

Mémoire présenté devant l'Université de Paris-Dauphine
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine
et l'admission à l'Institut des Actuaraires
le 24 mars 2025

Par : Papa Thiécouta DIALLO

Titre : Générateur de scénarios économiques non-paramétrique : modélisation avec réseaux de neurones sous mesures historique et risque-neutre

Confidentialité : ☒ Non ☐ Oui (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaraires :*

*Membres présents du Jury du Certificat
d'Actuaire de Paris-Dauphine :*

Entreprise :

Nom : Prim'Act

Signature :

PRIM'ACT SAS

42 av. de la Grande Armée

75017 PARIS

Tél. : 01 42 22 11 00

R.C.S. PARIS 791 352 784

Directeur de Mémoire en entreprise :

Nom : Frédéric PLANCHET

Signature :

*Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Secrétariat :

Bibliothèque :

Signature du responsable entreprise

PRIM'ACT SAS

42 av. de la Grande Armée

75017 PARIS

Tel. : 01 42 22 11 00

R.C.S. PARIS 791 352 784

Signature du candidat

Résumé

Dans le cadre des évaluations prudentielles exigées par la directive Solvabilité II, l'utilisation d'un Générateur de Scénarios Économiques (GSE) est devenue indispensable en assurance vie. Les GSE permettent de simuler des scénarios d'évolution des marchés financiers, influençant la valeur et les performances des actifs d'assurance.

En pratique, les assureurs utilisent deux types de GSE distincts : un pour le calcul du *Best Estimate* (BE) sous une mesure de risque neutre, et un autre pour l'*Own Risk and Solvency Assessment* (ORSA) et l'allocation stratégique, basé sur des données historiques.

Ce mémoire présente une approche novatrice qui utilise des réseaux de neurones pour concevoir un générateur de scénarios économiques non paramétrique unique capable de fonctionner sous deux mesures de probabilité : historique et risque neutre. L'objectif principal est de simplifier le processus en unifiant plusieurs outils en un seul, tout en garantissant la précision des projections. Cette approche s'appuie sur l'exploration des méthodes de *Machine Learning*, notamment le modèle de type RVFL, pour modéliser les facteurs de risque et introduire une méthode de neutralisation du risque.

En proposant une solution intégrée, ce mémoire vise à renforcer l'efficacité et la robustesse des évaluations actuarielles conformément aux exigences réglementaires en vigueur, tout en reconnaissant les défis pratiques liés à la cohérence entre les deux types de GSE

Mots-clés : Générateur de scénarios économiques, Probabilité historique, Réseaux de neurones RVFL, Risque neutre, Best Estimate.

Abstract

As part of the prudential evaluations required by the Solvency II directive, the use of an Economic Scenario Generator (ESG) has become essential in life insurance. ESGs enable the simulation of financial market evolution scenarios, influencing the value and performance of insurance assets.

In practice, insurers use two distinct types of ESGs: one for calculating the Best Estimate (BE) under a risk-neutral measure, and another for the Own Risk and Solvency Assessment (ORSA) and strategic allocation, based on historical data.

This thesis presents an innovative approach that uses neural networks to design a unique non-parametric economic scenario generator capable of operating under two probability measures: historical and risk-neutral. The main objective is to simplify the process by unifying several tools into one, while ensuring the accuracy of the projections. This approach leverages Machine Learning methods, particularly the RVFL model, to model risk factors and introduce a risk-neutralization method.

By proposing an integrated solution, this thesis aims to enhance the efficiency and robustness of actuarial evaluations in compliance with current regulatory requirements, while addressing practical challenges related to consistency between the two types of ESGs.

Keywords: Economic Scenario Generator; historical probability; RVFL neural networks; Risk-neutral; Best Estimate.

Note de Synthèse

Contexte

La directive Solvabilité II (SII), en vigueur depuis 2016, impose aux assureurs européens une gestion optimisée des risques financiers afin de garantir leur stabilité et la protection des assurés. Dans ce cadre, les Générateurs de Scénarios Économiques (GSE) constituent des outils fondamentaux pour simuler les évolutions des variables économiques et financières nécessaires à l'évaluation des engagements et des risques, notamment pour le calcul du *Best Estimate* (BE), du *Solvency Capital Requirement* (SCR) et de l'*Own Risk and Solvency Assessment* (ORSA). Ces modèles se répartissent en deux catégories : les GSE « risque-neutres », alignés sur les prix de marché, et les GSE « historiques », fondés sur des données empiriques pour représenter les dynamiques observées, y compris lors de périodes de stress.

Toutefois, les modèles paramétriques classiques utilisés dans la construction des GSE présentent des limites face à la complexité croissante des marchés financiers. Leur cadre structurel peut restreindre leur capacité à capturer les comportements non linéaires et extrêmes, en particulier dans des contextes de forte volatilité, soulevant ainsi des enjeux de flexibilité et de cohérence entre différentes mesures de probabilité.

Les avancées en *Machine Learning* offrent des solutions alternatives. Parmi elles, le modèle *Random Vector Functional Link* (RVFL) permet de modéliser des relations complexes entre variables sans recourir aux hypothèses paramétriques usuelles. Ce mémoire s'appuie sur cette approche avec deux objectifs : développer un GSE non paramétrique basé sur le RVFL pour produire des projections sous la probabilité historique et concevoir une méthode de neutralisation du risque permettant de transformer ces scénarios historiques en scénarios risque-neutres. Cette démarche vise à renforcer la pertinence des GSE tout en répondant aux exigences de SII et aux évolutions des marchés financiers.

Projection en univers monde réel

Avant d'appliquer le modèle RVFL, un prétraitement des séries temporelles multivariées a été réalisé afin d'assurer la cohérence des données. Ces séries, basées sur l'analyse des compositions d'actifs des assureurs français sous SII, portent sur deux facteurs de risque principaux : les taux zéro-coupon et les actions.

Série temporelle multivariée et présentation du modèle RVFL

Les indices de clôture du CAC40 et les taux swap EURIBOR 6M ont été sélectionnés pour représenter le marché actions français et la dynamique des taux. Les valeurs manquantes des indices ont été comblées par interpolation linéaire, suivie d'une conversion en rendements logarithmiques. Pour les taux, une transformation par bootstrapping a été appliquée afin d'obtenir des taux zéro-coupon

(ZC), réduits ensuite à trois composantes principales selon le modèle de Nelson-Siegel : le niveau, la pente et la courbure.

Ces séries, harmonisées avec une granularité mensuelle, couvrent une période de janvier 2001 à mai 2023. Cette étendue temporelle permet de mieux appréhender les dynamiques des facteurs de risque et d'entraîner le modèle RVFL sur des données diversifiées.

Le modèle RVFL est utilisé pour projeter ces séries temporelles. Il s'agit d'un réseau de neurones à propagation avant qui établit un lien direct entre les entrées et les sorties. Sa calibration repose sur une génération quasi-aléatoire des paramètres de la couche cachée et une régularisation Ridge. En comparaison avec des modèles plus complexes comme les LSTM ou les GAN, le RVFL offre un compromis entre simplicité et efficacité, en nécessitant un temps d'entraînement réduit.

Pour enrichir la projection centrale et garantir une diversité de scénarios, la méthode de *Block Bootstrap* est employée. Cette technique consiste à ajouter des résidus, correspondant aux écarts entre les valeurs observées et prédites, en les réorganisant sous forme de blocs ajustés de manière aléatoire. Cette approche permet de conserver les caractéristiques structurelles des données tout en intégrant une variabilité supplémentaire, répondant ainsi aux exigences des GSE.

Une analyse comparative a été menée pour évaluer les performances du modèle RVFL par rapport aux modèles VAR, ARIMA et LSTM. La série temporelle a été divisée en deux échantillons : un ensemble d'apprentissage représentant 75% des données et un ensemble de test de 25%. Les modèles ont été évalués à l'aide de deux indicateurs : l'erreur quadratique moyenne (RMSE) et l'erreur absolue moyenne (MAE). Ces mesures ont été appliquées aux rendements logarithmiques des actions et au taux long issu de la méthode de Nelson-Siegel. Les résultats du tableau 1 indiquent que le modèle RVFL présente des performances satisfaisantes par rapport aux autres approches, avec des erreurs plus faibles sur les deux variables analysées.

Modèles	VAR		ARIMA		LSTM		RVFL	
Mesure d'erreur	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE
Action	4,71	5,85	4,04	5,33	4,25	5,57	4,20	5,30
Taux long	0,74	0,90	0,92	1,15	0,31	0,37	0,28	0,34

TABLE 1 : Métriques d'erreur pour l'action et le taux long (*Out-of-sample*).

Résultats des projections historiques

Le modèle RVFL a affiché des performances satisfaisantes en termes de précision sur l'échantillon de test, optimisées grâce à une validation croisée des hyperparamètres. Après calibration, il a été utilisé pour projeter la série temporelle multivariée (STM) sur un horizon de 20 ans, avec une fréquence mensuelle et la génération de 1 000 scénarios grâce au *Block Bootstrap*.

L'évaluation de la qualité des projections repose sur une comparaison des trajectoires simulées avec la distribution des quantiles du prix d'action issue d'un modèle paramétrique de type Black-Scholes. Les résultats, présentés dans le tableau 2, indiquent une variance plus élevée pour le modèle non paramétrique RVFL, traduisant une plus grande dispersion des trajectoires générées.

Afin de compléter cette analyse, une comparaison avec le modèle LSTM a également été réalisée, comme illustré par la figure 1. Le modèle RVFL génère des trajectoires plus dispersées, traduisant une plus grande variabilité, tandis que le LSTM produit des trajectoires plus lissées, probablement en raison de son mécanisme de mémoire et de son apprentissage des tendances sous-jacentes.

α	0.5%	1%	5%	95%	99%	99.5%
VaR RVFL Prix à 1 an	98,50	100,75	110,00	144,50	153,75	155,30
VaR BS Prix à 1 an	113,42	114,15	117,72	138,42	143,97	145,26

TABLE 2 : Comparaison des *Value-at-Risk* des prix d’actions pour différents niveaux de confiance sur un horizon d’un an

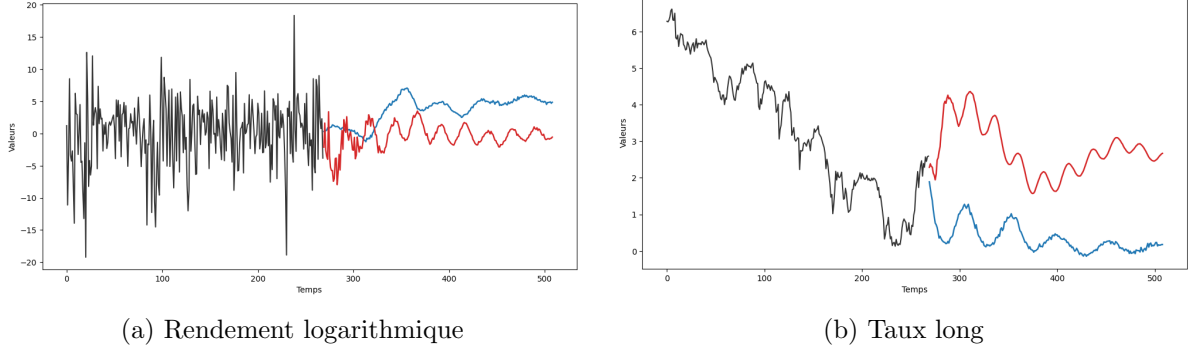


FIGURE 1 : Comparaison des projections du modèle RVFL (en rouge) et LSTM (en bleu) pour le scénario central

En synthèse, le modèle RVFL présente une bonne capacité d’adaptation aux dynamiques historiques et offre une représentation plus diversifiée des trajectoires financières. Ces projections serviront de fondement pour l’élaboration de scénarios risque-neutres en conformité avec les exigences réglementaires.

Projection en univers risque-neutre

Cette section présente la méthodologie employée pour convertir les projections établies sous la probabilité historique en projections sous la probabilité risque-neutre, conformément aux exigences de SII. L’approche retenue intègre deux principaux facteurs de risque : le rendement des actions et les taux zéro-coupon.

Modélisation risque-neutre des projections historiques

Pour le CAC 40, la transformation en univers risque-neutre repose sur deux étapes essentielles. Tout d’abord, les rendements historiques $\psi(t)$ sont modifiés afin d’éliminer tout biais dans l’actualisation des prix, garantissant ainsi le respect de la propriété de martingalité. Ensuite, un paramètre β est estimé pour ajuster les rendements transformés $\psi_{adj}(t)$ et aligner les prix des options sur ceux obtenus via le modèle de Black-Scholes. Cette calibration permet de reproduire fidèlement les prix des options vanille à un an à la monnaie, conformément aux recommandations de ACPR (2013). Le rendement final sous la mesure risque-neutre est alors défini par $\psi_{RN}(t) = \psi_{adj}(t) \times \beta$.

Pour les taux zéro-coupon (ZC), la transformation en univers risque-neutre suit un processus en trois étapes. D’abord, les taux sont reconstitués à partir des composantes du modèle de Nelson-Siegel appliqué aux projections du modèle RVFL, noté $R(t, T)$ pour l’instant t et la maturité T . Ensuite, les taux projetés $R(t, T)$ sont ajustés pour s’aligner, en moyenne, sur le taux sans risque (ici celui de l’EIOPA), assurant ainsi une cohérence préalable avec l’univers risque-neutre. Les taux ajustés sont

notés $R_{adj}(t, T)$. Enfin, un paramètre $\alpha(t)$ est introduit pour ajuster la variance du modèle et refléter la volatilité du marché, garantissant ainsi que les prix des swaptions modélisés restent cohérents avec les prix observés sur le marché. La projection finale des taux est obtenue par $R_{RN}(t, T) = R_{adj}(t, T) \times \alpha(t)$. Une validation des hypothèses de martingalité et de cohérence avec les conditions de marché sera ensuite réalisée afin de s'assurer de la pertinence des projections obtenues.

Tests de martingalité

Dans un cadre risque-neutre, les actifs actualisés doivent suivre une trajectoire de martingale, garantissant ainsi l'absence d'opportunités d'arbitrage. En d'autres termes, les prix actualisés doivent respecter cette propriété conformément à la construction risque-neutre établie précédemment. Les tests de martingalité appliqués aux actions et aux taux sont définis par les équations suivantes :

$$\forall t, \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(240, j) \times \text{Indice}(240, j) = 1 \quad \text{et} \quad \forall t, \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(t, j) - B\left(0, \frac{t}{12}\right) = 0,$$

où L représente le nombre de simulations, j le numéro de la simulation, t les instants de projection et $B\left(0, \frac{t}{12}\right)$ le prix du taux zéro-coupon à la maturité $\frac{t}{12}$, calculé à partir des taux initiaux.

Les résultats indiquent que les actifs actualisés respectent globalement la propriété de martingalité sous la mesure $\mathbb{Q}$. Toutefois, des écarts significatifs sont observés en comparaison avec des modèles paramétriques tels que Hull-White pour les taux et Black-Scholes pour les actions. Ces différences suggèrent que, bien que la construction risque-neutre soit globalement cohérente, des ajustements pourraient être envisagés pour améliorer l'alignement avec les modèles standards.

Test de *market-consistency*

Les tests de *market-consistency* évaluent l'adéquation des projections risque-neutres aux prix de marché en comparant les rendements ajustés et les taux calibrés. Une validation approfondie de cette cohérence est essentielle pour garantir la pertinence des modèles de valorisation des actifs financiers et des passifs d'assurance.

Le tableau 3 présente une comparaison des prix des options *call* et *put* à 12 mois entre le modèle RVFL ajusté et le modèle de Black-Scholes (BS). Les résultats montrent que les prix obtenus avec le modèle RVFL restent très proches de ceux générés par Black-Scholes, avec des écarts de l'ordre de 10^{-3} . Cette proximité atteste de la capacité du modèle RVFL à reproduire les prix observés sur le marché, confirmant ainsi la précision du calibrage des rendements ajustés.

Prix	Modèle RVFL	Modèle BS
<i>Call</i>	7,757	7,766
<i>Put</i>	5,435	5,449

TABLE 3 : Comparaison des prix des options entre le modèle RVFL et le modèle BS à 12 mois.

En complément, le graphique 2 illustre la comparaison des prix des swaptions obtenus via le modèle calibré avec ceux observés sur le marché. L'alignement des courbes indique que le modèle parvient à capturer la structure de la volatilité et des facteurs de risque associés aux swaptions, avec des écarts faibles entre les deux séries de prix. Cette correspondance démontre que les taux calibrés respectent la dynamique de marché et offrent une représentation cohérente des conditions financières.

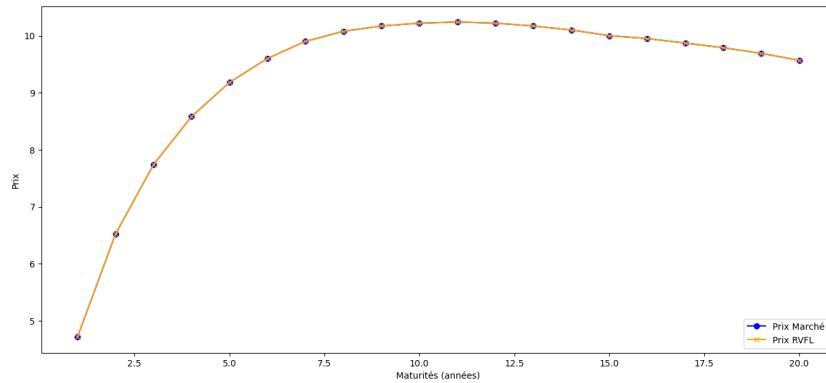


FIGURE 2 : Comparaison entre les prix du modèle et les prix de marché après ajustement.

L'ensemble de ces résultats valide la calibration du modèle et souligne sa pertinence dans la valorisation des produits dérivés. La cohérence obtenue renforce la qualité des projections utilisées pour le calcul du BE, élément fondamental pour l'évaluation des engagements d'assurance sous SII. Cette précision dans la calibration contribue à une gestion optimisée des risques et une évaluation plus détaillée des actifs et passifs dans un cadre réglementaire strict.

Application : *Best Estimate* pour un contrat d'épargne en euros

Hypothèses générales

Le calcul du BE s'appuie sur l'outil SimBEL (PRIM'ACT, 2020), développé par Prim'Act, permettant de modéliser les flux financiers et les engagements futurs. Les risques liés aux actions et aux taux sont pris en compte, tandis que les autres risques sont intégrés via les projections du générateur de scénarios économiques (GSE) de Prim'Act.

Le portefeuille d'actifs est constitué de 63 % d'obligations sans risque, 20 % d'actions, 10 % d'immobilier et 7 % d'actifs monétaires, reflétant une approche prudente. Le portefeuille d'épargne comprend des contrats en euros avec une provision mathématique de 60 millions d'euros. Les hypothèses retenues incluent un taux minimum garanti de 0,5 %, une participation aux bénéfices de 90 %, des frais sur prestations de 3 % et un taux de chargement de 0,5 %, garantissant ainsi une modélisation cohérente avec les pratiques du marché.

Bilan des résultats

Le tableau 4 compare les estimations du BE et de la *Time Value of Options and Guarantees* (TVOG), montre que le GSE RVFL présente un BE inférieur à celui de Prim'Act, indiquant une approche plus sensible aux dynamiques complexes des engagements. La TVOG est plus élevée dans le modèle RVFL, traduisant une volatilité accrue dans la valorisation des options et garanties. Ces observations soulignent l'importance d'une analyse complémentaire à travers des tests de robustesse plus poussés, notamment en soumettant les modèles à des chocs sur les paramètres financiers et démographiques.

Modèle	BE	TVOG
GSE RVFL	63 474 158,92	2 689 745,81
GSE de Prim'Act	64 429 527,00	2 373 769,22
Écart relatif	1,5%	13,31%

TABLE 4 : Comparaison du BE et de la TVOG (en €)

Analyse de sensibilité aux chocs

Afin d'évaluer la sensibilité des modèles aux événements extrêmes, différents chocs ont été appliqués. Le tableau 5 présente l'impact de ces chocs sur le BE pour le GSE RVFL et GSE de Prim'Act.

Choc	BE RVFL	BE de Prim'Act	TVOG RVFL	TVOG de Prim'Act
Frais	63 847 512	64 070 869	529 874	554 437
Mortalité	64 248 365	64 421 307	418 652	458 377
Longévité	64 229 758	64 417 799	392 841	439 643
Rachat massif	63 597 823	63 841 899	213 578	224 203
Action	64 894 125	65 755 074	819 562	844 643
Immobilier	64 876 438	65 091 781	629 214	647 470
Spread	65 358 496	65 942 312	715 872	748 545

TABLE 5 : Impacts des chocs sur le BE et la TVOG (en €)

Les résultats montrent que le GSE de Prim'Act, fondé sur des hypothèses paramétriques éprouvées, assure une meilleure résilience face aux scénarios de stress. À l'inverse, le GSE RVFL, bien que plus flexible dans la capture des dynamiques complexes, présente une sensibilité accrue aux variations des marchés financiers et aux actifs volatils. Ces écarts s'expliquent par la nature du GSE RVFL, basé sur un réseau de neurones, intègre des dynamiques non linéaires qui peuvent amplifier les variations extrêmes des paramètres d'entrée. Le GSE RVFL, bien qu'innovant, pourrait être davantage adapté à des analyses exploratoires ou à des produits complexes nécessitant une modélisation fine des dynamiques non linéaires. Cependant, son utilisation nécessite des tests de robustesse approfondis pour mieux comprendre ses limites.

Conclusion

Ce mémoire a mis en évidence la capacité du modèle RVFL à générer des projections historiques pertinentes et à les transformer en scénarios risque-neutres conformes aux exigences de marché et aux principes de martingalité. L'évaluation du BE et de la TVOG a montré que cette approche fournit des résultats comparables aux méthodes établies, soulignant ainsi son potentiel pour la modélisation financière.

Des pistes d'amélioration peuvent être explorées, notamment l'intégration de facteurs de risque supplémentaires, l'étude de modèles plus avancés comme les réseaux antagonistes génératifs (GAN), l'optimisation des méthodes de calibration et l'ajout du calcul du *Solvency Capital Requirement* (SCR). Ces évolutions permettraient d'accroître la flexibilité et la pertinence du modèle dans un contexte de modélisation financière en constante évolution.

Synthesis note

Context

The Solvency II (SII) directive, in force since 2016, requires European insurers to optimize financial risk management to ensure their stability and the protection of policyholders. In this context, Economic Scenario Generators (ESG) are fundamental tools for simulating the evolution of economic and financial variables necessary for assessing liabilities and risks, particularly for the calculation of the Best Estimate (BE), Solvency Capital Requirement (SCR), and Own Risk and Solvency Assessment (ORSA). These models fall into two categories: “risk-neutral” ESGs, aligned with market prices, and “historical” ESGs, based on empirical data to represent observed dynamics, including during periods of stress.

However, traditional parametric models used in ESG construction have limitations when faced with the increasing complexity of financial markets. Their structural framework may restrict their ability to capture nonlinear and extreme behaviors, particularly in highly volatile environments, raising issues of flexibility and consistency across different probability measures.

Advancements in Machine Learning offer alternative solutions. Among them, the Random Vector Functional Link (RVFL) model enables the modeling of complex relationships between variables without relying on traditional parametric assumptions. This study adopts this approach with two main objectives: to develop a non-parametric ESG based on RVFL for generating projections under historical probability and to design a risk-neutralization method to transform these historical scenarios into risk-neutral scenarios. This approach aims to enhance the relevance of ESGs while meeting SII requirements and adapting to the evolving financial markets.

Projection in the Real-World Framework

Before applying the RVFL model, a preprocessing of multivariate time series was performed to ensure data consistency. These series, based on the analysis of asset compositions of French insurers under SII, focus on two main risk factors: zero-coupon rates and equities.

Multivariate Time Series and Presentation of the RVFL Model

The closing indices of the CAC40 and EURIBOR 6M swap rates were selected to represent the French equity market and interest rate dynamics. Missing values in the equity indices were filled using linear interpolation, followed by conversion into log returns. For interest rates, a bootstrapping method was applied to derive zero-coupon rates (ZC), which were then reduced to three principal components based on the Nelson-Siegel model: level, slope, and curvature.

These time series, harmonized with a monthly granularity, cover the period from January 2001 to May 2023. This extended timeframe enables a better understanding of risk factor dynamics and allows the RVFL model to be trained on a diverse dataset.

The RVFL model is used to project these time series. It is a feedforward neural network that directly links inputs to outputs. Its calibration is based on quasi-random generation of hidden layer parameters and Ridge regularization. Compared to more complex models such as LSTM or GANs, RVFL provides a balance between simplicity and efficiency, requiring less training time.

To enhance the central projection and ensure scenario diversity, the Block Bootstrap method is employed. This technique incorporates residuals between observed and predicted data, reorganized into randomly adjusted blocks. This approach preserves the structural characteristics of historical data while introducing additional variability, thus meeting ESG requirements.

Comparative Analysis of the RVFL Model

A comparative analysis was conducted to assess the performance of the RVFL model against VAR, ARIMA, and LSTM models. The time series was divided into two subsets: a training set representing 75% of the data and a test set with the remaining 25%. The models were evaluated using two metrics: root mean square error (RMSE) and mean absolute error (MAE). These metrics were applied to the log returns of equities and the long-term interest rate derived from the Nelson-Siegel method. The results in Table 6 indicate that the RVFL model performs competitively compared to other approaches, achieving lower errors on both variables analyzed.

Models	VAR		ARIMA		LSTM		RVFL	
Error Metric	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE
Equity	4.71	5.85	4.04	5.33	4.25	5.57	4.20	5.30
Long-term Rate	0.74	0.90	0.92	1.15	0.31	0.37	0.28	0.34

Table 6: Error metrics for equity and long-term rate (Out-of-sample).

Historical Projection Results

The RVFL model demonstrated satisfactory performance in terms of accuracy on the test sample, optimized through hyperparameter cross-validation. After calibration, it was employed to project the multivariate time series (MTS) over a 20-year horizon, with a monthly frequency and the generation of 1,000 scenarios using the Block Bootstrap method.

The quality of the projections was assessed by comparing the simulated trajectories with the quantile distribution of the stock price obtained from a parametric Black-Scholes model. The results, presented in Table 7, indicate a higher variance for the non-parametric RVFL model, reflecting greater dispersion in the generated trajectories.

α	0.5%	1%	5%	95%	99%	99.5%
VaR RVFL Price at 1 Year	98.50	100.75	110.00	144.50	153.75	155.30
VaR BS Price at 1 Year	113.42	114.15	117.72	138.42	143.97	145.26

Table 7: Comparison of *Value-at-Risk* for stock prices at different confidence levels over a one-year horizon.

To further refine this analysis, a comparison with the LSTM model was also conducted, as illustrated in Figure 3. The RVFL model generates more dispersed trajectories, indicating greater variability, whereas the LSTM model produces smoother projections, likely due to its memory mechanism and ability to learn underlying trends.

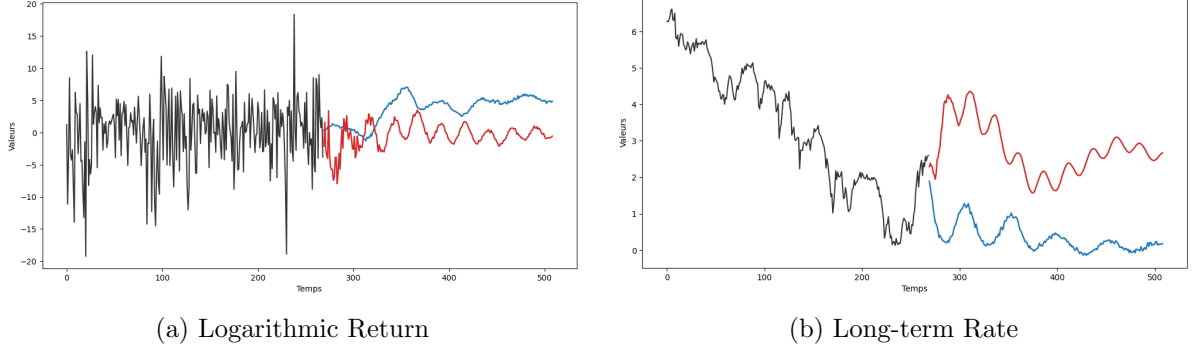


Figure 3: Comparison of RVFL model projections (in red) and LSTM (in blue) under the central scenario.

In summary, the RVFL model demonstrates strong adaptability to historical dynamics and provides a more diversified representation of financial trajectories. These projections will serve as a foundation for developing risk-neutral scenarios in compliance with regulatory requirements.

Projection in the Risk-Neutral Framework

This section presents the methodology used to convert projections established under historical probability into risk-neutral projections, in accordance with SII requirements. The selected approach incorporates two main risk factors: equity returns and interest rates.

Risk-Neutral Modeling of Historical Projections

For the CAC 40, the transformation into a risk-neutral framework relies on two key steps. First, historical returns $\psi(t)$ are adjusted to eliminate any bias in price discounting, ensuring compliance with the martingale property. Then, a parameter β is estimated to adjust the transformed returns $\psi_{adj}(t)$ and align option prices with those obtained using the Black-Scholes model. This calibration ensures an accurate reproduction of vanilla option prices at a one-year horizon, in line with ACPR (2013) recommendations. The final return under the risk-neutral measure is then defined as $\psi_{RN}(t) = \psi_{adj}(t) \times \beta$.

For zero-coupon rates (ZC), the transformation follows a three-step process. First, rates are reconstructed from the components of the Nelson-Siegel model applied to RVFL model projections, denoted as $R(t, T)$ at time t and maturity T . Next, the projected rates $R(t, T)$ are adjusted to align, on average, with the risk-free rate, ensuring preliminary consistency with the risk-neutral framework. The adjusted rates are denoted as $R_{adj}(t, T)$. Finally, a parameter $\alpha(t)$ is introduced to adjust model variance and reflect observed market volatility, ensuring that the modeled swaption prices remain consistent with market prices. The final projection of rates is given by $R_{RN}(t, T) = R_{adj}(t, T) \times \alpha(t)$. A validation of the martingale property and market consistency assumptions will then be conducted to ensure the relevance of the obtained projections.

Martingale Tests

In a risk-neutral framework, discounted assets must follow a martingale trajectory, ensuring the absence of arbitrage opportunities. In other words, discounted prices must satisfy this property in accordance with the previously established risk-neutral construction. The martingale tests applied to equities and interest rates are defined by the following equations:

$$\forall t, \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{deflator}(240, j) \times \text{Index}(240, j) = 1 \quad \text{et} \quad \forall t, \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{deflator}(t, j) - B\left(0, \frac{t}{12}\right) = 0,$$

where L represents the number of simulations, j the simulation index, t the projection time steps, and $B\left(0, \frac{t}{12}\right)$ the zero-coupon bond price at maturity $\frac{t}{12}$, computed from initial zero-coupon rates.

The results indicate that discounted assets generally comply with the martingale property under measure $\mathbb{Q}$. However, significant deviations are observed when compared to parametric models such as Hull-White for interest rates and Black-Scholes for equities. These differences suggest that while the risk-neutral construction is broadly consistent, further adjustments could enhance alignment with standard models.

Market-Consistency Test

Market-consistency tests assess the adequacy of risk-neutral projections by comparing adjusted returns and calibrated interest rates to market prices. A thorough validation of this consistency is essential to ensure the reliability of asset valuation models and insurance liabilities.

Table 8 presents a comparison of call and put option prices at a 12-month horizon between the adjusted RVFL model and the Black-Scholes (BS) model. The results show that the prices obtained with the RVFL model closely match those generated by Black-Scholes, with discrepancies in the order of 10^{-3} . This proximity confirms the RVFL model's ability to reproduce observed market prices, thereby validating the accuracy of return calibration.

Price	RVFL Model	BS Model
Call	7,757	7,766
Put	5.435	5.449

Table 8: Comparison of option prices between the RVFL model and the BS model at 12 months.

Additionally, Figure 4 illustrates the comparison of swaption prices obtained from the calibrated model with those observed in the market. The alignment of the curves indicates that the model captures volatility structure and risk factors associated with swaptions, with minimal discrepancies between the two price series. This consistency demonstrates that the calibrated rates align with market dynamics and provide a coherent representation of financial conditions.

These results validate the model calibration and highlight its relevance in derivative pricing. The obtained consistency strengthens the quality of projections used for BE calculation, a fundamental component in the evaluation of insurance liabilities under Solvency II. This level of precision in calibration contributes to optimized risk management and a more detailed assessment of assets and liabilities within a stringent regulatory framework.

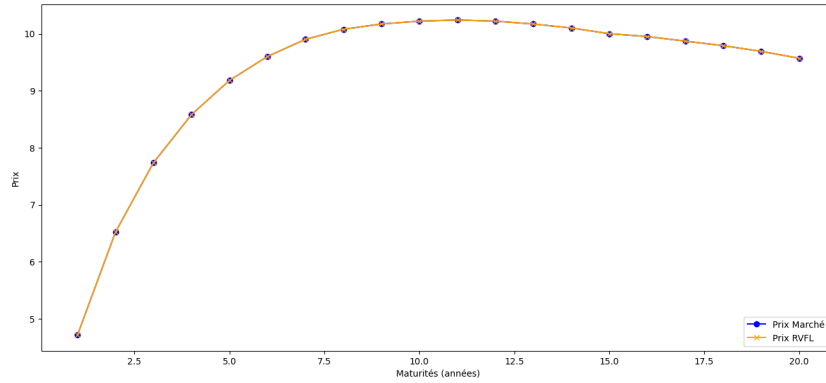


Figure 4: Comparison between model prices and market prices after adjustment.

Application: Best Estimate for a Euro Savings Contract

General Assumptions

The calculation of the BE is based on the SimBEL tool (PRIM'ACT, 2020), developed by Prim'Act, which models financial flows and future commitments. Equity and interest rate risks are accounted for, while other risks are incorporated through projections from Prim'Act's Economic Scenario Generator (ESG).

The asset portfolio consists of 63% risk-free bonds, 20% equities, 10% real estate, and 7% monetary assets, reflecting a conservative approach. The savings portfolio includes euro-denominated contracts with a mathematical provision of 60 million euros. The main assumptions include a minimum guaranteed rate of 0.5%, a profit-sharing rate of 90%, benefit fees of 3%, and a loading rate of 0.5%, ensuring consistency with market practices.

Comparison of Results Between RVFL and Prim'Act Models

Table 9 compares the estimates of the BE and the Time Value of Options and Guarantees (TVOG). It shows that the GSE RVFL model presents a lower BE than Prim'Act, indicating a greater sensitivity to the complex dynamics of liabilities. The TVOG is higher in the RVFL model, reflecting increased volatility in the valuation of options and guarantees. These observations highlight the importance of a complementary analysis through more in-depth robustness tests, particularly by subjecting the models to shocks on financial and demographic parameters.

Model	BE (in €)	TVOG (in €)
GSE RVFL	63,474,158.92	2,689,745.81
GSE of Prim'Act	64,429,527.00	2,373,769.22
Relative difference	1.5%	13.31%

Table 9: Comparison of BE and TVOG between RVFL and Prim'Act models.

Sensitivity Analysis to Shocks

To assess the sensitivity of the models to extreme events, various shocks were applied. Table 10 presents the impact of these shocks on the BE for the GSE RVFL and GSE of Prim'Act.

Shock	BE RVFL	BE of Prim'Act	TVOG RVFL	TVOG of Prim'Act
Expenses	63,847,512	64,070,869	529,874	554,437
Mortality	64,248,365	64,421,307	418,652	458,377
Longevity	64,229,758	64,417,799	392,841	439,643
Mass Lapse	63,597,823	63,841,899	213,578	224,203
Equity	64,894,125	65,755,074	819,562	844,643
Real Estate	64,876,438	65,091,781	629,214	647,470
Spread	65,358,496	65,942,312	715,872	748,545

Table 10: Impact of shocks on BE and TVOG (in €)

The results show that Prim'Act's GSE, based on well-established parametric assumptions, ensures greater resilience to stress scenarios. In contrast, the GSE RVFL, while more flexible in capturing complex dynamics, exhibits increased sensitivity to financial market variations and volatile assets. These differences stem from the nature of the GSE RVFL, which, being based on a neural network, integrates nonlinear dynamics that can amplify extreme variations in input parameters. While innovative, the GSE RVFL may be better suited for exploratory analyses or complex products requiring a refined modeling of nonlinear dynamics. However, its use necessitates thorough robustness tests to better understand its limitations.

Conclusion

This thesis has highlighted the ability of the RVFL model to generate relevant historical projections and transform them into risk-neutral scenarios that comply with market requirements and the principles of martingality. The evaluation of the BE and TVOG demonstrated that this approach provides results comparable to established methods, thereby underscoring its potential for financial modeling.

Several avenues for improvement can be explored, including the integration of additional risk factors, the study of more advanced models such as Generative Adversarial Networks (GANs), the optimization of calibration methods, and the inclusion of the Solvency Capital Requirement (SCR) calculation. These developments would enhance the model's flexibility and relevance in an ever-evolving financial modeling landscape.

Remerciements

Ce mémoire n'aurait jamais pu voir le jour sans le soutien indéfectible et les précieux enseignements qui m'ont été offerts. C'est avec une profonde gratitude que je tiens à exprimer mes remerciements à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma plus sincère reconnaissance à Monsieur Frédéric PLANCHET, associé chez Prim'Act et tuteur de ce mémoire, pour avoir proposé un sujet aussi innovant. Son accompagnement et ses conseils avisés ont été des soutiens inestimables tout au long de la rédaction.

Mes remerciements s'adressent également à l'Université Paris Dauphine, dont la qualité des enseignements a été une base solide pour la réalisation de ce travail. Je remercie tout particulièrement Monsieur Quentin GUIBERT, dont l'accompagnement rigoureux et bienveillant a grandement facilité l'aboutissement de ce mémoire.

Je souhaite également exprimer ma gratitude envers le cabinet Prim'Act, dont l'accueil chaleureux et l'environnement stimulant ont rendu ce stage particulièrement formateur. Je remercie notamment Monsieur Paul DE ARCE et Madame Lucie AUBERT-LASSARADE pour leurs conseils avisés, leur disponibilité, ainsi que leurs précieuses relectures, qui ont permis d'affiner ce travail.

Je tiens aussi à remercier l'INSA Rouen Normandie et sa formation en mathématiques appliquées, qui m'a permis de suivre un parcours double cursus en actuariat, et sans laquelle je n'aurais pu acquérir les compétences nécessaires à ce projet.

Enfin, je souhaite adresser des remerciements tout particuliers à mes amis, dont l'aide et les nombreuses relectures ont grandement contribué à la qualité de ce mémoire.

Je dédie ce mémoire à ma famille, et tout particulièrement à ma mère, pour leur soutien sans faille et leurs encouragements constants, tant dans ma scolarité que dans ma vie personnelle. Leur appui a été une source inestimable de motivation tout au long de ce parcours.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	4
Note de Synthèse	5
Synthesis note	11
Remerciements	17
Table des matières	19
Glossaire	21
Introduction	23
1 Contexte et généralités sur les GSE	25
1.1 GSE : un outil clé dans le cadre de la directive Solvabilité II	25
1.2 GSE : concepts et approches probabilistes	30
1.3 Revue des modèles de <i>Machine Learning</i> et <i>Deep Learning</i>	36
1.4 Modèle RVFL et facteurs de risque : une vue d'ensemble	40
2 Projections en univers monde réel	45
2.1 Retraitement et analyse des données	45
2.2 Mise en œuvre du GSE-RVFL historique	50
2.3 Description des modèles concurrents	55
2.4 Analyse prédictive	58
2.5 Projection historique du RVFL	64
3 Projections en univers risque-neutre	73
3.1 Approche pour les projections risque-neutres	73

3.2	Évaluation des projections	82
4	Application : évaluation de <i>Best Estimate</i>	93
4.1	Cadre général et hypothèses utilisées	93
4.2	Calcul de <i>Best Estimate</i>	97
4.3	Bilan des résultats	101
4.4	Limites de l'étude et perspectives	104
	Conclusion	107
	Bibliographie	109
A	Annexes	115
A.1	La mesure d'erreur <i>Scaled Pinball Loss</i> (SPL)	115
A.2	Exemple illustratif du procédé du <i>Block Bootstrap</i>	116
A.3	Éléments des swaptions	118
A.4	Test de la variance des rendements	122

Glossaire

- **ACPR** : Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution
 - **AOA** : Absence d'opportunités d'arbitrage
 - **BE** : Best Estimate
 - **CAC** : Cotation Assistée en Continu
 - **DL** : Deep Learning
 - **EIOPA** : European Insurance and Occupational Pensions Authority
 - **EURIBOR** : Euro Interbank Offer Rate
 - **GAN** : Generative Adversarial Networks
 - **GSE** : Générateur de scénarios économiques
 - **IFRS** : International Financial Reporting Standards
 - **LSTM** : Long Short-Term Memory
 - **ML** : Machine Learning
 - **ORSA** : Own Risk and Solvency Assessment
 - **RN** : Risque-Neutre
 - **RVFL** : Random Vector Functional Link
 - **SCR** : Solvency Capital Requirement
 - **SII** : Solvabilité II
 - **STM** : Série temporelle multivariée
 - **TVOG** : Time Value of Options and Guarantees
 - **ZC** : Zéro-coupon
-

Introduction

La directive Solvabilité II, mise en œuvre le 1er janvier 2016, a profondément modifié le cadre réglementaire de l'assurance en Europe. Cette réforme vise à harmoniser les pratiques de gestion des risques et à renforcer la protection des assurés. Elle impose aux compagnies d'assurance de détenir un capital suffisant pour honorer leurs engagements, même dans des scénarios économiques défavorables.

Dans ce contexte, les Générateurs de Scénarios Économiques (GSE) sont devenus des outils essentiels pour les assureurs, notamment dans le secteur de l'assurance vie. Comme le souligne FALEH et al. (2010), les GSE permettent de simuler l'évolution future des variables économiques et financières, telles que les taux d'intérêt, les rendements des actions, et l'inflation, qui influencent directement la valeur des actifs et des passifs des compagnies d'assurance.

L'importance des GSE dans le cadre de Solvabilité II se manifeste à plusieurs niveaux. Ils sont utilisés pour le calcul du *Best Estimate* (BE), en projetant les flux de trésorerie futurs pour estimer au mieux les engagements d'assurance. Ils aident également à évaluer le Capital de Solvabilité Requis (SCR) en quantifiant les risques de marché et en déterminant le capital nécessaire pour y faire face. De plus, dans le cadre de l'*Own Risk and Solvency Assessment* (ORSA), les GSE permettent d'effectuer des projections à long terme de la situation financière de l'entreprise dans divers scénarios économiques.

En pratique, les assureurs utilisent généralement deux types de GSE. Les GSE « risque-neutre » sont principalement utilisés pour le calcul du *Best Estimate* et reposent sur l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, permettant une évaluation cohérente avec les prix de marché. Les GSE « monde réel » ou « historique » sont employés pour l'ORSA et l'allocation stratégique d'actifs, se basant sur des données historiques pour reproduire les caractéristiques observées des variables économiques, y compris durant les périodes de crise.

Cette dualité des GSE, bien que couramment adoptée, soulève des questions sur l'efficacité et la cohérence des évaluations actuarielles. L'utilisation de deux modèles distincts peut entraîner des divergences dans la gestion des risques et la prise de décision stratégique.

L'objectif principal de ce mémoire est de développer un générateur de scénarios économiques non paramétrique capable de fonctionner sous deux mesures de probabilité : historique et risque-neutre. Cette approche innovante repose sur l'utilisation de réseaux de neurones, en particulier le modèle RVFL (*Random Vector Functional Link*), pour modéliser les facteurs de risque et introduire une méthode de neutralisation du risque. Ce travail s'inscrit dans la continuité du mémoire de AUBERT-LASSARADE (2024), qui avait déjà élaboré un GSE historique à l'aide du RVFL.

Dans un premier temps (chapitre 1), le contexte des GSE sera présenté, accompagné d'une revue de l'utilisation des méthodes de machine learning. La deuxième partie (chapitre 2) se concentrera sur la modélisation d'un GSE en « monde réel », en analysant les projections historiques et en comparant avec des modèles paramétriques et d'autres modèles de réseaux de neurones. La troisième partie (chapitre 3) explorera la transition des projections historiques obtenues dans la deuxième partie vers des projections risque-neutres, tout en examinant les résultats obtenus. Enfin, le dernier chapitre

(chapitre 4) appliquera les projections risque-neutres pour le calcul du *Best Estimate* (BE) d'un contrat d'épargne en euros ainsi qu'une étude des sensibilités à travers des chocs.

Chapitre 1

Contexte et généralités sur les Générateurs de Scénarios Économiques

Ce chapitre explore le cadre théorique et méthodologique de ce mémoire, en se concentrant sur plusieurs axes principaux. Dans un premier temps, une présentation des Générateurs de Scénarios Économiques (GSE) sera effectuée dans le contexte de Solvabilité II. Ensuite, l'état de l'art des GSE sera examiné, en mettant en avant les deux principales approches : historique et risque-neutre. Une revue des méthodes de *Machine Learning* suivra, permettant d'introduire les techniques pertinentes. Enfin, le chapitre se conclura par la présentation du modèle de réseaux de neurones proposé dans cette étude.

1.1 GSE : un outil clé dans le cadre de la directive Solvabilité II

La directive Solvabilité II (SII) repose sur une approche fondée sur des principes plutôt que sur des règles, favorisant ainsi une adaptation plus flexible des exigences de capital et des pratiques de contrôle au profil de risque. En pratique, cela se traduit par la formulation de principes généraux dans la directive, laissant aux organismes assureurs une marge de liberté significative pour leur mise en œuvre.

Les règles prudentielles de SII s'articulent autour de trois piliers fondamentaux. Le premier pilier concerne les exigences quantitatives. Il s'agit d'une évaluation quantitative des risques et de la solvabilité des assureurs. Ce pilier vise à déterminer les exigences de capital basées sur les risques, en évaluant les risques liés aux activités de l'entreprise et en garantissant que les assureurs disposent de suffisamment de capital pour couvrir ces risques.

Le deuxième pilier se concentre sur les exigences qualitatives. Il englobe le processus de surveillance prudentielle et de gestion des risques. Un élément clé de ce pilier est l'*Own Risk and Solvency Assessment* (ORSA), ou Évaluation propre des risques et de la solvabilité, qui permet aux assureurs d'évaluer de manière proactive leurs risques et leur solvabilité.

Enfin, le troisième pilier met l'accent sur la transparence et la divulgation. Ce pilier vise à promouvoir la transparence et la communication entre les assureurs et les parties prenantes, y compris les autorités de réglementation, les clients et les investisseurs. Cela implique la divulgation d'informations pertinentes pour assurer une compréhension claire des pratiques de gestion des risques et de la situation financière des assureurs.

Son objectif principal est de garantir la sécurité des assurés tout en promouvant l'intégration du

marché européen. En outre, elle vise à améliorer la gestion des risques des assureurs européens et à renforcer leur compétitivité sur la scène internationale grâce à l'harmonisation des normes.

Selon le document d'orientation de l'INSTITUT DES ACTUAIRES (2018), les générateurs de scénarios économiques sont devenus des outils essentiels pour la gestion des risques en assurance. Ils permettent également de répondre aux exigences réglementaires et comptables, notamment en ce qui concerne l'évaluation des indicateurs liés à Solvabilité II, soulignant ainsi l'importance de leur construction. Plusieurs études quantitatives nécessitent l'utilisation d'un GSE, notamment pour l'évaluation des engagements, le calcul du SCR et la mise en œuvre de l'ORSA, conformément à la directive européenne. Ces aspects sont illustrés dans la figure 1.1 et seront détaillés dans les sections suivantes.

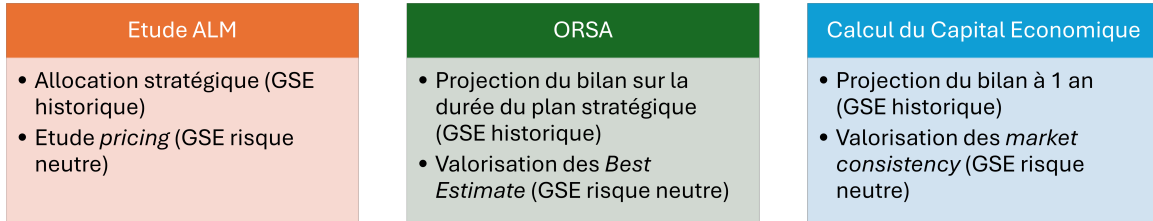


FIGURE 1.1 : Études utilisant des GSE

1.1.1 Calcul de provision *Best Estimate*

La directive SII exige une évaluation économique du bilan des compagnies d'assurance. Si la valorisation des actifs semble relativement simple, car la plupart d'entre eux sont cotés en bourse et ont donc une valeur de marché, déterminer la valeur de marché du passif, en particulier des provisions techniques, s'avère beaucoup plus complexe.

Selon l'article de ACPR (2011), la directive SII précise que les provisions techniques sont évaluées de façon cohérente avec le marché et correspondent au montant d'actifs qu'un tiers exigerait pour reprendre les engagements de l'assureur (ce résultat correspond donc à une valeur de transfert). Les provisions sont donc calculées comme la somme de la meilleure estimation des flux futurs (« *Best Estimate* ») et d'une marge pour risque, sauf si l'engagement est totalement répliquable par des instruments financiers.

Best Estimate

L'article 77 de la directive informe que : « La meilleure estimation (*Best Estimate*) correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque ». Ceci se traduit d'un point de vue mathématique comme

$$BEL_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \times \mathbb{P}} \left[\sum_{u>t} \delta_u F_u \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (1.1)$$

où :

- $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}$: respectivement probabilité risque-neutre et probabilité historique (une interprétation sera apportée dans la suite) ;
- δ_u le facteur d'actualisation ;

- F_u : le cash-flow (flux) de passif à payer par l'assureur ;
- $\mathcal{F}_t$: la filtration.

En pratique, le Best Estimate est déterminé à la date $t = 0$, pour le bilan de l'année en cours. La formulation mathématique devient alors

$$BEL_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \times \mathbb{P}} \left[\sum_{u>t} \delta_u F_u \right]. \quad (1.2)$$

Cependant, les assureurs ne calculent pas directement cette espérance. Ils utilisent une méthode de simulation. D'abord, des scénarios économiques sont générés à l'aide d'un GSE sous la mesure risque-neutre, incluant des hypothèses sur les variations des actifs. Ensuite, pour chaque scénario, l'évolution du portefeuille de contrats de l'assureur est simulée, et les flux financiers actualisés sont déterminés. Le graphique 1.2 illustre ce processus.

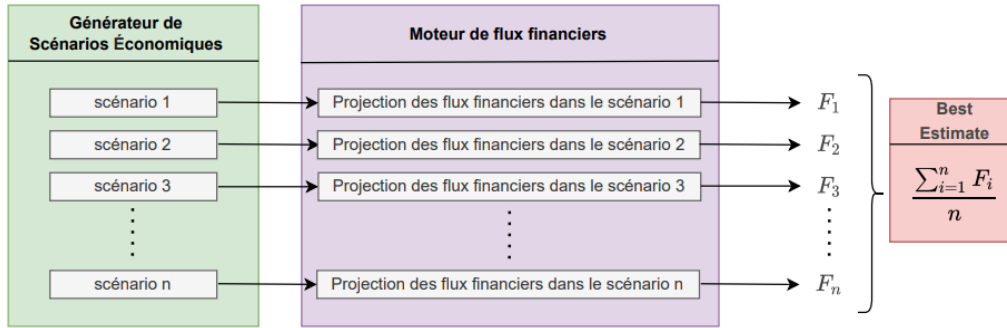


FIGURE 1.2 : Calcul du Best Estimate

Avec N scénarios, la formule du *Best Estimate* devient

$$BEL_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{u>t} \delta_{u,i} F_{u,i}. \quad (1.3)$$

Dans le cas continu, le facteur d'actualisation est donné par $\delta_{u,i} = \exp - \int_0^u r_s^i ds$ où r_s^i est un taux court instantané dans s -années obtenu via la i -ème simulation du GSE risque-neutre. Dans le cas discret, il est utilisé $\delta_{k,i} = e^{-\sum_{s=0}^k r_s^i}$. Si un taux zéro-coupon R_k^i de maturité k via la i -ème simulation, le facteur d'actualisation serait $\delta_{k,i} = \frac{1}{(1+R_k^i)^k}$.

Marge pour risque

L'évaluation de la marge de risque s'effectue conformément à l'article 77 de la directive SII : « la marge de risque est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance ». Pour une compréhension approfondie, se référer à l'article 37 de la directive mentionnée précédemment (PARLEMENT ET CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2009)). La figure 1.3 donne un aperçu du bilan sous SII.

L'actif net encore appelé fonds propres est calculé après évaluation de tous les autres postes du bilan de la manière suivante

$$Actif_{net} = Actif - (Best Estimate + Marge pour risque). \quad (1.4)$$

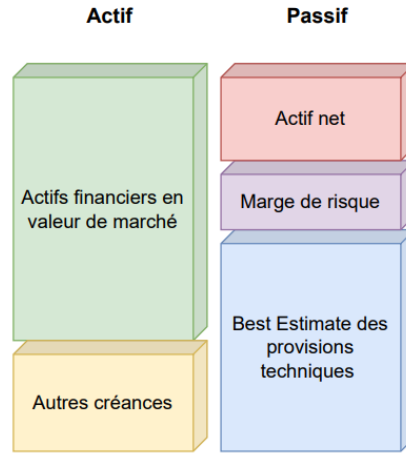


FIGURE 1.3 : Bilan SII

1.1.2 Estimation du SCR

Après avoir effectué le calcul de la meilleure estimation, il est possible de déterminer le capital requis selon les normes de SII, connu sous le nom de *Solvency Capital Requirement* (SCR). L'article 101 de la directive (PARLEMENT ET CONSEIL DE L'UNION EUROPEENNE (2009)) stipule que le capital de solvabilité requis correspond à la valeur en risque (*Value-at-Risk*) des fonds propres (actif net) de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99,5% sur un horizon d'un an. Le SCR peut être calculé de deux manières : à l'aide d'un modèle interne ou par la « formule standard ». Pour la formule standard, le lecteur pourra découvrir une documentation abondante sur le sujet dans l'article de EIOPA (2021).

Un modèle interne consiste en un modèle de calcul du SCR qui se base sur l'obtention de la distribution des fonds propres à horizon 1 an. En effet, se basant sur la définition du SCR, l'ajouter un capital S aux fonds propres initiaux FP_0 est primordial afin que la probabilité de ruine économique ($FP_1 < 0$) soit de 0,5%. L'ajout de ce capital initial modifie la valeur des fonds propres à 1 an (FP_1) qui deviennent $FP_1^{ajst} = FP_1 + \frac{S}{\mu}$ avec $\frac{1}{\mu}$ le coefficient de capitalisation. Ainsi, l'approche simplifiée du SCR est donné par

$$SCR = FP_0 - q_{0,5\%}(FP_1 \times \mu). \quad (1.5)$$

La principale difficulté réside dans le calcul du quantile actualisé à 0,5% des fonds propres à un an, ce qui nécessite une méthode de simulation de type Monte Carlo. Cette approche, impliquant des simulations imbriquées à deux niveaux (connue sous le nom de Simulation dans la Simulation ou SdS), a été employée dans plusieurs travaux sur l'optimisation du calcul du capital économique d'une compagnie d'assurance vie. Par exemple, des méthodes similaires ont été explorées par GARNIER et MARTIAL (2014) pour améliorer l'efficacité des calculs dans des contextes complexes :

1. simulations primaires : réalisées sous probabilité historique pour modéliser les conditions de marché futures de manière réaliste ;
2. simulations secondaires : effectuées sous probabilité risque-neutre pour évaluer la valorisation des fonds propres dans un an.

Le SCR est ensuite estimé en calculant le quantile empirique de l'échantillon. Une probabilité

historique est utilisée pour garantir la cohérence avec les données passées.

1.1.3 L'ORSA

L'ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*) est un processus de gestion des risques, qui doit permettre une évaluation « alternative » de la solvabilité. L'article 45 de la directive (PARLEMENT ET CONSEIL DE L'UNION EUROPEENNE (2009)) SII définit l'ORSA : « dans le cadre de son système de gestion des risques, chaque entreprise d'assurance et de réassurance procède à une évaluation interne des risques et de la solvabilité ».

Ce processus se concentre sur trois aspects essentiels : le Besoin Global de Solvabilité (BGS), le respect des exigences de capital et des provisions techniques, ainsi que l'écart entre le profil de risque de l'entreprise et les hypothèses utilisées pour déterminer le capital de solvabilité requis. Les générateurs de scénarios économiques (GSE) jouent un rôle central dans chacun de ces aspects.

Tout d'abord, pour l'évaluation des risques futurs, les GSE permettent de simuler des scénarios économiques plausibles. Ces simulations aident à identifier et anticiper les risques potentiels, tels que les fluctuations des taux d'intérêt ou les chocs macro-économiques, qui peuvent menacer la stabilité financière de l'entreprise.

Ensuite, en matière de gestion de la solvabilité, les GSE sont essentiels pour quantifier l'impact financier des risques identifiés. Ils permettent d'évaluer si l'entreprise dispose d'un capital suffisant pour couvrir ces risques, garantissant ainsi le respect des exigences réglementaires tout en maintenant un niveau de solvabilité adéquat.

Enfin, les résultats de l'ORSA alimentent la planification stratégique de l'entreprise. Ces analyses permettent d'ajuster les stratégies de gestion des risques en fonction des projections économiques et des risques anticipés, contribuant à aligner les décisions stratégiques sur les objectifs à long terme de l'entreprise.

Il convient également de souligner que le calcul du Besoin Global de Solvabilité (BGS) repose sur la projection du ratio de couverture selon différents niveaux de quantile. La figure 1.4 illustre les GSE développés pour répondre à ces exigences dans ce cadre.

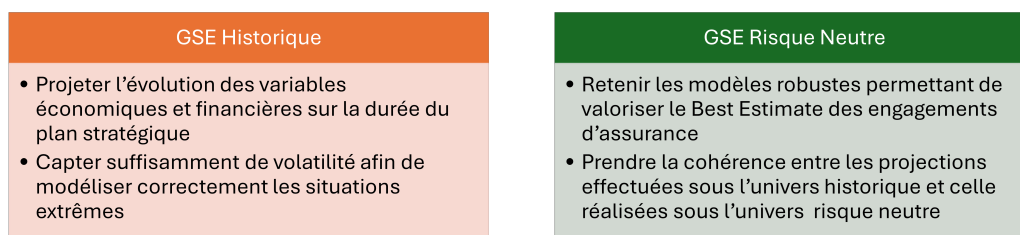


FIGURE 1.4 : GSE utilisés pour le calcul du BGS

En résumé, l'utilisation des GSE, conformément à la directive européenne, permet non seulement d'anticiper les risques futurs et de vérifier la solidité financière des entreprises, mais aussi de soutenir la planification stratégique à long terme. Cependant, pour saisir pleinement le rôle fondamental que jouent les GSE dans ces processus, il est essentiel d'approfondir leur structure et leur fonctionnement, notamment en explorant la transition entre les deux univers probabilistes : le « monde réel » et le « monde risque-neutre ».

1.2 GSE : concepts et approches probabilistes

Cette deuxième section se consacrera d'abord à une présentation générale d'un GSE. Elle explorera ensuite les deux univers de probabilités mentionnés précédemment, à savoir le monde risque-neutre et le monde réel. L'analyse mettra en évidence les différences et similitudes entre ces deux approches probabilistes, tout en détaillant le processus de transition de l'un à l'autre. Cette exploration permettra de mieux comprendre les implications de chaque univers sur la modélisation des risques et la gestion de la solvabilité.

1.2.1 Présentation générale

ARMEL et PLANCHET (2020) présente un GSE (ESG en anglais) comme un modèle mathématique reproduisant l'environnement économique. Il est utilisé pour produire des simulations du comportement joint des valeurs du marché financier et des variables économiques sur un horizon d'intérêt.

Dans un autre article, ARMEL et PLANCHET (2018a) explique que le processus de génération de scénarios économiques peut être synthétisé en trois étapes principales. La première étape concerne l'environnement de modélisation, qui consiste à choisir les variables économiques à modéliser dans un cadre probabiliste. Ce cadre peut être basé sur une probabilité risque-neutre ou historique, selon les objectifs de l'analyse.

La deuxième étape implique la construction de modèles mathématiques. Ces modèles sont conçus pour représenter la dynamique des variables économiques sélectionnées ainsi que leur structure de dépendance. Cela nécessite une compréhension approfondie des interactions entre les différentes variables et de la manière dont elles évoluent dans le temps.

Enfin, la troisième étape se concentre sur les paramètres et le calibrage. Cela implique la sélection de produits dérivés appropriés pour le calibrage des modèles, ainsi que l'utilisation de données et de méthodes statistiques pour estimer et valider les paramètres. Une attention particulière est accordée à la structure de dépendance entre les variables, souvent modélisée à l'aide de copules, afin de capturer les relations complexes qui peuvent exister entre elles. La figure 1.5 résume le processus de génération.

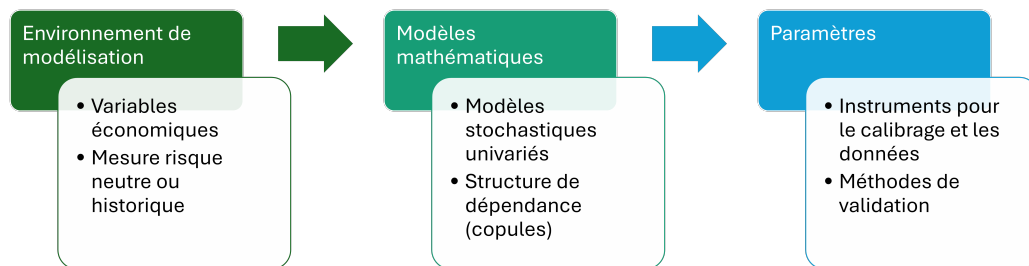


FIGURE 1.5 : résumé du processus de GSE

Dans la pratique, les assureurs utilisent deux GSE (comme énoncé dans la première partie) : un risque-neutre et un historique. Ainsi, dès lors il serait intéressant de savoir leurs spécificités ainsi que les liens entre ces deux univers.

1.2.2 Univers risque-neutre

Le cadre réglementaire, notamment sous les normes SII et IFRS 17, exige que les évaluations financières soient réalisées à l'aide de scénarios économiques qui reflètent fidèlement les conditions

de marché. Ce principe, connu sous le nom de *market consistency*, est fondamental pour permettre que les évaluations des actifs et passifs financiers sont alignées avec les prix observés sur les marchés financiers. Cette exigence réglementaire vise à assurer la transparence et la fiabilité des évaluations financières.

Le principe de *market consistency* repose sur l'idée que les évaluations doivent être cohérentes avec les prix de marché. Cela signifie qu'elles doivent intégrer toutes les informations disponibles et refléter les anticipations des participants du marché. Pour atteindre cet objectif, les assureurs utilisent des modèles risque-neutres. Ces modèles sont conçus pour veiller à ce que les prix des options et garanties sont en accord avec les prix de marché, éliminant ainsi toute possibilité d'arbitrage. Selon PLANCHET (2023), l'absence d'opportunité d'arbitrage est une hypothèse fondamentale, stipulant qu'il n'est pas possible d'obtenir un gain strictement positif avec une probabilité strictement positive pour un investissement nul. Cette condition est essentielle pour s'assurer la cohérence des prix des actifs et l'équilibre du marché. De plus, l'existence d'un marché complet signifie qu'il est possible de créer des portefeuilles capables de reproduire exactement les paiements futurs de n'importe quel autre actif financier dans ce marché, quelle que soit sa nature. Cela assure que les investisseurs peuvent se couvrir contre tous les risques et réaliser tous les rendements possibles.

Un GSE risque-neutre joue un rôle crucial dans ce contexte. Il permet de simuler des trajectoires de marché qui respectent les hypothèses de non-arbitrage et de marché complet. Grâce à un GSE risque-neutre, les assureurs peuvent modéliser les flux de trésorerie futurs en tenant compte des conditions de marché actuelles. Cela est indispensable pour une évaluation précise des risques et des engagements financiers. En effet, ces simulations aident à anticiper les évolutions possibles des marchés et à ajuster les stratégies en conséquence.

Dans le domaine de l'assurance vie, l'utilisation d'un GSE risque-neutre est devenue une norme incontournable. Il est essentiel pour valoriser les options et garanties intégrées dans les contrats d'assurance, telles que les garanties de taux, les options de rachat, et les participations aux bénéfices (PB). Ces modèles permettent de capturer la dynamique des marchés financiers de manière précise. Ils assurent que les engagements sont évalués de manière robuste et conforme aux exigences réglementaires. Ainsi, les assureurs peuvent mieux gérer les risques associés à ces produits complexes.

Pour garantir la cohérence des évaluations dans un cadre risque-neutre, il est crucial de réaliser un test de martingalité qui bien détaillé dans le document d'orientation de l'INSTITUT DES ACTUAIRES (2018). Ce test vérifie que les prix actualisés des actifs sont des martingales. En d'autres termes, il s'assure qu'en moyenne la valeur d'un actif au temps t multiplié par le déflateur associé est égale à la valeur de cet actif au temps $t = 0$. En se plaçant dans l'univers risque-neutre $\mathbb{Q}$ et en notant $D(0, t)$ et S_t les valeurs respectives du déflateur et de l'actif au temps t , il en découle la formule suivante

$$\forall t, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(0, t) \times S_t] = S_0 \quad (1.6)$$

Exemple illustrant l'absence d'opportunité d'arbitrage

Considérons un marché financier simple composé de deux actifs. Le premier actif est une action dont le prix aujourd'hui est de 100 €. Demain, le prix de cette action pourrait être de 110 € dans un scénario haussier ou de 90 € dans un scénario baissier. Le second actif est une obligation sans risque, dont le prix aujourd'hui est également de 100 €. Demain, le prix de cette obligation sera de 105 €.

Pour qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage, le prix actuel de l'action doit être égal à la valeur actualisée de ses gains futurs. Cela signifie que le prix de l'action aujourd'hui doit être égal à la valeur espérée de son prix demain, actualisée au taux sans risque.

Calculons la valeur espérée de l'action demain, en supposant une probabilité p pour le scénario haussier et $1 - p$ pour le scénario baissier

$$\text{Valeur espérée} = 110 \times p + 90(1 - p) = 110 \times p + 90 - 90 \times p = 20 \times p + 90. \quad (1.7)$$

Pour qu'il n'y ait pas d'arbitrage, cette valeur espérée actualisée doit être égale au prix actuel de l'action

$$\frac{20 \times p + 90}{1.05} = 100. \quad (1.8)$$

Réolvons pour p

$$20 \times p + 90 = 105 \implies 20 \times p = 15 \implies p = 0.75. \quad (1.9)$$

1.2.3 Univers monde réel

Le monde risque-neutre, notamment pour les actifs risqués, produit des rendements qui s'écartent de la réalité du marché. Par conséquent, pour générer des scénarios plus réalistes, il est essentiel d'utiliser un GSE dit « monde réel ». Ce GSE s'appuie généralement sur des données historiques, ce qui le rend subjectif, car il est très sensible à l'historique utilisé pour son calibrage (profondeur, fréquence, indice financier, etc.). De plus, pour mieux correspondre au marché, le GSE monde réel permet généralement d'intégrer des avis d'experts en lien avec le contexte macroéconomique. La probabilité associée est la probabilité historique noté $\mathbb{P}$. Ainsi, chaque scénario généré dans cet univers reflète un état plausible du marché financier.

Dans le monde réel, les scénarios économiques et financiers sont générés à partir de données historiques réelles, telles que les prix d'actifs, les taux d'intérêt, et les indices économiques. Pour améliorer la précision des scénarios, des avis d'experts en finance, en économie et en actuariat peuvent être intégrés, permettant ainsi de prendre en compte des facteurs qualitatifs et des événements spécifiques non capturés par les données historiques.

La validation d'un GSE historique est essentiellement statistique et dépend des facteurs de risques considérés. Elle doit être à la fois quantitative et qualitative afin de confirmer les hypothèses mathématiques et économiques sous-jacentes. Les critères quantitatifs abordés dans ce mémoire seront principalement fondés sur la concordance avec les données, utilisant des mesures telles que les quantiles, les moyennes, les tests de *backtesting*, et les QQ-plots. Quant aux critères qualitatifs, l'article HIBBERT et al. (2001) présente les exigences auxquelles un GSE doit se conformer.

En termes de plausibilité économique, il est crucial de reconnaître que l'avenir ne reproduira pas simplement les événements passés. Un GSE doit donc tenir compte du contexte macro-économique actuel pour que ses projections soient en cohérence avec les politiques monétaires et financières en vigueur. L'implication d'avis d'experts, notamment sur les paramètres estimés du modèle, est donc cruciale. De plus, la parcimonie et la transparence sont essentielles pour éviter une complexité excessive des modèles sous-jacents. Des modèles simples permettent une interprétation économique plus aisée et facilitent l'intégration des avis d'experts tout en réduisant la complexité informatique. Enfin, la représentativité est impérative pour un GSE, qui doit saisir les particularités de chaque actif, telles que les tendances de retour à la moyenne des taux d'intérêt, principalement en se fondant sur l'historique des données. Les modèles utilisés pour projeter chaque variable d'intérêt sont les principaux outils pour atteindre cette caractéristique.

Illustration de la comparaison entre l'approche risque-neutre et monde réel

L'illustration de la différence entre l'approche risque-neutre et l'approche monde réel est apportée à travers un exemple simple impliquant deux actifs financiers mono-périodiques : un actif sans risque et un actif risqué, chacun ayant une valeur initiale de 100 à $t = 0$. Dans un cadre d'absence d'opportunité d'arbitrage, l'univers où les investisseurs sont neutres au risque est utilisé. Cela signifie que deux actifs ayant la même espérance de rendement à $t = 1$ doivent avoir la même valeur à $t = 0$:

- actif sans risque (R) : cet actif offre un rendement de 4% dans un an, indépendamment des conditions du marché. Ainsi, sa valeur à $t = 1$ sera 104 ;
- actif risqué (S) : cet actif présente deux résultats possibles :
 - il génère un rendement de 15% dans 40% des cas, portant sa valeur à 115 ;
 - il subit une perte de 5% dans les 60% restants, réduisant sa valeur à 95.

L'objectif est d'évaluer un actif de couverture C qui protège contre la perte de l'actif S . Cet actif ne rapporte rien si S augmente, mais rapporte 5 si S baisse. Pour déterminer la probabilité neutre au risque (p^Q) de hausse de l'actif S , l'espérance de rendement de S est égalisée à celle de l'actif sans risque

$$p^Q \times 115 + (1 - p^Q) \times 95 = 104, \quad (1.10)$$

en résolvant cette équation

$$115 \times p^Q + 95 - 95 \times p^Q = 104 \implies 20 \times p^Q = 9 \implies p^Q = \frac{9}{20} = 0.45. \quad (1.11)$$

Dans cet univers neutre au risque, la probabilité de hausse de l'actif S est de 45%, comparée à 40% dans l'univers historique. Cela montre comment le changement de probabilité permet de valoriser les actifs en tenant compte de l'absence d'opportunité d'arbitrage, en ajustant les probabilités pour refléter une neutralité au risque.

Pour rappel, les compagnies d'assurances utilisent un GSE historique qui utilise des données passées pour générer des scénarios basés sur des observations historiques et un GSE risque-neutre qui lui ajuste les probabilités des scénarios pour éliminer le risque et rendre le marché complet. Ainsi, ils utilisent généralement deux GSE distincts, construits de manière indépendante au sein de différentes entités du groupe (par exemple, la section financière et celle dédiée à l'ORSA), ce qui peut entraîner un manque de cohérence entre les deux approches. Cela conduit à la problématique centrale de ce mémoire : développer un **GSE capable à la fois de réaliser la valorisation et la projection**, tout en garantissant une cohérence robuste des résultats obtenus.

1.2.4 Lien entre l'univers monde réel et risque-neutre

Cette section offre un aperçu concis des méthodes employées pour effectuer la transition d'une mesure probabiliste à une autre. Elle examine les techniques et les outils mathématiques utilisés pour transformer les probabilités, en mettant l'accent sur les implications de ces transformations dans le contexte de la modélisation des risques financiers.

Le prix du marché de risque

Une solution pour le passage d'un GSE historique à un GSE risque-neutre réside dans le processus d'ajustement des probabilités des scénarios pour refléter le prix du marché du risque. CAJA et PLANCHET (2010) présente dans leurs travaux que la détermination du prix de marché du risque, qui est inobservable, peut être effectuée en analysant la prime de risque, qui est par définition « l'excès de rendement par rapport au taux sans risque offert par un support risqué ». Ce papier mentionne aussi que la prime de risque sert à compenser la perte de rentabilité qui peut se produire à cause d'un facteur de risque sous-jacent. Néanmoins, les facteurs de risque ne sont pas les mêmes pour tous les actifs, ainsi que la prime de risque peut être analysée différemment.

Considérons un **premier exemple** avec le modèle Black-Scholes :

- en univers historique, le modèle se formule comme suit

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW, \quad (1.12)$$

- en univers risque-neutre, le modèle s'exprime de la manière suivante

$$\frac{dS}{S} = r dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}, \quad (1.13)$$

dans cet exemple, $r = \mu - \lambda\sigma \implies \lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$.

Considérons un **deuxième exemple** avec un modèle de taux à un facteur supposé être le taux court, par exemple le modèle de Vasicek qui utilise un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, dont la dynamique est la suivante :

- en univers historique, le modèle se décline de la manière suivante

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{P}}, \quad (1.14)$$

- en univers risque-neutre, le modèle est formulé de cette manière

$$dr_t = a(b_\lambda - r_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}, \quad (1.15)$$

dans celui-ci, par identification

$$b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a} \implies \lambda = \frac{a(b - b_\lambda)}{\sigma}.$$

Selon le théorème de « Girsanov », un changement de probabilité qui permet de passer de l'univers historique sous probabilité $\mathbb{P}$ au risque-neutre sous probabilité $\mathbb{Q}$. Formellement, le théorème de Girsanov dit que, si W_t est un mouvement brownien sous la probabilité $\mathbb{P}$ et F sa filtration naturelle et si λ_t est un processus adapté à F et vérifiant la condition de Novikov, alors il existe une mesure $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$, définie sur F_T par la densité de Radon-Nikodym

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(\int_0^T \lambda_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right), \quad (1.16)$$

telle que le processus $W_t^{\mathbb{Q}}$ défini par : $W_t^{\mathbb{Q}} = W_t - \int_0^t \lambda_u du$ soit un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$.

Dans les deux exemples précédents et le théorème, il est possible de remarquer que le paramètre λ permet de passer de l'univers historique à l'univers risque-neutre. Un **dernier exemple** : le processus définissant le taux court est donc un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sous les deux probabilités, mais avec des paramètres différents. Il importe donc de préciser dans quel univers la dynamique est posée afin d'utiliser la formule de valorisation avec les paramètres pertinents. Ainsi, la formule classique pour le prix d'un zéro-coupon de maturité T en $t < T$ est donné par

$$P(t, T) = \exp \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} (R_\infty - r_t) - (T-t)R_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \right), \quad (1.17)$$

où $R_\infty = b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}$, λ étant le prix de marché du risque. Cette formule peut être lue de deux manières :

- une formule avec 4 paramètres, (les 3 paramètres de la diffusion et le prix de marché du risque) dans l'univers historique : (a, b, σ, λ) ;
- une formule avec 3 paramètres dans l'univers risque-neutre : (a, b, σ) .

Il est important de rappeler que le prix du marché du risque est généralement inobservable, ce qui justifie le recours à la prime de risque. Cette dernière intègre des informations essentielles sur le prix de marché du risque associé à chaque facteur.

La transformée de Wang

La transformée de Wang est effectivement une méthode couramment utilisée en finance et en actuariat pour ajuster les distributions de probabilité en tenant compte du risque. Elle permet de passer d'une mesure de probabilité à une autre, en particulier entre la mesure historique et la mesure risque-neutre, en modifiant la perception des événements extrêmes via une fonction de distorsion. Cette technique est précieuse pour la gestion des risques et la tarification, car elle capture plus efficacement les aversions au risque des marchés. Voici une reformulation plus fluide et détaillée des étapes de la transformée de Wang :

1. **fonction de répartition initiale** : le processus commence par la sélection d'une fonction de répartition $F(x)$, qui décrit la distribution d'une variable aléatoire sous une mesure de probabilité donnée (par exemple, la mesure risque-neutre ou historique) ;
2. **fonction de distorsion** : ensuite, une fonction de distorsion est appliquée à la fonction de répartition initiale pour ajuster la distribution. Dans la transformée de Wang, cette distorsion est liée à la fonction de répartition normale cumulative, notée Φ , qui est choisie en raison de ses propriétés bien connues et de sa capacité à modéliser les risques de manière symétrique ;
3. **application de la distorsion** : la distorsion est appliquée en ajustant la fonction de répartition $F(x)$ par un paramètre de distorsion λ , représentant le degré de risque perçu. La nouvelle fonction de répartition sous la mesure ajustée, $F^*(x)$ est obtenue par

$$F^*(x) = \Phi(\Phi^{-1}(F(x)) + \lambda). \quad (1.18)$$

Ici, Φ^{-1} est la fonction quantile (ou inverse) de la distribution normale. Le paramètre λ contrôle le degré de distorsion : une valeur positive de λ indique un ajustement vers des risques plus élevés (surévaluation des événements extrêmes), tandis qu'une valeur négative reflète une sous-évaluation des risques ;

4. **nouvelle distribution** : la fonction de répartition $F^*(x)$ obtenue après distorsion correspond à la nouvelle distribution sous la mesure ajustée. Elle permet ainsi d'intégrer une aversion au risque ou une perception différente des probabilités d'événements rares, tout en maintenant la cohérence avec la distribution initiale.

Bien que la transformée de Wang et le prix du marché du risque soient des concepts distincts, ils partagent un objectif commun : ajuster les évaluations financières en tenant compte de l'aversion au risque. La transformée de Wang modifie les probabilités pour refléter cette aversion, tandis que le prix du marché du risque ajuste les rendements attendus en fonction du risque perçu. Cependant, ces méthodes ne peuvent pas être appliquées directement dans le cadre de ce mémoire. En effet, le générateur de scénarios économiques utilisé ici est non-paramétrique, ce qui signifie qu'il ne repose pas sur des hypothèses prédéfinies concernant la distribution des données.

Par ailleurs, comme mentionné précédemment, la structure du prix du marché du risque est complexe et difficile à modéliser de manière précise. Le passage de la mesure $\mathbb{P}$ à la mesure $\mathbb{Q}$ implique de faire un choix parmi plusieurs options possibles, mais étant donné que cette quantité n'est pas directement observable, il serait inutile de complexifier le calcul en introduisant des modèles paramétriques sophistiqués.

C'est pourquoi il a été décidé d'adopter une approche plus simple, en revenant aux définitions et aux propriétés fondamentales du prix du marché du risque et des deux probabilités considérées. Le chapitre 3 présentera en détail la méthodologie employée pour transformer les projections générées par un GSE historique non-paramétrique en projections risque-neutres. Cette section décrira ce processus de manière claire et rigoureuse, en mettant l'accent sur la précision scientifique requise pour assurer la fiabilité et la pertinence des résultats.

En parallèle à cette transformation, il est important d'examiner comment les approches modernes, telles que le *Machine Learning* (ML) et le *Deep Learning* (DL), peuvent être intégrées dans la modélisation économique. Ces méthodes permettent de traiter des volumes de données considérables et d'extraire des dynamiques non linéaires complexes. Ainsi, la section suivante se consacrera à une revue des modèles de ML et DL utilisés en finance quantitative, en explorant leur potentiel dans la prévision des séries temporelles, le *pricing* des produits financiers et la modélisation multivariée.

1.3 Revue des modèles de *Machine Learning* et *Deep Learning* en finance quantitative

La finance quantitative, à l'interface des mathématiques appliquées et de la finance, est aujourd'hui enrichie par les techniques de ML et de DL. Ces méthodes permettent de transcender certaines limites des modèles traditionnels en capturant des dynamiques non linéaires complexes et en intégrant des quantités massives de données. Cette revue explore trois grands axes : la prévision des séries temporelles, le *pricing* des produits financiers et la modélisation multivariée. Elle aborde également les performances comparées des méthodes modernes et classiques, ainsi que les défis techniques actuels et les orientations futures en recherche.

1.3.1 Prédiction des séries temporelles

État de l'art en prédiction des séries temporelles

La prédiction des séries temporelles constitue un domaine clé en finance quantitative. Les modèles traditionnels, comme l'ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*) proposé par BOX et JENKINS (1970), exploitent les dépendances temporelles dans les données financières, mais ils présupposent généralement une stationnarité, ce qui limite leur efficacité face aux non-linéarités et aux chocs imprévisibles des marchés financiers. Cette limite est bien documentée par SHUMWAY et STOFFER (2017), qui montrent que les séries financières complexes dépassent souvent les capacités d'ARIMA à capturer des comportements chaotiques.

Les modèles GARCH (*Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*), introduits par BOLLERSLEV (1986), permettent de modéliser la volatilité conditionnelle souvent observée dans les marchés. Le phénomène de *volatility clustering* caractéristique des rendements financiers est bien pris en compte par GARCH, mais des extensions comme le TGARCH (*Threshold GARCH*) et l'EGARCH (*Exponential GARCH*), développées respectivement par GLOSTEN et al. (1993) et NELSON (1991), sont souvent préférées pour modéliser les asymétries dans les périodes de volatilité accrue. Des avancées plus récentes, telles que le modèle GARCH-MIDAS de RAFANELLI (2021), intègrent des données à fréquences multiples, permettant ainsi d'améliorer la prédiction des dynamiques de volatilité liées à des chocs macroéconomiques.

Pour un panorama exhaustif des modèles traditionnels de séries temporelles, des travaux de synthèse comme ceux de HAMILTON (2020) et LIM et ZOHREN (2021) offrent des perspectives précieuses. Ces auteurs comparent les performances des modèles classiques aux méthodes de ML et DL sur des données financières, apportant des indications détaillées sur les forces et faiblesses de chaque approche.

Méthodes basées sur le ML et le DL

Les méthodes de ML et DL constituent des alternatives puissantes aux modèles classiques en prédiction des séries temporelles, surtout lorsqu'il s'agit de traiter des non-linéarités et des variations extrêmes. Par exemple, les forêts aléatoires (*Random Forest*), introduites par BREIMAN (2001), ont démontré une grande robustesse face aux données financières bruitées et se distinguent par leur capacité à capturer des dépendances non linéaires. Les travaux de KRAUSS et al. (2017) illustrent bien cette robustesse dans des conditions de marchés volatiles.

Les réseaux de neurones récurrents (RNN), en particulier les LSTM (*Long Short-Term Memory*) proposés par HOCHREITER et SCHMIDHUBER (1997) et les GRU (*Gated Recurrent Units*) développés par CHO et al. (2014), ont marqué un tournant dans la prédiction des séries temporelles. Ces architectures peuvent retenir des informations sur plusieurs périodes et sont ainsi bien adaptées pour modéliser les comportements non linéaires et chaotiques typiques des marchés financiers. LIM et ZOHREN (2021) et FISCHER et KRAUSS (2018) ont comparé en détail les performances des RNN, LSTM et autres modèles sur des données de trading, confirmant l'efficacité de ces réseaux dans des contextes de prédiction financière.

Les architectures hybrides CNN-LSTM, qui associent les réseaux convolutifs (CNN) pour détecter les motifs locaux et les LSTM pour capturer des dépendances temporelles à long terme, se montrent particulièrement efficaces dans des applications haute fréquence comme le trading algorithmique, selon les études de BAI et al. (2018). Récemment, les transformers, introduits par VASWANI et al. (2017), ont également trouvé une application prometteuse dans la prédiction des séries temporelles financières grâce à leurs mécanismes d'attention qui permettent de capturer efficacement des relations de longue

portée. LIM, ZOHREN et ROBERTS (2021) ont notamment exploré leur efficacité pour prédire les prix d'actifs, montrant des performances élevées face aux séries temporelles volatiles et complexes.

1.3.2 *Pricing* des produits financiers

Modèles traditionnels et développements récents

Les modèles analytiques comme le modèle Black-Scholes (BLACK et SCHOLES, 1973) ont longtemps constitué la base des méthodes de pricing des options et autres produits dérivés. Ce modèle repose sur des hypothèses de volatilité constante et de mouvement brownien, mais en période de volatilité élevée, il s'avère souvent imprécis. Des extensions comme le modèle à volatilité stochastique de HESTON (1993) ou encore les modèles intégrant des sauts de prix, tels que celui de BATES (1996), améliorent la précision en introduisant des processus stochastiques et des ajustements pour les variations soudaines des prix.

Dans le domaine des taux d'intérêt, les modèles plus modernes incluent le modèle SABR (*Stochastic Alpha Beta Rho*) proposé par HAGAN et al. (2002), qui permet de modéliser les dynamiques de volatilité non linéaire, ainsi que les modèles de volatilité locale-stochastique (LSV). Ces derniers combinent une composante locale et une composante stochastique, offrant une plus grande adaptabilité aux variations extrêmes. Les études de KIENITZ et WETTERAU (2020) et BRIGO et MERCURIO (2021) examinent les performances de ces modèles en période de forte volatilité et montrent leur avantage dans le pricing des produits structurés.

Apport des méthodes ML et DL dans le pricing

Les méthodes ML et DL apportent une flexibilité supplémentaire pour modéliser le *pricing* des produits financiers, notamment dans des conditions de marché imprévisibles. Les réseaux LSTM et les architectures *feedforward*, par exemple, permettent de capturer les dynamiques de volatilité sur des périodes étendues, une caractéristique précieuse pour l'estimation des prix d'options en période de volatilité élevée, comme le soulignent CAO et al. (2021). En complément, des algorithmes d'ensemble comme XGBoost, qui minimisent l'erreur en combinant des modèles multiples, sont utilisés pour la valorisation des produits dérivés dans des marchés fluctuants. AL-YAHYAEI et al. (2020) montrent que XGBoost peut offrir une précision supérieure en période de fortes fluctuations de marché.

Les GANs (*Generative Adversarial Networks*) et les VAEs (*Variational Autoencoders*) sont également employés pour générer des données synthétiques et modéliser des scénarios extrêmes. Les GANs, par exemple, facilitent la création de données simulées pour tester des stratégies de pricing dans des contextes de stress financier, tandis que les VAEs permettent de modéliser des scénarios complexes de volatilité. Ces techniques sont particulièrement utiles pour évaluer la robustesse des portefeuilles dans des conditions de marché incertaines (MIYATO et al., 2018). Enfin, l'approche bayésienne, en intégrant des processus gaussiens, fournit une estimation des incertitudes, permettant ainsi une meilleure gestion des risques dans des contextes de faible liquidité ou de volatilité extrême.

1.3.3 Modélisation multivariée des séries temporelles

Modèles classiques pour les séries multivariées

La modélisation des relations entre plusieurs séries temporelles repose souvent sur les modèles VAR (*Vector Autoregressive*) et FAVAR (*Factor-Augmented Vector Autoregressive*), très utilisés pour la

gestion de portefeuilles. Le modèle FAVAR intègre des facteurs latents pour modéliser des interactions de marché complexes et fournit une analyse détaillée des dépendances de court terme entre séries (LÜTKEPOHL, 2005a). Toutefois, les hypothèses de linéarité de ces modèles limitent leur capacité à capturer des interactions non linéaires, essentielles pour les portefeuilles complexes. Pour modéliser des corrélations dynamiques et asymétriques entre séries temporelles financières, les modèles de copules explorés par PATTON (2006) offrent une alternative intéressante, en particulier pour des analyses de portefeuilles multi-actifs. En parallèle, le modèle DCC-GARCH de ENGLE (2002) est utilisé pour modéliser les corrélations dynamiques entre actifs, mais il reste limité par ses hypothèses linéaires dans des environnements de marché très volatiles.

Approches ML et DL pour les séries multivariées

Les méthodes ML et DL apportent des solutions puissantes pour la modélisation multivariée des séries temporelles, en intégrant des dépendances complexes et non linéaires. Les réseaux de neurones récurrents multivariés, notamment les LSTM et GRU, capturent efficacement les relations de long terme dans des portefeuilles financiers et améliorent la précision des prévisions dans des environnements complexes (WU et al., 2020). En parallèle, les réseaux de neurones de type *Graph Neural Networks* (GNN) représentent les relations entre séries sous forme de graphes, ce qui facilite l'analyse des risques systémiques dans les portefeuilles financiers, comme démontré par CAO et al. (2021).

Les transformateurs, appliqués aux séries multivariées, offrent également une approche performante pour capturer les relations à longue portée entre actifs. Par exemple, ZHANG et al. (2019) montrent que les transformateurs permettent une prévision multivariée en temps réel particulièrement utile pour la gestion des risques. Les méthodes d'ensemble, telles que XGBoost, apportent une robustesse notable pour des modélisations multivariées dans des contextes de volatilité élevée, fournissant des prévisions fiables et permettant une meilleure gestion des interactions non linéaires entre actifs (TIAN et al., 2021).

1.3.4 Limites des approches ML et DL

Malgré leur efficacité, les modèles de ML et DL en finance présentent plusieurs défis. Leur manque d'interprétabilité, souligné par F DOSHI-VELEZ (2017), constitue un obstacle important pour leur adoption dans des environnements réglementés où la transparence est cruciale. De plus, la stabilité de ces modèles face aux fluctuations du marché reste une préoccupation majeure. En effet, les modèles ML et DL nécessitent souvent des réentraînements fréquents pour maintenir leur performance, surtout dans les marchés financiers en constante évolution. Les techniques explicatives post-hoc, comme SHAP (*SHapley Additive exPlanations*) (LUNDBERG et LEE, 2017) et LIME (*Local Interpretable Model-agnostic Explanations*) (RIBEIRO et al., 2016), apportent des solutions partielles pour interpréter ces modèles, mais les recherches futures devraient se concentrer sur le développement de modèles intrinsèquement interprétables et robustes.

1.3.5 Conclusion et directions futures

Les méthodes de ML et DL représentent un potentiel immense pour la finance quantitative, permettant une modélisation plus flexible et plus précise des dynamiques de marché. Cependant, les défis d'interprétabilité et de stabilité soulignent l'importance de développer des modèles hybrides combinant les avantages des DL et des approches plus explicables, comme les modèles bayésiens et les techniques de causalité. L'intégration d'outils de détection d'anomalies et de modèles explicables constitue

également une piste de recherche prometteuse pour répondre aux besoins croissants de transparence et de robustesse dans les marchés financiers modernes.

1.4 Modèle RVFL et facteurs de risque : une vue d'ensemble

La revue précédente a mis en évidence les avancées majeures apportées par les modèles de *Machine Learning* et de deep learning dans le domaine de la finance quantitative. Ce mémoire se concentre spécifiquement sur la construction d'un GSE non-paramétrique basé sur des réseaux de neurones, marquant ainsi un contraste notable avec les approches paramétriques.

Les modèles paramétriques, bien qu'utiles, reposent sur des hypothèses préétablies concernant la distribution des données et les relations entre les variables, ce qui limite souvent leur capacité à capturer les dynamiques non linéaires et complexes des marchés financiers. À l'inverse, les réseaux de neurones, grâce à leur capacité à apprendre directement des données, offrent une flexibilité accrue pour modéliser ces relations sans imposer de structure fonctionnelle spécifique. Ce travail poursuit deux objectifs principaux :

- premièrement, développer un GSE non-paramétrique sous la mesure historique, exploitant la puissance des réseaux de neurones pour générer des scénarios économiques plus précis et adaptatifs ;
- deuxièmement, transformer ces projections historiques en projections sous une mesure risque-neutre, afin de répondre aux besoins des marchés financiers et de la gestion des risques.

Cette approche permet de mieux refléter les dynamiques de marché, tout en offrant une capacité d'adaptation aux nouvelles données. Le GSE proposé ici vise donc à fournir un outil de modélisation plus robuste et réactif face à la volatilité et aux incertitudes du marché.

En intégrant ces technologies innovantes, ce mémoire cherche à contribuer à l'amélioration des pratiques de gestion des risques financiers et à la prise de décision stratégique. Dans cette démarche, une approche alternative aux modèles traditionnels est employée : le modèle *Random Vector Functional Link* (RVFL), qui sera exploré en détail dans la section suivante.

1.4.1 Les réseaux *Random Vector Functional Link Neural Network* (RVFL)

Les réseaux de neurones classiques, souvent appelés réseaux à propagation avant, sont construits autour de plusieurs couches de neurones. Ces réseaux comprennent une couche d'entrée, qui reçoit les données brutes, une ou plusieurs couches cachées où se produisent les transformations internes, et une couche de sortie qui génère le résultat final. Dans cette architecture, les données circulent de manière séquentielle, de la couche d'entrée à la couche de sortie en passant par les couches cachées, chaque neurone appliquant une fonction d'activation à une combinaison linéaire de ses entrées. L'apprentissage dans ces réseaux repose principalement sur l'ajustement des poids entre les neurones pour minimiser une fonction de coût, processus réalisé par l'algorithme de rétropropagation. Ce modèle, bien qu'efficace pour modéliser des relations complexes, est particulièrement coûteux en termes de calcul, notamment pour les réseaux profonds impliquant de multiples couches cachées, comme illustré à la figure 1.6. Le cours de HERAULT et CHATELAIN (2021a) explore en détail ces spécificités et leurs implications.

À l'inverse, le *Random Vector Functional Link* (RVFL), tel que défini par MALIK et al. (2023), adopte une approche simplifiée en comparaison aux réseaux de neurones à propagation avant traditionnels. Le RVFL est un réseau constitué de trois couches principales : une couche d'entrée, une

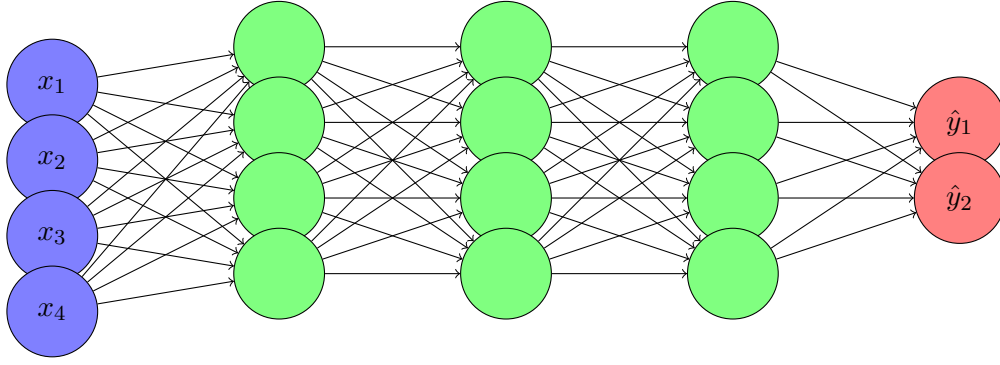


FIGURE 1.6 : Exemple d'un réseau multicouche avec trois couches cachées

seule couche cachée (*Single Layer Feedforward Network*, SLFN) et une couche de sortie. L'une des caractéristiques fondamentales du RVFL réside dans sa stratégie d'initialisation : les poids entre la couche d'entrée et la couche cachée sont attribués de manière aléatoire et demeurent fixes pendant l'ensemble du processus d'apprentissage. Contrairement aux réseaux classiques, où tous les poids sont optimisés, le RVFL réduit ainsi drastiquement la complexité computationnelle, car l'apprentissage se concentre uniquement sur l'ajustement des poids entre la couche cachée et la couche de sortie.

Prenons un exemple pour mieux comprendre cette structure. Supposons qu'il y a N observations pour une seule variable, où chaque entrée est notée x_i , avec $1 \leq i \leq N$ pour la i -ème observation de l'unique variable. Le nombre de neurones composant la couche cachée est noté P , et $F()$ représente la fonction d'activation. Le poids entre l'observation x_i et le neurone k de la couche cachée est noté $a_{k,i}$ (flèches bleues sur le graphique), où $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq k \leq P$. Le biais associé à chaque neurone de la couche cachée est noté b_k (en vert sur le schéma), où $1 \leq k \leq P$. Le vecteur des poids entre les couches d'entrée et de sortie, ainsi qu'entre les couches cachées et de sortie, est noté w_j (les flèches pleines de couleur orange sur l'illustration), et il est de taille $N + P$. Chaque w diffère selon la sortie j considérée, notée y_j , où y est le vecteur des sorties de taille M . Ainsi, pour chaque variable de sortie y_j , avec $1 \leq j \leq M$

$$y_j = \sum_{i=1}^N w_{i,j} x_i + \sum_{k=1}^P w_{(i+N),j} F \left(\sum_{k=1}^P a_{k,i} x_k + b_i \right). \quad (1.19)$$

La structure RVFL, illustrée à la figure 1.7, offre des connexions directes entre la couche d'entrée et la couche de sortie, permettant de capturer des relations linéaires sans passer par la couche cachée. Ce mécanisme favorise non seulement une convergence plus rapide, mais réduit aussi le risque de surapprentissage, un avantage particulièrement précieux lorsque les données sont limitées ou bruitées.

En résumé, le RVFL se distingue des réseaux de neurones classiques par son architecture épurée et son processus d'apprentissage simplifié. Cette architecture minimaliste, combinée à une phase d'apprentissage concentrée sur un sous-ensemble des poids, confère au RVFL une rapidité d'exécution particulièrement précieuse dans des applications nécessitant un traitement en temps réel, comme la génération de scénarios économiques. Cette approche favorise un compromis optimal entre performance, robustesse et efficacité computationnelle, des qualités essentielles dans les domaines économique et financier où les ressources et le temps de calcul peuvent être limités.

1.4.2 Facteurs de risques considérés

L'environnement économique et financier de 2024 présente des défis uniques pour les assureurs vie. La volatilité accrue des taux d'intérêt, après une longue période de taux bas, redéfinit le paysage des

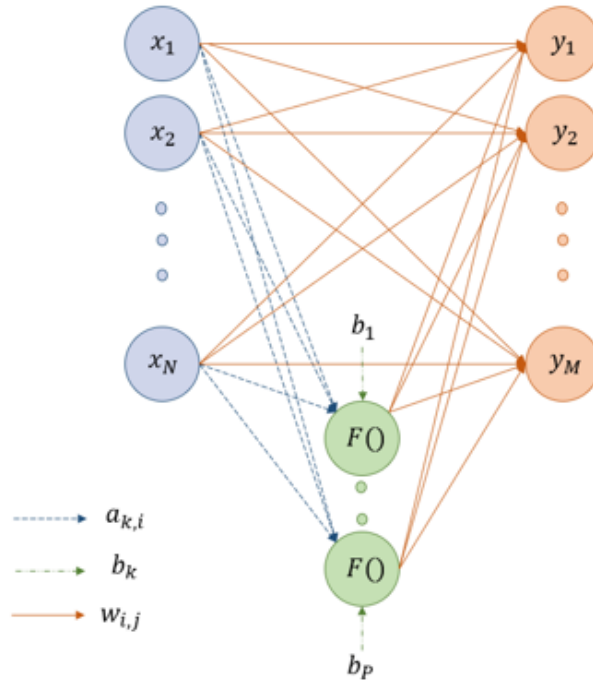


FIGURE 1.7 : Exemple d'un réseau RVFL (AUBERT-LASSARADE (2024))

risques. Cette hausse des taux offre des perspectives améliorées pour les assureurs vie, en augmentant les rendements des investissements et les marges sur les produits d'assurance-vie. Cependant, les marchés actions demeurent volatils, influencés par des incertitudes géopolitiques et économiques, ce qui impacte directement la valeur des portefeuilles des assureurs.

Dans ce contexte dynamique, une analyse approfondie des risques financiers de bilan des assureurs vie s'avère cruciale. Ces risques ne se limitent pas à l'actif du bilan, mais s'étendent également au passif, créant une interconnexion complexe qui nécessite une gestion intégrée.

À l'actif, le risque de marché demeure prépondérant. Les fluctuations des marchés actions et obligataires impactent directement la valeur des portefeuilles d'investissement des assureurs. Le risque de taux d'intérêt joue un rôle central, les variations de taux affectant significativement la valeur des obligations, qui constituent souvent une part importante des actifs des assureurs vie. Le risque de crédit, lié à la possibilité de défaut des émetteurs d'obligations, ne peut être négligé, surtout dans un contexte économique incertain. Enfin, le risque de liquidité reste une préoccupation constante, la capacité à vendre des actifs rapidement sans perte significative de valeur étant cruciale en période de stress financier.

Au passif, les risques financiers sont tout aussi importants. Le risque de taux d'intérêt est particulièrement critique pour les assureurs vie. Les engagements à long terme sont très sensibles aux variations de taux, une baisse des taux augmentant la valeur actualisée des engagements futurs. Le risque lié aux garanties offertes sur certains produits devient plus prononcé dans un environnement de taux bas, pouvant devenir coûteux pour les assureurs.

Une analyse approfondie des risques financiers à l'actif et au passif du bilan des assureurs vie, menée par AUBERT-LASSARADE (2024) dans son mémoire, met en lumière l'importance cruciale d'une modélisation précise des risques liés aux actions et aux taux. Ces deux facteurs de risque exercent un impact significatif et interdépendant sur l'ensemble du bilan, influençant à la fois la valeur des actifs et la structure des engagements. Dans notre étude, les données du CAC 40 ont été retenues pour les

actions et les taux swaps contre l'EURIBOR à 6 mois pour les taux. Le chapitre suivant présentera le retraitement des données pour ces différents facteurs de risque, afin de préparer leur projection dans notre modèle de GSE.

Chapitre 2

Projections en univers monde réel

Ce deuxième chapitre présente une analyse comparative des performances d'un modèle de générateur de scénarios économiques (GSE) historique, en s'appuyant sur les travaux de AUBERT-LASSARADE (2024). Ces recherches ont démontré l'efficacité du modèle RVFL dans un contexte historique. Cependant, l'étude initiale se limitait à un nombre restreint de modèles de comparaison. Ce chapitre vise donc à étendre cette analyse en explorant de nouvelles approches méthodologiques et en diversifiant les modèles évalués.

La méthodologie adoptée suit un processus structuré en plusieurs étapes. Dans un premier temps, les données sont retraitées avec soin, conformément aux protocoles de AUBERT-LASSARADE (2024), afin de garantir leur cohérence et leur qualité. Ensuite, le modèle RVFL est optimisé par un réglage précis de ses hyperparamètres, une étape essentielle pour maximiser ses performances.

Pour enrichir l'analyse comparative, plusieurs modèles alternatifs sont intégrés. Les modèles VAR (*Vector AutoRegressive*) et ARIMA (*AutoRegressive Integrated Moving Average*) sont choisis comme références classiques en raison de leur capacité éprouvée à analyser les séries temporelles économiques linéaires. En complément, un modèle de réseau neuronal LSTM (*Long Short-Term Memory*) est ajouté pour explorer les structures non linéaires et complexes des données. Cette diversité méthodologique permet d'évaluer la robustesse du modèle RVFL dans différents contextes.

L'objectif principal de cette étude est de comparer les performances du modèle RVFL à celles des autres approches et d'examiner sa pertinence pour les scénarios économiques historiques. En combinant des méthodes classiques et modernes, cette analyse offre une meilleure compréhension des performances des modèles GSE non paramétriques et évalue leur capacité à capturer les dynamiques complexes des données économiques.

2.1 Retraitement et analyse des données

Comme énoncé dans la première partie, notre étude se concentre sur deux facteurs de risques action et taux. La section sur le retraitement des données se concentre sur les procédures appliquées pour nettoyer et préparer les séries temporelles brutes afin d'assurer leur adéquation et leur pertinence pour l'analyse ultérieure dans le cadre de cette étude.

2.1.1 Série temporelle des taux swaps contre EURIBOR 6 mois

En ce qui concerne les données de taux, le taux swap contre EURIBOR 6 mois est utilisée. Un swap de taux est un instrument financier dérivé dans lequel deux contreparties s'engagent à échanger des flux d'intérêts sur une période déterminée. Dans ce type de contrat, une partie (la « jambe fixe ») s'engage à payer un taux d'intérêt fixe en échange d'un taux variable, tandis que l'autre partie (la « jambe variable ») effectue l'opération inverse. Le taux EURIBOR, quant à lui, représente le taux d'intérêt moyen auquel les principales institutions financières de la zone euro se prêtent des fonds à court terme sur le marché interbancaire. Ce taux est calculé en se basant sur les données fournies par les cinquante établissements bancaires européens les plus importants.

Les données utilisées sont un historique de taux swap provenant du fournisseur de données Bloomberg. Elles couvrent 14 maturités différentes, allant de 6 mois à 30 ans c'est-à-dire 6M, 1Y, 2Y, 3Y, 4Y, 5Y, 6Y, 7Y, 10Y, 12Y, 15Y, 20Y, 25Y et 30Y, où M et Y correspondent respectivement au mois et aux années. Les taux sont enregistrés mensuellement, le dernier jour de chaque mois. Notre période d'étude s'étend de janvier 2001 à mai 2023. Les taux observés sont des taux swap EUR, notés EUSA N . Le N représente la maturité en années. Ces taux fixes sont échangés contre des taux variables EURIBOR 6 mois. L'EUSA N est donc le taux fixe pour un swap de maturité N années.

Le retraitement se fera par une transformation des taux swaps en taux spots. Pour ce faire, la méthode de *Bootstrapping* sera utilisée, qui est une technique employée pour estimer la courbe des taux d'intérêt à partir de données de marché disponibles, telles que les taux des instruments financiers comme les obligations, les swaps ou les produits dérivés. Cette méthode est largement utilisée dans le domaine de la finance pour calculer les taux d'actualisation ou d'autres mesures de valorisation.

Les explications de la méthode sont tirées du chapitre 6 *Yield Curve Construction and Risk Management* du livre ANDERSEN et PITERBARG (2010). Le lecteur pourra se référer à ses travaux pour plus de détails. L'essence de la méthode est d'affirmer que le montant notionnel de chaque produit financier à taux est représenté comme une combinaison linéaire des flux de trésorerie actualisés d'obligations zéro-coupon. L'équation fondamentale $V = CP$ est introduite, où V est le vecteur des notionnels, C la matrice des flux, et P le vecteur des prix des swaps à déterminer. La résolution de cette équation permet d'extraire les taux spots à partir des prix des swaps. Un algorithme de *bootstrapping* est utilisé pour résoudre l'équation, employant une interpolation linéaire entre les maturités. L'étude se concentre sur des swaps de différentes maturités, allant de 6 mois à 30 ans, avec un notionnel unitaire de 1€. La matrice C est construite à partir des données EUSA N contre EURIBOR 6M. Cette approche permet d'estimer la courbe des taux d'intérêt de manière cohérente avec les prix de marché observés.

Pour clarifier davantage ce concept, prenons un exemple concret. Imaginons des swaps financiers avec un ténor de 6 mois. Cela signifie que ces swaps impliquent des paiements effectués tous les 6 mois sous forme de coupons d'intérêt. À chaque période de paiement, les intérêts basés sur le taux spécifié dans le contrat sont reçus. Enfin, à l'échéance (c'est-à-dire à la maturité du swap), le paiement du coupon d'intérêt et le remboursement du notionnel sont réalisés.

En conséquence, si un ensemble de 13 swaps est considéré, chaque swap générera une série de flux de trésorerie au fil du temps. Si une durée totale de 30 ans (360 mois) est prise en compte et que les paiements sont effectués tous les 6 mois, cela équivaut à 60 périodes de paiement (360 mois / 6 mois). Ainsi, pour chaque swap, une matrice de flux composée de 13 lignes (représentant les 13 swaps) et 60 colonnes (représentant les 60 dates de paiement au fil du temps) sera obtenue. Chaque élément de cette matrice représente un flux monétaire associé à un swap à une date de paiement spécifique. Pour plus de clarification, le lecteur pourra consulter le mémoire de AUBERT-LASSARADE (2024) pour plus de détails sur la méthode. Après l'application de la méthode de *bootstrapping*, le tableau 2.1 présente les résultats obtenus pour la date du 31 Mai 2023.

Date	t_1	t_2	...	t_{59}	t_{60}
2023-05-31	3,711351	3,803892	...	2,494298	2,480923

TABLE 2.1 : Extrait des taux spots (en pourcentage) avec les données de taux pour le 31 Mai 2023

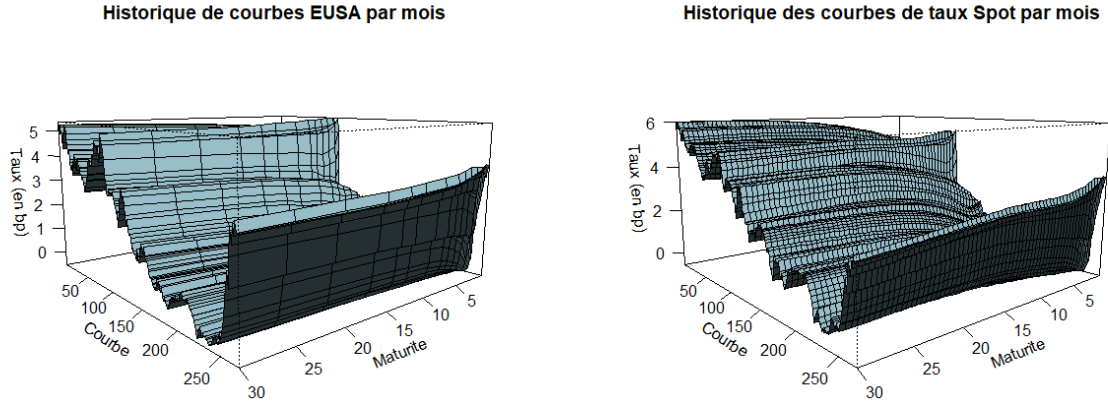


FIGURE 2.1 : Comparaison des deux courbes de taux mensuels (en pourcentage) : Taux swaps et Taux spots du 31 Janvier 2001 au 31 Mai 2023

La figure 2.1 généralise la méthode précédente à toutes les dates. Il est pertinent de noter que les taux spots générés sont au nombre de 60, ce qui suggère l'intérêt de les simplifier ou de les réduire pour une meilleure gestion. Cela amène à envisager l'utilisation du modèle de Nelson-Siegel sur la courbe des taux spots afin d'en extraire les composantes significatives. Nelson-Siegel est un modèle classique d'économétrie financière largement utilisé pour modéliser et analyser les risques liés aux taux d'intérêt dans un contexte historique.

Le modèle Nelson-Siegel (NS) est défini par la formule suivante

$$R(t, T) = \beta_1 + \beta_2 \frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} + \beta_3 \left(\frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} - \exp(-T/\lambda) \right), \quad (2.1)$$

avec :

- $R(t, T)$ représentant le taux zéro-coupon (ZC) à la date t pour une maturité T ;
- λ un paramètre d'échelle contrôlant à quelle vitesse les taux d'intérêt convergent vers leur niveau à long terme. Il s'agit essentiellement d'une mesure de la durée moyenne des taux d'intérêt dans le modèle ;
- β_1 le facteur de niveau pour le taux long ;
- β_2 le facteur de rotation correspondant à l'écart taux long - taux court, contrôlant la pente de la courbe des taux ;
- β_3 le facteur de pentification, influençant la courbure de la courbe des taux. Il modifie la forme de la courbe en introduisant une courbure supplémentaire qui peut être convexe ou concave.

Dans ce mémoire, le paramètre d'échelle λ sera fixé et les composantes β_1 , β_2 et β_3 extraites. Il est intéressant de remarquer que le fait de projeter les trois composantes au lieu des 60 taux spots, et ceci pour chaque date, permet de réduire la dimension du problème de 20 fois. À ce stade, deux questions se posent : comment extraire les trois composantes et quelles valeurs optimales de λ retenir.

Remarque 1 :

Il est pertinent de noter que le modèle Nelson-Siegel-Svensson aurait pu être utilisé, car il constitue également un excellent moyen de reconstituer les taux avec davantage de composantes. Cependant, le choix s'est porté sur le modèle NS afin d'éviter la projection de multiples séries. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à GILLI et al. (2010).

Extraction des composantes de Nelson-Siegel

Dans cette étude, les variables explicatives basées sur les composantes du modèle de Nelson-Siegel (NS) ont été calculées en fixant un paramètre d'échelle λ pour des maturités spécifiques. Pour chaque maturité, trois composantes principales ont été déterminées : la composante de niveau (β_1), la composante de pente (β_2) et la composante de courbure (β_3). Ces composantes ont ensuite été utilisées comme régresseurs dans une régression effectuée sur les taux spots correspondants.

Ce processus a été répété pour 269 dates distinctes, permettant d'obtenir une série de régresseurs cohérents avec la formule théorique du modèle de Nelson-Siegel. Cette approche garantit que les variables explicatives reflètent les dynamiques des taux d'intérêt dans le cadre historique considéré.

Choix du paramètre d'échelle λ

Le paramètre d'échelle λ joue un rôle clé dans la détermination des composantes du modèle de Nelson-Siegel. Son choix optimal a été effectué à travers une analyse structurée, comprenant les étapes suivantes :

1. fixation d'une valeur initiale de λ : une valeur spécifique de λ est fixée, qui sert à calibrer l'échelle des composantes du modèle NS ;
2. extraction des composantes du modèle : les trois composantes principales (niveau, pente, courbure) sont calculées à l'aide de la fonction *NSf* du package *NMOF* (SCHUMANN (2024)) dans R (R CORE TEAM (2024)) ;
3. reconstruction de la courbe des taux : une courbe des taux est reconstruite en combinant les composantes extraites, conformément à la formulation de Nelson-Siegel ;
4. évaluation des écarts avec la courbe observée : la courbe reconstruite est comparée à la courbe des taux observée à l'aide de la mesure d'erreur *Scaled Pinball Loss* (SPL).

Bien que la *Scaled Pinball Loss* (SPL) soit généralement utilisée pour évaluer des modèles de régression quantile, son application dans ce contexte est justifiée par ses propriétés méthodologiques spécifiques. Contrairement aux mesures classiques, la SPL permet d'évaluer les écarts de manière asymétrique, en appliquant des pénalités différenciées selon qu'il s'agisse de surestimations ou de sous-estimations.

Cette particularité est essentielle dans le cadre financier, où la direction des écarts peut avoir des conséquences économiques significatives. Par exemple, une sous-estimation des taux peut entraîner

des risques d'illiquidité, tandis qu'une surestimation peut avoir un impact sur le coût d'emprunt. La SPL, en intégrant ces asymétries, permet une évaluation plus fine et plus pertinente des performances de reproduction des courbes.

Il est important de préciser que l'usage de la SPL dans cette analyse n'est pas un choix intrinsèque des auteurs du package `NMOF`, mais une décision méthodologique propre à cette étude. Ce choix reflète une volonté d'apporter une granularité accrue dans l'évaluation des erreurs, permettant une optimisation précise du paramètre λ . Les détails techniques sur son implémentation et ses spécificités sont fournis en annexe A.1.

Une première analyse a été réalisée sur dix valeurs de λ (0,5, 1, 2, 2.25, 3, 4, 7, 10, 20, 30), permettant d'identifier une valeur minimale de 2,25. Suite à ces résultats, la recherche a été affinée en se concentrant sur l'intervalle de 2 à 2,5, avec un pas de 0,0001. La valeur optimale de λ a été déterminée à 2,1744, qui a été retenue pour le reste de l'étude.

À l'issue de ces étapes, la base de données de taux est désormais prête, fournissant une série temporelle multivariée qui sera intégrée avec d'autres facteurs de risque pour des analyses ultérieures. Le tableau 2.2 présente quelques valeurs de la série temporelle des taux.

Date	β_1	β_2	β_3
2001-01-31	6,11	-1,46	-2,06
2001-02-28	6,08	-1,39	-2,16
2001-03-30	6,08	-1,63	-2,42
2001-04-30	6,22	-1,371	-1,91
2001-05-31	6,36	-1,98	-1,73

TABLE 2.2 : Extrait après retraitement des cinq premières valeurs de la série temporelle du taux

2.1.2 Série temporelle des indices du CAC 40

Le CAC 40, principal indice boursier de la place financière parisienne, regroupe les 40 entreprises françaises les plus représentatives. Celles-ci sont choisies parmi les 100 premières sociétés en termes de capitalisation boursière, en prenant en compte non seulement leur taille, mais aussi leur liquidité, évaluée par le volume de leurs transactions quotidiennes. L'acronyme CAC, pour Cotation Assistée en Continu, se réfère au système de cotation électronique qui permet la mise à jour en temps réel des cours de ces actions.

Les indices de clôture du CAC 40, enregistrés entre le 1er mars 1990 et le 31 mai 2023, ont été étudiés en données journalières. Pour pallier les valeurs manquantes, une interpolation linéaire a été appliquée, garantissant ainsi la continuité de la série.

L'analyse se concentre sur des données mensuelles couvrant une période de 22 ans et 5 mois, soit du 31 janvier 2001 au 31 mai 2023, comme illustré à la figure 2.2. Cette longue fenêtre temporelle permet d'observer les fluctuations du marché sur un cycle économique complet, incluant des phases de croissance, de récession et de reprise, ainsi que des périodes de stabilité et de volatilité. Cette durée d'observation accroît la robustesse du modèle en intégrant des conditions de marché variées et des événements économiques majeurs, tels que la crise financière de 2008 et la récente pandémie de COVID-19.

Remarque 2 : *L'indice CAC 40 choisi ici est hors dividende, par souci de simplicité dans la modélisation. Cependant, il aurait été intéressant de modéliser avec les dividendes inclus.*

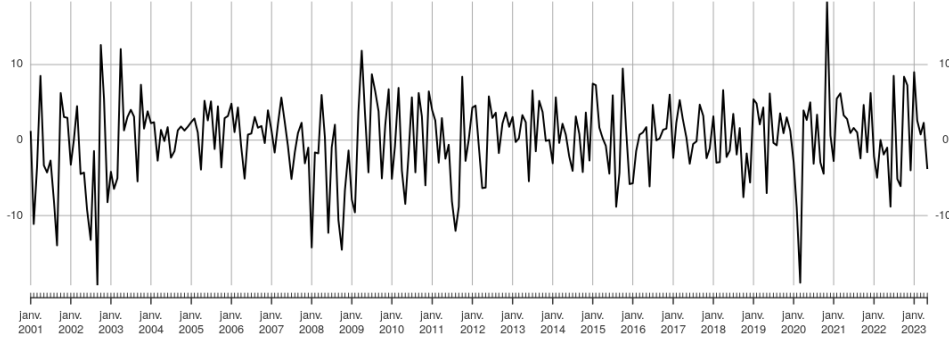


FIGURE 2.2 : Graphique de l'indice Fermeture du CAC 40 entre le 31/01/2001 - 31/05/2023

Ensuite, la fréquence des données a été réduite en sélectionnant le dernier jour de chaque mois, alignant ainsi la fréquence avec celle des données de taux. Enfin, les indices ont été transformés en rendements logarithmiques pour mieux analyser les fluctuations relatives, en utilisant la formule

$$\psi_t = \log \left(\frac{Close_t}{Close_{t-1}} \right) \times 100, \quad (2.2)$$

où $Close_t$ est la valeur de l'indice à l'instant t . Les rendements logarithmiques ont été calculés du 30 avril 1990 au 31 mai 2023.

À la différence de l'étude de AUBERT-LASSARADE (2024), seul l'indice du CAC 40 a été conservé, sans inclure la volatilité, car celle-ci n'a pas un rôle significatif dans la suite du travail, certaines valeurs de la série temporelle sont mises dans le tableau 2.3.

Date	ψ_t
2001-01-31	1,21
2001-02-28	-11,12
2001-03-30	-3,55
2023-04-30	8,50
2023-05-31	-3,35

TABLE 2.3 : Extrait après retraitement des cinq premières valeurs de la série temporelle pour le CAC40

Ce dernier retraitement marque la conclusion de la première phase de construction de la série temporelle multivariée. Grâce à cette étape essentielle, une base solide et cohérente est désormais disponible pour poursuivre l'analyse. Il est alors possible d'explorer les différentes stratégies et méthodes nécessaires à l'implémentation du modèle GSE-RVFL historique.

2.2 Mise en œuvre du GSE-RVFL historique

Cette section se penchera sur le modèle basé sur les réseaux de neurones RVFL. Les approches et les techniques employées pour son implémentation seront détaillées, en s'appuyant sur les données issues de la série temporelle multivariée obtenue précédemment.

2.2.1 Description du modèle

Le modèle RVFL a été brièvement introduit dans la quatrième section du premier chapitre (1.4). Cette section en fournit une explication détaillée et complète. Les travaux de de MOUDIKI et al. (2018) expose que le modèle s'appuie sur des réseaux de neurones à rétroaction monocouche, c'est-à-dire possède une unique couche cachée à plusieurs nœuds. En considérant y comme la variable de sortie, $y \in \mathbb{R}^n$ peut être expliqué par un ensemble de prédicteur $Z^{(j)} \in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \dots, p\}$, où p est le nombre de séries temporelles constituant la série temporelle multivariée. Le modèle RVFL utilisé pour expliquer y peut être décrit pour $i \in \{1, \dots, n\}$ comme

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j Z_i^{(j)} + \sum_{l=1}^L \gamma_l g \left(\sum_{j=1}^p W^{(j,l)} Z_i^{(j)} \right) + \epsilon_i, \quad (2.3)$$

où :

- les paramètres β_j et γ_j sont appris grâce aux données observées $Z_i^{(j)}$ avec $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$;
- g la fonction d'activation ;
- L le nombre de noeuds de la couche cachée ;
- $W^{(j,l)}$ sont les éléments de la couche cachée où $j \in \{1, \dots, p\}$ et $l \in \{1, \dots, L\}$;
- les résidus ϵ_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, qui sont la différence entre la valeur observée et estimée grâce au modèle RVFL.

Ce type de modèle peut être vu comme un modèle expliquant y_i , en trouvant un compromis entre linéaire et effets potentiellement non linéaire des prédicteurs originaux $Z^{(j)}$ et des prédicteurs transformés

$$\phi(Z)^{(l)} = g \left(\sum_{j=1}^p W^{(j,l)} Z_i^{(j)} \right), \quad (2.4)$$

voici une liste de fonctions d'activation qui sont généralement utilisés :

- la fonction sigmoïde est définie par $f(x) = \frac{1}{1+\exp^{-x}}$. Elle est souvent utilisée dans les tâches de classification binaire ;
- la fonction Tanh est définie par $f(x) = \frac{\exp^x - \exp^{-x}}{\exp^x + \exp^{-x}}$, et elle contraint les valeurs de sortie entre -1 et 1 ;
- la fonction ReLU (*Rectified Linear Unit*) est définie par $f(x) = \max(0, x)$. Elle est largement utilisée en raison de sa simplicité et de son efficacité dans les réseaux profonds.

Un modèle RVFL se distingue d'un réseau à propagation avant classique à une seule couche intermédiaire par deux caractéristiques principales. D'une part, il intègre une dépendance linéaire explicite entre la variable de sortie y_i et les prédicteurs $Z^{(j)}$, selon la relation $\beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j Z_i^{(j)}$. D'autre part, les éléments $W_{(j,l)}$ de la couche cachée ne sont pas entraînés, mais plutôt déterminés de manière aléatoire et uniforme sur un intervalle prédéfini.

Les travaux de MOUDIKI et al. (2018) informent que la résolution des paramètres optimaux β_j et γ_l peut être effectuée en appliquant une régression. En effet, cela permet de mieux gérer la structure de covariance entre les prédicteurs et la sortie, tout en évitant le surapprentissage. Les réseaux RVFL, efficaces pour projeter des séries temporelles avec de fortes corrélations, sont adaptés pour ce type de modélisation. Ils sont plus simples à calibrer et plus rapides que les réseaux de neurones de type LSTM (*Long Short Term Memory*) ou GAN (*Generative Adversarial Network*), grâce à leur nombre limité de paramètres et à l'utilisation de formules fermées. Les réseaux RVFL comportent une part d'aléatoire dans la couche cachée, rendant le modèle sensible au choix de la graine de simulation, ce qui entraîne des variations dans les paramètres β_j et γ_l . Pour atténuer cette dépendance, des séquences de nombres quasi-aléatoires sont utilisées, comme les suites de Sobol ou de Halton, pour générer les poids de la couche cachée. Ces suites sont ajustées pour appartenir à l'intervalle $[-1, 1]$, assurant une distribution uniforme des poids.

Ainsi, le modèle RVFL repose sur des paramètres fixes (fonction d'activation, nombre de *lags*, ...) dont l'optimisation est essentielle pour garantir des performances optimales. Bien que ce modèle offre une projection centrale robuste, il ne permet pas, en l'état, de capturer la variabilité inhérente aux incertitudes des séries temporelles. Par conséquent, il est nécessaire d'introduire une composante aléatoire pour générer des scénarios variés et mieux représenter les distributions possibles des résultats. Cette génération d'aléa permet d'étendre le cadre prédictif du modèle et d'explorer les dynamiques potentielles au-delà de la projection centrale.

2.2.2 Optimisation des hyperparamètres

Dans le cadre de notre étude, l'optimisation bayésienne couplée à la validation croisée a été appliquée pour optimiser les hyperparamètres du modèle RVFL du *package* `ahead` de R. Les hyperparamètres sont des paramètres de haut niveau qui contrôlent le processus d'apprentissage et influencent les valeurs des paramètres du modèle que l'algorithme finit par apprendre.

L'optimisation des hyperparamètres est essentielle pour maximiser la performance du modèle, car elle influence directement sa capacité à généraliser et à fournir des prédictions précises. Les hyperparamètres, tels que le nombre de neurones cachés et les paramètres de régularisation, déterminent la structure et la complexité du modèle.

La validation croisée est une technique statistique qui divise les données en plusieurs sous-ensembles, ou « folds ». À chaque itération, le modèle est entraîné sur certains sous-ensembles et testé sur les autres, garantissant ainsi que chaque donnée est utilisée à la fois pour l'entraînement et la validation. Cette méthode permet d'obtenir une estimation pertinente de la performance du modèle en réduisant les biais et la variance associés à une simple partition des données.

L'optimisation bayésienne est une technique sophistiquée utilisée pour optimiser des fonctions qui sont coûteuses à évaluer. Elle est particulièrement utile dans le contexte de l'apprentissage automatique, où le réglage des hyperparamètres peut être un processus long et complexe. Voici une explication plus détaillée des éléments clés de cette méthode :

1. **fonction objectif** : notée $f(x)$, elle représente la métrique à optimiser, comme l'erreur de validation croisée ou l'erreur quadratique moyenne. L'objectif est de minimiser ou maximiser cette fonction pour trouver la meilleure configuration d'hyperparamètres ;
2. **fonction d'acquisition** : notée $a(x|p(f|D))$, elle joue un rôle crucial dans le processus d'optimisation. Elle guide la sélection des hyperparamètres à explorer en équilibrant deux aspects : l'exploration de nouvelles régions de l'espace des hyperparamètres et l'exploitation des régions déjà identifiées comme prometteuses. Des techniques comme l'*Expected Improvement* (EI), la

Probability of Improvement (PI), et l'*Upper Confidence Bound* (UCB) sont couramment utilisées. Ces techniques aident à décider où évaluer la fonction objectif ensuite, en tenant compte à la fois des valeurs attendues et de l'incertitude associée ;

3. **modèle probabiliste** (*Surrogate Function*) : le modèle probabiliste, souvent un processus gaussien, est utilisé pour modéliser la fonction objectif $f(x)$ et son incertitude, permettant une exploration efficace de l'espace des hyperparamètres. Ce modèle agit comme une approximation de la fonction objectif réelle, permettant une exploration efficace de l'espace des hyperparamètres. Le processus gaussien est particulièrement adapté car il offre une estimation flexible et précise de la fonction objectif, même avec un nombre limité d'évaluations.

L'optimisation bayésienne est donc une approche puissante pour le réglage des hyperparamètres, car elle permet de réduire le nombre d'évaluations nécessaires de la fonction objectif, tout en augmentant les chances de trouver la configuration optimale. Les travaux de BROCHU et al. (2010) et SNOEK et al. (2012) ont largement contribué à l'étude et à l'application de cette méthode dans divers contextes, démontrant son efficacité et sa flexibilité.

En intégrant l'optimisation bayésienne avec la validation croisée, les performances du modèle sur différentes configurations d'hyperparamètres ont pu être évaluées efficacement. Cette approche a conduit à la sélection du modèle minimisant l'erreur quadratique moyenne, assurant ainsi une robustesse et une généralisation optimales sur des données nouvelles et non vues. Cette méthodologie garantit que le modèle est bien adapté aux données, tout en évitant les pièges du surapprentissage et du sous-apprentissage.

2.2.3 Génération de scénarios

Pour rappel, le modèle RVFL donne une projection centrale mais l'objectif principal de cette étude est de générer plusieurs prévisions pour une même série temporelle. Ces projections variées permettent d'anticiper les différentes trajectoires que les facteurs de risque pourraient emprunter sur l'horizon choisi. Contrairement aux approches classiques qui modélisent généralement les dynamiques à l'aide de processus browniens, cette étude opte pour le *Block Bootstrap* comme alternative de génération d'aléa.

Introduite par KÜNSCH (1989a), le *Block Bootstrap* est une extension du *bootstrap* classique qui divise les données en blocs d'observations contigus, puis échantillonne ces blocs de manière aléatoire avec remplacement. Cette méthode est particulièrement utile pour les séries temporelles et les données présentant des corrélations, car elle conserve les dépendances temporelles et les structures de corrélation, contrairement aux techniques supposant une indépendance entre observations. En maintenant les caractéristiques séquentielles des données, le *Block Bootstrap* s'avère crucial dans les séries temporelles, où les observations successives sont souvent corrélées. Cela en fait un outil particulièrement pertinent pour les séries multivariées, où il est essentiel de préserver les interactions entre les variables afin d'obtenir des estimations et des prévisions réalistes. Les travaux de KÜNSCH (1989a) et de LIU et SINGH (1992) ont démontré sa validité asymptotique : pour des échantillons suffisamment grands, la distribution bootstrap converge vers celle de l'estimateur réel, garantissant ainsi des intervalles de prédiction et des tests d'hypothèse fiables. HALL et al. (1995) a également montré que le *Block Bootstrap* peut être appliqué à certains processus non stationnaires en ajustant la taille des blocs. Le choix de la taille des blocs est un paramètre fondamental dans cette approche. Une taille de bloc appropriée permet de capturer les dépendances sans compromettre l'efficacité statistique de l'estimation. LAHIRI (2003) et POLITIS et WHITE (2004) ont étudié des méthodes pour sélectionner la taille optimale des blocs, ce qui améliore la précision des estimations de variance et de covariance, en

particulier dans des domaines comme la finance et l'économie, où les dépendances entre observations sont fréquentes. Dans le cadre de cette étude, la taille des blocs a été traitée comme un hyperparamètre (défini plus précisément dans la suite) et déterminée par une procédure d'optimisation pour garantir des résultats adaptés au contexte des données.

Par ailleurs, des variantes telles que le *Moving Block Bootstrap* et le *Circular Block Bootstrap*, étudiées par LIU et SINGH (1992), permettent de généraliser cette méthode aux séries temporelles présentant des dépendances plus complexes ou des processus non stationnaires. Ces extensions élargissent le champ d'application du *Block Bootstrap*, notamment dans l'analyse des risques et la prise de décision en finance. Pour une illustration pratique de la méthodologie, les travaux de AUBERT-LASSARADE (2024) proposent des exemples détaillés, et l'algorithme 1 décrit la mise en œuvre concrète de cette approche. De plus, l'annexe A.2 fournit un exemple détaillé pour faciliter la compréhension et l'application de cette méthode.

Algorithme 1 Algorithme du *Bloc Bootstrap*

Données : Série temporelle multivariée

Initialisation :

block-length : longueur du bloc, définie par l'optimisation des hyperparamètres.

h : horizon de projection.

p : nombre de séries temporelles considérées.

Étape 1 : Calcul de la taille des résidus

Calculer la taille totale des résidus nécessaires :

taille des résidus = *block-length* × *p*.

Étape 2 : Génération des points de départ

Déterminer le nombre de points requis :

nombre de points = $\left\lceil \frac{h}{\text{block-length}} \right\rceil$.

Sélectionner aléatoirement les points de départ pour chaque bloc.

Exemple : Si $h = 8$ et $\text{block-length} = 3$, alors $\left\lceil \frac{8}{3} \right\rceil = 3$ points de départ, soit $\{2, 6, 1\}$ (choisis aléatoirement).

Étape 3 : Construction des résidus bootstrap

Utiliser les points de départ générés pour assembler les blocs de résidus de longueur *h*.

Ajouter ces résidus à la prédiction centrale pour créer une nouvelle simulation *bootstrap*.

Étape 4 : Répétition du processus

Répéter les étapes 2 et 3 jusqu'à obtenir le nombre de scénarios souhaité.

Après avoir présenté les méthodes d'implémentation du modèle GSE-RVFL, l'analyse de la projection historique permettra, dans la suite, d'évaluer en détail les performances de ce modèle. Cette évaluation portera notamment sur son efficacité dans le traitement des séries temporelles, en la comparant à celle de modèles classiques.

2.3 Description des modèles concurrents

Cette section proposera par un rappel des concepts fondamentaux des modèles VAR (*Vector Autoregression*), ARIMA (*AutoRegressive Integrated Moving Average*) et LSTM (*Long Short-Term Memory*). Ces modèles serviront de points de référence pour évaluer l'analyse prédictive réalisée à l'aide du modèle RVFL.

2.3.1 Modèle VAR

Le modèle VAR d'ordre p appliqué à un vecteur Y_t composé de k variables est formellement exprimé par l'équation suivante

$$Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (2.5)$$

où :

- Y_t est un vecteur $k \times 1$ des variables au temps t ;
- c représente un vecteur $k \times 1$ de constantes ;
- A_i sont des matrices $k \times k$ contenant les coefficients des retards ;
- ε_t est un vecteur $k \times 1$ des termes d'erreur.

La stationnarité du modèle VAR repose sur une condition fondamentale : les racines du polynôme caractéristique associé aux matrices de coefficients A_i doivent être situées à l'extérieur du cercle unité (LÜTKEPOHL (2005b)). Pour garantir la crédibilité des estimations, il est impératif de vérifier la stationnarité des séries temporelles utilisées. Une analyse préliminaire consiste à examiner l'auto-corrélation des séries. Si ces dernières s'avèrent non stationnaires, il est possible de les différencier une ou plusieurs fois afin de stabiliser leur moyenne et de réduire les tendances persistantes, une étape clé dans le traitement des données. Après avoir appliqué les différenciations nécessaires, des tests formels permettent de confirmer la stationnarité des séries. Parmi ces tests, le test de Dickey-Fuller Augmenté (ADF) évalue la présence d'une racine unitaire, indicateur de non-stationnarité (DICKEY et FULLER (1979)). Le test de Phillips-Perron (PP), quant à lui, identifie également la non-stationnarité tout en corrigeant les effets d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité dans les résidus (PHILLIPS et PERRON (1988)).

Ces procédures sont essentielles pour s'assurer que les séries temporelles répondent aux conditions nécessaires à une estimation robuste du modèle VAR. Une fois ces conditions remplies, le modèle peut être utilisé pour modéliser les relations dynamiques entre les variables et analyser les effets d'un choc sur l'ensemble du système.

Le modèle VAR excelle dans l'étude des interdépendances entre variables, en permettant de déterminer comment une perturbation sur une variable influence les autres. Par ailleurs, sa structure multivariée en fait un outil particulièrement adapté pour les prévisions, car il exploite simultanément l'information contenue dans toutes les séries du système. Pour une présentation détaillée et des applications du modèle VAR, se référer à RICHARDS (2003).

2.3.2 Modèle ARIMA

Un modèle ARIMA(p,d,q) est défini par trois composantes

$$\phi(B)(1 - B)^d X_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (2.6)$$

où :

- $\phi(B)$ est l'opérateur autorégressif, $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$;
- $(1 - B)^d$ est l'opérateur de différenciation d'ordre d ;
- $\theta(B)$ est l'opérateur de moyenne mobile, $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q$;
- B est l'opérateur de retard, $BX_t = X_{t-1}$;
- ε_t est un bruit blanc.

L'opérateur de différenciation $(1 - B)^d$ est utilisé pour transformer une série non stationnaire en une série stationnaire. Le modèle ARIMA est flexible et peut capturer une large gamme de comportements de séries temporelles grâce à ses composantes autorégressives et de moyenne mobile. Il est largement utilisé pour les prévisions univariées en raison de sa capacité à modéliser des séries temporelles avec des tendances et des cycles. Pour une compréhension approfondie du modèle ARIMA, voir RICHARDS (2021).

2.3.3 Modèle LSTM

Les réseaux de neurones récurrents (RNN) sont conçus pour traiter des séquences de données en conservant une mémoire des états antérieurs, ce qui permet de modéliser des dépendances temporelles. Cependant, les RNN traditionnels souffrent du problème de gradient évanescent, limitant leur capacité à apprendre des dépendances de longue durée. Ce problème se manifeste lorsque les gradients diminuent de manière exponentielle à travers les couches, rendant l'apprentissage inefficace pour les séquences longues.

Les réseaux de neurones LSTM, introduits par HOCHREITER et SCHMIDHUBER (1997), ont été développés pour surmonter cette limitation des RNN classiques. Le cours de HERAULT et CHATELAIN (2021) explique que les LSTM apportent une solution en introduisant une mémoire interne contrôlée par des « portes » spécifiques, qui régulent le flux d'information au sein de la cellule mémoire. Cette architecture permet de conserver et de transmettre efficacement des informations sur plusieurs étapes temporelles, en évitant la diminution excessive des gradients.

Composantes clés d'un LSTM

Une cellule LSTM est conçue pour gérer les dépendances à long terme en contrôlant le flux d'information au travers du réseau grâce à trois portes principales : la porte d'entrée, la porte d'oubli et la porte de sortie. Ces portes sont régies par des fonctions d'activation qui permettent de filtrer, retenir ou oublier des informations :

1. porte d'entrée : la porte d'entrée détermine quelles nouvelles informations doivent être ajoutées à l'état de la cellule mémoire à l'instant t . Elle est définie par

$$i_t = \sigma(W_{xi}x_t + W_{hi}h_{t-1} + b_i), \quad (2.7)$$

où i_t est l'activation de la porte d'entrée, σ est une fonction sigmoïde, W_{xi} et W_{hi} représentent les poids appliqués respectivement aux entrées x_t et aux sorties précédentes h_{t-1} , et b_i est un biais ;

2. porte d'oubli : la porte d'oubli contrôle quelles informations de la cellule mémoire doivent être oubliées ou conservées d'une étape temporelle à l'autre. Elle est définie par

$$f_t = \sigma(W_{xf}x_t + W_{hf}h_{t-1} + b_f), \quad (2.8)$$

où f_t est l'activation de la porte d'oubli, et les notations sont analogues à celles de la porte d'entrée ;

3. porte de sortie : la porte de sortie contrôle l'influence de l'état de la cellule mémoire sur la sortie du neurone. Elle est définie par

$$o_t = \sigma(W_{xo}x_t + W_{ho}h_{t-1} + b_o), \quad (2.9)$$

où o_t est l'activation de la porte de sortie, et les notations suivent le même principe.

Mise à jour de l'état de la cellule mémoire

L'état de la cellule mémoire, noté c_t , est mis à jour en fonction des nouvelles informations et des informations conservées de l'état précédent. Cette mise à jour combine la porte d'oubli, la porte d'entrée et l'activation candidate de l'état de la cellule, comme suit :

1. tout d'abord, une « candidate » g_t pour la mise à jour de l'état de la cellule mémoire est calculée

$$g_t = \tanh(W_{xc}x_t + W_{hc}h_{t-1} + b_c), \quad (2.10)$$

où g_t est l'activation candidate de l'état de la cellule, et $\tanh$ est une fonction d'activation hyperbolique qui aide à normaliser les valeurs entre -1 et 1 ;

2. ensuite, l'état de la cellule c_t est mis à jour comme suit

$$c_t = f_t \cdot c_{t-1} + i_t \cdot g_t, \quad (2.11)$$

où « $\cdot$ » représente le produit élément par élément. La première partie $f_t \cdot c_{t-1}$ retient une partie de l'état précédent, tandis que la seconde partie $i_t \cdot g_t$ ajoute les nouvelles informations.

Sortie de la cellule LSTM

La sortie de la cellule LSTM à l'instant t est déterminée par l'état actuel de la cellule c_t et la porte de sortie o_t

$$h_t = o_t \cdot \tanh(c_t), \quad (2.12)$$

où $\tanh(c_t)$ normalise l'état de la cellule, et o_t module l'influence de cet état sur la sortie finale. La figure 2.3 présente la structure interne d'un neurone LSTM, illustrant les flux d'informations et les interactions entre les portes d'entrée, d'oubli et de sortie.

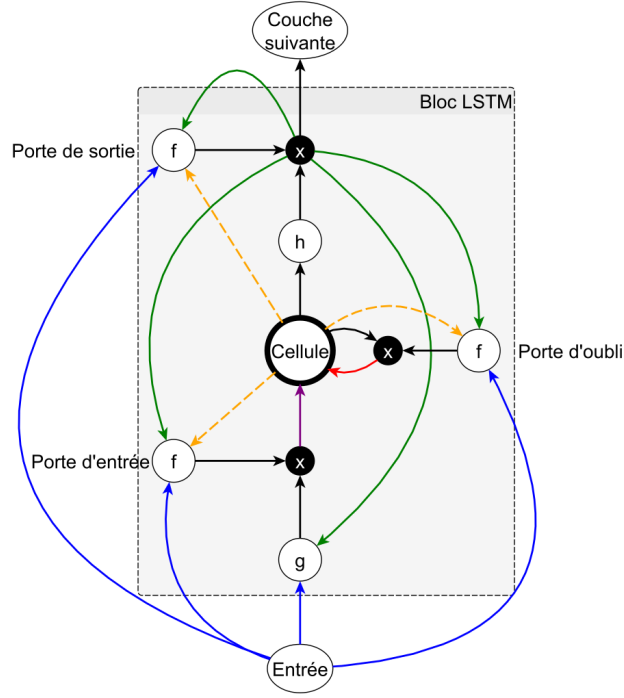


FIGURE 2.3 : Schéma d'un neurone LSTM avec mémoire interne contrôlée par les portes d'entrée (*input*), d'oubli (*forget*), et de sortie (*output*)

2.4 Analyse prédictive

Dans cette analyse prédictive, la performance de notre modèle RVFL est évaluée, des modèles classiques VAR et ARIMA, ainsi que du modèle de réseau de neurones LSTM, en analysant à la fois le *in-sample fit* et la performance *out-of-sample*. Les données ont été divisées en deux ensembles : un échantillon d'apprentissage représentant 75% des données et un échantillon de test représentant les 25% restants. Cette division permet de calibrer les modèles sur l'échantillon d'apprentissage (*in-sample fit*) pour évaluer dans quelle mesure ils capturent les caractéristiques internes des données, puis d'évaluer leur capacité à généraliser sur l'échantillon de test (performance *out-of-sample*).

Les métriques utilisées pour mesurer la performance prédictive sont la racine de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) et l'erreur absolue moyenne (MAE), chacune fournissant une perspective complémentaire sur la précision des prédictions. Le RMSE met davantage en évidence les erreurs importantes, tandis que le MAE permet de mesurer l'erreur moyenne sans accorder un poids excessif aux erreurs les plus élevées. Le RMSE est calculé comme suit

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}, \quad (2.13)$$

le MAE est donné par

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|. \quad (2.14)$$

Cette approche comparative sera appliquée à chacun des quatre modèles pour analyser leur *in-sample fit* ainsi que leur robustesse *out-of-sample*, en suivant la méthodologie de partition des données et d'évaluation des erreurs prédictives.

2.4.1 Cas du RVFL

Pour rappel, l'optimisation bayésienne, qui a été associée à une validation croisée, a été utilisée afin d'explorer efficacement l'espace des hyperparamètres. Cette approche permet d'identifier les configurations optimales du modèle en tenant compte de la variabilité des données. Le package R utilisé pour la projection est le package **ahead**, comme indiqué par MOUDIKI (2023), et en particulier, la fonction `ahead::ridge2f` a été utilisé.

Dans le cadre de cette étude, l'optimisation a porté sur sept hyperparamètres et sont aussi représenté dans le tableau 2.4 :

1. nombre de pas arrière (*lags*) : ce paramètre représente le nombre de valeurs passées de la série temporelle utilisées pour prédire les valeurs futures. Une plage de 5 à 30 a été explorée pour déterminer l'impact optimal sur les prédictions ;
2. nombre de nœuds dans la couche cachée (*nb_hidden*) : ce paramètre contrôle la complexité du modèle en ajustant le nombre de neurones dans la couche cachée. Une plage de 20 à 100 a été testée pour évaluer la capacité du modèle à capturer les dynamiques sous-jacentes des données ;
3. le paramètre λ_1 : utilisé pour la régression de Ridge sur les prédicteurs originaux, ce paramètre aide à prévenir le surapprentissage. Une plage de 1 à 1000 a été considérée pour trouver le niveau de régularisation optimal ;
4. le paramètre λ_2 : similaire à λ_1 mais appliqué aux prédicteurs transformés, ce paramètre a également été exploré dans une plage de 1 à 1000 ;
5. suite utilisée pour générer les poids de la couche cachée (*nodes_sim*) : ce paramètre détermine la méthode de génération des poids. Les suites considérées incluent *sobol*, *halton*, et *unif*, chacune offrant des caractéristiques distinctes pour la distribution des poids ;
6. la fonction d'activation (*activ*) : elle transforme les prédicteurs en sortie de la couche cachée. Les fonctions d'activation testées sont *relu*, *sigmoid*, et *tanh*, chacune ayant des propriétés uniques influençant la non-linéarité du modèle ;
7. la longueur du *block bootstrap* (*block_length*) : ce paramètre contrôle la taille des blocs utilisés pour le *bootstrap*, avec une plage de 100 à 200, afin de capturer efficacement la dépendance temporelle dans les données.

Paramètres	Valeurs testées
<i>block_length</i>	[100,200]
<i>lags</i>	[5,30]
<i>nb_hidden</i>	[20,100]
λ_1	[1,1000]
λ_2	[1,1000]
<i>nodes_sim</i>	Sobol, Halton, Unif
<i>activ</i>	ReLU, Sigmoid, Tanh

TABLE 2.4 : grille d'hyperparamètres pour le RVFL

Finalement, les meilleurs hyperparamètres pour l'analyse prédictive ont été déterminés grâce à l'intégration de l'optimisation bayésienne avec la validation croisée, minimisant ainsi l'erreur quadratique moyenne. Une recherche en grille (*grid search*) a été effectuée pour vérifier la convergence des ensembles d'hyperparamètres optimaux. Ce processus a impliqué une évaluation systématique de différentes combinaisons d'hyperparamètres pour identifier ceux qui offrent les meilleures performances et sont représentés dans le tableau 2.5.

<i>block_length</i>	<i>lags</i>	<i>nb_hidden</i>	<i>lambda_1</i>	<i>lambda_2</i>	<i>nodes_sim</i>	<i>activ</i>
120	30	82	5	1000	Sobol	ReLU

TABLE 2.5 : Liste des hyperparamètres

2.4.2 Cas du modèle VAR

Le modèle VAR a été implémenté en utilisant le *package* `statsmodels.tsa.api` de Python, particulièrement la fonction `VAR`. Ce *package* est bien documenté et largement utilisé pour les modèles de séries temporelles multivariées dans la communauté scientifique, comme le montrent les travaux de SEABOLD et PERKTOLD (2010) sur le développement de `statsmodels`.

Comme l'a montré AUBERT-LASSARADE (2024) dans ses travaux sur le modèle VAR, la première étape consiste à stationnariser la série temporelle (STM) si elle n'est pas stationnaire. Dans son étude, elle a vérifié la stationnarité en utilisant l'auto-corrélation, révélant que les séries de taux ne sont pas stationnaires, contrairement à celle des actions. En conséquence, les séries de taux ont été différenciées une première fois.

Pour confirmer la stationnarité, elle a également appliqué le test de Dickey-Fuller, dont les résultats ont montré des p-values inférieures à 0,01 pour toutes les séries, permettant ainsi de rejeter l'hypothèse nulle de non-stationnarité au niveau de signification de 5%. Cela a conduit à la conclusion que la STM est stationnaire.

Enfin, la deuxième étape de son analyse a consisté à optimiser le nombre de lags, déterminé comme étant 24, ce qui a permis de minimiser l'erreur (MSPL) avec une valeur de 0,52. Le modèle VAR utilisé provient du *package* `statsmodels.tsa.api` de Python.

2.4.3 Cas du modèle ARIMA

Pour modéliser les séries temporelles avec le modèle ARIMA, il est crucial de sélectionner les ordres optimaux, représentés par les paramètres (p, d, q) . Ces paramètres déterminent respectivement l'ordre de l'auto-régression, le degré de différenciation nécessaire pour rendre la série stationnaire, et l'ordre de la moyenne mobile. Dans cette étude, les séries ont déjà été rendues stationnaires grâce à une analyse VAR préalable, ce qui simplifie le processus de modélisation ARIMA.

La fonction `auto_arima` du *package* `pmdarima` en Python a été utilisée pour automatiser la sélection des ordres (p, d, q) . Cette fonction explore systématiquement différentes combinaisons de ces paramètres pour identifier celle qui minimise le Critère d'Information d'Akaike (AIC). L'AIC est une mesure qui évalue la qualité d'un modèle statistique en tenant compte à la fois de l'ajustement aux données et de la complexité du modèle. Il est défini par l'équation suivante : $AIC + 2k - 2\ln(L)$ où k est le nombre de paramètres du modèle et L est la valeur maximale de la fonction de vraisemblance. Un AIC plus bas indique un modèle qui offre un bon compromis entre complexité et ajustement, ce qui est crucial pour éviter le surajustement tout en capturant les dynamiques essentielles des données.

La procédure de `auto.arima` inclut plusieurs étapes clés. Tout d’abord, la fonction teste différentes valeurs pour p , d et q dans des plages définies par l’utilisateur ou par défaut. Pour chaque combinaison de paramètres, le modèle ARIMA correspondant est ajusté aux données, et l’AIC est calculé. Le modèle avec l’AIC le plus bas est ensuite sélectionné, car il représente le meilleur équilibre entre complexité et ajustement. Cette méthode garantit que le modèle choisi est à la fois suffisamment simple pour éviter le surajustement et suffisamment complexe pour capturer les caractéristiques essentielles des données. Les résultats de l’optimisation des modèles ARIMA pour chaque série temporelle sont résumés dans le tableau 2.6

Série	Ordre (p,d,q)
Rendement logarithmique	(5, 1, 0)
Première composante de NS	(0, 1, 0)
Deuxième composante de NS	(0, 1, 0)
Troisième composante de NS	(0, 1, 0)

TABLE 2.6 : Ordres ARIMA optimaux pour chaque série temporelle

2.4.4 Cas du modèle LSTM

À l’instar de notre approche pour le modèle RVFL, une optimisation des hyperparamètres du modèle LSTM a été entreprise. Cette étape est cruciale pour améliorer la performance prédictive du modèle et l’adapter au mieux à nos séries temporelles multivariées.

Afin d’optimiser les performances prédictives du modèle LSTM pour des séries temporelles multivariées, une optimisation par grille de recherche exhaustive a été mise en place. Cette approche systématique permet d’explorer toutes les combinaisons d’hyperparamètres et de sélectionner celle offrant les meilleurs résultats en termes de capacité de généralisation et de précision sur l’ensemble de test.

Le modèle a été implémenté avec la bibliothèque `Keras` de `Python` en utilisant une architecture `Sequential` intégrant des couches récurrentes, `Dense`, `Dropout`, et `Bidirectional`. La grille de recherche couvre les hyperparamètres influençant la complexité et l’apprentissage du modèle, tels que le nombre de couches, le nombre de neurones, et les fonctions d’activation. Le tableau 2.7 résume l’ensemble des valeurs testées pour chaque hyperparamètre au cours de cette optimisation.

Hyperparamètres	Valeurs testées
<i>layers</i>	1, 2, 3
<i>neurons</i>	64, 128, 256
<i>dropout</i>	0,1, 0,2, 0,3
<i>activation</i>	ReLU, tanh
<i>loss</i>	<i>mean_squared_error</i> , <i>huber_loss</i>
<i>optimizer</i>	adam, rmsprop
<i>batch_size</i>	32, 64, 128
<i>epochs</i>	200, 300, 500, 1000

TABLE 2.7 : Grille d’hyperparamètres pour le modèle LSTM

Suite à l’analyse des performances des différentes configurations testées, les hyperparamètres retenus pour le modèle LSTM sont présentés dans le tableau 2.8. Ces choix incluent l’utilisation de trois couches récurrentes LSTM, chacune avec 128 neurones, et une fonction d’activation `tanh`. Le modèle

est également régularisé par un taux de dropout de 0,2 pour réduire le risque de surapprentissage.

<i>layers</i>	<i>neurons</i>	<i>dropout</i>	<i>activation</i>	<i>loss</i>	<i>optimizer</i>	<i>batch_size</i>	<i>epochs</i>
3	128	0,2	tanh	<i>huber_loss</i>	adam	64	500

TABLE 2.8 : Configuration optimale d’hyperparamètres pour le modèle LSTM.

Afin d’assurer une convergence efficace tout en minimisant le risque de surapprentissage, des techniques de régularisation ont été appliquées, notamment l’arrêt anticipé (*EarlyStopping*) et la réduction adaptative du taux d’apprentissage (*ReduceLROnPlateau*). L’arrêt anticipé permet de stopper l’entraînement lorsque les améliorations sur l’ensemble d’entraînement deviennent marginales, limitant ainsi le risque de surapprentissage. Parallèlement, la réduction du taux d’apprentissage ajuste dynamiquement ce taux en fonction des performances, permettant un affinement progressif du modèle.

2.4.5 Résultats de l’analyse prédictive

Les quatre modèles de prédiction (RVFL, ARIMA, VAR et LSTM) ont été appliqués pour évaluer leur capacité à capturer les dynamiques complexes des séries temporelles multivariées. Les performances ont été mesurées à l’aide de deux métriques standard : l’erreur quadratique moyenne (RMSE) et l’erreur absolue moyenne (MAE), calculées séparément pour les ensembles d’apprentissage (*in-sample*) et de test (*out-of-sample*). Les données ont été divisées en deux parties : 75 % pour l’apprentissage, soit la période allant de 2001 à 2017 et 25 % pour le test (période de 2017 à 2023), assurant ainsi une évaluation de la capacité des modèles à généraliser sur des données inédites. Les tableaux 2.9 et 2.10 synthétisent les résultats obtenus, mettant en évidence les performances des modèles en termes de MAE et RMSE pour les ensembles d’apprentissage et de test, respectivement.

Modèles	VAR		ARIMA		LSTM		RVFL	
Mesure d’erreur	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE
Rendement logarithmique	2.00	2.55	4.17	5.65	3.74	4.67	1.75	2.20
Première composante de NS	0.09	0.11	0.18	0.48	0.20	0.27	0.18	0.23
Deuxième composante de NS	0.11	0.14	0.22	0.33	0.27	0.35	0.22	0.30
Troisième composante de NS	0.18	0.22	0.42	0.54	0.46	0.58	0.41	0.50

TABLE 2.9 : Métriques d’erreur *In-sample* (Entraînement).

Modèles	VAR		ARIMA		LSTM		RVFL	
Mesure d’erreur	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE
Rendement logarithmique	4.71	5.85	4.04	5.33	4.25	5.57	4.20	5.30
Première composante de NS	0.74	0.90	0.92	1.15	0.31	0.37	0.28	0.34
Deuxième composante de NS	0.84	0.98	1.13	1.43	0.89	1.10	0.65	0.80
Troisième composante de NS	2.80	3.33	2.25	2.96	0.91	1.27	1.00	1.20

TABLE 2.10 : Métriques d’erreur *Out-of-sample* (Test).

L’analyse des métriques *in-sample* (tableau 2.9) et *out-of-sample* (tableau 2.10) révèle des différences significatives entre les modèles. Parmi ceux-ci, le modèle RVFL se distingue avec des valeurs de MAE et RMSE particulièrement faibles sur l’ensemble de test, en particulier pour les séries temporelles liées au CAC40 et aux taux longs. Ces résultats suggèrent une capacité de généralisation accrue, notamment face à des dynamiques complexes et non linéaires. À l’inverse, bien qu’efficace *in-sample*, le

modèle ARIMA montre une augmentation marquée des erreurs *out-of-sample*, notamment pour les séries caractérisées par une forte variabilité, ce qui souligne ses limites dans la capture des dynamiques non linéaires.

Le modèle VAR, quant à lui, offre une performance stable mais modérée dans les deux ensembles, sans toutefois égaler les résultats du RVFL. Enfin, le modèle LSTM, malgré sa capacité avancée, présente des performances mitigées, probablement en raison d'une configuration d'hyperparamètres sous-optimale ou d'une complexité excessive par rapport à la taille des données utilisées.

Ces observations, basées sur les métriques quantitatives, peuvent être complétées par une analyse visuelle des résultats prédictifs. Les graphiques de la figure 2.4 permettent d'examiner plus en détail la capacité des différents modèles à reproduire les séries temporelles sur l'ensemble de test.

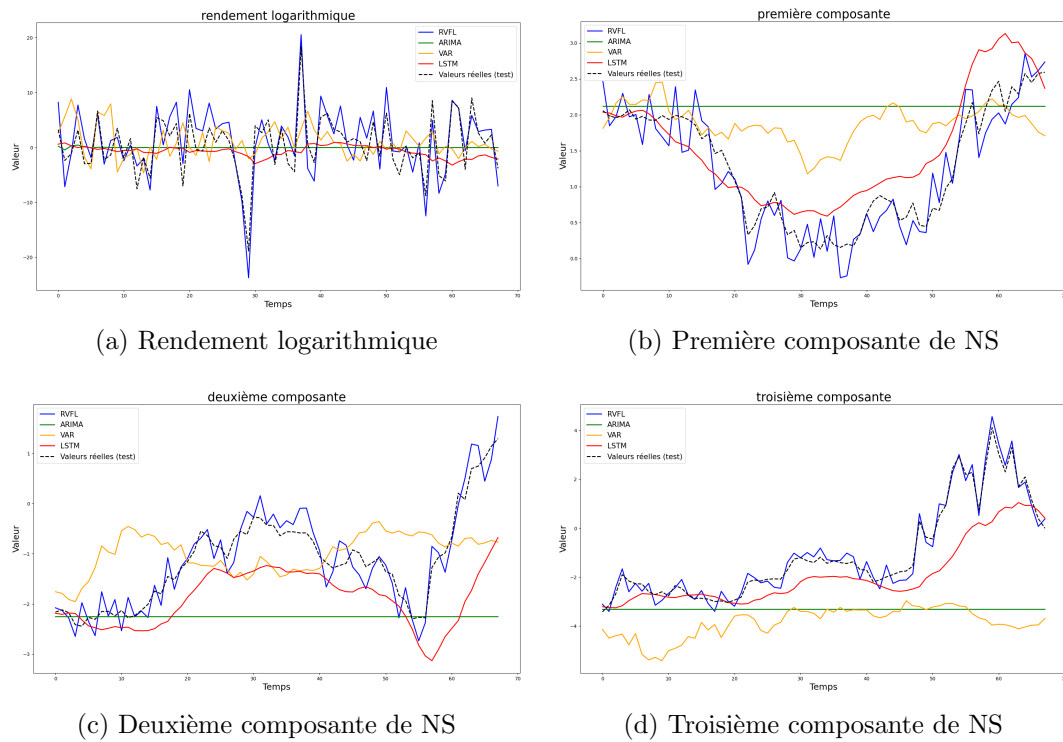


FIGURE 2.4 : Comparaison des quatre modèles avec les données réelles (test)

L'examen des graphiques présentés à la figure 2.4 complète les résultats quantitatifs. Le modèle RVFL semble globalement bien s'aligner sur les valeurs réelles, ce qui suggère une certaine adaptabilité aux variations observées dans les séries temporelles. Le modèle VAR, tout en capturant correctement les tendances générales, paraît moins réactif aux périodes de volatilité élevée. Le modèle LSTM offre des performances visuelles proches des valeurs réelles, mais semble lisser les variations les plus rapides, ce qui peut entraîner une perte de précision dans les phases de fluctuations marquées. Quant au modèle ARIMA, il semble moins performant pour suivre les fluctuations dynamiques, en particulier pour les séries temporelles du rendement logarithmique et de la deuxième composante.

En conclusion, les résultats obtenus mettent en évidence des différences notables entre les modèles étudiés. Le modèle RVFL a montré des performances satisfaisantes en termes de précision et de généralisation, notamment pour les séries temporelles complexes. Le LSTM, tout en présentant des résultats intéressants pour des séries relativement stables, semble moins adapté aux variations rapides. Par ailleurs, les modèles VAR et ARIMA, bien qu'utiles pour certaines applications, se montrent moins performants face aux dynamiques plus complexes ou non linéaires.

Ces observations soulignent l'importance de choisir des modèles capables de capturer des relations complexes dans le cadre des prévisions de séries temporelles financières. Étant donné les résultats satisfaisants obtenus avec le modèle RVFL lors de l'analyse prédictive, il est pertinent d'explorer son application à la projection historique sur un horizon temporel élargi, par exemple 20 ans. Cette étape permettra d'évaluer sa robustesse et son efficacité dans un contexte de prévision à long terme, et d'approfondir la compréhension des tendances temporelles des séries étudiées.

2.5 Projection historique du RVFL

2.5.1 Résultats des projections du modèle RVFL

Dans la partie précédente, la capacité prédictive du modèle a été explorée. Les résultats de la projection du modèle RVFL sont maintenant présentés. Pour cette analyse, le modèle a été entraîné sur les données couvrant la période de janvier 2001 à mai 2023, avant d'être utilisé pour effectuer des projections sur l'horizon 2023-2043, soit 240 mois (20 ans). Le nombre de simulations a été limité à 100 pour des raisons de temps de calcul, bien que l'objectif final reste de réaliser 1000 simulations, conformément aux pratiques des modèles de gestion actif-passif classiques. La validation croisée a été relancée sur l'ensemble de la série temporelle, et non uniquement sur l'échantillon d'entraînement (*train*), ce qui a permis de sélectionner les meilleurs hyperparamètres pour le modèle RVFL. Cette approche garantit une robustesse et une précision optimales dans les projections à long terme, comme illustré dans le tableau 2.11.

<i>block_length</i>	<i>lags</i>	<i>nb_hidden</i>	<i>lambda_1</i>	<i>lambda_2</i>	<i>nodes_sim</i>	<i>activ</i>
120	29	82	5	1000	Sobol	ReLU

TABLE 2.11 : Hyperparamètres pour le modèle RVFL

Projections relatives aux actions CAC40

La projection du log-rendement des actions du CAC40 sur 20 ans a été réalisée à l'aide de 1000 simulations, permettant d'évaluer la variabilité et l'incertitude des rendements futurs. Les valeurs historiques correspondent aux données initiales et sont représentées sur le graphique de la 1ère à la 269ème valeur. À partir de la 270ème jusqu'à la 629ème valeur, les simulations sont observées, c'est-à-dire les projections.

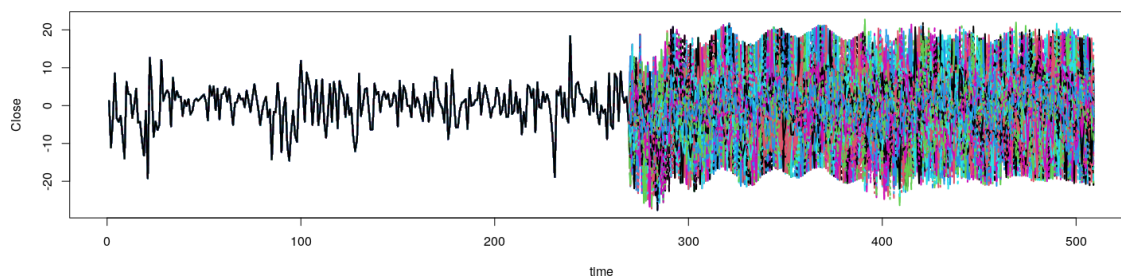


FIGURE 2.5 : Historique et projection sur 240 mois (20 ans) pour 1000 simulations du log-rendement pour le CAC40

La figure 2.5 montre les trajectoires simulées du log-rendement pour le CAC40, avec l'historique jusqu'à la période actuelle suivi des projections pour les 20 prochaines années. Les simulations, illustrées par un ensemble dense de courbes, montrent les éventuels scénarios extrêmes, tout en mettant en évidence la trajectoire centrale attendue. Pour mieux quantifier cette variabilité, une analyse de la distribution des projections a été réalisée. La figure 2.6 illustre les intervalles de prédiction associés aux différentes trajectoires projetées.

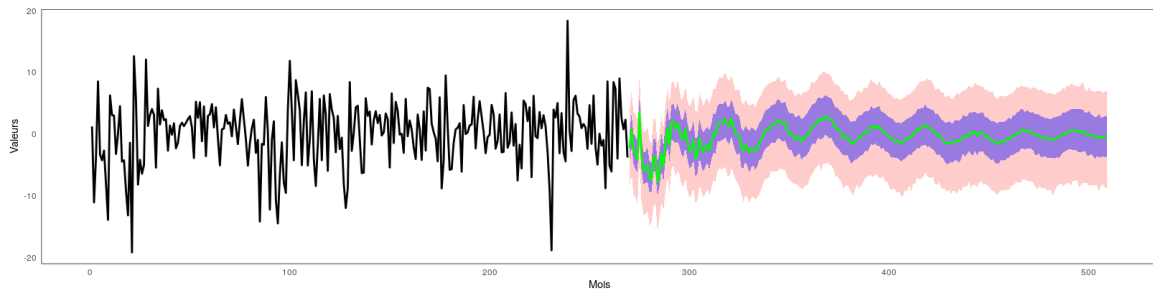


FIGURE 2.6 : Graphique de la distribution des 1000 projections du log-rendement pour le CAC40

La figure 2.6 présente la distribution des 1000 projections, avec la moyenne représentée par la courbe centrale (en vert) et les intervalles de prédiction à 25%-75% et 5%-95% en violet et rose, respectivement. Ces intervalles encadrent la trajectoire moyenne, fournissant une estimation de la variabilité attendue. L'intervalle 5%-95% capture les scénarios extrêmes, tandis que l'intervalle 25%-75% montre la majorité des scénarios intermédiaires.

Les projections montrent une variabilité initiale élevée, influencée par la forte volatilité des données récentes, qui diminue progressivement au fil du temps. Cette stabilisation résulte des propriétés du modèle RVFL, qui lisse les trajectoires grâce à la régularisation et l'intégration de structures non linéaires. L'apparition d'une saisonnalité, absente des historiques, s'explique par la sensibilité du modèle à amplifier des motifs faibles ou latents présents dans les données d'entraînement, rendant ces dynamiques plus visibles lors des extrapolations.

En résumé, les projections obtenues montrent une certaine cohérence avec la reproductibilité des scénarios historiques, bien que des comparaisons avec des modèles existants soient nécessaires pour en évaluer pleinement la pertinence. Cette analyse permet d'obtenir une vision plus approfondie des tendances potentielles des rendements du CAC40. Dans la suite, l'étude portera sur les projections des taux.

Projections relatives aux taux

Les projections des différentes composantes liées aux taux, réalisées sur un horizon de 20 ans (240 mois), sont illustrées ci-dessous. Ces simulations ont été réalisées à l'aide de 1000 trajectoires pour capturer la variabilité potentielle et fournir des estimations robustes des tendances futures. Les projections couvrent trois composantes de NS : le taux long (composante 1), le facteur de rotation (composante 2) et la convexité (composante 3).

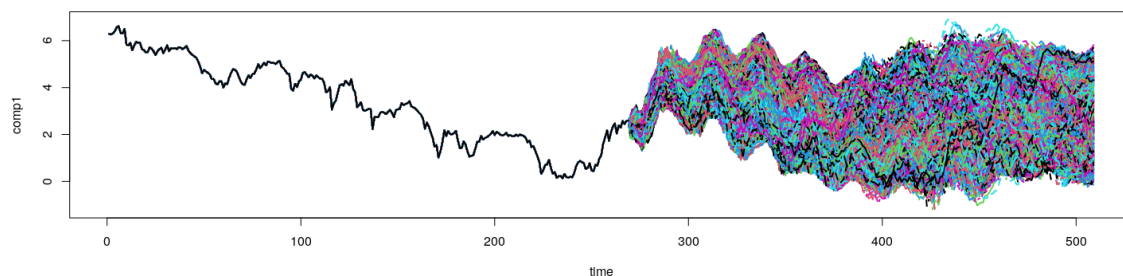


FIGURE 2.7 : Historique et projection sur 240 mois (20 ans) pour 1000 simulations du taux long

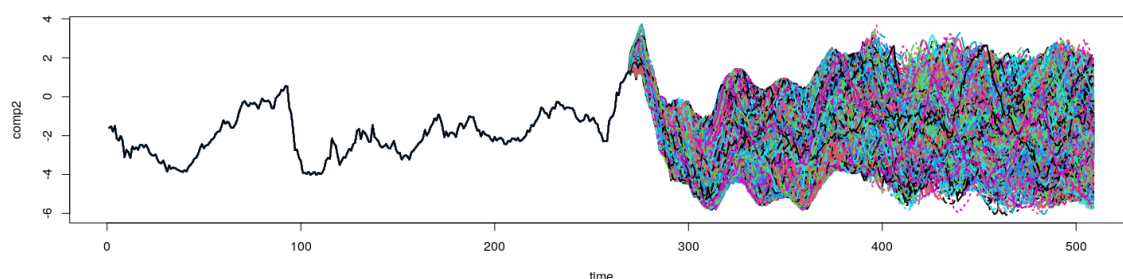


FIGURE 2.8 : Historique et projection sur 240 mois (20 ans) pour 1000 simulations du facteur de rotation

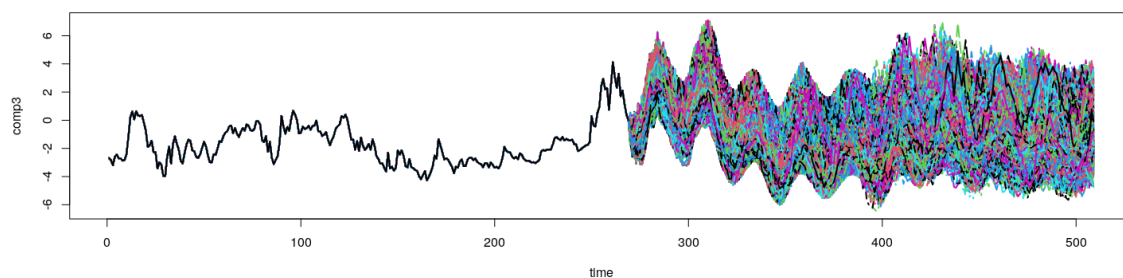


FIGURE 2.9 : Historique et projection sur 240 mois (20 ans) pour 1000 simulations de la convexité

Les résultats mettent en évidence des comportements distincts entre les composantes, illustrant des niveaux variés de stabilité et de sensibilité aux changements économiques. La première composante, correspondant au taux long, se caractérise par des fluctuations modérées et une concentration des trajectoires simulées autour de la moyenne (figure 2.7). Cette tendance relativement stable traduit une certaine résilience face aux chocs économiques. Le taux long est donc particulièrement pertinent pour des stratégies d'investissement à faible risque, centrées sur des rendements fixes et une gestion à long terme.

La deuxième composante, associée au facteur de rotation, reflète une variabilité plus importante (figure 2.8). Cette composante, qui traduit les ajustements liés à la pente de la courbe des taux, présente une dispersion plus large dans ses projections. Cette volatilité indique une sensibilité accrue aux

fluctuations des conditions de marché, nécessitant une gestion dynamique et une capacité à s'adapter rapidement aux scénarios imprévisibles.

Enfin, la troisième composante, liée à la convexité, se distingue par une dispersion encore plus importante des trajectoires simulées, particulièrement sur le long terme (figure 2.9). Étant la plus sensible aux variations extrêmes des taux, cette composante accentue les risques pour les actifs fortement exposés, tels que les obligations à longue échéance. Cela impose une gestion particulièrement prudente et des stratégies ciblées pour atténuer les impacts des mouvements extrêmes des taux.

Ces observations permettent de mieux comprendre les spécificités de chaque composante du modèle de Nelson-Siegel. Afin d'approfondir l'analyse, la distribution des 1000 projections sera examinée plus en détail comme pour les actions CAC 40. Celle-ci est représentée par la courbe centrale (moyenne) en vert et des intervalles de prédiction à 25%-75% et 5%-95%, figurés en violet et rose, respectivement. Ces intervalles offrent une visualisation claire de la variabilité attendue : l'intervalle 25%-75% correspond aux scénarios intermédiaires, tandis que l'intervalle 5%-95% englobe les scénarios extrêmes. Cette analyse détaillée permettra de mieux appréhender la stabilité et les incertitudes associées à chacune des composantes.

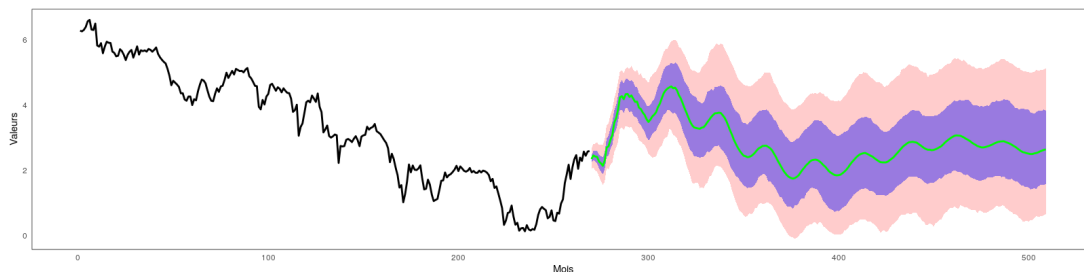


FIGURE 2.10 : Graphique de la distribution des 1000 projections du taux long

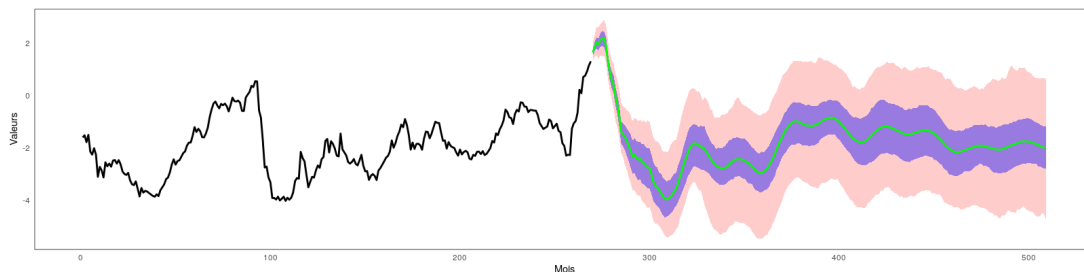


FIGURE 2.11 : Graphique de la distribution des 1000 projections du facteur de rotation

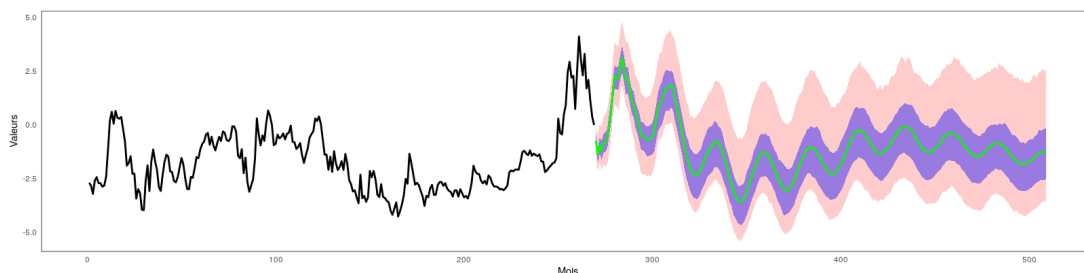


FIGURE 2.12 : Graphique de la distribution des 1000 projections de la convexité

Comme observé pour le rendement du CAC 40, les projections présentent une variabilité initiale élevée, influencée par la volatilité récente des données historiques. Cette variabilité diminue avec le

temps, en raison des mécanismes de régularisation et de traitement des structures non linéaires propres au modèle RVFL. Une caractéristique notable est l'émergence possible de motifs saisonniers dans les trajectoires, bien qu'ils soient absents des historiques. Ce phénomène reflète la sensibilité du modèle à amplifier des motifs faibles ou latents dans les données d'entraînement.

L'analyse des projections met en évidence des comportements différenciés entre les composantes. Le taux long (figure 2.10) montre une tendance globalement stabilisée avec une dispersion relativement contenue autour de la moyenne, indiquant une certaine prévisibilité à long terme. En revanche, le facteur de rotation (figure 2.11) connaît une volatilité initiale marquée, suivie d'un élargissement progressif de l'intervalle de prédiction, traduisant une sensibilité accrue aux variations de marché. La convexité (figure 2.12) affiche également une dispersion significative et des fluctuations plus prononcées, soulignant une dynamique plus instable et potentiellement cyclique.

En somme, à l'instar de la série d'actions, les projections des séries de taux révèlent une cohérence globale tout en mettant en évidence des dynamiques différenciées, justifiant ainsi l'adoption d'approches spécifiques selon les composantes. Afin d'approfondir l'analyse, une comparaison a été réalisée avec d'autres modèles. Un premier test a été mené à l'aide du modèle de Black-Scholes, fondé sur des hypothèses paramétriques, afin d'évaluer si la flexibilité du RVFL permet d'obtenir des trajectoires plus conformes aux observations historiques. Une seconde comparaison a été effectuée avec un réseau de neurones récurrent LSTM, conçu pour capturer des dynamiques complexes directement à partir des données. Ces analyses offrent une évaluation approfondie des performances du GSE-RVFL en les replaçant dans le contexte de modèles alternatifs.

2.5.2 Comparaison avec des modèles paramétriques : modèle Black-Scholes

Afin d'évaluer les projections du modèle RVFL, une comparaison a été réalisée avec le modèle paramétrique classique Black-Scholes (BS), largement utilisé pour la valorisation d'actifs financiers. Sous ce modèle, la dynamique du prix d'un actif S_t est décrite par l'équation différentielle stochastique suivante

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.15)$$

où μ représente le drift (taux de croissance attendu), σ la volatilité de l'actif, et W_t un processus de Wiener (mouvement brownien standard). La solution analytique de cette équation est donnée par

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right), \quad (2.16)$$

où S_0 est le prix initial de l'actif.

Les paramètres utilisés pour les simulations sont $\mu = 0,07$ et $\sigma = 0,05$ (5,23%), estimés à partir des données historiques du CAC 40. Ces valeurs permettent d'assurer une comparaison cohérente entre le modèle Black-Scholes et le modèle RVFL. Le prix initial est fixé à $S_0 = 100$ et les projections couvrent un horizon de 20 ans (240 points mensuels).

Projections des prix et distributions

Les trajectoires des prix simulés sur 20 ans pour les deux modèles sont illustrées dans la figure 2.13. Le modèle RVFL, de nature non paramétrique, affiche une plus grande flexibilité, permettant de capturer des fluctuations importantes et des scénarios extrêmes. En revanche, le modèle BS, basé sur des hypothèses simplifiées, génère des trajectoires plus resserrées autour de la tendance centrale,

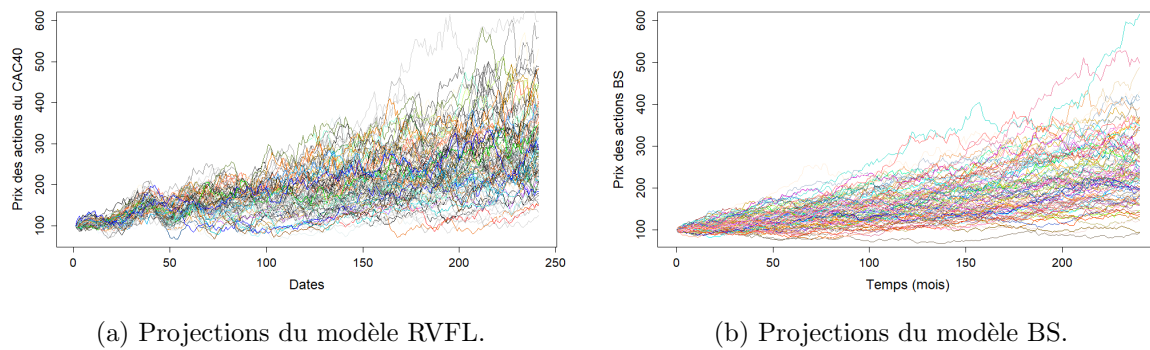


FIGURE 2.13 : Projections des prix des actifs sur 240 mois (20 ans) selon les modèles RVFL (à gauche) et BS (à droite).

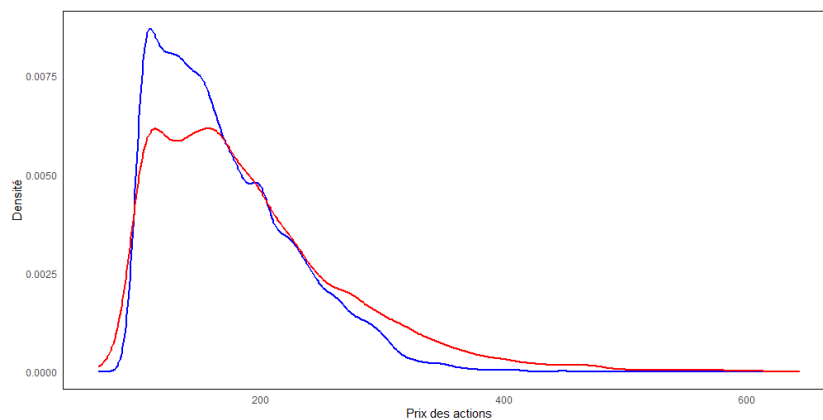


FIGURE 2.14 : Distributions des prix pour 20 ans pour les modèles RVFL et BS.

reflétant une volatilité constante. Pour mieux comparer les comportements des deux modèles, la figure 2.14 présente les distributions des prix simulés sur la projection des 20 ans.

Les distributions des prix sont présentées dans la figure 2.14. Le modèle Black-Scholes (en bleu) montre une distribution étroite et un pic marqué autour de valeurs proches de la moyenne. À l'inverse, le modèle RVFL (en rouge) présente une distribution plus étalée, marquée par des queues longues, indiquant une meilleure prise en compte des scénarios extrêmes ou atypiques.

Analyse des risques via la *Value at Risk* (VaR)

En complément des trajectoires et distributions de prix, une analyse de la VaR a été réalisée. La VaR, qui mesure la perte maximale potentielle pour un niveau de confiance donné, permet d'évaluer les risques financiers associés aux deux modèles.

Le tableau 2.12 présente les valeurs de VaR à un horizon d'un an pour différents niveaux de confiance (α). Les résultats montrent des différences notables entre les deux approches.

Les résultats de la VaR mettent en évidence des différences significatives entre les deux modèles. Pour le modèle RVFL, les valeurs de VaR sont légèrement plus faibles pour les faibles niveaux de confiance (0.5%, 1%), ce qui suggère une meilleure prise en compte des scénarios de perte extrême. En revanche, les valeurs aux quantiles supérieurs (95%, 99%) sont plus élevées, reflétant une capacité accrue à capturer des variations importantes ou des gains élevés.

α	0.5%	1%	5%	95%	99%	99.5%
VaR RVFL Prix à 1 an	98,50	100,75	110,00	144,50	153,75	155,30
VaR BS Prix à 1 an	113,42	114,15	117,72	138,42	143,97	145,26

TABLE 2.12 : Comparaison des *Value-at-Risk* des prix des actions pour différents niveaux de confiance sur un horizon d'un an

En ce qui concerne le modèle Black-Scholes, les valeurs de VaR sont plus élevées pour les faibles quantiles, traduisant une moindre prise en compte des scénarios de perte extrême. Pour les quantiles supérieurs, les résultats sont plus resserrés, ce qui est cohérent avec l'hypothèse de volatilité constante qui caractérise ce modèle.

Pour conclure, le modèle RVFL apparaît cohérent lorsqu'il est comparé à un modèle paramétrique classique tel que Black-Scholes, notamment en raison de résultats alignés sur les moyennes tout en capturant des dynamiques plus volatiles. Cette capacité à modéliser des scénarios extrêmes et des comportements atypiques le rend potentiellement plus représentatif de la réalité des marchés financiers, ce qui constitue un atout important dans une perspective de gestion et d'évaluation des risques.

2.5.3 Comparaison avec un modèle de réseaux de neurones : le modèle LSTM

Dans cette dernière partie du chapitre, une comparaison avec le modèle LSTM est effectuée. Tout d'abord, la distribution des prédictions générées par le modèle LSTM est examinée pour évaluer sa capacité à capturer les dynamiques des données et à gérer l'incertitude. Ensuite, les projections du LSTM avec celles du modèle RVFL sont comparées, afin de mettre en lumière les forces et les limites respectives des deux approches dans différents contextes.

De manière similaire au modèle RVFL, une validation croisée a été réalisée sur l'ensemble de la série temporelle pour optimiser les hyperparamètres du modèle LSTM. La configuration optimale obtenue est présentée dans le tableau 2.13.

<i>layers</i>	<i>neurons</i>	<i>dropout</i>	<i>activation</i>	<i>loss</i>	<i>optimizer</i>	<i>batch_size</i>	<i>epochs</i>
3	128	0,3	<i>tanh</i>	<i>huber_loss</i>	<i>adam</i>	64	1000

TABLE 2.13 : Configuration optimale d'hyperparamètres pour le modèle LSTM.

L'historique (en noir), les intervalles de prédiction 5%-95% (en rouge) et 25%-75% (en violet), ainsi que la moyenne des prédictions (en vert), illustrés dans la figure 2.15, permettent d'évaluer la précision des projections et de repérer les zones d'incertitude du modèle.

Les prédictions du modèle LSTM, illustrées dans la figure 2.15, montrent une capacité générale à suivre les cycles principaux des séries temporelles. Les intervalles de prédiction 25%-75% capturent correctement les tendances générales des données, tandis que les intervalles plus larges (5%-95%) mettent en évidence une incertitude notable, particulièrement dans les zones de forte variabilité ou de ruptures. La moyenne des prédictions (ligne verte) s'aligne globalement avec les données historiques, bien que des divergences soient visibles dans les environnements très irréguliers.

Cette analyse illustre la capacité du modèle LSTM à ajuster ses prédictions aux dynamiques complexes des données tout en intégrant une mesure d'incertitude. Pour évaluer de manière approfondie les performances relatives des deux modèles, une comparaison entre le LSTM et le RVFL est réalisée. La figure 2.16 présente leurs prévisions respectives, mettant en évidence leurs différences en termes de précision, de gestion des incertitudes et de sensibilité aux variations des données.

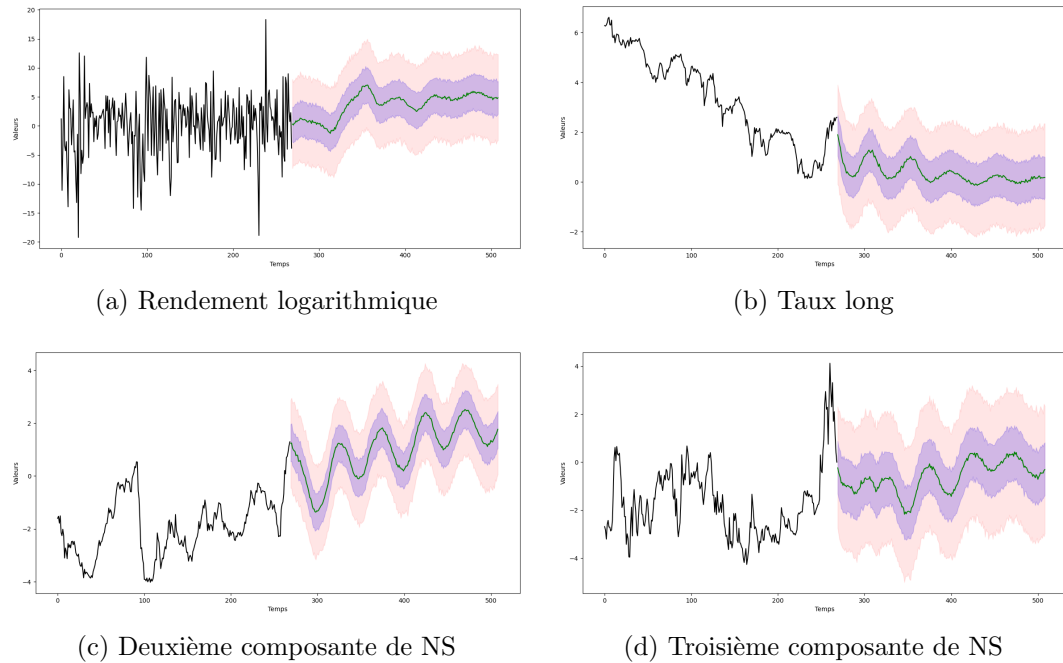


FIGURE 2.15 : Historique et distribution des projections du modèle LSTM

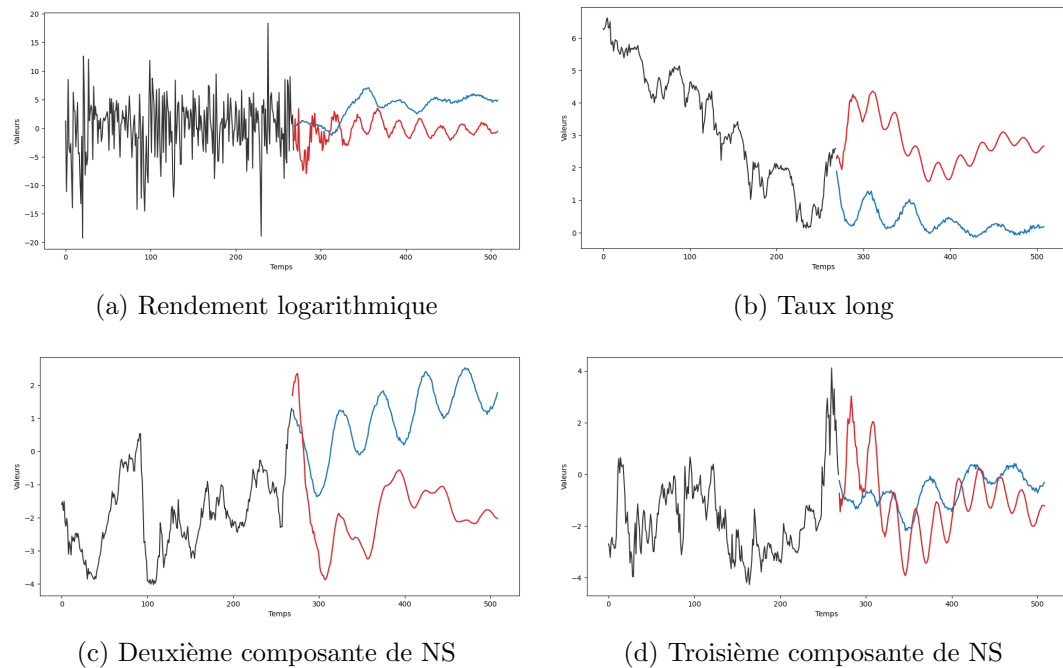


FIGURE 2.16 : Comparaison des projections du modèle RVFL (en rouge) et LSTM (en bleu) dans le scénario central

Les projections fournies par le modèle LSTM (en bleu) dans la figure 2.16 révèlent une capacité notable à représenter des cycles complexes et des variations non linéaires présentes dans les données. Cette flexibilité permet au LSTM de s'adapter aux structures imprévisibles et aux ruptures éventuelles dans les séries temporelles. Toutefois, cette adaptabilité peut entraîner des écarts dans les prédictions, notamment dans les zones caractérisées par des oscillations fréquentes ou des comportements volatils,

comme observé dans les segments finaux des graphiques. Ces écarts traduisent une incertitude accrue inhérente à la capacité du modèle à explorer des dynamiques non standard.

En parallèle, les projections du modèle RVFL (en rouge) démontrent une stabilité remarquable, avec des prévisions qui suivent de manière régulière les grandes tendances historiques. Ce modèle est efficace pour modéliser les cycles principaux et limiter les fluctuations excessives. Par exemple, dans des environnements dynamiques où les oscillations sont marquées, les courbes issues du RVFL présentent une atténuation des variations, ce qui souligne son aptitude à maintenir une certaine régularité. Cependant, dans des contextes où les données montrent des variations rapides ou des structures fortement non linéaires, le RVFL peut manquer de précision, comme en témoignent certaines zones des graphiques.

En conclusion, tout comme la comparaison réalisée avec un modèle paramétrique a démontré la pertinence des projections du modèle RVFL, l'analyse comparative avec un modèle de réseaux de neurones LSTM confirme également la cohérence des prévisions fournies par le RVFL. Malgré ses limites dans les environnements présentant des variations rapides ou des structures non linéaires, le modèle RVFL offre des projections stables, particulièrement adaptées aux scénarios où la régularité et la robustesse sont essentielles.

Chapitre 3

Projections en univers risque-neutre

Les travaux de CAJA (2012) soulignent que la directive SII impose plusieurs exigences qui visent à renforcer la stabilité et la transparence des évaluations de risque. Premièrement, il est nécessaire d'estimer la distribution de la marge actif-passif à un horizon donné en utilisant la probabilité historique. Deuxièmement, il est requis de calculer les provisions selon une logique de *market consistency*, ce qui implique que le niveau de *Best Estimate* des provisions doit être aligné sur le prix de la couverture financière, en utilisant la probabilité risque-neutre.

Le premier chapitre a permis de mettre en évidence la complexité inhérente à la modélisation précise du prix de marché du risque. Dans ce cadre, le passage de la mesure $\mathbb{P}$ à la mesure $\mathbb{Q}$ nécessite plusieurs choix méthodologiques pour répondre aux exigences de SII, notamment en matière de neutralité au risque. En raison de la non-observabilité directe du prix du risque, il est souvent préférable d'éviter des modèles paramétriques excessivement complexes. Dans cette optique, ce chapitre propose une méthode novatrice permettant d'ajuster les projections historiques, obtenues via le générateur de scénarios économiques du chapitre précédent, afin de les rendre neutres au risque. La méthodologie retenue ainsi que ses applications pratiques seront détaillées, suivies d'une analyse des résultats obtenus et d'une évaluation de leur cohérence avec les conditions de marché.

3.1 Approche pour les projections risque-neutres

Cette section introduit la méthodologie développée pour transformer des projections fondées sur la probabilité historique en projections fondées sur la probabilité risque-neutre, une transition essentielle pour assurer la conformité avec les principes de SII. Cette approche tient compte de deux facteurs de risque principaux : le risque de taux et le risque d'action. La méthodologie repose donc sur des ajustements spécifiques pour chaque type de risque, adaptés à leurs caractéristiques propres.

$\beta_{1,t,j}$, $\beta_{2,t,j}$ et $\beta_{3,t,j}$ sont respectivement la première, deuxième et troisième composante projetée de Nelson-Siegel obtenues via le modèle RVFL pour l'instant t , la simulation j et la maturité T .

3.1.1 Modélisation du risque de taux

La modélisation du risque de taux repose sur un processus structuré visant à transformer des projections historiques des taux zéro-coupon en des projections neutres au risque. Cette démarche s'appuie sur trois étapes principales :

1. **reconstruction des taux zéro-coupon (ZC)** à partir des données historiques ;

2. **alignement des taux projetés** en les alignant, en moyenne, sur le taux sans risque, une étape préliminaire nécessaire pour réduire les biais et préparer la neutralité au risque ;
3. **calibration d'un paramètre d'ajustement dynamique** intégrant la volatilité observée sur le marché pour garantir une cohérence avec les conditions de marché et ajuster les prix des instruments dérivés (swaptions) modélisés.

Cette méthodologie permet d'assurer une cohérence entre les projections des taux et les conditions de marché tout en respectant les principes de neutralité au risque. Avant de détailler les trois étapes principales, il est nécessaire de présenter un concept clé pour la modélisation : **la courbe de taux sans risque utilisée comme référence dans le modèle**. La courbe choisie est cohérente avec les données de marché actuelles (courbe de l'EIOPA) et représente les taux sans risque, pour des maturités allant t de 1 à 240 mois qui débute le 30 juin 2023. Ce taux, noté $R(0, t)$, est central dans les ajustements nécessaires pour garantir l'absence d'opportunités d'arbitrage.

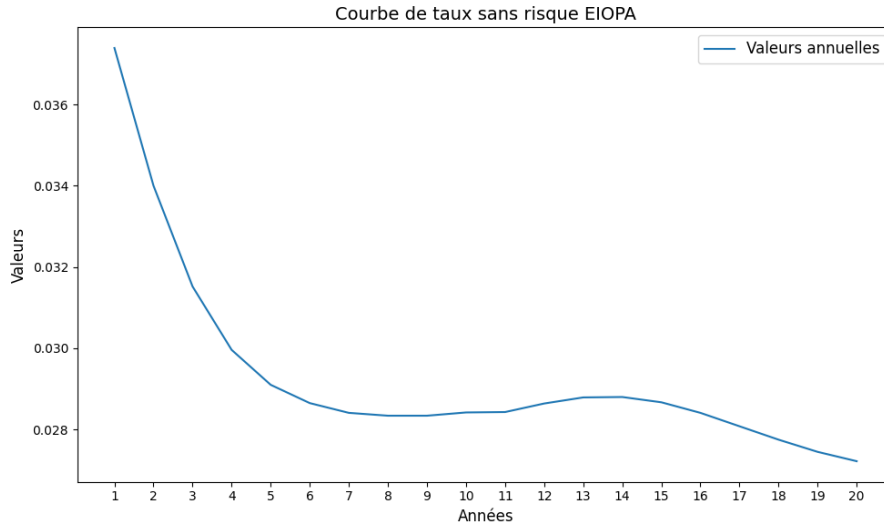


FIGURE 3.1 : Courbe de taux sans risque de l'EIOPA

Reconstruction des taux ZC

La reconstruction des taux zéro-coupon repose sur le modèle de Nelson-Siegel, qui permet de capturer les dynamiques des courbes de taux à travers trois composantes :

- β_1 , décrit le niveau général des taux (taux long),
- β_2 , représente la pente de la courbe,
- β_3 , modélise la courbure.

Ces composantes sont obtenues à partir des projections historiques en utilisant le modèle RVFL présenté précédemment. La formule générale pour les taux zéro-coupon est donnée par

$$R(t, T, j) = \beta_{1,t,j} + \beta_{2,t,j} \cdot \frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} + \beta_{3,t,j} \cdot \left(\frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} - \exp(-T/\lambda) \right), \quad (3.1)$$

où, t est l'instant initial, T est la maturité et j correspond à la j -ième simulation et λ est un paramètre d'échelle fixé à 2,1744 (valeur optimal obtenu dans le chapitre précédent 2.1.1).

Les taux $R(t, T, j)$ sont calculés pour 1000 simulations couvrant une période de 240 mois (20 ans) et des maturités T allant de 1 à 20 ans. Cette étape constitue une base essentielle pour les ajustements nécessaires à l'élimination des opportunités d'arbitrage.

Alignement des taux projetés sur le taux sans risque

Afin d'assurer la cohérence du modèle avec les principes de neutralité au risque, les taux projetés font l'objet de deux ajustements préliminaires. Ces étapes visent à aligner les projections sur le taux sans risque, une condition nécessaire mais insuffisante pour éliminer complètement les opportunités d'arbitrage. En effet, une calibration supplémentaire est indispensable pour garantir que les prix actualisés des obligations zéro-coupon aient la propriété de martingalité. Les ajustements initiaux sont les suivants.

Centrage des taux projetés Les taux projetés $R(t, T, j)$ sont recentrés pour éliminer tout biais. Cela est réalisé en soustrayant la moyenne des simulations pour chaque instant t , maturité T et simulation j

$$R_c(t, T, j) = R(t, T, j) - \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L R(t, T, j), \quad (3.2)$$

où $L = 1000$ est le nombre de simulations utilisées.

Ajout du taux sans risque Une fois centrés, les taux sont ajustés en ajoutant le taux forward vu à l'instant initial, déduit de la courbe des taux ZC initiale $R(0, t)$, et qui est donné par $F(0, t, T) = \frac{R(0, T)(T-0) - R(0, t)(t-0)}{T-t}$ pour obtenir les taux corrigés

$$R_{\text{adj}}(t, T, j) = R_c(t, T, j) + F(0, t, T). \quad (3.3)$$

Ces ajustements permettent de rendre les taux projetés conformes, en moyenne, au taux sans risque. Toutefois, pour assurer une absence d'opportunité d'arbitrage, une calibration dynamique est nécessaire.

Calibration du paramètre d'ajustement dynamique

Pour refléter les conditions de marché, un paramètre d'ajustement dynamique $\alpha(t)$ est calibré afin d'intégrer ces conditions et d'affiner les taux ajustés $R_{\text{adj}}(t, T, j)$. L'objectif de cette calibration est de garantir que les prix des swaptions calculés avec le modèle RVFL correspondent aux prix observés sur le marché. Ce paramètre $\alpha(t)$ permet également de s'assurer que les taux obtenus respectent la mesure neutre au risque, selon la relation suivante

$$R_{\text{RN}}(t, T, j) = \alpha(t) \cdot R_{\text{adj}}(t, T, j). \quad (3.4)$$

Avant de poursuivre, il est nécessaire d'introduire une notion fondamentale : **le déflateur**. Le déflateur joue un rôle central dans la modélisation financière, car il permet de ramener les flux futurs à leur valeur présente tout en intégrant les taux courts simulés sous la mesure neutre au risque. Le déflateur est défini par

$$\text{déflateur}(t, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \text{déflateur}(t-1, j) \exp(-f(t, t, j)) & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

avec $f(t, t, j)$ est le taux forward instantané pour le scénario j à la date t pour la période $[t, t+1]$ c'est à dire le taux court à la date t . En effet, le taux court est le taux forward instantané de sorte que $f(t, t, j) = r_{RN}(t, j)$. Il est défini par

$$\text{déflateur}(t, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \text{déflateur}(t-1, j) \exp(-r_{RN}(t, j)) = \exp(-\sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j)) & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

où $r_{RN}(s, j)$ correspond au taux court sous la mesure neutre au risque du modèle RVFL pour l'instant s et la trajectoire j .

Le taux court, $r_{RN}(s, j)$, est défini comme la limite du taux zéro-coupon $R_{RN}(t, T, j)$ lorsque la maturité T tend vers zéro. Pour rappel, le taux zéro-coupon sous le mesure risque-neutre peut être défini par

$$R_{RN}(t, T, j) = \beta_{1,t,j}^{RN} + \beta_{2,t,j}^{RN} \cdot \frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} + \beta_{3,t,j}^{RN} \cdot \left(\frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} - \exp(-T/\lambda) \right), \quad (3.7)$$

mathématiquement, le taux court est donné

$$r_{RN}(s, j) = \lim_{T \rightarrow 0} R_{RN}(t, T, j) = \beta_{1,t,j}^{RN} + \beta_{2,t,j}^{RN}, \quad (3.8)$$

avec $\beta_{1,t,j}^{RN}$ la première composante de NS (taux long) du taux ZC sous la mesure risque-neutre et $\beta_{2,t,j}^{RN}$ la deuxième composante de NS du taux ZC sous la mesure risque-neutre.

En effet, le premier résultat immédiat est $\lim_{T \rightarrow 0} \exp(-T/\lambda) = 1$. Puis en effectuant un développement limité en 0 sur l'exponentielle, la limite est $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} = 1$. Cette définition relie directement le taux court aux composantes de la courbe des taux zéro-coupon dans le cadre du modèle utilisé, tout en respectant les hypothèses de la mesure neutre au risque.

Étapes de calibration de $\alpha(t)$

Les notions de taux swap et de prix des swaptions sont rappelées en détail dans l'annexe A.3. La calibration de $\alpha(t)$ est réalisée selon les étapes suivantes :

1. initialisation des paramètres, les prix de marché des swaptions $\pi_0^{\text{marché}}(T)$ (pour la maturité T) et une plage initiale pour $\alpha(t)$ sont définis ;
2. calcul des prix des obligations zéro-coupon

$$B_{RN}(t, T, j) = \exp^{-R_{RN}(t, T, j) \cdot (T-t)}. \quad (3.9)$$

3. estimation des taux swap, les prix des ZC servent pour calculer les taux swap

$$S_{0,n}(t, j) = \frac{B_{RN}(t, T_0, j) - B_{RN}(t, T_n, j)}{\sum_{k=1}^n (T_k - T_{k-1}) B_{RN}(t, T_k, j)}, \quad (3.10)$$

avec T_k la k ième maturité, ($T_1 = 1$ an, $\dots$, $T_n = 20$ ans) et n , le nombre de maturité $n = 20$;

4. calcul des prix des swaptions, le prix modélisé des swaptions, pour un *strike* K (le taux fixe défini dans le contrat de swap sous-jacent), pour une durée totale du swap sous-jacent (ténor) de 20 ans et une maturité T , est ensuite calculé selon

$$\pi_0^{\text{modèle}}(T) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left[\text{déflateur}(T, j) \cdot \max(S_{0,n}(T, j) - K, 0) \cdot \left(\sum_{k=1}^n (T_k - T_{k-1}) B_{\text{RN}}(T, T_k, j) \right) \right], \quad (3.11)$$

avec $L = 1000$ le nombre de simulation ;

5. optimisation de la trajectoire des paramètres $\alpha(t)$, les paramètres $\alpha(t)$, définis pour chaque instant t jusqu'à la maturité T (avec t mensuel, soit $12 \times T$ instants au total), sont calibrés afin de minimiser l'écart quadratique entre le prix modélisé et le prix observé sur le marché. Étant donné que le prix modélisé à l'instant initial, $\pi_0^{\text{modèle}}$, dépend de l'ensemble des valeurs du déflateur, des taux swap et des prix zéro-coupon, qui eux-mêmes dépendent des valeurs $\{\alpha(t)\}_{t=1}^{12T}$, l'optimisation est formulée comme suit

$$\{\alpha^*(t)\}_{t=1}^{12T} = \arg \min_{\{\alpha(t)\}_{t=1}^{12T}} \left[\sum_{T=1}^{20} \left(\pi_0^{\text{modèle}}(\{\alpha(t)\}_{t=1}^{12T}) - \pi_0^{\text{marché}}(T) \right)^2 \right]. \quad (3.12)$$

L'optimisation des paramètres $\alpha(t)$ repose sur une approche séquentielle, où chaque maturité T est calibrée successivement en s'appuyant sur les résultats des maturités précédentes. Cette exploration garantit une cohérence temporelle des paramètres et améliore la stabilité de leur évolution. Contrairement à une optimisation indépendante des maturités, cette méthode contrôle les interactions entre les différentes périodes et évite des ajustements incohérents.

Les données de marché utilisées dans cette étude, obtenues via Bloomberg, concernent les prix des swaptions payeuses avec un ténor de 20 ans et des maturités allant de 1 à 20 ans. Toutes les swaptions sont à la monnaie (*at-the-money*, ATM) et la date de valorisation est fixée au 30 juin 2023.

L'optimisation commence par la fixation de la première maturité $T = 1$ et la définition des bornes initiales des paramètres $\alpha(t)$. Ensuite, une boucle est effectuée sur toutes les maturités $T = 1, 2, \dots, 20$. Le package `nloptr` de R est utilisé pour effectuer une double optimisation. Pour chaque maturité, une exploration globale est réalisée en utilisant l'algorithme `NLOPT_GN_ISRES` (RUNARSSON et YAO (2000)), permettant d'identifier une solution initiale robuste. Une fois cette solution obtenue, un affinement local est effectué à l'aide de l'algorithme `NLOPT_LN_COBYLA` (POWELL (1994)), qui optimise la solution globale dans un voisinage restreint.

Après optimisation, les paramètres $\{\alpha^*(t)\}_{t=1}^{12T}$ sont fixés et utilisés comme référence pour la maturité suivante $T + 1$. Les bornes de recherche sont ajustées dynamiquement pour $\{\alpha(t)\}_{t=12T+1}^{12(T+1)}$ en fonction des résultats obtenus pour T . Des contrôles de stabilité et de convergence sont mis en place afin de garantir que les solutions ne génèrent pas de valeurs aberrantes, telles que des déflateurs négatifs ou des taux swaps incohérents. Une régularisation est appliquée pour limiter les variations excessives des paramètres entre maturités successives. De plus, la robustesse des résultats est testée en vérifiant la dispersion des solutions et leur alignement avec les prix de marché.

Ainsi, le taux final obtenu sous la mesure risque-neutre est donné par

$$R_{\text{RN}}(t, T, j) = \alpha^*(t) \cdot R_{\text{adj}}(t, T, j), \quad (3.13)$$

cette méthodologie offre un cadre systématique pour transformer les taux ZC des projections basées sur des probabilités historiques en projections neutres au risque. Elle combine reconstruction des courbes de taux, alignement sur le taux sans risque et calibration dynamique pour fournir une modélisation des taux conforme aux exigences des marchés financiers. La figure 3.2 illustre ce processus.

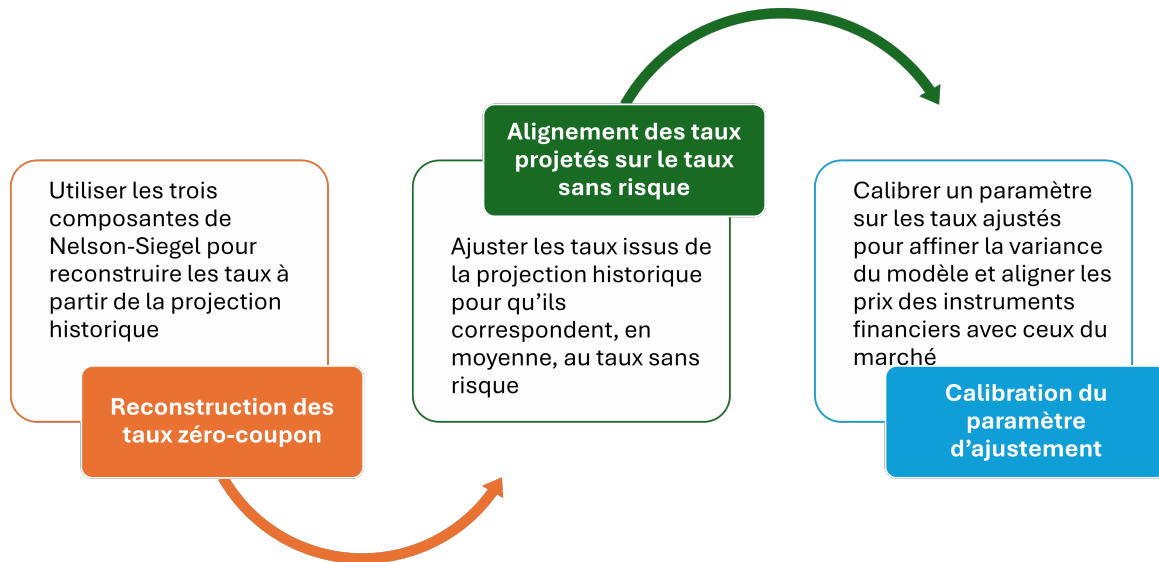


FIGURE 3.2 : Résumé de la méthode de neutralisation du risque de taux

3.1.2 Modélisation du risque d'action

La modélisation des rendements du CAC 40 sous la mesure risque-neutre repose sur une méthodologie structurée en deux étapes fondamentales :

1. **ajustement des rendements**, cette étape consiste à ajuster les rendements projetés pour garantir que les prix actualisés respectent la propriété de martingalité. Cette propriété est essentielle pour assurer la cohérence du modèle avec les principes de la finance sans arbitrage ;
2. **calibration d'un paramètre**, une fois les rendements ajustés, un paramètre β est calibré pour que les simulations reproduisent les prix des options à 12 mois, conformément aux recommandations de ACPR (2013). Cette calibration vise à aligner le modèle avec les prix d'un *call* et d'un *put* du modèle Black-Scholes à 12 mois (1 an), à la monnaie. Cela permet au modèle d'être plus cohérent avec les prix observés sur le marché et garantit qu'il reflète fidèlement les dynamiques du marché financier.

Ces deux étapes interdépendantes constituent les fondements de la méthodologie utilisée pour passer de rendements historiques à des rendements sous la mesure risque-neutre. L'ajustement des rendements vise à garantir la conformité théorique avec la propriété de martingale, tandis que la calibration du paramètre β ajuste le modèle pour reproduire les prix des options observés sur le marché. La figure 3.3 fournit une illustration synthétique de ces deux étapes clés et de leur articulation.

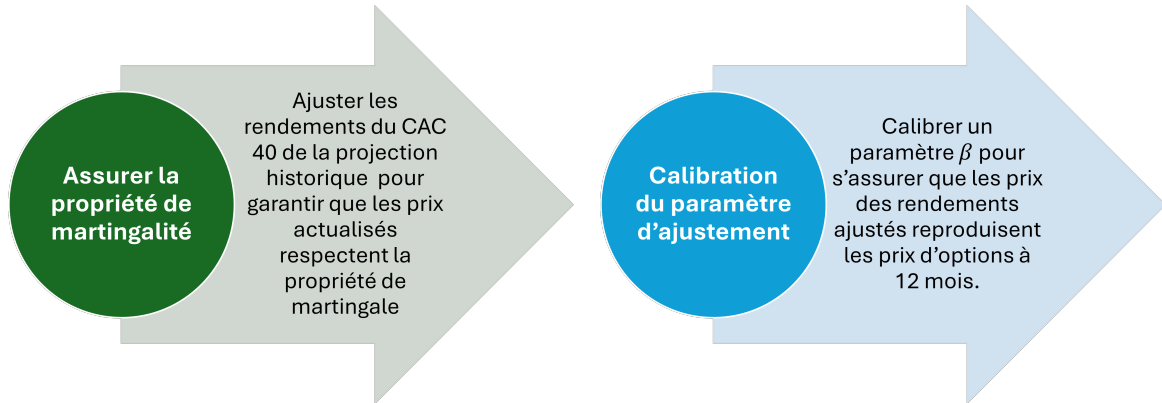


FIGURE 3.3 : Résumé des étapes de la neutralisation du risque pour le CAC 40

Ajustement des rendements

Dans le cadre de la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$, il est essentiel que les prix actualisés respectent la propriété de martingale. Cette condition stipule que l'espérance conditionnelle des prix actualisés futurs d'un actif, calculée sous la mesure risque-neutre, doit être égale à son prix actuel. Cela garantit l'absence de biais systématique dans les prix actualisés et assure la cohérence avec les principes de la finance sans arbitrage.

Les rendements de la projection historique, notés $\psi(t, j)$, sont utilisés pour projeter les prix du CAC 40. Ces prix, calculés pour chaque trajectoire j (de 1 à 1000) et chaque période t (de 1 à 240), sont donnés par la relation

$$P(t, j) = P_0 \times \exp \left(\sum_{k=1}^t \psi(k, j) \right), \quad (3.14)$$

où P_0 représente le prix initial de l'actif. Ces prix doivent être actualisés pour tenir compte de la valeur temporelle de l'argent et des taux d'intérêt projetés.

Pour réaliser cette actualisation, le déflateur défini en 3.6 est utilisé. En multipliant les prix projetés $P(t, j)$ par le déflateur, on obtient les prix actualisés

$$P_{\text{actualisé}}(t, j) = P(t, j) \cdot \text{déflateur}(t, j) = P(t, j) \cdot \exp \left(- \sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j) \right) \quad (3.15)$$

avec $\text{déflateur}(t, j)$ est donné par l'équation 3.6.

La propriété de martingale exige que l'espérance de ces prix actualisés, sous la mesure $\mathbb{Q}$, soit égale au prix initial P_0 . Cela s'exprime mathématiquement par

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [P_{\text{actualisé}}(t, j)] = P_0. \quad (3.16)$$

En substituant l'expression de $P_{\text{actualisé}}(t, j)$ donnée par l'équation (3.15) dans l'équation (3.16), l'expression devient

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[P_0 \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^t \psi(k, j) - \sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j) \right) \right] = P_0, \quad (3.17)$$

en divisant les deux membres par P_0 , il vient

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\sum_{k=1}^t \psi(k, j) - \sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j) \right) \right] = 1. \quad (3.18)$$

Cette équation montre que, pour respecter la propriété de martingale sous la mesure $\mathbb{Q}$, l'ajustement des rendements est nécessaire. En effet, si la moyenne empirique des rendements projetés $\psi(t, j)$ ne correspond pas aux taux sans risque $r_{RN}(t, j)$, alors l'égalité (3.18) ne peut être garantie.

Pour corriger cette incohérence et s'assurer que les prix respectent la propriété de martingale, un ajustement des rendements a été introduit, défini par

$$\psi_{\text{adj}}(t, j) = \psi(t, j) + \Delta\psi(t, j). \quad (3.19)$$

L'ajustement $\Delta\psi(t, j)$ est choisi de manière à recentrer les rendements autour des taux sans risque projetés $r_{RN}(t, j)$. Une approche naturelle est de définir

$$\Delta\psi(t, j) = r_{RN}(t, j) - \bar{\psi}(t), \quad (3.20)$$

où $\bar{\psi}(t)$ représente la moyenne empirique des rendements historiques à la date t , donnée par

$$\bar{\psi}(t) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \psi(t, j). \quad (3.21)$$

Ainsi, l'expression des rendements ajustés devient

$$\psi_{\text{adj}}(t, j) = \psi(t, j) + (r_{RN}(t, j) - \bar{\psi}(t)), \quad (3.22)$$

Cette transformation garantit que la propriété de martingale est bien respectée, comme il sera vérifié formellement. Cependant, il est nécessaire de s'assurer que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{k=1}^t \psi_{\text{adj}}(k, j) \right] = \sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j). \quad (3.23)$$

En développant la somme des rendements ajustés, l'expression devient

$$\sum_{k=1}^t \psi_{\text{adj}}(k, j) = \sum_{k=1}^t \psi(k, j) + \sum_{k=1}^t (r_{RN}(k, j) - \bar{\psi}(k)), \quad (3.24)$$

en prenant l'espérance sous la mesure $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{k=1}^t \psi_{\text{adj}}(k, j) \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{k=1}^t \psi(k, j) \right] + \sum_{k=1}^t r_{RN}(k, j) - \sum_{k=1}^t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\bar{\psi}(k)]. \quad (3.25)$$

Or, les rendements historiques utilisés dans nos simulations sont issus de séries empiriquement stationnaires, comme indiqué dans (2.4.2). De plus, les test de Dickey-Fuller augmenté (ADF) DICKEY et FULLER, 1979 et test de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) KWIATKOWSKI et al., 1992 confirment aussi la stationnarité des rendements simulés. Sous cette hypothèse, le *Block Bootstrap* préserve la distribution marginale des rendements à chaque instant t , comme montré dans KÜNSCH, 1989a. Par conséquent, les rendements simulés conservent la même distribution marginale, ce qui permet d'écrire l'espérance de la moyenne comme suit

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\bar{\psi}(t)] = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\psi(t, j)] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\psi(t, j)]. \quad (3.26)$$

Dès lors,

$$\sum_{k=1}^t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\psi_{\text{adj}}(k, j)] = \sum_{k=1}^t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\psi(k, j)] + \sum_{k=1}^t r_{RN}(k, j) - \sum_{k=1}^t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\psi(k, j)], \quad (3.27)$$

les termes $\sum_{k=1}^t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\psi(k, j)]$ s'annulent, ce qui donne

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{k=1}^t \psi_{\text{adj}}(k, j) \right] = \sum_{k=1}^t r_{RN}(k, j), \quad (3.28)$$

ce qui achève la démonstration assurant ainsi que la transformation des rendements respecte la propriété de martingale sous $\mathbb{Q}$.

Calibration du paramètre β

Une fois les rendements ajustés, le modèle passe à une étape de calibration pour garantir que les prix des options calculés à partir des rendements ajustés soient cohérents avec les prix d'un call et d'un put calculés avec le modèle de Black-Scholes à la monnaie pour une maturité d'un an. Le rendement sous la mesure risque-neutre est défini comme suit

$$\psi_{RN}(t, j) = \beta \cdot \psi_{\text{adj}}(t, j), \quad (3.29)$$

où β est un paramètre d'ajustement à calibrer.

Le paramètre β est calibré en minimisant l'écart quadratique entre les prix des options calculés à l'aide des rendements ajustés et les prix observés sur le marché. Cette minimisation est formulée comme suit

$$\beta^* = \arg \min_{\beta} \left[(P_{\text{call}}^{BS} - P_{\text{call}}^{RVFL}(\beta))^2 + (P_{\text{put}}^{BS} - P_{\text{put}}^{RVFL}(\beta))^2 \right], \quad (3.30)$$

où :

- P_{call}^{BS} et P_{put}^{BS} sont les prix d'options calculés avec le modèle de Black-Scholes à 1 an et qui est défini en détail dans 3.2.2 ;
- $P_{\text{call}}^{RVFL}(\beta)$, $P_{\text{put}}^{RVFL}(\beta)$ sont les prix calculés à partir des rendements sous la mesure risque-neutre pour une maturité d'un an et qui est détaillé dans 3.2.2.

L'optimisation utilise la fonction `optim` du package `stats` de `R`, avec l'algorithme `L-BFGS-B`. Cet algorithme quasi-Newtonien est particulièrement adapté pour minimiser des fonctions complexes tout en imposant des bornes sur les paramètres.

Pour valider les résultats, un test de parité put-call est effectué. Ce test vérifie que la différence entre les prix calculés des options call et put respecte la formule théorique suivante

$$P_{\text{call}}^{RVFL} - P_{\text{put}}^{RVFL} = S - K \cdot \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(T, j) \right). \quad (3.31)$$

Si cette parité est respectée, cela confirme la cohérence des solutions proposées par le modèle. Après calibration, les rendements sous la mesure risque-neutre sont exprimés comme suit

$$\psi_{RN}(t, j) = \beta^* \cdot \psi_{\text{adj}}(t, j), \quad (3.32)$$

ce paramètre calibré garantit que le modèle reflète fidèlement les prix de marché et intègre les dynamiques sous-jacentes des actifs.

3.2 Évaluation des projections

La méthodologie exposée dans la section précédente introduit une approche de transformation des scénarios sous la mesure historique en scénarios sous la mesure risque-neutre. Afin de valider cette approche, l'analyse des résultats obtenus repose sur deux critères clés établis au chapitre 1 (1.2.2) :

- respect de la propriété de martingalité : vérifier que les prix actualisés des actifs au moyen des déflateurs respectent la définition de la martingalité ;
- cohérence avec le marché (*market consistency*) : s'assurer que les résultats sont alignés avec les prix théoriques du marché, notamment ceux des obligations zéro-coupon.

Ces deux critères permettent de valider la pertinence théorique et pratique de la transformation mise en œuvre.

3.2.1 Test de martingalité

La martingalité est une condition clé dans les modèles sous mesure risque-neutre. Elle garantit que les prix actualisés des actifs financiers, calculés à l'aide des déflateurs, n'ont aucune tendance systématique à la hausse ou à la baisse. En d'autres termes, l'espérance conditionnelle des prix futurs actualisés est égale à leur valeur actuelle actualisée :

La définition mathématique de la martingalité peut être exprimée par la relation suivante

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\text{déflateur}(s) \cdot V_s | \mathcal{F}_t] = \text{déflateur}(t) \cdot V_t, \quad (3.33)$$

où :

- V_t désigne le prix de l'actif à l'instant t ;
- $\text{déflateur}(s)$ représente le facteur d'actualisation sous la mesure risque-neutre ;

- $\mathcal{F}_t$ désigne l'ensemble des informations disponibles à l'instant t .

Dans la suite, l'hypothèse de martingalité sera testée séparément pour les actions et pour les taux ZC, en raison des spécificités propres à chaque catégorie de facteurs de risques.

Test sur les taux ZC

La vérification de la martingalité pour les taux zéro-coupon (ZC) repose sur l'analyse de l'alignement entre les déflateurs obtenus à partir du modèle risque-neutre et les prix théoriques des obligations zéro-coupon déduits des taux initiaux fournis par l'EIOPA. Cette vérification consiste à comparer la moyenne des déflateurs simulés pour une échéance donnée aux prix théoriques correspondants.

La condition de martingalité à satisfaire peut être formalisée par l'équation suivante

$$\forall t, \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{défateur}(t, j) = B\left(0, \frac{t}{12}\right), \quad (3.34)$$

où :

- $B\left(0, \frac{t}{12}\right)$ représente le prix ZC à la maturité $\frac{t}{12}$, obtenu à partir des taux ZC initiaux ;
- L est le nombre total de simulations réalisées, $L = 1000$;
- t correspond aux instants discrétisés de projection ($t = 1, \dots, 240$).

Pour rappel, le défateur est défini par

$$\text{défateur}(t, j) = \exp\left(-\sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j)\right), \quad (3.35)$$

où $r_{RN}(s, j)$ correspond au taux court du modèle sous la mesure risque-neutre pour la période s et la trajectoire j . Pour un taux initial ZC $R(0, T)$ de maturité T , le prix ZC $B(0, T)$ à la maturité T est donné par

$$B(0, T) = \exp^{-R(0, T) \cdot T}. \quad (3.36)$$

Méthodologie du test La validation de cette condition s'effectue en trois étapes principales :

1. calcul des déflateurs : les déflateurs sont calculés pour chaque simulation et instant de projection en utilisant les taux sans risque issus du modèle risque-neutre ;

des déflateurs simulés : pour chaque échéance t , la moyenne des déflateurs simulés est déterminée sur l'ensemble des simulations

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \text{défateur}(t, j)$$

2. comparaison aux prix théoriques : la moyenne des déflateurs simulés est comparée au prix théorique $B(0, t)$ pour chaque échéance. Cette étape permet d'évaluer l'écart éventuel entre les simulations et les données théoriques.

Interprétation et démarche Ce test permet de s'assurer que les déflateurs simulés reproduisent fidèlement les prix des obligations zéro-coupon, validant ainsi la cohérence entre les simulations sous la mesure risque-neutre et les données du marché. La démarche se déroule en deux étapes. D'abord, l'égalité est testée pour une échéance spécifique, afin de valider le comportement du modèle sur une maturité donnée. Ensuite, cette vérification est étendue à l'ensemble des maturités, garantissant ainsi une cohérence globale des résultats sur l'horizon de projection. En cas de divergences significatives, cela indiquerait une incohérence dans la transformation des scénarios ou dans la calibration des paramètres, nécessitant une révision du modèle.

Test sur les taux : test à 20 ans

En utilisant la formule du déflateur, avec j représentant le numéro de la simulation et $t = 20 \times 12 = 240$, l'expression devient

$$\text{déflateur}(240, j) = \exp \left(- \sum_{s=1}^{240} r_{RN}(s, j) \right), \quad (3.37)$$

cela donne pour $L = 1000$

$$\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(240, j) = 0,5801924 \quad (3.38)$$

et

$$B(0, 20) = \exp^{-R(0,20) \cdot 20} = 0,5811924. \quad (3.39)$$

Un écart très faible est obtenu entre les deux quantités de l'ordre de 10^{-3} ce qui conclut que le caractère martingale est bien respecté pour la maturité 20.

Test sur les taux : test sur toutes les années

Dans cette partie, le test de martingalité, précédemment réalisé sur une maturité donnée, est étendu à l'ensemble des années correspondant aux maturités multiples de 12 mois ($t = \{12, 24, \dots, 240\}$). Cette approche permet d'évaluer la capacité du modèle à préserver la propriété de martingalité sur un horizon de projection plus large, tout en identifiant d'éventuelles variations ou incohérences au fil du temps. Ce test repose sur la relation suivante

$$\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(t, j) - B \left(0, \frac{t}{12} \right) = 0, \quad (3.40)$$

avec $t = \{12, 24, \dots, 240\}$.

Ce test a également été effectué en utilisant un modèle paramétrique bien établi, à savoir le modèle **Hull-White généralisé**. Ce modèle repose sur une dynamique stochastique des taux courts et intègre une flexibilité accrue grâce à des paramètres ajustables de dérive et de volatilité. Il est largement utilisé pour modéliser la structure par terme des taux d'intérêt, en particulier pour les horizons de long terme.

Les simulations du modèle Hull-White généralisé ont été obtenues à l'aide de l'outil GSE développé au sein de Prim'Act. Ce modèle, calibré sur 5000 simulations avec une projection sur 50 ans, constitue une référence cohérente pour évaluer les performances du modèle « RVFL-risque-neutre » sur différentes maturités. La figure 3.4 illustre l'évolution des écarts calculés à l'aide de la relation (3.40) pour les deux modèles (RVFL et Hull-White).

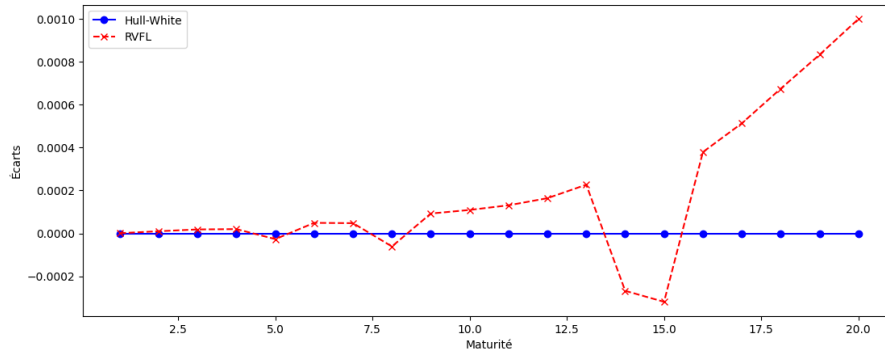


FIGURE 3.4 : Évolution des écarts martingales des modèles RVFL et Hull-White.

Il ressort de la figure 3.4 que le modèle Hull-White respecte strictement la propriété de martingalité, avec des écarts quasi nuls sur l'ensemble des maturités. À l'inverse, le modèle RVFL présente des écarts plus significatifs, de l'ordre de 10^{-4} , reflétant une certaine variabilité dans ses projections. Bien que globalement maîtrisée, cette variabilité souligne des ajustements moins précis pour des horizons temporels éloignés.

Pour compléter cette analyse, une boîte à moustaches (BAM) a été construite afin de visualiser la distribution des écarts martingaux pour les deux modèles, présentés dans la figure 3.5. Cette représentation statistique met en lumière la dispersion et les caractéristiques des écarts observés.

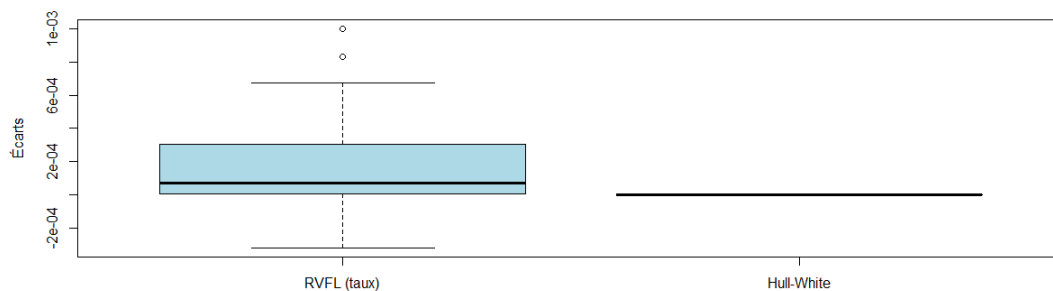


FIGURE 3.5 : BAM des écarts martingales des modèles RVFL et Hull-White

La figure 3.5 confirme que le modèle Hull-White présente une distribution des écarts très resserrée autour de zéro, traduisant son respect strict de la propriété de martingalité. Le modèle RVFL, bien qu'il affiche une distribution légèrement plus large, démontre également que la propriété de martingalité est vérifiée, avec des écarts maîtrisés même sur les maturités longues.

Ces résultats soulignent que les deux modèles respectent globalement la propriété de martingalité sur l'ensemble des maturités étudiées. Le modèle Hull-White, grâce à sa structure mathématique, délivre des résultats parfaitement conformes. Le modèle RVFL, bien que moins précis sur les horizons lointains, offre des écarts globalement faibles et maîtrisés, en particulier pour les maturités courtes à

moyennes. Ces observations confirment la pertinence opérationnelle du modèle RVFL, tout en mettant en lumière des marges d'amélioration potentielles, notamment pour renforcer sa précision sur des horizons de long terme.

Test sur les actions

Pour les actions, le test consiste à vérifier si la valeur actualisée de l'actif respecte la propriété de martingalité en temps discret. Cette propriété impose que la moyenne, sur l'ensemble des simulations, du produit entre le déflateur et la valeur de l'actif (*Indice*) soit égale à 1. Mathématiquement, cela s'écrit pour une projection j simulation donnée

$$\forall t, \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(t, j) \times \text{Indice}(t, j) = 1, \quad (3.41)$$

où L est le nombre total de simulations, et t désigne les instants discrétisés de projection.

La variable $\text{Indice}(t, j)$ représente la valeur de l'actif pour le scénario j à la date t . Elle est initialisée à 1 € et évolue en fonction des rendements logarithmiques sous la mesure risque-neutre. Elle est définie comme suit

$$\text{Indice}(t, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \text{Indice}(t-1, j) \times \exp^{\psi_{RN}(t, j)} = 1 \times \exp^{\sum_{s=1}^t \psi_{RN}(s, j)} & \text{si } t > 0, \end{cases} \quad (3.42)$$

où $\psi_{RN}(s, j)$ correspond au rendement logarithmique simulé pour le scénario j à la date s , calculé sous la mesure risque-neutre.

Comme pour l'analyse des taux, le test est réalisé en deux étapes :

1. une vérification à une échéance spécifique, ici la dernière année de projection (20 ans, soit $t = 240$), permettant de mesurer le respect de la martingalité à long terme ;
2. une analyse sur l'ensemble des années afin d'évaluer la cohérence temporelle.

Test sur les actions : test à 20 ans

Dans cette partie, l'aspect martingale est évalué pour la dernière année de projection, soit $t = 12 \times 20 = 240$. La condition à vérifier est

$$\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(240, j) \times \text{Indice}(240, j) = 1, \quad (3.43)$$

pour $L = 1000$ simulations, le calcul donne

$$\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(240, j) \times \text{Indice}(240, j) \approx 1 - 10^{-3}. \quad (3.44)$$

Cette faible différence ($\approx 10^{-3}$) indique que les prix actualisés des actifs sont proches de la valeur théorique attendue à 20 ans. Le faible écart observé suggère que l'ajustement des rendements logarithmiques sous la mesure risque-neutre permet de respecter la propriété de martingalité sur l'horizon considéré. Bien que des écarts résiduels puissent exister en raison d'approximations numériques ou de limites dans les simulations, ces résultats restent cohérents avec les hypothèses du modèle.

Test sur les actions : analyse sur toutes les années

Cette partie explore le respect de la propriété de martingalité pour les actions sur l'ensemble des années de projection. L'objectif est de vérifier si la condition suivante est satisfaite

$$\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(t, j) \times \text{Indice}(t, j) - 1 = 0, \quad (3.45)$$

où $t = \{12, 24, \dots, 240\}$ représente les maturités discrètes en mois. Dans cette équation, L est le nombre total de simulations, $\text{déflateur}(t, j)$ désigne le déflateur calculé pour la simulation j à l'instant t , et $\text{Indice}(t, j)$ correspond à la valeur simulée de l'indice pour la même simulation et au même instant.

Dans cette analyse, les écarts calculés pour le modèle RVFL ont été comparés à ceux du modèle Black-Scholes (BS). Ce dernier, tout comme le modèle Hull-White, a été calibré à l'aide de 5000 simulations sur un horizon de 50 ans grâce à l'outil GSE développé au sein de Prim'Act. La figure 3.6 illustre l'évolution des écarts martingales pour les deux modèles, RVFL et Black-Scholes, sur l'ensemble des maturités discrétisées.

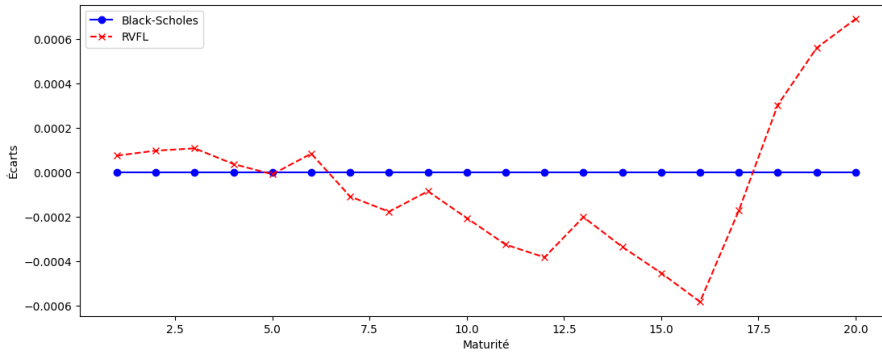


FIGURE 3.6 : Évolution des écarts martingales des modèles RVFL et BS.

L'analyse des courbes montre que le modèle Black-Scholes présente des écarts extrêmement faibles, proches de zéro, sur l'ensemble des maturités, traduisant une excellente précision dans le respect de la propriété de martingalité. Le modèle RVFL, en revanche, affiche des écarts plus dispersés, de l'ordre de 10^{-4} , qui augmentent suivant les maturités pour atteindre 10^{-3} . Ces écarts, bien qu'un peu plus élevés, restent limités dans leur amplitude et compatibles avec des applications pratiques.

Pour compléter l'analyse, les boîtes à moustaches des écarts des deux modèles sont présentées dans la figure 3.7. Ces boîtes permettent d'examiner la distribution statistique des écarts, notamment leur dispersion, leur médiane et leurs valeurs extrêmes.

Les boîtes à moustaches (figure 3.7) confirment les observations faites à partir des courbes. Pour le modèle BS, les écarts sont concentrés de manière extrêmement étroite autour de zéro, ce qui reflète une variabilité quasi nulle. En revanche, le modèle RVFL montre une distribution plus large des écarts, avec des valeurs allant de -5×10^{-4} à 6×10^{-4} . Bien que la médiane des écarts reste proche de zéro, cette dispersion traduit une variabilité plus importante dans le respect de la martingalité pour le modèle RVFL.

En conclusion, le modèle RVFL respecte globalement la propriété de martingalité sur l'ensemble des années de projection, avec des écarts limités à l'ordre de 10^{-4} . Bien que ces écarts soient légèrement plus importants que ceux du modèle Black-Scholes, ils restent acceptables dans le cadre d'applications pratiques liées à la neutralisation du risque. Les résultats obtenus montrent que le modèle RVFL est

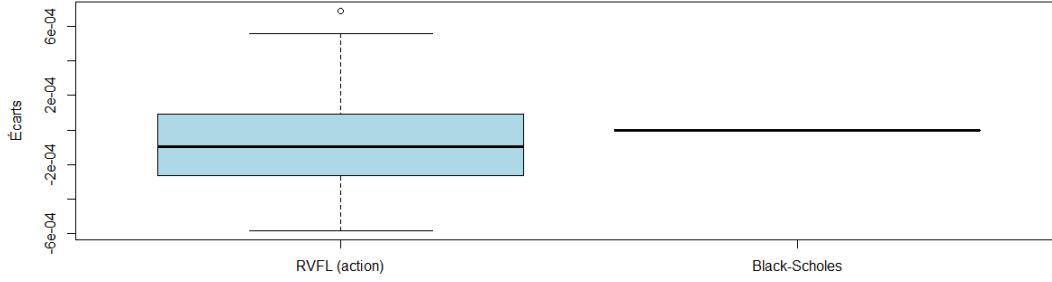


FIGURE 3.7 : Boîte à moustaches des écarts martingales des modèles RVFL et BS.

capable de fournir des simulations cohérentes avec les hypothèses théoriques, tout en maintenant une précision suffisante pour des horizons temporels étendus.

3.2.2 Test *market-consistency*

Le principe de *market-consistency* constitue une exigence fondamentale dans la modélisation financière. Il repose sur l'idée que les projections sous la mesure risque-neutre doivent refléter fidèlement les conditions actuelles du marché. Cette approche assure que les hypothèses utilisées dans les modèles de valorisation sont cohérentes avec les prix observés sur les marchés financiers, garantissant ainsi une valorisation réaliste et utilisable pour des applications pratiques telles que la gestion des risques et l'évaluation d'actifs dérivés.

Test *market-consistency* : repricing des prix des options

L'objectif de ce test est de comparer les prix d'options obtenus avec le modèle RVFL sous la mesure risque-neutre à ceux calculés à l'aide du modèle de Black-Scholes avec drift variable, pour des options européennes à un an, à la monnaie. Cette analyse vise à évaluer la capacité du modèle RVFL à reproduire des prix cohérents avec les standards du marché.

Prix du modèle RVFL

Les prix des options dans le cadre du modèle RVFL sont obtenus à l'aide des formules suivantes

$$P_{\text{call}}^{RVFL} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L [(P_{RN}(T, j) - K)^+ \cdot \text{déflateur}(T, j)] , \quad (3.46)$$

$$P_{\text{put}}^{RVFL} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L [(K - P_{RN}(T, j))^+ \cdot \text{déflateur}(T, j)] , \quad (3.47)$$

où :

- $P_{RN}(T, j) = P_0 \times \exp \left(\sum_{k=1}^t \psi_{RN}(k, j) \right)$: valeur du sous-jacent CAC40 pour la simulation j à la date T pour le log rendement sous la mesure risque-neutre $\psi_{RN}(k, j)$;

- K : strike de l'option ;
- $\text{déflateur}(T, j)$: valeur du déflateur pour la simulation j et la date T ;
- L : nombre de simulations, qui vaut 1000.

Pour les options à la monnaie, une valeur arbitraire de $P_0 = K = 100$ a été choisie. La date d'échéance est fixée à un an ($T = 12$ mois). Pour rappel, le log rendement sous la mesure risque-neutre $\psi_{RN}(k, j)$ est obtenu grâce à la calibration d'un paramètre β (valeur est obtenu par optimisation).

Prix du modèle Black-Scholes

Dans cette étude, le modèle de Black-Scholes (BS) a été adapté pour intégrer un drift variable, conformément à l'approche proposée par QUITTARD-PINON (2002). Cette modification vise à mieux refléter les évolutions dynamiques des conditions de marché, en répondant à la nécessité d'une modélisation flexible qui prenne en compte les variations temporelles des facteurs influençant la valorisation des actifs. Les hypothèses classiques de constance du drift peuvent, dans certains contextes, s'avérer inadaptées et entraîner des approximations excessives.

L'introduction d'un drift variable apporte une flexibilité supplémentaire permettant de mieux représenter les comportements réalistes des actifs sous-jacents, tout en maintenant une cohérence avec les principes de la *market-consistency*. Cela améliore la précision de la calibration et renforce la capacité du modèle à reproduire fidèlement les prix observés sur les marchés financiers.

Dans le cadre d'un modèle Black-Scholes avec drift variable, l'évolution du prix du sous-jacent $S_{t,j}$ à l'instant t est donnée par l'équation suivante

$$S_{t,j} = S_0 \cdot \exp \int_0^t \left(r_{RN}(u, j) - \frac{\sigma^2}{2} \right) du + \sigma W_t, \quad (3.48)$$

avec :

- S_0 le prix initial du sous-jacent à $t = 0$ ($S_0 = 100$) ;
- $r_{RN}(u, j)$, le taux court sous la mesure risque-neutre à l'instant u et pour la simulation j ;
- σ est la volatilité qui correspond à la volatilité implicite d'une option sur CAC40 à la monnaie au 31 Mai 2023 et sa valeur est égale à $\sigma = 17,21\%$;
- W_t est un mouvement brownien standard sous la mesure risque-neutre.

La valeur d'une option de type Call pour une maturité T est donnée dans le cadre du modèle BS par l'expression suivante

$$P_{\text{call}}^{BS} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\text{déflateur}(T, j) \cdot (S_{T,j} - K)_+ \right], \quad (3.49)$$

où $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ représente l'espérance sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$. Cette valeur peut être approchée par une méthode de simulation Monte Carlo, conduisant à la formule

$$P_{\text{call}}^{BS} \approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(T, j) \cdot (S_{T,j} - K)_+, \quad (3.50)$$

où L est le nombre de simulations effectuées.

De manière analogue, le prix d'une option de type Put pour une maturité T s'exprime comme suit

$$P_{\text{put}}^{BS} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\text{déflateur}(T, j) \cdot (K - S_{T,j})_+ \right], \quad (3.51)$$

et son approximation par Monte Carlo est donnée par

$$P_{\text{put}}^{BS} \approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(T, j) \cdot (K - S_{T,j})_+. \quad (3.52)$$

Ces expressions permettent de calculer les prix des options en tenant compte d'un drift variable, tout en utilisant des méthodes de simulation pour améliorer leur précision et leur applicabilité dans des conditions de marché dynamiques.

Comparaison des prix

Le but de cette comparaison permet de vérifier la cohérence des prix des options simulés avec ceux observés sur le marché, assurant ainsi la validité du GSE dans des conditions réelles de marché. Les prix des options *call* et *put* à $T = 12$ mois sont présentés dans le tableau 3.1. Ce tableau compare les prix obtenus par le modèle RVFL et ceux calculés selon le modèle de BS.

Option	Modèle RVFL	Modèle BS
<i>Call</i>	7,757	7,766
<i>Put</i>	5,435	5,449

TABLE 3.1 : Comparaison des prix des options entre le modèle RVFL et le modèle BS à un an

Les résultats du tableau 3.1 mettent en évidence une forte proximité entre les prix des options obtenus par les deux modèles. L'écart, de l'ordre de 10^{-3} , demeure négligeable dans le cadre d'une valorisation standard. Cette faible différence illustre la capacité du modèle RVFL, fondé sur une approche non paramétrique, à reproduire les prix estimés par le modèle de Black-Scholes tout en respectant les principes de *market consistency*.

Cette précision valide l'utilisation du modèle RVFL dans un cadre cohérent avec les pratiques de marché. La prochaine étape consistera à examiner si cette cohérence *market-consistent* s'étend également aux projections de taux, afin de vérifier la capacité du modèle à capturer toutes les dimensions des conditions de marché.

Test *market-consistency* : repricing des swaptions

Pour rappel, les données de marché exploitées dans cette étude, obtenues via Bloomberg, concernent les prix des swaptions payeuses avec un *tenor* de 20 ans et des maturités s'échelonnant de 1 à 20 ans. Toutes les swaptions étudiées sont à la monnaie (*at-the-money*, ATM) et la date de valorisation est fixée au 30 juin 2023. Ces données fournissent une référence pour évaluer la capacité du modèle à reproduire les dynamiques observées sur les marchés après calibration.

La méthodologie adoptée repose sur la comparaison des prix de marché avec les prix générés par le modèle après calibration, en utilisant les taux ZC sous la mesure risque-neutre $R_{RN}(t, T)$. Pour rappel, les prix des swaptions modélisés sont calculés selon l'équation suivante

$$\pi_0^{\text{modèle}}(T) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left[\text{déflateur}(T, j) \cdot \max(S_{0,n}(T, j) - K, 0) \left(\sum_{k=1}^n (T_k - T_{k-1}) B_{\text{RN}}(T, T_k, j) \right) \right], \quad (3.53)$$

où :

- $S_{0,n}(T, j)$ est le taux swap calculé pour une maturité T et un *tenor* n ;
- K correspond au *strike* (taux fixe) de la swaption ;
- $B_{\text{RN}}(T, T_k, j)$ désigne le prix des zéro-coupon basé sur les taux ZC pour l'instant T à la maturité T_k ;
- $\text{déflateur}(T, j)$ est utilisé pour actualiser les flux futurs à leur valeur présente ;
- $L = 1000$ est le nombre de simulations.

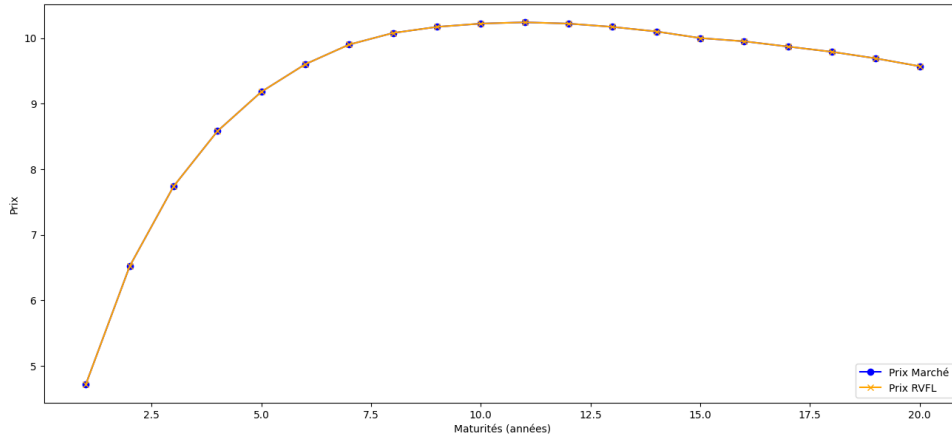


FIGURE 3.8 : Comparaison entre les prix de marché et les prix modélisés après calibration

Le graphique 3.8 illustre la comparaison entre les prix des swaptions observés sur le marché et ceux calculés par le modèle après calibration. Une bonne correspondance est observée entre les deux courbes, indiquant que le modèle parvient à reproduire, dans l'ensemble, les variations des prix en fonction des maturités. Les écarts résiduels, bien que non négligeables, restent faibles et sont de l'ordre de 10^{-4} . Ces résultats suggèrent que le modèle capture une part significative des dynamiques des prix de marché, tout en laissant place à une amélioration potentielle dans la modélisation ou la calibration.

En conclusion, les résultats démontrent que le modèle satisfait les critères de *market consistency* et de martingalité, attestant de sa capacité à reproduire fidèlement les dynamiques du marché. Cette validation renforce la pertinence de l'approche dans le cadre des hypothèses considérées. S'appuyant sur cette cohérence des faisceaux risque-neutres, il est judicieux d'approfondir l'analyse en engageant une évaluation du calcul du *Best Estimate*. Cette étape complémentaire permettra de vérifier la robustesse du modèle et d'affiner son application dans une perspective de valorisation et de gestion des risques.

Chapitre 4

Application à l'évaluation du BEL d'un portefeuille d'épargne en euros

Comme rappelé dans le chapitre 1 (1.2.2), la réglementation impose l'utilisation de modèles risque-neutres pour les évaluations financières, afin de garantir qu'elles reflètent fidèlement les conditions du marché. Ce chapitre examine comment les projections risque-neutres, modélisé dans le chapitre précédent, peuvent être utilisé pour modéliser les flux de trésorerie futurs des contrats d'assurance vie, en intégrant les conditions de marché actuelles. Cette approche est mise en œuvre dans le cadre du calcul du *Best Estimate*, essentiel pour obtenir une évaluation précise des risques et des engagements financiers, conformément aux exigences de SII.

En appliquant notre modèle, sa capacité à valoriser efficacement les options et garanties intégrées dans les contrats d'assurance sera démontrée, telles que les garanties de taux, les options de rachat, et les participations aux bénéfices (PB). Cette application vise à illustrer la pertinence et l'efficacité de notre modèle dans le contexte de l'assurance vie, en fournissant une évaluation précise et conforme aux exigences réglementaires.

4.1 Cadre général et hypothèses utilisées

L'assurance vie est un placement prisé en France, bénéficiant d'un cadre fiscal avantageux et de nombreuses garanties pour sécuriser et faire fructifier un capital à long terme. Dans le cadre de la réglementation SII, l'évaluation des engagements de l'assureur a été repensée pour mieux intégrer tous les risques liés à son activité. Ainsi, l'assureur doit désormais déterminer une « *Best Estimate* » (BE) de ses engagements, en cohérence avec les valeurs de marché.

4.1.1 Contrat d'épargne en Assurance Vie

Cette partie présente les principales caractéristiques du contrat d'épargne en assurance vie et ses spécificités. Les notes qui suivent sont inspirées des travaux de AGBAHOLOU (2019).

Généralités sur l'Assurance Vie

L'assurance est une opération par laquelle un assureur s'engage à fournir une prestation à un assuré en cas de sinistre, en échange du paiement d'une prime. L'assurance vie concerne les engagements de

l'assureur liés à la durée de vie humaine. Les produits d'assurance vie se divisent en deux catégories : les garanties en cas de vie et les garanties en cas de décès, selon la durée de couverture, comme illustré dans le tableau 4.1.

Produit	En cas de vie	En cas de décès
Garantie vie entière	Retraite ou épargne	Contrat vie entière
Garantie temporaire	Capital différé ou tontine	Assurance temporaire décès

TABLE 4.1 : Produits d'assurance vie

Le contrat d'épargne

Le contrat d'épargne repose sur la capitalisation des primes versées par le souscripteur, permettant ainsi de constituer des droits différés sous forme de capital ou de rente viagère. Pendant la durée du contrat, le souscripteur ne perçoit pas de revenus, sauf éventuellement des intérêts, qui sont immédiatement réinvestis et ajoutés à l'épargne, générant ainsi de nouveaux intérêts. On distingue plusieurs types de produits d'épargne selon le support d'investissement.

Les contrats d'épargne en euro Ils sont destinés à ceux qui souhaitent investir sans risque. Dans ce type de contrat, l'assureur prend en charge le risque financier et garantit un rendement annuel minimal en échange d'une prime. Ces contrats sont principalement investis dans des placements sans risque, comme les obligations, et sont peu sensibles aux fluctuations boursières.

Les contrats en unité de compte Quant à eux, reposent sur des supports d'investissement tels que des actions ou des parts de fonds. Ils permettent un investissement diversifié sur les marchés financiers et immobiliers. Dans ce cas, le risque est supporté par l'assuré. Bien que le capital investi ne soit pas garanti, le nombre d'unités de compte l'est. Ces contrats peuvent offrir des rendements potentiellement plus élevés.

les contrats multisupports Ils combinent des supports en unité de compte et en euro. Pour la partie en euro, l'assureur garantit le nombre d'euros, tandis que pour la partie en unités de compte, il garantit le nombre d'unités. Le risque lié au contrat en euro est pris en charge par l'assureur, tandis que l'assuré supporte le risque des unités de compte. Le souscripteur a la possibilité de choisir la répartition de l'investissement entre les différents supports et de la modifier selon son profil de risque, dans les limites prévues par le contrat.

Garanties financières

Les compagnies d'assurance vie, du fait des options et garanties qu'elles proposent, sont confrontées à des risques propres à leur activité. Ces options et garanties proposées influent sur le comportement des assurés, rajoutant ainsi une incertitude de plus dont l'assureur doit tenir compte. Dans un contrat d'assurance vie, les options et garanties les plus courantes incluent la participation aux bénéfices, le rachat, et le Taux Minimum Garanti (TMG).

En assurance vie, l'épargne des assurés est inscrite au passif des compagnies sous forme de « Provision mathématique ». Cette épargne est réinvestie, générant des bénéfices financiers et techniques. La loi impose que ces gains soient redistribués aux assurés : au moins 85% des bénéfices financiers et

90% des bénéfices techniques, ou 100% en cas de perte. L'assureur peut différer une partie de cette redistribution en la plaçant dans une Provision pour Participation aux Bénéfices (PPB), à redistribuer dans les huit ans. Cela permet de maintenir un taux de revalorisation compétitif même en cas de mauvais rendements, réduisant ainsi le risque de rachat par les assurés.

Le rachat permet à l'assuré de récupérer les fonds investis dans un contrat d'épargne, soit partiellement, soit totalement. L'assureur doit anticiper ce comportement pour éviter des pertes sur ses actifs. Les rachats se divisent en deux catégories : les rachats structurels et les rachats conjoncturels. Les rachats structurels sont liés aux besoins financiers des assurés et sont influencés par des facteurs comme l'âge ou l'ancienneté du contrat. Ils peuvent être modélisés à partir de l'historique des rachats. En revanche, les rachats conjoncturels sont influencés par la conjoncture économique et sont souvent déclenchés par des rendements jugés insuffisants, ce qui les rend plus difficiles à prévoir.

Le TMG est le taux minimum de revalorisation que l'assureur garantit, indépendamment des résultats financiers. Avec les taux bas actuels, de nombreux assureurs fixent le TMG à 0% pour se protéger contre de faibles rendements. En cas de bons résultats financiers, un taux supérieur peut être servi, conformément à la clause de participation aux bénéfices.

4.1.2 Hypothèses générales

L'outil **SimBEL** (PRIM'ACT (2020)), un *package* développé sur R par Prim'Act, est utilisé pour effectuer les calculs de BE. Cet outil constitue une composante clé pour modéliser les projections financières et évaluer les engagements futurs d'un assureur. Dans ce cadre, le modèle GSE-RVFL ne prend en compte que deux facteurs de risque principaux : **le risque d'action et le risque de taux**. Les autres facteurs de risque (immobilier, crédit, ...) sont obtenus à partir des projections fournies par le GSE développé par Prim'Act. Cette partie détaille les hypothèses relatives prises dans le GSE de Prim'Act ainsi que la composition du portefeuille d'actifs et de passifs de l'assureur.

Hypothèses du GSE de Prim'Act Le GSE de Prim'Act repose sur des modélisations stochastiques et des techniques de calibration précises, permettant de simuler des évolutions financières plausibles sous probabilité risque-neutre. Deux modèles principaux sont utilisés pour représenter la dynamique des taux d'intérêt :

- **modèle Hull et White** : ce modèle de taux court suit une dynamique gaussienne avec une volatilité constante par morceau. Il est calibré sur des caps Euribor, garantissant une représentation simple et cohérente des courbes de taux. Ce modèle est particulièrement adapté pour des projections rapides et intuitives ;
- **Libor Market Model (LMM)** : ce modèle repose sur une dynamique log-normale des taux forward sous mesure forward-neutre. Il est calibré sur une matrice combinant caps et swaptions Euribor, offrant une représentation précise des courbes forward, bien que son implémentation soit plus complexe et requière davantage de données de marché.

Les actifs financiers sont modélisés selon leurs spécificités :

- **actions et immobilier** : les indices sont simulés à l'aide du modèle log-normal de Black-Scholes avec une volatilité constante, calibrée sur des options de marché comme celles du CAC 40. Ce modèle permet de capturer les dynamiques des actions globales, autres actions, et actifs immobiliers ;

- **crédit** : la prise en compte du risque de défaut différencie deux approches : individuelle et collective. La calibration des spreads s'appuie sur les courbes par notation et les données EIOPA, permettant une modélisation adaptée aux spécificités des portefeuilles obligataires ;
- **inflation** : les projections sont basées sur la relation de Fisher (ROSSPOPOFF (2013)), reliant taux nominaux, taux réels et inflation. Les taux réels sont simulés à partir des swaps d'inflation et des données initiales fournies par les courbes de marché.

Ces hypothèses permettent de générer des scénarios simulant l'évolution des actifs d'un assureur, répartis entre cinq grandes classes d'investissement : les obligations non risquées (émises par les États, considérées comme sûres), les obligations risquées (émises par des entreprises, avec un risque de défaut accru), les actions (représentant des parts de propriété dans des entreprises, sensibles aux fluctuations de marché), l'immobilier (biens physiques comme les immeubles commerciaux ou résidentiels) et les actifs monétaires (placements à court terme tels que les dépôts bancaires ou les titres de créance à courte échéance). Pour être en cohérence avec nos données du GSE RVFL, le GSE de Prim'Act a été projeté aussi sur 20 ans pour 100 simulations.

Description du portefeuille d'actifs de l'assureur Le portefeuille d'actifs utilisé dans cette étude est fictif et a été conçu à des fins pédagogiques, s'inspirant des travaux de AGBAHOLOU (2019). Il se compose de quatre grandes classes d'actifs : actions, obligations sans risque, produits monétaires et actifs immobiliers.

Classe d'actif	Valeur de marché (M €)	Valeur comptable (M €)	Pourcentage
Action	20,00	18,54	20%
Immobilier	10,00	9,88	10%
Obligations sans risque	63,00	58,85	63%
Monétaire	7,00	7,00	7%
Total	100,00	94,26	100%

TABLE 4.2 : Répartition de l'actif

La majorité des actifs, comme indiqué dans le tableau 4.2, est constituée d'obligations sans risque, ce qui reflète une stratégie prudente adaptée à la gestion des engagements de long terme. Ces obligations, offrant des rendements fixes et réguliers, facilitent la synchronisation des flux financiers avec les engagements futurs de l'assureur. Par ailleurs, dans **SimBEL**, la trésorerie est représentée par un compte bancaire d'ajustement, expliquant l'égalité entre sa valeur nette comptable et sa valeur de marché. Certaines hypothèses spécifiques caractérisent ce portefeuille : un taux de frais de gestion de 0,5 %, ajustable en fonction de l'inflation, ainsi qu'un montant initial nul pour la Provision pour Risque d'Exigibilité (PRE) et la Réserve de Capitalisation (RC).

Description du contrat d'épargne au passif de l'assureur Le portefeuille d'épargne en euros est simplifié pour cette étude et comprend des contrats répartis entre 128 assurés, avec un âge moyen de 50 ans, ici aussi s'inspire des travaux de AGBAHOLOU (2019). La répartition par sexe est supposée égale. La provision mathématique globale associée à ce portefeuille s'élève à 60 millions d'euros. Les principales hypothèses relatives à ce contrat sont présentées dans le tableau 4.3.

Ces hypothèses et données de passif sont intégrées dans l'outil **SimBEL** pour produire les estimations optimales de passif *Best Estimate*, essentielles pour les analyses actuarielles approfondies. L'étape suivante exposera l'approche qui est au cœur de ce chapitre : la méthode de calcul du BE.

Nom de l'hypothèse	Valeur / Description
Ancienneté initiale	0 an pour tous les contrats en portefeuille
Taux de chargement sur encours	0,5 %
Taux minimum garanti (TMG)	0,5 %
Estimation des rachats	les tables d'expérience de Prim'Act
Estimation des décès	les tables réglementaires de mortalité différenciées par sexe
Participation aux bénéfices (PB)	90 %
Frais de gestion sur prestations	3 %

TABLE 4.3 : Synthèse des hypothèses contractuelles pour le calcul des passifs

4.2 Calcul de *Best Estimate*

Cette section présente la méthodologie de calcul de la meilleure estimation pour un produit d'épargne en euro, en suivant les directives de la documentation de SimBEL. L'objectif est de décrire les étapes nécessaires pour projeter et actualiser les flux de trésorerie futurs, en tenant compte de la probabilité et de la temporalité des flux pour une évaluation précise des passifs.

4.2.1 Le BE

Le calcul du BE est une étape clé dans l'évaluation des provisions techniques des contrats d'assurance vie dans le cadre de SII, comme rappelé dans . Selon la norme, « *La meilleure estimation est égale à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs), déterminée à partir de la courbe des taux sans risque pertinente. Le calcul de la meilleure estimation est fondé sur des informations actuelles crédibles et des hypothèses réalistes et il fait appel à des méthodes actuarielles et des techniques statistiques adéquates* ». Comme énoncé à 1.1.1, la figure 4.1 présente les étapes générales de ce calcul (LAURENT et al. (2016)).

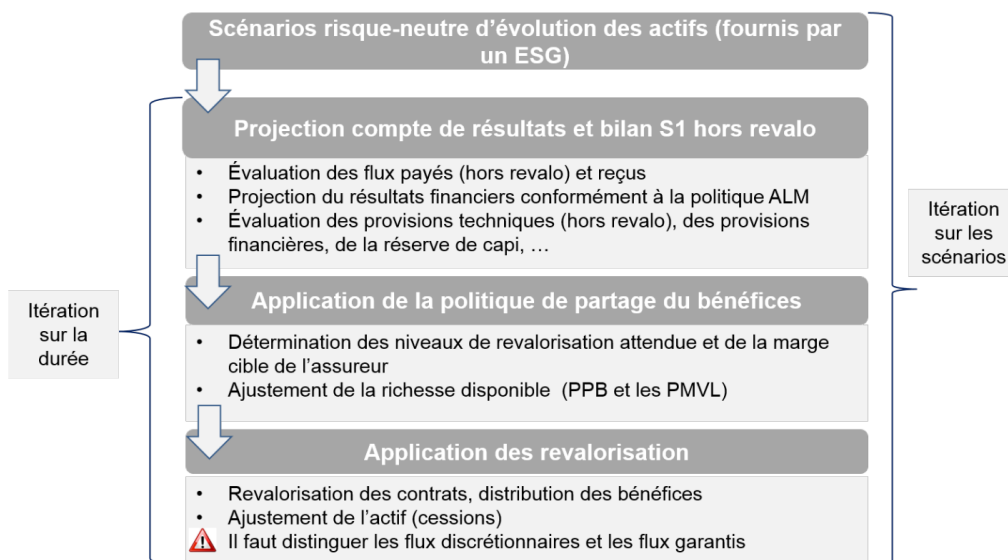


FIGURE 4.1 : Logique générale d'évaluation

Ce calcul vise à estimer la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs, pondérée par leur probabilité

d'occurrence. Il repose sur des méthodes actuarielles et des techniques de simulation avancées pour garantir une cohérence avec les hypothèses de marché. **SimBEL**, un outil développé en langage **R**, offre une approche modulaire pour modéliser les flux d'actifs et de passifs et simuler leur évolution au moyen de techniques Monte Carlo.

Modélisation des engagements contractuels L'évaluation du *Best Estimate* nécessite une représentation précise des engagements des assurés. Ceux-ci sont regroupés sous forme de *model points*, qui correspondent à des groupes homogènes de contrats partageant des caractéristiques similaires. Ces caractéristiques incluent notamment la fréquence des primes versées, les prestations dues (rachats, décès, échéances), ainsi que les frais administratifs, de gestion et d'acquisition (GUIBERT (2019)).

La modélisation des flux de sortie repose sur une hiérarchisation des événements. En premier lieu, les rachats totaux sont priorisés, suivis des décès, puis des rachats partiels. La probabilité de décès à un âge x est donnée par la relation suivante

$$q_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad (4.1)$$

où l_x représente l'effectif survivant à l'âge x . Les rachats, quant à eux, peuvent être de nature structurale, lorsqu'ils sont estimés à partir de tables d'ancienneté et d'âge, ou de nature dynamique, lorsqu'ils dépendent de l'écart entre le taux servi r_{rev} et le taux cible r_{cib} .

La probabilité d'un rachat dynamique est définie par la fonction

$$q_{dyn}(r_{cib}, r_{rev}) = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } r_{rev} - r_{cib} \leq \alpha, \\ RC_{max} \frac{r_{rev} - r_{cib} - \beta}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha < r_{rev} - r_{cib} \leq \beta, \\ 0 & \text{si } \beta < r_{rev} - r_{cib} \leq \gamma, \\ RC_{min} \frac{r_{rev} - r_{cib} - \gamma}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma < r_{rev} - r_{cib} \leq \delta, \\ RC_{min} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.2)$$

avec $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ des paramètres ajustables.

Par rapport aux flux de sorties, l'ordre des sorties est supposé être le suivant : les rachats totaux interviennent avant les décès puis enfin les rachats partiels ont lieu

$$q^{tot}(t) = 1 - \frac{l_{x,anc}^{tot}}{l_{x-1,anc-1}^{tot}} + q^{tot,dyn}(r_{cib}(t), r_{rev}(t)), \quad (4.3)$$

$$q^{dc}(t) = (1 - q^{tot}(t)) \left(1 - \frac{l_{x,gen}^{dc}}{l_{x-1,gen}^{dc}} \right), \quad (4.4)$$

$$q^{part}(t) = (1 - q^{tot}(t)) \frac{l_{x,gen}^{dc}}{l_{x-1,gen}^{dc}} q_{x,anc}^{part} + q^{part,dyn}(r_{cib}(t), r_{rev}(t)). \quad (4.5)$$

Finalement, les flux liés aux rachats, aux décès et les flux à l'échéance sont respectivement

$$pm(t-1) (q^{tot}(t) + q^{part}(t)) \mathbf{1}_{t \leq T}, \quad (4.6)$$

$$pm(t-1) q^{dc}(t) \mathbf{1}_{t \leq T}, \quad (4.7)$$

$$pm(t-1) \mathbf{1}_{\{t > T\}}. \quad (4.8)$$

Actualisation des flux et gestion des incertitudes L'actualisation des flux repose sur l'utilisation de déflateurs stochastiques, lesquels sont calculés à partir de courbes de taux sans risque simulées par un GSE. Ces courbes tiennent compte des conditions de marché et des hypothèses économiques pertinentes. Les simulations Monte Carlo permettent de générer une diversité de scénarios économiques, capturant ainsi les incertitudes liées aux risques financiers et assurantiels. L'approche adoptée par SimBEL garantit que le BE reflète fidèlement la valeur espérée des engagements futurs, en tenant compte à la fois de la probabilité d'occurrence des flux et de la valeur temporelle de l'argent.

Prise en compte des garanties et des revalorisations Le calcul du *Best Estimate* doit également prendre en compte la distinction entre les garanties minimales et les flux discrétionnaires liés à la participation aux bénéfices (*PB*). Les garanties minimales incluent notamment le taux minimum garanti (*TMG*), le taux technique et la dotation initiale de la provision pour participation aux bénéfices (*PPB*). En complément, les flux discrétionnaires sont modélisés en fonction des politiques spécifiques de chaque assureur et des contraintes réglementaires. La figure 4.2 illustre l'algorithme de revalorisation utilisé dans ce cadre.

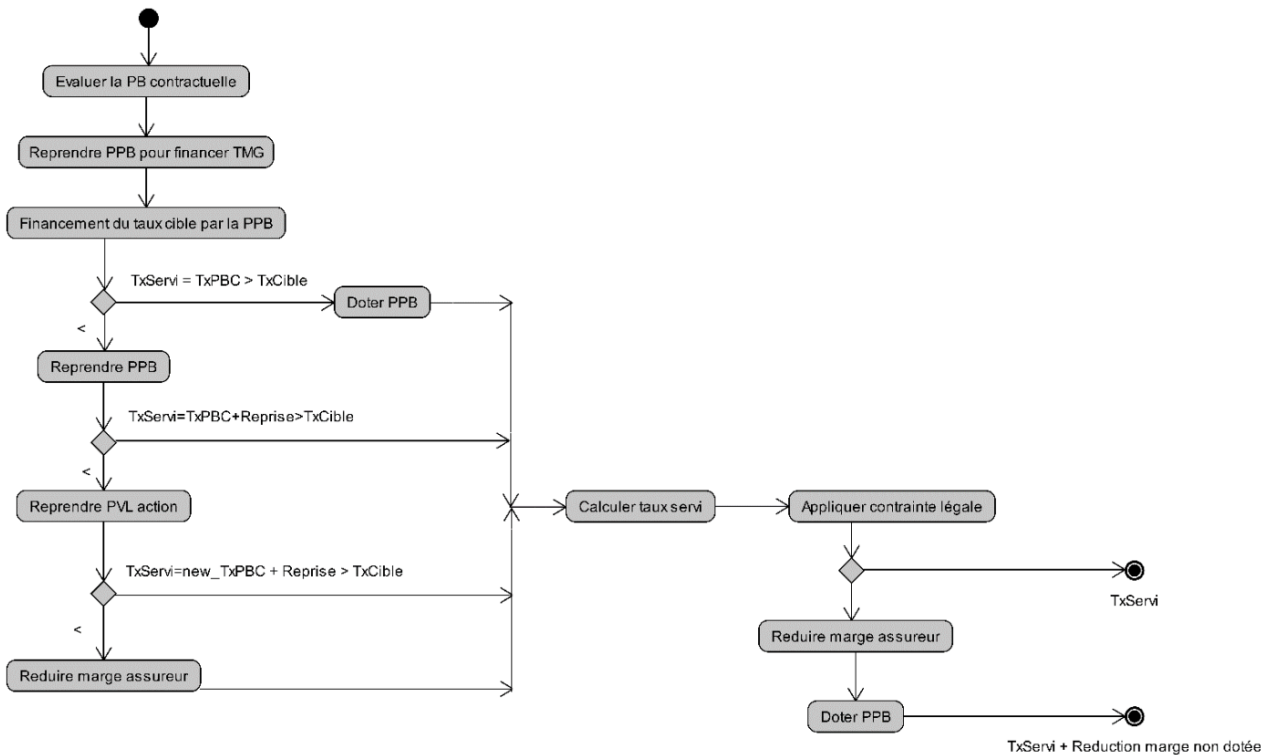


FIGURE 4.2 : Algorithme de revalorisation (GUIBERT (2019))

Couplage actif-passif et stratégie ALM Le modèle SimBEL intègre un module canton, qui regroupe les flux financiers liés aux portefeuilles d'actifs et de passifs, permettant ainsi une gestion cohérente de leurs interactions. Les flux financiers générés par les actifs, tels que les dividendes ou les coupons obligataires, sont utilisés pour couvrir les besoins de financement des engagements. Les ajustements liés à la réserve de capitalisation et à la participation aux bénéfices sont également pris en compte. De plus, les algorithmes de gestion actif-passif (ALM) optimisent la répartition des actifs en fonction des engagements projetés, assurant ainsi une cohérence globale dans le calcul du BE.

La figure 4.3 illustre les interactions entre les différents modules (actif, passif, ALM, revalorisation)

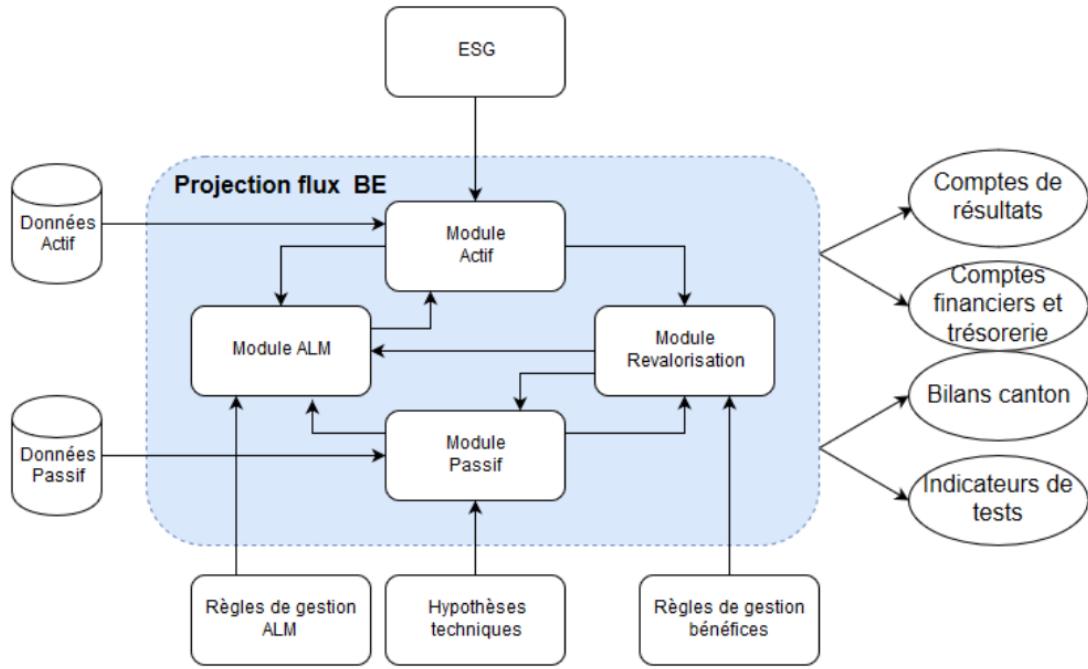


FIGURE 4.3 : Schéma des interactions entre les modules dans SimBEL (GUIBERT (2019))

et leur contribution à la production des bilans canton et des indicateurs nécessaires à l'analyse du BE. Ces modules reçoivent des données économiques fournies par un GSE et suivent des règles spécifiques (gestion ALM et revalorisations) pour projeter les flux et aboutir à une évaluation complète.

Simulation Monte Carlo Les simulations Monte Carlo permettent de générer un large éventail de scénarios économiques et d'intégrer les risques de marché (par exemple, les variations de taux d'intérêt ou des marchés actions) et les risques de souscription (comme la mortalité). Chaque simulation produit une trajectoire unique des flux actualisés, et l'espérance sur l'ensemble des trajectoires constitue le BE final. Cette approche garantit une prise en compte exhaustive des incertitudes et une robustesse méthodologique. Les flux sont actualisés via des déflateurs stochastiques δ_u dérivés d'un GSE

$$BE_t = \mathbb{E} \left[\sum_{u>t} \delta_u CF_u \right] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{u>t} \delta_{u,n} CF_{u,n}. \quad (4.9)$$

avec N , le nombre de simulation.

Enfin, le calcul du BE intègre également la variabilité des flux induite par les options et garanties intégrées dans les contrats. Cette dimension est évaluée à l'aide de la *Time Value of Options and Guarantees* (TVOG), qui affine l'estimation des passifs en prenant en compte les risques supplémentaires associés à ces mécanismes contractuels.

4.2.2 La TVOG

La TVOG mesure la valeur temporelle des options et garanties intégrées aux contrats d'épargne, en prenant en compte l'incertitude des flux de trésorerie futurs. Elle permet ainsi d'évaluer l'impact des options contractuelles, telles que les possibilités de rachat ou les garanties de rendement minimal, sur la volatilité des passifs. La TVOG est particulièrement pertinente pour les contrats comportant

des options, car elle reflète la part de risque associée aux droits d'exercice des assurés, qui peuvent adapter leur comportement en fonction des fluctuations de marché. La détermination de la TVOG repose sur la comparaison entre deux évaluations du BE à la date $t = 0$.

BE déterministe Cette évaluation repose sur une projection unique des flux de trésorerie en supposant des hypothèses de marché constantes. Elle ignore la variabilité inhérente aux options et garanties, fournissant une estimation stable mais moins précise des passifs en cas de conditions de marché fluctuantes.

BE stochastique Dans ce cas, les flux de trésorerie futurs sont projetés à l'aide de simulations Monte-Carlo, qui modélisent différents scénarios de marché. Cette méthode capture les fluctuations possibles dans les conditions de marché, intégrant ainsi la variabilité due aux options et garanties. Il est donné par

$$\text{TVOG} = \text{BE}_{\text{stochastique}} - \text{BE}_{\text{déterministe}} \quad (4.10)$$

Ce calcul fournit une estimation de la valeur des options et garanties dans un environnement incertain, intégrant les possibilités d'exercice de ces options par les assurés. La TVOG est donc essentielle pour évaluer avec précision la volatilité des passifs dans les contrats d'épargne en euros et mieux appréhender les risques associés aux engagements financiers. Pour une documentation approfondie, le lecteur est invité à consulter les travaux de SAVIDAN (2015).

4.3 Bilan des résultats

Cette section présente une analyse des résultats obtenus à l'aide de **SimBEL**, visant à comparer les performances du modèle RVFL (basé sur un réseau de neurones) avec celles du modèle paramétrique de référence, Prim'Act. L'étude repose sur un échantillon de 1000 simulations, pour 20 ans de projection, permettant une évaluation approfondie dans le cadre de la gestion des engagements à long terme des assureurs. Les deux modèles étudiés sont les suivants :

- le modèle paramétrique GSE de Prim'Act, utilisé comme référence et basé sur des hypothèses classiques pour l'évaluation des risques ;
- le modèle GSE-RVFL, qui s'appuie sur un réseau de neurones pour intégrer des dynamiques complexes et non linéaires des engagements assurantiels.

La comparaison porte sur deux dimensions principales : les estimations du BE et de la TVOG, ainsi que leur sensibilité à des chocs financiers et démographiques. L'objectif est d'examiner les caractéristiques et les performances de chaque modèle dans différents contextes.

4.3.1 Comparaison des estimations du BE et de la TVOG

Pour évaluer les performances respectives des modèles Prim'Act et RVFL, une comparaison des estimations du BE et de la TVOG a été réalisée. Les résultats sont synthétisés dans le tableau 4.4.

Modèle	BE	TVOG
GSE RVFL	63 474 158,92	2 689 745,81
GSE de Prim'Act	64 429 527,00	2 373 769,22
Écart relatif	1,5%	13,31%

TABLE 4.4 : Comparaison des estimations du BE et de la TVOG (en €)

Les résultats présentés dans le tableau 4.4 montrent un écart entre les estimations des deux modèles, reflétant les différences dans les hypothèses et méthodologies sous-jacentes. Cet écart est attendu compte tenu des spécificités de chaque GSE.

En termes de BE, les valeurs obtenues sont relativement proches, avec un écart de 1,5% ce qui indique que le Best Estimate est peu sensible à la méthodologie employée. Cela constitue un point rassurant pour un opérateur envisageant l'utilisation du modèle RVFL, car cela suggère une certaine robustesse du BE face à un changement de méthodologie.

Concernant la TVOG, on observe une différence plus marquée entre les deux modèles, avec un écart de 13,31%. Cette variation peut être expliquée par des différences dans la volatilité implicite des scénarios utilisés ou par une sensibilité accrue aux hypothèses extrêmes. Une analyse plus approfondie des distributions de scénarios et des volatilités permettrait d'affiner l'explication de cet écart.

Ces observations soulignent l'importance d'une analyse complémentaire à travers des tests de robustesse plus poussés, notamment en soumettant les modèles à des chocs sur les paramètres financiers et démographiques. Une évaluation de leur capacité à bien reproduire un large panel de prix permettrait également d'apprécier leur pertinence dans un cadre opérationnel.

4.3.2 Analyse des impacts des chocs sur le BE

Pour évaluer la sensibilité des modèles (GSE-RVFL et GSE de Prim'Act) aux variations des paramètres financiers et démographiques, une série de chocs a été appliquée. Ces chocs simulent des fluctuations importantes afin d'identifier les comportements du BE des modèles sous des scénarios de stress. Les objectifs de cette démarche sont les suivants :

- examiner la réactivité des modèles aux variations de paramètres clés, notamment ceux liés aux risques de marché et aux risques démographiques ;
- déterminer les paramètres ayant le plus d'impact sur les estimations des engagements futurs ;
- améliorer la compréhension des comportements des modèles dans des situations de stress et orienter les stratégies de gestion des risques.

Les chocs appliqués ont été calibrés de manière à représenter des variations plausibles dans un contexte assurantiel. Les paramètres concernés et les amplitudes des chocs sont présentés dans le tableau 4.5.

Remarque 3 *Il convient de noter que les chocs sur les taux d'intérêt n'ont pas été directement intégrés dans cette étude. L'outil SimBEL s'appuie sur des scénarios préalablement définis (scénarios up et down) pour modéliser ces variations. L'ajout de chocs spécifiques aux taux aurait nécessité une configuration plus complexe, sans être indispensable à l'objectif principal de cette analyse, qui vise à estimer le BE dans des conditions simplifiées et accessibles.*

Type de risque	Choc appliqué	Valeur du choc
Action	Variation des actions	+22%
Immobilier	Variation de la valeur immobilière	+25%
Frais	Choc lié à l'inflation	+1%
	Choc lié à l'assiette des frais	+10%
Rachat massif	Choc de rachat massif	+40%
Mortalité	Augmentation du taux de mortalité	+15%
Longévité	Diminution du taux de longévité	-20%

TABLE 4.5 : Résumé des chocs appliqués et des variations calibrées

L'impact des chocs appliqués sur les BE calculés par les modèles RVFL et Prim'Act est synthétisé dans le tableau 4.6.

Choc	BE RVFL	BE de Prim'Act	TVOG RVFL	TVOG de Prim'Act
Frais	63 847 512	64 070 869	529 874	554 437
Mortalité	64 248 365	64 421 307	418 652	458 377
Longévité	64 229 758	64 417 799	392 841	439 643
Rachat massif	63 597 823	63 841 899	213 578	224 203
Action	64 894 125	65 755 074	819 562	844 643
Immobilier	64 876 438	65 091 781	629 214	647 470
Spread	65 358 496	65 942 312	715 872	748 545

TABLE 4.6 : Impacts des chocs sur le BE et la TVOG (en €)

Les résultats présentés dans le tableau 4.6 révèlent des différences notables entre les estimations du Best Estimate (BE) et de la Time Value of Options and Guarantees (TVOG) produites par le modèle RVFL et celles du modèle de référence, Prim'Act. Ces écarts reflètent les spécificités méthodologiques de chaque modèle et mettent en lumière leurs comportements distincts face à des scénarios de stress.

Le modèle RVFL produit systématiquement des valeurs de BE inférieures à celles du modèle Prim'Act. Les écarts varient entre 0,35% pour le choc sur les frais et 1,31% pour le choc sur les actions. Ces différences, bien que modestes, indiquent une sensibilité accrue du modèle RVFL aux variations des paramètres de marché et démographiques. Par exemple, pour le choc sur les actions, le BE du RVFL est de 64 894 125 €, contre 65 755 074 € pour Prim'Act. Cela suggère que le modèle RVFL réagit de manière plus prononcée aux fluctuations des marchés financiers, probablement en raison de sa structure non linéaire.

Pour les chocs démographiques, comme la mortalité et la longévité, les écarts sont plus faibles, respectivement 0,27% et 0,29%. Cela montre que ces paramètres, qui reposent sur des hypothèses communes aux deux modèles, ont un impact limité sur les différences observées. En revanche, les chocs liés aux frais et aux rachats massifs montrent également des écarts modérés, confirmant que le modèle RVFL reste relativement stable face à des variations opérationnelles.

La TVOG, qui mesure la valeur temps des options et garanties, montre des écarts plus marqués entre les deux modèles. Le modèle RVFL produit des valeurs de TVOG systématiquement plus élevées que celles de Prim'Act. Les écarts varient entre 4,43% pour le choc sur les frais et 10,65% pour le choc sur la longévité. Cela traduit une volatilité accrue des engagements sous risque dans le modèle RVFL.

Pour les chocs financiers, comme les actions et les spreads, les écarts de TVOG sont respectivement de 2,97% et 4,37%. Ces différences reflètent une exposition accrue du modèle RVFL aux variations

extrêmes des marchés financiers. Pour les chocs démographiques, les écarts sont encore plus prononcés, atteignant 10,65% pour la longévité. Cela suggère que le modèle RVFL, bien que moins sensible aux variations modérées, réagit de manière plus forte dans des scénarios extrêmes.

Les écarts observés entre les deux modèles s'expliquent par leurs spécificités méthodologiques. Le modèle RVFL, basé sur un réseau de neurones, intègre des dynamiques non linéaires qui peuvent amplifier les variations extrêmes des paramètres d'entrée. À l'inverse, le modèle Prim'Act, basé sur des hypothèses paramétriques classiques, offre une plus grande stabilité dans des scénarios de stress. Cette différence se traduit par une sensibilité accrue du RVFL aux chocs financiers et démographiques, ainsi que par une volatilité implicite plus élevée.

Les résultats de cette analyse ont des implications importantes pour les praticiens de l'assurance. Le modèle Prim'Act, en raison de sa stabilité et de sa robustesse, reste une solution privilégiée pour l'évaluation des engagements à long terme, en particulier dans un contexte réglementaire. Le modèle RVFL, bien qu'innovant, pourrait être davantage adapté à des analyses exploratoires ou à des produits complexes nécessitant une modélisation fine des dynamiques non linéaires. Cependant, son utilisation nécessite des tests de robustesse approfondis pour mieux comprendre ses limites.

4.4 Limites de l'étude et perspectives

Cette étude porte sur la modélisation d'un GSE non paramétrique sous les mesures de probabilité historique et risque-neutre, ainsi que sur l'évaluation du BE. Les principales limites identifiées concernent la structure du GSE, les données disponibles et les modèles implémentés.

Concernant le GSE sous la mesure historique, une amélioration pourrait être apportée en intégrant le paramètre d'échelle de la formule de Nelson-Siegel dans la validation croisée. Cela affinerait l'ajustement des trois composantes principales de la STM des taux à la courbe initiale, améliorant ainsi la précision des projections. Une autre limite notable réside dans la présence d'une saisonnalité artificielle dans les simulations, en partie due à l'utilisation du *Block Bootstrap*. Ce dernier, bien qu'efficace pour préserver la structure de dépendance temporelle, présente des inconvénients, notamment la création d'effets de bord et une dépendance excessive aux blocs sélectionnés. L'exploration d'autres méthodes de génération d'aléas, comme des modèles de rééchantillonnage plus flexibles, pourrait atténuer ces effets. Par ailleurs, l'intégration de facteurs de risque supplémentaires, tels que l'inflation ou le risque de crédit, permettrait d'élargir l'applicabilité du modèle aux cadres réglementaires tels que l'analyse ORSA. Enfin, l'évaluation de la qualité des projections pourrait être renforcée en mobilisant le test des signatures et la discrédance (BOUMEZOUED et al., 2024). Le test des signatures permettrait d'extraire des caractéristiques invariantes des trajectoires, tandis que la discrédance offrirait un moyen de comparer les distributions des données simulées et observées. L'utilisation conjointe de ces outils offrirait une validation plus robuste des trajectoires générées, contribuant ainsi à une meilleure fiabilité des projections.

Concernant le GSE sous la mesure risque-neutre, une comparaison avec des modèles paramétriques standards, tels que Black-Scholes et Hull-White, a mis en évidence des écarts légèrement plus marqués dans la propriété de martingalité du modèle RVFL. Bien que ces écarts restent acceptables dans certaines applications, ils limitent la précision du modèle et ne démontrent pas d'avantages significatifs par rapport aux approches traditionnelles. Une amélioration de la calibration, notamment en optimisant le temps de calcul qui constitue une contrainte majeure, en particulier pour les taux, serait nécessaire pour garantir une meilleure fidélité aux principes des modèles neutres au risque. De plus, l'utilisation d'un seul ténor pour la calibration des taux et de prix d'options exclusivement à la monnaie constitue une contrainte importante. L'exploration de méthodes alternatives pour effectuer la neutralisation du risque pourrait renforcer la robustesse du modèle et sa capacité à capturer des dynamiques plus

réalistes.

En ce qui concerne l'évaluation du BE et de la TVOG, bien que les résultats obtenus soient cohérents, le modèle RVFL ne surpasse pas les méthodes existantes en raison de sa dynamique non linéaire, qui peut induire des variations difficiles à contrôler. Cette caractéristique limite son efficacité dans un cadre opérationnel. La mise en place de tests de robustesse supplémentaires permettrait d'évaluer plus précisément les capacités du modèle et d'identifier les ajustements nécessaires pour améliorer sa stabilité. Enfin, l'ajout d'un calcul du *Solvency Capital Requirement* (SCR) constituerait une extension pertinente, apportant une vision plus approfondie de la capacité du modèle à répondre aux exigences de Solvabilité II et à gérer les risques de marché dans des scénarios extrêmes.

Conclusion

Dans le cadre de la directive Solvabilité II, qui impose des exigences strictes pour garantir la stabilité financière des assureurs en Europe, les générateurs de scénarios économiques (GSE) jouent un rôle fondamental dans la modélisation des dynamiques de marché et l'évaluation des engagements des assureurs. Les modèles paramétriques traditionnels, souvent contraints par leurs hypothèses rigides, peinent à capturer des dynamiques complexes. L'essor des méthodes d'apprentissage automatique, notamment les réseaux de neurones, permet une modélisation plus flexible et adaptée aux structures sous-jacentes des données.

Ce travail poursuit deux objectifs principaux. D'une part, le développement d'un GSE non paramétrique basé sur des réseaux de neurones de type *Random Vector Functional Link* (RVFL) sous la probabilité historique. D'autre part, l'application d'une méthode de neutralisation du risque permettant de transformer les projections historiques en projections risque-neutre.

Dans un premier temps, une sélection approfondie des données et un ajustement optimal des hyperparamètres du modèle RVFL ont permis de construire un GSE historique garantissant des simulations économiques fidèles aux dynamiques de marché, y compris dans des situations de stress. Comparé aux approches paramétriques (Black-Scholes, ARIMA, VAR) et aux réseaux de neurones récurrents (LSTM), le modèle RVFL se distingue par sa flexibilité et sa capacité d'adaptation à divers contextes.

Dans un second temps, après avoir vérifié la pertinence des projections historiques, la transition vers des projections neutres au risque a été effectuée. Pour les taux, la calibration a consisté à aligner les taux zéro-coupon sur le taux sans risque de l'EIOPA, complétée par un paramètre d'ajustement dynamique pour refléter les conditions de marché. Pour les actions, les rendements ont été ajustés afin de garantir la propriété de martingalité, tout en calibrant un paramètre spécifique pour reproduire les prix d'options à 12 mois, conformément aux recommandations de ACPR (2013). Un test initial de validation de la martingalité a confirmé l'adéquation du modèle, bien que des écarts plus marqués aient été relevés en comparaison avec des modèles paramétriques tels que Black-Scholes et Hull-White. Toutefois, la précision de reproduction des prix d'options reste satisfaisante, avec des écarts de l'ordre de 10^{-3} . Ce qui conclut sur l'aspect *market-consistency*.

Dans un troisième temps, l'analyse a porté sur l'évaluation du *Best Estimate* (BE) et de la *Time Value of Options and Guarantees* (TVOG) pour un contrat d'épargne en euros, en comparant le modèle RVFL au GSE de Prim'Act sur un assureur fictif. Les résultats montrent que le modèle RVFL génère un BE inférieur et une TVOG plus élevée que ceux du GSE de Prim'Act, traduisant une volatilité accrue et une plus grande sensibilité aux dynamiques de marché non linéaires. L'application de chocs sur des paramètres financiers (actions, immobilier, spread) et démographiques (mortalité, longévité) confirme que le modèle Prim'Act présente une plus grande stabilité face aux variations extrêmes, tandis que le modèle RVFL, bien qu'adapté à la capture de dynamiques complexes, reste plus sensible aux fluctuations de marché du à son caractère non-linéaire. Ces résultats mettent en évidence les forces et limites de chaque approche et ouvrent des perspectives d'amélioration pour renforcer la robustesse et la précision des projections.

Limites et travaux à envisager

En premier lieu, l'intégration de nouvelles variables, telles que le risque de crédit ou l'inflation, permettrait d'enrichir la modélisation et d'étendre les applications du modèle à des exercices d'*Own Risk and Solvency Assessment* (ORSA) climatique. Par ailleurs, la génération des données, actuellement basée sur le *Block-Bootstrap*, pourrait être améliorée par d'autres techniques de rééchantillonnage, offrant une meilleure capture des dynamiques temporelles. Une comparaison avec des modèles avancés, tels que les réseaux antagonistes génératifs (GAN), fournirait des analyses complémentaires sur les performances du modèle actuel. De plus, l'évaluation de la qualité des projections pourrait être affinée grâce à l'utilisation du test des signatures et de la discrédance (BOUMEZOUED et al., 2024). Le test des signatures permettrait d'extraire des caractéristiques invariantes des trajectoires simulées, tandis que la discrédance faciliterait la comparaison des distributions entre les données simulées et historiques. L'intégration de ces outils offrirait ainsi une validation plus rigoureuse des projections, renforçant la robustesse et la fiabilité du modèle dans divers contextes d'application.

En deuxième lieu, concernant la neutralisation du risque, plusieurs pistes d'amélioration pourraient être envisagées. La complexité de la transformation martingale et la calibration des rendements restent sensibles aux hypothèses initiales, pouvant générer des erreurs si elles ne sont pas validées de manière appropriée. La dépendance à la qualité et à la disponibilité des données de marché, notamment pour les prix d'options et de swaptions, constitue une autre limite. Pour pallier ces enjeux, le recours à des techniques de calibration avancées, via des algorithmes d'optimisation sophistiqués, pourrait améliorer l'adéquation aux conditions de marché. De plus, l'exploration de modèles alternatifs, comme le modèle de Black pour le pricing des swaptions ou l'usage de réseaux de neurones génératifs, pourrait ouvrir des perspectives nouvelles dans la modélisation du risque.

En troisième lieu, l'intégration du *Solvency Capital Requirement* (SCR) constituerait une avancée significative. En simulant des scénarios de stress et en quantifiant le capital requis pour couvrir les risques identifiés, le modèle gagnerait en pertinence pour la gestion des risques et la conformité réglementaire. Cette amélioration renforcerait son utilité en tant qu'outil d'aide à la décision pour les acteurs de l'assurance.

Bibliographie

- ACPR (2013). Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité II, V1.0. URL : https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/20130527-onc-2013_0.pdf.
- ACPR (2011). Analyses et Synthèses Solvabilité 2. <https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/media/2017/06/21/201103-1-acp-solvabilite-2-enseignements-de-qis5.pdf>.
- AGBAHOLOU, T. (2019). 3 cas d'analyse des scénarios économiques utilisés pour le calcul d'un Best Estimate en Epargne. *Mémoire d'actuariat Dauphine*. <https://www.institutdesactuaire.com/docs/mem/6be411c77bc590b70ba87c67748bfb5e.pdf>.
- ANDERSEN, L. et PITERBARG, V. (2010). Interest Rate Modeling. <https://archive.org/details/interest-rate-modeling-volumes-1-2-3-andersen-l.-b.-g.-piterbarg-v.-v.-z-library/page/226/mode/2up>.
- ARMEL, K. et PLANCHET, F. (2020). L'évaluation économique des engagements en assurance vie : écueils, bonnes pratiques et préconisations pour une mise en œuvre pertinente. *ISFA - Laboratoire SAF*. [https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/42b2c56f349fafa2c12585d100691b99/\\$FILE/Article.v2.1.FR.pdf](https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/42b2c56f349fafa2c12585d100691b99/$FILE/Article.v2.1.FR.pdf).
- ARMEL, K. et PLANCHET, F. (2018a). Construire un générateur de scénarios économiques risque neutre. *ISFA - Laboratoire SAF*. [https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/d512ad5b22d73cc1c1257052003f1aed/709de72db6128dbdc12582700071015b/\\$FILE/Article.GSE-Annexe-technique.FR_v1.6.pdf](https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/d512ad5b22d73cc1c1257052003f1aed/709de72db6128dbdc12582700071015b/$FILE/Article.GSE-Annexe-technique.FR_v1.6.pdf).
- AUBERT-LASSARADE, L. (2024). Construction d'un générateur de scénarios économiques non-paramétrique à l'aide d'une méthode de Machine Learning. *Mémoire d'actuariat, Université Paris Dauphine*. <https://www.ressources-actuarielles.net/C12574E200674F5B/0/1C0BDF AAC8D3ADFAC1258A6C006DD95F>.
- BAI, S., KOLTER, J. Z. et KOLTUN, V. (2018). Empirical Methods for Stock Market Forecasting Using CNN-LSTM Networks. *Proceedings of the ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. Explores CNN-LSTM hybrid architectures for high-frequency financial forecasting., p. 2643-2651.
- BATES, D. S. (1996). Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options. *Review of Financial Studies* 9.1. Combines jumps and stochastic volatility in option pricing models., p. 69-107.
- BLACK, F. et SCHOLES, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81.3. Foundational model for option pricing., p. 637-654.
- BOLLERSLEV, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31.3. Introduced the GARCH model for volatility modeling., p. 307-327.
- BOUMEZOUE, A., ANDRÈS, H. et JOURDAIN, B. (2024). Signature-based validation of real-world economic scenarios. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*. <https://www.cambridge.org/core/journals/astin-bulletin-journal-of-the-iaa/article/signaturebased-validation-of-realworld-economic-scenarios/015452DDB441AA804F7743CEB0B4D097>.
- BOX, G. E. et JENKINS, G. M. (1970). Time Series Analysis: Forecasting and Control. Foundational text on ARIMA models for time series analysis. Holden-Day.

- BREIMAN, L. (2001). Random Forests. *Machine Learning* 45.1. Seminal paper on the Random Forest algorithm., p. 5-32.
- BRIGO, D. et MERCURIO, F. (2021). Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit. Second Edition. Covers modern interest rate models, including local-stochastic volatility models for complex derivatives. Springer.
- BROCHU, E., CORA, V. M. et de FREITAS, N. (2010). A Tutorial on Bayesian Optimization of Expensive Cost Functions, with Application to Active User Modeling and Hierarchical Reinforcement Learning. *Cornell University*. <https://arxiv.org/pdf/1012.2599>.
- CAJA, A. (2012). Estimation du prix de marché du risque. [https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/fp-isfa.nsf/0/0b9df464e9543283c1256f130067b2f9/\\$FILE/CajaPMR.pdf](https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/fp-isfa.nsf/0/0b9df464e9543283c1256f130067b2f9/$FILE/CajaPMR.pdf).
- CAJA, A. et PLANCHET, F. (2010). La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ? *Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1 - ISFA - Actuarial School*. [https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/8d48b7680058e977c1256d65003ecbb5/e3e50994bbef8578c12577130033742c/\\$FILE/PrimeRisque_v1.1.pdf](https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/8d48b7680058e977c1256d65003ecbb5/e3e50994bbef8578c12577130033742c/$FILE/PrimeRisque_v1.1.pdf).
- CAO, L., WANG, W., ZHANG, J. et WANG, W. (2021). Financial Time Series Forecasting with Deep Learning: A Systematic Literature Review. *Applied Soft Computing* 100. Systematic review of deep learning approaches in financial time series forecasting., p. 106919.
- CHO, K., VAN MERRIENBOER, B., GULCEHRE, C., BAHDANAU, D., BOUGARES, F., SCHWENK, H. et BENGIO, Y. (2014). Learning Phrase Representations using RNN Encoder-Decoder for Statistical Machine Translation. *arXiv preprint arXiv:1406.1078*. Introduces the GRU, a simplified recurrent network structure suitable for time series.
- DICKEY, D. A. et FULLER, W. A. (1979). Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association* 74.366a, p. 427-431.
- EIOPA (2021). Solvency Capital Requirement (SCR) Standard Formula. *ANNEX IV - SOLVENCY CAPITAL REQUIREMENT (SCR) STANDARD FORMULA*. <https://www.eiopa.europa.eu/rulebook/solvency-ii/article-2411.en>.
- ENGLE, R. F. (2002). Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate GARCH Models. *Journal of Business & Economic Statistics* 20.3. Introduces the DCC-GARCH model, useful for dynamic correlation in multivariate time series., p. 339-350.
- F DOSHI-VELEZ, B. K. (2017). Towards A Rigorous Science of Interpretable Machine Learning. *Computer Science, Philosophy - arXiv: Machine Learning*. <https://arxiv.org/pdf/1702.08608>.
- FALEH, A., PLANCHET, F. et RULLIÈRE, D. (2010). Les Générateurs de Scénarios Économiques : quelle utilisation en assurance ? https://hal.science/hal-00433037/file/Les_Generateurs_de_Scenarios_Economiques_Quelle_utilisation_en_assurance.pdf.
- FISCHER, T. et KRAUSS, C. (2018). Deep Learning with Long Short-Term Memory Networks for Financial Market Predictions. *European Journal of Operational Research* 270.2. Evaluates LSTM networks for predictive modeling in financial markets, with focus on high-frequency data., p. 654-669.
- GARNIER, J.-B. et MARTIAL, A.-C. (2014). Optimisation du calcul du capital économique d'une compagnie d'assurance vie par la méthode des Simulations dans les Simulations. *Institut des actuaires*. https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?doc_id=1353&fg=1.
- GILLI, M., GROSSE, S. et SCHUMANN, E. (2010). Calibrating the Nelson-Siegel-Svensson model. <https://enricoschumann.net/COMISEF/wps031.pdf>.
- GLOSTEN, L. R., JAGANNATHAN, R. et RUNKLE, D. E. (1993). On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *Journal of Finance* 48.5. Develops the TGARCH model, allowing for asymmetrical volatility modeling., p. 1779-1801.

- GUIBERT, Q. (2019). SimBEL: Calculate the Best Estimate in Life Insurance with Monte Carlo Techniques. [https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/fp-isfa.nsf/0/0B9DF464E9543283C1256F130067B2F9\\$FILE/SimBEL.pdf?OpenElement](https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/fp-isfa.nsf/0/0B9DF464E9543283C1256F130067B2F9$FILE/SimBEL.pdf?OpenElement).
- HAGAN, S., LESNIEWSKI, A. et WOODWARD, D. (2002). Managing Smile Risk. *WILMOTT magazine*. https://www.next-finance.net/IMG/pdf/pdf_SABR.pdf.
- HALL, P., HOROWITZ, J. L. et B.Y.JING (1995). On blocking rules for the bootstrap with dependent data. *Biometrika*. <https://academic.oup.com/biomet/article-abstract/82/3/561/260651>.
- HAMILTON, J. D. (2020). Time Series Analysis. Comprehensive text on modern time series techniques, with applications to finance. Princeton University Press.
- HERAULT, R. et CHATELAIN, C. (2021). Initiez-vous au Deep Learning. *Support de cours interactif. Groupe INSA*. <https://https://openclassrooms.com/fr/courses/5801891-initiez-vous-au-deep-learning/5814656-decouvrez-les-cellules-a-memoire-interne-les-lstm>.
- HERAULT, R. et CHATELAIN, C. (2021a). Découvrez les réseaux de neurones adaptés au traitement de séquences. *Support de cours interactif. Groupe INSA*. <https://openclassrooms.com/fr/courses/5801891-initiez-vous-au-deep-learning/5801898-decouvrez-le-neurone-formel>.
- HESTON, S. L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies* 6.2. Introduces the Heston model for stochastic volatility., p. 327-343.
- HIBBERT, J., MOWBRAY, P. et TURNBULL, C. (2001). A STOCHASTIC ASSET MODEL & CALIBRATION FOR LONG-TERM FINANCIAL PLANNING PURPOSES. [https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/a1d9fb9416c79dfec12576020046e11b/\\$FILE/hibbert.pdf](https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/a1d9fb9416c79dfec12576020046e11b/$FILE/hibbert.pdf).
- HOCHREITER, S. et SCHMIDHUBER, J. (1997). Long Short-Term Memory. *Neural Computation* 9.8. Introduced the LSTM network for handling long-term dependencies in sequential data., p. 1735-1780.
- INSTITUT DES ACTUAIRES (2018). Vector Autoregressive Models for Multivariate Time Series. https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?doc_id=15033&fg=1.
- KIENITZ, J. et WETTERAU, D. (2020). Financial Modelling: Theory, Implementation and Practice with MATLAB Source. Discusses advanced models for financial pricing and risk management, including stochastic volatility models. John Wiley & Sons.
- KRAUSS, C., DO, X. Y. et HUCK, N. (2017). Deep neural networks, gradient-boosted trees, random forests: Statistical arbitrage on the S&P 500. *European Journal of Operational Research* 259.2. Examines the performance of machine learning models in statistical arbitrage., p. 689-702.
- KÜNSCH, H. R. (1989a). The Jackknife and the Bootstrap for General Stationary Observations. *The Annals of Statistics* 17.3, p. 1217-1241.
- KWIATKOWSKI, D., PHILLIPS, P. C. B., SCHMIDT, P. et SHIN, Y. (1992). Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root: How Sure Are We That Economic Time Series Have a Unit Root? *Journal of Econometrics* 54.1-3, p. 159-178.
- LAHIRI, S. (2003). Comparison of Block Bootstrap Methods. *In book : Resampling Methods for Dependent Data*. https://www.researchgate.net/publication/279369334_Comparison_of_Block_Bootstrap_Methods.
- LAURENT, J.-P., NORBERG, R. et PLANCHET, F., éd. (2016). Modelling in Life Insurance – A Management Perspective. EAA Series. Springer International Publishing.
- LIM, B. et ZOHREN, S. (2021). Time-Series Forecasting with Deep Learning: A Survey. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 379.2194. Comprehensive review of deep learning techniques for time-series forecasting., p. 20200209.
- LIM, B., ZOHREN, S. et ROBERTS, S. (2021). Time-Series Forecasting with Deep Learning: A Survey. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 379.2194. <https://arxiv.org/pdf/2004.13408>, p. 20200209.

- LIU, R. Y. et SINGH, K. (1992). Moving Blocks Jackknife and Bootstrap Capture Weak Dependence. *Exploring the Limits of Bootstrap*. Sous la dir. de LEPAGE, R. et BILLARD, L. New York, NY : John Wiley & Sons, p. 225-248.
- LUNDBERG, S. M. et LEE, S.-I. (2017). A Unified Approach to Interpreting Model Predictions. *Advances in Neural Information Processing Systems*. T. 30. Curran Associates, Inc., p. 4765-4774.
- LÜTKEPOHL, H. (2005a). New Introduction to Multiple Time Series Analysis. Comprehensive resource on VAR and VECM models for multivariate time series. Springer Science & Business Media.
- LÜTKEPOHL, H. (2005b). New Introduction to Multiple Time Series Analysis. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag.
- MALIK, A. K., B., G., GANAIE, M. A., TANVEER, M. et SUGANTHAN, P. (2023). Random Vector Functional Link Network: Recent Developments, Applications, and Future Directions. *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/2203.11316>. arXiv : 2203.11316 [cs.LG].
- MIYATO, T., KATAOKA, T., KOYAMA, M. et YOSHIDA, Y. (2018). Spectral Normalization for Generative Adversarial Networks. *arXiv preprint arXiv:1802.05957*. Introduces GANs with spectral normalization, useful for generating synthetic financial data.
- MOUDI KI, T. (2023). Introduction to R package ahead. <https://techtonique.github.io/ahead/articles/ahead-vignette.html>.
- MOUDI KI, T., PLANCHET, F. et COUSIN, A. (2018). Package ‘NMOF’ de R. *Comprehensive R Archive Network (CRAN)*.
- NELSON, D. B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica* 59.2. Introduces the EGARCH model for volatility modeling with asymmetrical properties., p. 347-370.
- PARLEMENT ET CONSEIL DE L’UNION EUROPEENNE (2009). Directive 2009/138/CE du 25 novembre 2009 sur l’accès aux activités de l’assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II). OJ L. 335/I.
- PATTON, A. J. (2006). Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence. *International Economic Review* 47.2. https://public.econ.duke.edu/~ap172/Patton.IER_2006.pdf, p. 527-556.
- PHILLIPS, P. C. B. et PERRON, P. (1988). Testing for a Unit Root in Time Series Regression. *Biometrika* 75.2, p. 335-346.
- PLANCHET, F. (2023). Absence d’opportunité d’arbitrage et probabilité risque neutre. *Ressources Actuarielles*.
- POLITIS, D. N. et WHITE, H. (2004). Automatic Block-Length Selection for the Dependent Bootstrap. *Econometric Reviews* 23.1, p. 53-70.
- POWELL, M. J. D. (1994). A direct search optimization method that models the objective and constraint functions by linear interpolation. *Advances in Optimization and Numerical Analysis*. Springer, p. 51-67.
- PRIM’ACT (2020). Package SimBEL. <https://github.com/primact/SimBEL/blob/master/inst/CITATION.md>.
- QUITTARD-PINON, F. (2002). Mathématiques financières, les essentiels de la gestion. EMS.
- R CORE TEAM (2024). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. URL : <https://www.R-project.org/>.
- RAFANELLI, E. (2021). Advances in Econometrics: Theory and Practice. Overview of recent advancements in econometrics including modern GARCH extensions. Springer.
- RIBEIRO, M. T., SINGH, S. et GUESTRI N, C. (2016). Why Should I Trust You? Explaining the Predictions of Any Classifier. *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. ACM, p. 1135-1144.
- RICHARDS, R. (2003). Vector Autoregressive Models for Multivariate Time Series. *In book: Modeling Financial Time Series with S-Plus (pp.369-413)*. <https://faculty.washington.edu/ezivot/econ584/notes/varModels.pdf>.

- RICHARDS, R. (2021). Les processus ARIMA. *Université Paris Saclay*. https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~yannig.goude/Materials/time_series/cours6_ARIMA.pdf.
- ROSSPOPOFF, B. (2013). Modèles de taux et d'inflation pour Solvabilité 2. *Mémoire d'actuaire, ISFA*. [https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/9aedb358bb2e9c32c1257ad8004821e5/\\$FILE/Memoire.BR.pdf](https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/9aedb358bb2e9c32c1257ad8004821e5/$FILE/Memoire.BR.pdf).
- RUNARSSON, T. P. et YAO, X. (2000). Stochastic ranking for constrained evolutionary optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 4.3, p. 284-294.
- SAVIDAN, V. (2015). Comptabilisation de la valeur temps des options et garanties intrinsèques d'un contrat d'épargne Euro selon la norme IFRS 4 - phase 2. Mémoire d'actuariat DUAS. URL : <https://www.institutdesactuaire.com/docs/mem/1fea689e89e992b5aabefd8c25b022b7.pdf>.
- SCHUMANN, E. (2024). NMOF: Numerical Methods and Optimization in Finance. R package version 2.7.1. Computation et Financial Engineering. URL : <https://cran.r-project.org/package=NMOF>.
- SEABOLD, S. et PERKTOLD, J. (2010). Statsmodels: Econometric and statistical modeling with python. *Proceedings of the 9th Python in Science Conference*, p. 92-96.
- SHUMWAY, R. H. et STOFFER, D. S. (2017). Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples. 4th. Extensive coverage of time series methods, including ARIMA and GARCH models. Springer.
- SNOEK, J., LAROCHELLE, H. et ADAMS, R. P. (2012). Practical Bayesian Optimization of Machine Learning Algorithms. *Cornell University*. <https://arxiv.org/pdf/1012.2599>.
- TIAN, J., SUN, Y. et WANG, H. (2021). An Ensemble-Based Approach for Time Series Forecasting of Stock Prices. *IEEE Access* 9. Examines ensemble techniques like XGBoost for time series forecasting in volatile markets., p. 22869-22880.
- TURINICI, G. (2020). Modèles de taux. *Cours Master ISF APP*. https://turinici.com/wp-content/uploads/cours/taux_isfapp_masefP21/cours_annote_Taux_Turinici_P21.pdf.
- VASWANI, A., SHAZEER, N., PARMAR, N., USZKOREIT, J., JONES, L., GOMEZ, A. N., KAISER, L. et POLOSUKHIN, I. (2017). Attention is All You Need. *Proceedings of the Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*. Introduces the transformer architecture, highly influential in time-series and sequence modeling., p. 6000-6010.
- WU, Z., PAN, S., CHEN, F., LONG, G., ZHANG, C. et YU, P. S. (2020). Comprehensive Survey on Graph Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 32.1. Comprehensive review of GNNs, applicable to multivariate time series in finance., p. 4-24.
- AL-YAHYAE, K. H., MAHMOOD, N. et LIM, M. (2020). Stock Market Prediction Using Machine Learning: A Systematic Literature Review. *Neural Computing and Applications* 32.7. Evaluates machine learning methods, including ensemble models, for stock market prediction., p. 1927-1952.
- ZHANG, W., TAN, T. et QIAO, T. (2019). A Hybrid CNN and LSTM Network for Anomaly Detection in Financial Data. *Proceedings of the IEEE Conference on Big Data*. Combines CNN and LSTM for multivariate financial forecasting and anomaly detection., p. 5970-5973.

Annexe A

Annexes

A.1 La mesure d'erreur *Scaled Pinball Loss* (SPL)

La SPL (The M5 Competition : Competitor's Guide 2020) est une mesure adaptée dans le cadre de notre validation croisée car elle prend en compte les différentes projections, l'idée est de mesurer l'écart entre la valeur de la série temporelle observée et le quantile u de la série multivariée obtenue avec le modèle de sorte que :

$$SPL(u) = \frac{1}{h} \frac{\sum_{t=n+1}^{n+h} ((Y_t - Q_t(u))u \mathbf{1}_{(Q_t(u) \leq Y_t)} + (Q_t(u) - Y_t)(1-u) \mathbf{1}_{(Q_t(u) > Y_t)})}{\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n |Y_t - Y_{t-1}|} \quad (\text{A.1})$$

avec :

- Y_t la valeur observée de la série temporelle à la date t pour chaque variable ;
- $Q_t(u)$ le quantile u de la série temporelle multivariée prédite à la date t ;
- h l'horizon de projection ;
- n la longueur de l'ensemble d'entraînement ;
- $\mathbf{1}$ la fonction indicatrice.

L'opération est ainsi répétée sur tous les quantiles puis la moyenne de tous ces résultats est réalisée :

$$MSPL = \sum_{i=1}^p w_i \frac{1}{\text{card}(U)} \sum_{j=1}^{\text{card}(U)} SPL(u_j) \quad (\text{A.2})$$

avec :

- p le nombre de séries temporelles ;
- w_i le poids associé à chaque série temporelle ;
- U l'ensemble des valeurs des quantiles tel que $U = \{0, 0.005, 0.025, 0.165, 0.25, 0.5, 0.75, 0.835, 0.975, 0.995\}$. Ainsi, $\text{card}(U) = 9$.

Finalement, la formule suivante est obtenue :

$$MSPL = \frac{1}{9} \sum_{j=1}^9 SPL(u_j) \quad (\text{A.3})$$

A.2 Exemple illustratif du procédé du *Block Bootstrap*

Soit une série temporelle multivariée contenant deux séries, notées S_1 et S_2 avec des dates mensuelles sur 1 an ici allant de {01 - 01 - 2024, ..., 01 - 12 - 2024 } (on prend juste les premiers de chaque mois pour l'année 2024) dont les valeurs sont mises dans le tableau A.1.

Date	Variable 1	Variable 2
01 - 01 - 2024	134	185
01 - 02 - 2024	192	145
01 - 03 - 2024	86	173
01 - 04 - 2024	151	91
01 - 05 - 2024	76	198
01 - 06 - 2024	130	160
01 - 07 - 2024	199	134
01 - 08 - 2024	84	190
01 - 09 - 2024	105	112
01 - 10 - 2024	170	150
01 - 11 - 2024	93	182
01 - 12 - 2024	185	140

TABLE A.1 : Série temporelle fictive de l'exemple (valeurs observées)

On suppose que l'algorithme du RVFL est appliqué sur la série temporelle avec un nombre de pas en arrière« *lags* » de 2, les valeurs prédites sont mises dans le tableau A.2 et le tableau A.3 donne celui des résidus.

Date	Variable 1	Variable 1
01 - 03 - 2024	93	186
01 - 04 - 2024	160	96
01 - 05 - 2024	87	212
01 - 06 - 2024	136	172
01 - 07 - 2024	212	143
01 - 08 - 2024	92	204
01 - 09 - 2024	115	119
01 - 10 - 2024	182	161
01 - 11 - 2024	98	195
01 - 12 - 2024	199	150

TABLE A.2 : Série temporelle prédite (valeurs prédites)

Date	Variable 1	Variable 2
01 - 03 - 2024	7	13
01 - 04 - 2024	9	5
01 - 05 - 2024	11	14
01 - 06 - 2024	6	12
01 - 07 - 2024	13	9
01 - 08 - 2024	8	14
01 - 09 - 2024	10	7
01 - 10 - 2024	12	11
01 - 11 - 2024	5	13
01 - 12 - 2024	14	10

TABLE A.3 : Résidus de la série temporelle (différence valeurs observées et prédites)

Dans cet exemple, $block-length = 3$ est choisit et une projection sur 8 mois est faite. Ainsi le nombre de points à générer est 3 (l'arrondi supérieur $\frac{8}{3} = 3$).

Les indices sont choisis parmi les lignes du tableau des résidus, ici 3 parmi 10 (avec remise). Le premier indice tiré est 3, et les valeurs des résidus correspondantes sont ceux de { 01-05-2024, 01-06-2024, 01-07-2024 } (colorié en vert). Le deuxième indice tiré est 9, et les valeurs des résidus correspondantes sont ceux de { 01-11-2024, 01-12-2024, 01-03-2024 } (colorié en jaune). À l'issue de ces deux tirages, le troisième et dernier point tiré est 6. Maintenant, il ne manque que 2 valeurs de résidus pour avoir un total de 8 valeurs (valeurs de la projection). Les valeurs des résidus correspondantes sont ceux de { 01-08-2024, 01-09-2024 } (colorié en rouge). Le tableau A.4 résume ce qui la procédure de l'algorithme.

Date	Variable 1	Variable 2
01 - 03 - 2024	7	13
01 - 04 - 2024	9	5
01 - 05 - 2024	11	14
01 - 06 - 2024	6	12
01 - 07 - 2024	13	9
01 - 08 - 2024	8	14
01 - 09 - 2024	10	7
01 - 10 - 2024	12	11
01 - 11 - 2024	5	13
01 - 12 - 2024	14	10

TABLE A.4 : Résidus de la série temporelle (différence valeurs observées et prédites) colorié

Le tableau A.5 résume tout ce qui a été dit précédemment.

Pour la projection n°	Variable 1	Variable 2
1	11	14
2	6	12
3	13	9
4	5	13
5	14	10
6	7	13
7	8	14
8	10	7

TABLE A.5 : Valeur des résidus après l'application de l'algorithme

Etant donné qu'on a effectué une projection sur 8 mois, on obtient la projection centrale donné par le tableau A.6

Date	Variable 1	Variable 2
01 - 01 - 2025	185	140
01 - 02 - 2025	178	145
01 - 03 - 2025	193	133
01 - 04 - 2025	172	150
01 - 05 - 2025	180	137
01 - 06 - 2025	190	144
01 - 07 - 2025	175	130
01 - 08 - 2025	188	142

TABLE A.6 : Projection des valeurs pour S_1 et S_2 sur 8 mois à partir de 01-01-2025

Finalement, la première projection obtenue avec l'algorithme est représenté dans le tableau A.7 qui juste la somme des valeurs des résidus après l'algorithme donné par le tableau A.5 et les projections données par le tableau A.6.

Date	Variable 1	Variable 2
01 - 01 - 2025	196	154
01 - 02 - 2025	184	157
01 - 03 - 2025	206	142
01 - 04 - 2025	177	163
01 - 05 - 2025	194	147
01 - 06 - 2025	197	157
01 - 07 - 2025	183	144
01 - 08 - 2025	198	149

TABLE A.7 : Somme des valeurs pour les projections et les résidus

A.3 Éléments des swaptions

Les explications présentées dans cette section sont issues du cours de TURINICI (2020). Une swap-tion est une option sur un swap de taux d'intérêt. Elle donne à son détenteur le droit, mais non

l'obligation, d'entrer dans un swap à une date future et à des conditions prédéterminées. Ce produit dérivé est particulièrement utilisé en gestion de portefeuille, en couverture de risque et dans les stratégies d'optimisation de financement.

A.3.1 Calcul branche fixe

À la date T_1 , Le flux fixe est donné par $(T_1 - T_0)K$.

La valorisation, en t , du flux distribué en T_1 est donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T_1} r_s ds} (T_1 - T_0)K \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (\text{A.4})$$

On en déduit la formule générale pour la branche fixe, à la date $t \leq T_0$

$$BF(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{j=1}^n e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} (T_j - T_{j-1})K \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{A.5})$$

On continue le calcul

$$\begin{aligned} BF(t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{j=1}^n e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} (T_j - T_{j-1})K \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= K \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ BF(t) &= K \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(t, T_j). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A.3.2 Calcul de la branche variable

Rappel du taux forward :

Le taux forward est le taux d'un prêt démarrant dans le futur (forward). Exemple : le 1er décembre 2024, un prêt de trois mois est envisagé, entre deux banques, dans un an. Ce prêt se fera au taux interbancaire Euribor 3M du 1er décembre 2025. Le processus (stochastique) évalue donc la valeur de ce taux entre les 1er décembre 2024 et 2025. Il dépend de trois variables, la date de pricing, la date de début du prêt et la date de fin du prêt.

Soit un échéancier $(T_j)_{0 \leq j \leq n}$, tel que

$$0 \leq T_0 < T_1 < \dots < T_n \leq \hat{T}. \quad (\text{A.7})$$

Pour $j = 0, \dots, n-1$, pour $t \leq T_j$, $F(t, T_j, T_{j+1})$ est la valeur, vue en t , du taux forward qui fixe en T_j et paye en T_{j+1} . Elle est définie par

$$1 + (T_{j+1} - T_j)F(t, T_j, T_{j+1}) = \frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})}, \quad (\text{A.8})$$

ou encore

$$F(t, T_j, T_{j+1}) = \frac{B(t, T_j) - B(t, T_{j+1})}{(T_{j+1} - T_j)B(t, T_{j+1})}. \quad (\text{A.9})$$

Le taux forward $F(0, T_j, T_{j+1})$ est le taux aujourd'hui pour un prêt entre T_j et T_{j+1} . $F_j(t)$ sera notée souvent au lieu de $F(t, T_j, T_{j+1})$, lorsque l'échéancier est bien spécifié.

Le taux (branche variable) payé en T_j sera le taux forward dont la date de paiement est T_j . Sa date de fixing est donc T_{j-1} et c'est le taux $F(., T_{j-1}, T_j)$. Or la date de fixing correspond à la date à laquelle le taux distribué (il s'agit du début du prêt) est valorisé. Ainsi, $F(T_{j-1}, T_{j-1}, T_j) = F_{j-1}(T_{j-1})$.

Dans ces exemples, le taux distribué en T_j est fixé « *in advance* », à la date précédente T_{j-1} . La branche variable aura pour valeur, à la date $t \leq T_0$

$$BV(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} F_{j-1}(T_{j-1}) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (\text{A.10})$$

Double conditionnement

On peut dire que, si X est $\mathcal{F}_{T_j}$ -mesurable alors

$$\text{pour } t \leq T_{j-1} < T_j, \quad \pi_t = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{T_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_t). \quad (\text{A.11})$$

Important : ceci est justifié par le fait que $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{T_{j-1}}$.

Le double conditionnement est utilisé lorsque l'on constate un décalage entre la date de fixing et la date de paiement.

Suite du calcul

On conditionne chacun des termes de la somme selon $\mathcal{F}_{T_{j-1}}$, soit

$$BV(t) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E} \left(e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} (T_j - T_{j-1}) F_{j-1}(T_{j-1}) \mid \mathcal{F}_{T_{j-1}} \right) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (\text{A.12})$$

Or, $e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} F_{j-1}(T_{j-1})$ est $\mathcal{F}_{T_{j-1}}$ -mesurable donc elle peut sortir de l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_{T_{j-1}}$

$$BV(t) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T_{j-1}} r_s ds} (T_j - T_{j-1}) F_{j-1}(T_{j-1}) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_{T_{j-1}}^{T_j} r_s ds} \mid \mathcal{F}_{T_{j-1}} \right) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (\text{A.13})$$

Comme pour tout $t \leq T$: $B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right)$

$$BV(t) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} (T_j - T_{j-1}) B(T_j, T_{j+1}) F_{j-1}(T_{j-1}) \mid \mathcal{F}_t \right). \quad (\text{A.14})$$

On a aussi

$$F_{j-1}(T_{j-1}) = \frac{B(T_j, T_{j-1}) - B(T_j, T_j)}{(T_j - T_{j-1})B(T_j, T_j)}. \quad (\text{A.15})$$

Donc

$$\begin{aligned}
BV(t) &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} (T_j - T_{j-1}) \left(\frac{B(T_j, T_{j-1}) - B(T_j, T_j)}{(T_j - T_{j-1})B(T_j, T_j)} \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} (T_j - T_{j-1}) \left(\frac{B(T_j, T_{j-1}) - B(T_j, T_j)}{(T_j - T_{j-1})B(T_j, T_j)} \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \text{ et } B(T_j, T_j) = 1. \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} B(T_j, T_{j+1}) \mid \mathcal{F}_t \right] \right] \\
&= \sum_{j=1}^n \left[B(t, T_j) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T_j} r_s ds} B(T_j, T_{j+1}) \mid \mathcal{F}_t \right] \right]. \tag{A.16}
\end{aligned}$$

Sous $\mathbb{Q}$, les zéro-coupon actualisés sont des martingales. La définition d'une martingale $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ permet d'écrire que

$$\forall t \leq T : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [M_T \mid \mathcal{F}_t] = M_t. \tag{A.17}$$

Ici, si $M_t = e^{-\int_t^T r_s ds} B(t, T_j)$, alors

$$\forall t \leq T \leq T_j : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} B(T, T_j) \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{-\int_t^T r_s ds} B(t, T_j),$$

soit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} B(T, T_j) \mid \mathcal{F}_t \right] = B(t, T_j)$ car $e^{-\int_t^T r_s ds}$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

ce qui permet de conclure que

$$BV(t) = \sum_{j=1}^n [B(t, T_{j-1}) - B(t, T_j)] = B(t, T_0) - B(t, T_n). \tag{A.18}$$

A.3.3 Calcul du taux swap

Le taux est le taux qui permet d'avoir l'égalité entre la branche fixe et la branche variable :

$$BV(t) = BF(t)$$

$$K \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(t, T_j) = B(t, T_0) - B(t, T_n)$$

Ainsi le taux noté par S_t est donné par :

$$S_t = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{K \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(t, T_j)}. \tag{A.19}$$

A.3.4 Prix d'une swaption

le prix de la swaption payeuse, à la date $t \leq T$, est donc

$$\pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (BV(T) - BF(T))_+ \mid \mathcal{F}_t \right] \tag{A.20}$$

avec r_s le taux sans risque.

Le terme d'une swaption est défini par la durée du swap sous-jacent, c'est-à-dire $T_n - T_0$, avec les notations actuelles. Une option sur swap 3 ans dans 5 ans donne le droit mais non l'obligation d'entrer, dans 5 ans, dans un swap d'une durée de 3 ans. Elle est notée 5x3

$$\pi_t = \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \left((B(T, T_0) - B(T, T_n)) - K \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(T, T_j) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]_+, \quad (\text{A.21})$$

comme $\sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(t, T_j) > 0$, ceci peut être factoriser comme suit,

$$\begin{aligned} \pi_t &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(t, T_j) \left(\frac{B(T, T_0) - B(T, T_n)}{\sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(T, T_j)} - K \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]_+ \\ &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(t, T_j) (S_T - K)_+ \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

À la date $t = 0$, la formule devient

$$\pi_0 = \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) B(0, T_j) (S_T - K)_+ \right] \quad (\text{A.23})$$

Le prix peut être calculé par Monte Carlo.

A.4 Test de la variance des rendements

L'objectif de cette section est de vérifier empiriquement que l'ajustement des rendements n'a pas modifié leur variance. Pour cela, nous effectuons une analyse statistique en comparant les rendements avant et après ajustement.

A.4.1 Test de Fisher

Le test de Fisher permet de comparer la variance des rendements avant et après ajustement. Il teste l'hypothèse nulle selon laquelle les deux variances sont égales.

Les résultats obtenus sont les suivants

$$F = 1, \quad \text{p-value} = 1, \quad \text{IC}_{95\%} = [0.992, 1.008] \quad (\text{A.24})$$

Le ratio des variances étant très proche de 1 et la p-value étant largement non significative, nous concluons que la variance des rendements a été préservée après ajustement.

A.4.2 Analyse graphique

Nous complétons cette validation statistique par une analyse graphique de l'évolution de la variance des rendements au cours du temps ainsi que de la distribution des rendements avant et après ajustement.

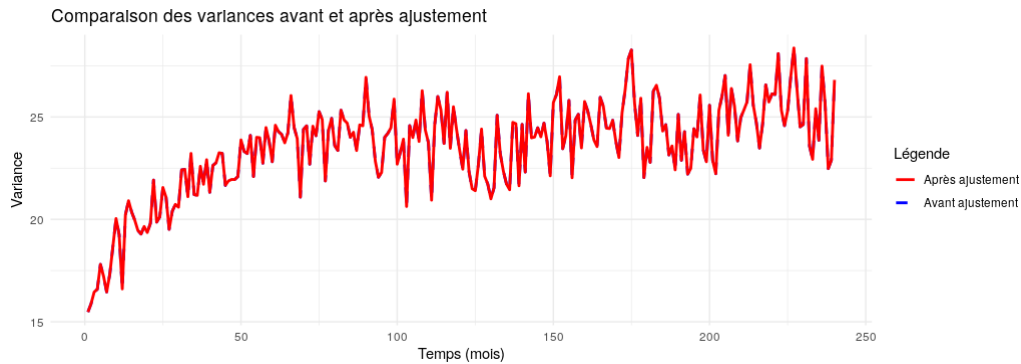


FIGURE A.1 : Évolution de la variance des rendements avant et après ajustement

La figure A.1 montre que la variance des rendements suit une dynamique similaire avant et après ajustement, confirmant que l'ajustement n'a pas altéré la structure de volatilité des rendements.

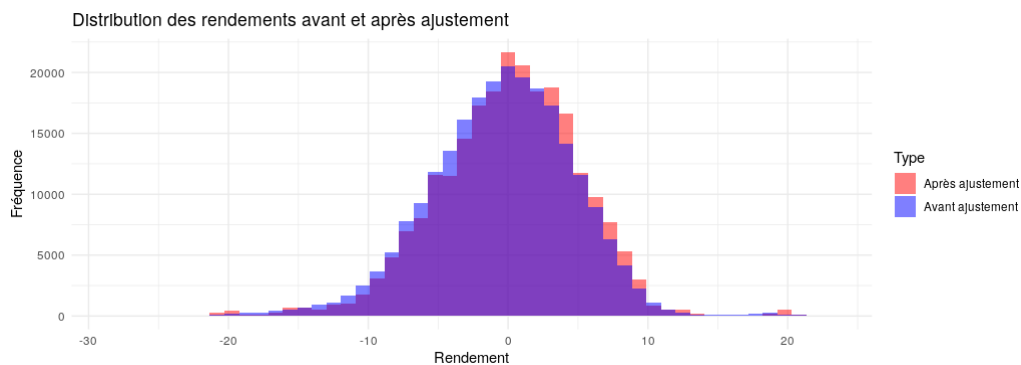


FIGURE A.2 : Distribution des rendements avant et après ajustement

La figure A.2 illustre la distribution des rendements avant et après ajustement. On observe une légère modification de la distribution, notamment au niveau des queues. Cette variation était attendue du fait du recentrage des rendements autour des taux sans risque projetés. Cependant, la forme globale de la distribution reste stable, garantissant que l'ajustement ne déforme pas significativement la dynamique des rendements.

A.4.3 Conclusion

L'ensemble des résultats confirme que l'ajustement des rendements a bien préservé leur variance, tout en assurant la propriété de martingale sous la mesure $\mathbb{Q}$. La légère modification observée dans la distribution est conforme aux attentes et ne remet pas en cause la cohérence du modèle.