09767	-1.345	7	34.0841	0.582628477	-1.07583	-1.577

Annexe 9 – Résultats risque de réserve méthode Merz-Wüthrich

Reserve (Chain-Ladder)	7 476 697.173	Reserve (Chain-Ladder)	1 869 412.924
MSEP	18 042 733 724 539.700	MSEP	79 270 886 606.904
RMSEP	4 247 673.92	RMSEP	281 550.86
Sigma Est	56.81%	Sigma Est	15.06%
Sigma Regulation	11.00%	Sigma Regulation	20.00%
Credibility Factor	81.00%	Credibility Factor	81.00%
Sigma Final	48.11%	Sigma Final	16.00%