

**Mémoire présenté le :  
pour l'obtention du diplôme  
de Statisticien Mention Actuariat  
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Monsieur Birame BA	
<b>Titre du mémoire : Mise en place d'un outil d'optimisation d'une structure de réassurance via les algorithmes génétiques</b>	
Confidentialité : <input type="checkbox"/> NON <input checked="" type="checkbox"/> OUI (Durée : <input type="checkbox"/> 1 an <input checked="" type="checkbox"/> 2 ans)	
Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.	
<u>Membres présents du jury de la filière :</u>	Signature : <u>Entreprise :</u> Nom : Axa Global Reinsurance Signature <i>Maxime Cavalgante</i>
	<u>Directeur de mémoire en entreprise</u>
<u>Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires :</u>	Signature : Nom : Signature : <i>Maxime Cavalgante</i>
	<u>Invité :</u> Nom : Signature :
	<b>Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels</b> (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité) <u>Signature du responsable entreprise :</u> <i>Maxime Cavalgante</i>
	<u>Signature du candidat :</u> <i>Birame BA</i>

## Résumé

**Mots clés** : réassurance, algorithmes génétiques, ratio combiné économique, IBNR, commission variable, ratio S/P.

La réassurance est une opération par laquelle une société d'assurance transfère tout ou une partie de ses risques à une autre société appelée le réassureur moyennant une prime. Elle peut se faire sous différentes formes et repose essentiellement sur des négociations entre le réassureur et la cédante.

Les quotes-parts allemandes ont une structure particulière du fait de leur fonctionnement. En effet, contrairement à un quote part classique, les sinistres ne sont comptabilisés que durant l'année de souscription et pas au-delà. Un facteur de majoration est appliqué au ratio sinistre/prime pour tenir compte du développement des sinistres et des IBNR, avant l'application du taux de cession de la réassurance. De plus, une commission variable est appliquée en accord avec les parties prenantes. D'autres contraintes comme le niveau de transfert des risques sont aussi à prendre en considération car elles sont imposées par les régulateurs allemands. L'objectif de ce mémoire est d'optimiser cette structure de réassurance en minimisant le ratio combiné économique tout en s'assurant qu'il y a suffisamment de transfert de risque de la cédante vers le réassureur.

Ainsi, dans ce mémoire, nous proposons une méthode d'optimisation basée sur les algorithmes génétiques qui sont des algorithmes de recherche heuristiques dont le principe est inspiré de la sélection naturelle des espèces. Il s'agit d'une manière intelligente de rechercher des solutions à partir de données historiques en orientant la recherche vers les régions les plus performantes dans l'espace des solutions.

## Abstract

**Keywords :** genetic algorithms, ECR, ERD, reinsurance, economic loss, ceded margin, sliding scale, LR ratio

Reinsurance is an operation whereby an insurance company transfers all or part of its risks to another company in return for a premium. It can take different forms and is essentially based on negotiations between the reinsurer and the ceding company.

German quota shares have a special structure because of the way they operate. In contrast to a traditional quota share, claims are only recorded in the year of underwriting and not beyond. A Gross up factor is applied to the loss ratio to take account of the development of claims and IBNR, before the reinsurance cession rate is applied. In addition, a variable commission is applied in agreement with the stakeholders. Other constraints such as the level of risk transfer are also to be taken into consideration as they are imposed by German regulators. The objective of this paper is to optimize this reinsurance structure by minimizing the economic combined ratio while ensuring that there is sufficient risk transfer from the cedant to the reinsurer.

Thus, in this paper, we propose an optimization method based on genetic algorithms, which are heuristic search algorithms inspired by the natural selection of species. It is an intelligent way to search for solutions from historical data by directing the search to the best performing regions in the solution space.

## Notes de synthèse

Pour se couvrir contre les déviations de son ratio de sinistralité, l'entité AXA Germany se fait réassurer au sein d'Axa Global Re. Ainsi, Axa Global Re couvre quatre portefeuilles à travers des quotes-parts spécifiques : les quotes-parts allemandes. Cette structure de réassurance concerne quatre branches d'activités : l'automobile, le dommage aux biens, l'ingénierie et le marine.

Le fonctionnement des quotes-parts allemandes diffère de celui des quotes-parts classiques. En effet, on arrête de comptabiliser les sinistres à la fin de l'année de souscription. Le rapport S/P ou LR (sinistres/primes ou *Loss Ratio*) est défini comme étant les sinistres comptabilisés à la fin de l'année hors IBNR, nette après réassurance, divisée par la prime acquise nette après réassurance. Ce ratio est multiplié par un facteur de majoration, pour tenir compte des sinistres qui auront lieu durant l'année de souscription mais qui seront déclarés après la fin de l'année. Le facteur de majoration sert aussi à tenir compte du développement des sinistres déjà comptabilisés. C'est un paramètre contractuel défini par Axa Germany et calibré sur la base des données historiques.

Du fait de leur structure particulière, on doit s'assurer qu'il y'a suffisamment de transfert de risque pour chaque branche. On cherche ainsi à améliorer la rentabilité de la structure de réassurance en minimisant l'ECR (ratio combiné économique ou *Expected Combinated Ratio* en anglais). L'ECR permet de refléter la rentabilité d'une branche d'activité. C'est un outil de pilotage de la souscription de l'année prenant en compte les exigences de capital des actionnaires. Elle permet ainsi d'avoir une vision économique de la performance de souscription.

$$ECR = CYCR + AjustementCat + ValeurTemps + Tax + Coc + TaxCoC$$

Pour s'assurer qu'il ya suffisamment de transfert de risque de la cédante vers le réassureur, des contraintes d'ERD ont été définies pour chaque branche d'activité. L'ERD (Expected Reinsurer Deficit) est la perte probable du réassureur. Il définit le risque comme étant le produit de la probabilité de perte économique et de la sévérité moyenne de la perte, par rapport à la prime attendue.

$$ERD = \frac{p \times T}{P}$$

Sachant qu'une commission variable est appliquée pour chacune des quatre branches d'activités, notre objectif principal est de développer un algorithme génétique pour trouver les bornes des ratios de sinistre pour l'application des commissions variables et les marges cédées qui permettent de minimiser l'ECR, tout en respectant les contraintes sur les ERD par branche et sur la marge totale. En effet, la commission variable permet d'adapter la commission versée à la cédante à la sinistralité observée. La cédante touche plus de commission si le ratio S/P observé est faible. Si à l'inverse

ce ratio est élevé, la cédante touchera moins de commission. Ainsi, on détermine une échelle pour l'application de la commission variable. Soient  $m$  la borne inférieure et  $M$  la borne supérieure de l'échelle pour la commission variable. On a alors :

$$Commission = \max(1 - marge - M, \min(1 - marge - m, 1 - marge - S/P))$$

Ainsi, elle prend les valeurs suivantes :

- **1 - marge - m** si  $LRQS \leq m$  : c'est la commission maximale
- **1 - marge - M** si  $LRQS \geq M$  : c'est la commission minimale
- **1 - marge - LRQS** si  $m \leq LRQS \leq M$

Avec  $LRQS = S/P \times \text{facteur de majoration}$

On a donc : *commission minimale*  $\leq$  *commission*  $\leq$  *commission maximale*

En somme, notre problème consiste à trouver pour chaque branche les trois paramètres suivants :

- la **marge**
- la borne inférieure pour l'application de la commission variable
- la borne supérieure pour l'application de la commission variable

Pour simplifier la notation, les abréviations ayant pour indice 1, 2, 3 et 4 feront référence respectivement à l'automobile, au dommage aux biens, à l'ingénierie et au marine. Notre problème peut donc se formaliser comme suit :

$$\mathbf{min (ECR)} \quad \text{avec :} \quad ERD_i \geq E\% \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^4 \text{marge}_i \leq M$$

Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé les algorithmes génétiques. Ce sont des algorithmes de recherche heuristiques adaptatifs qui appartiennent à la plus grande famille des algorithmes évolutionnaires. L'avantage est qu'ils nécessitent peu d'hypothèses et peuvent trouver des solutions de haute qualité aux problèmes d'optimisation et aux problèmes de recherche.

Comme dans la nature, on considère que la population est constituée d'individus différents. Chaque individu ou chromosome représente une solution potentielle et est constitué de gènes, qui lui sont propres et qui définissent ses caractéristiques. La population doit être dans l'espace de recherche des solutions. Chaque individu est

représenté comme un vecteur de longueur finie de composants ou gènes. L'objectif de l'algorithme génétique sera donc de trouver des combinaisons de gènes qui donneront des individus performants.

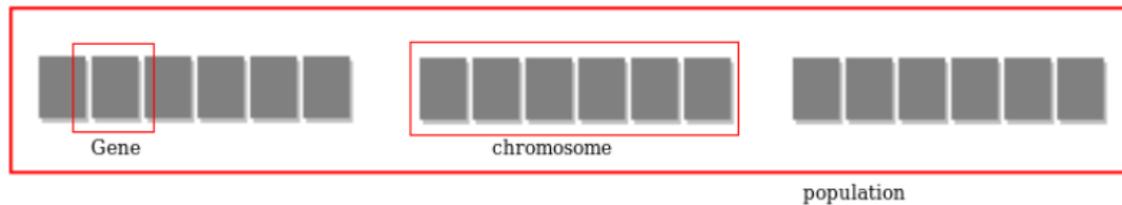


FIGURE 1 – Représentation des solutions

Les algorithmes génétiques sont basés sur les étapes suivantes :

- **Génération d'une population initiale** : Un algorithme génétique commence par une population initiale, généralement générée aléatoirement. On peut néanmoins essayer d'insérer dans la population initiale, des individus de bonne qualité, en espérant que l'algorithme converge plus rapidement vers un optimum. Cela nécessite de trouver ces bons candidats, ce qui n'est pas toujours facile.
- **Evaluation** : L'évaluation de la population permet de mesurer la performance des solutions. Une fonction d'évaluation doit être définie et coïncide souvent avec la fonction à optimiser. Cette fonction doit être évaluée pour chaque solution. L'évaluation de cette fonction doit être optimale en temps de calcul. En effet, la fonction va être testée pour tous les individus de toutes les générations. Une fonction d'évaluation coûteuse en temps de calcul va augmenter considérablement le temps de calcul de l'algorithme.
- **Sélection** : La sélection des individus est déterminante pour la recherche de solutions. En effet, sélectionner les individus revient à déterminer à partir de quels individus les nouveaux individus seront créés. En général, les individus de mauvaises performances auront moins de chance d'être sélectionnés, donc de se reproduire. Lors de la sélection, il est important de garder la diversité génétique de la population. En effet, si on ne sélectionne que des individus de bonne qualité, on a de forte chance de perdre certains gènes dans la population.
- **Croisement ou reproduction** : Une fois que les chromosomes parents sont sélectionnés, on génère des chromosomes fils grâce à la reproduction, aussi appelée croisement ou enjambement. Comme avec l'héritage génétique en biologie, les chromosomes fils seront constitués des gènes de leurs deux parents. En combinant ainsi les gènes des deux parents, on espère que le chromosome fils sera plus performant.

- **Mutation** : Dans l'évolution naturelle des espèces, lors de la réplication des chromosomes, il arrive que des erreurs se produisent et que certains gènes soient mal copiés. Ce phénomène est appelé mutation dans le langage biologique. Il arrive que ces mutations rendent l'individu plus performant que ses pairs. Pour les algorithmes génétiques, on essaie de reproduire le même mécanisme. Un individu est sélectionné aléatoirement parmi la population, puis, toujours aléatoirement, quelques-uns de ses gènes sont modifiés. On espère ainsi créer une meilleure solution grâce au changement effectué.

En nous basant sur ces différentes étapes, nous avons développé un algorithme adapté aux contraintes de notre problème. On teste l'algorithme génétique avec : une population de 100 chromosomes, 300 générations ou itérations, 20 élites et une probabilité de mutation de 20%. Le graphique ci dessous nous montre les résultats obtenus avec l'algorithme.

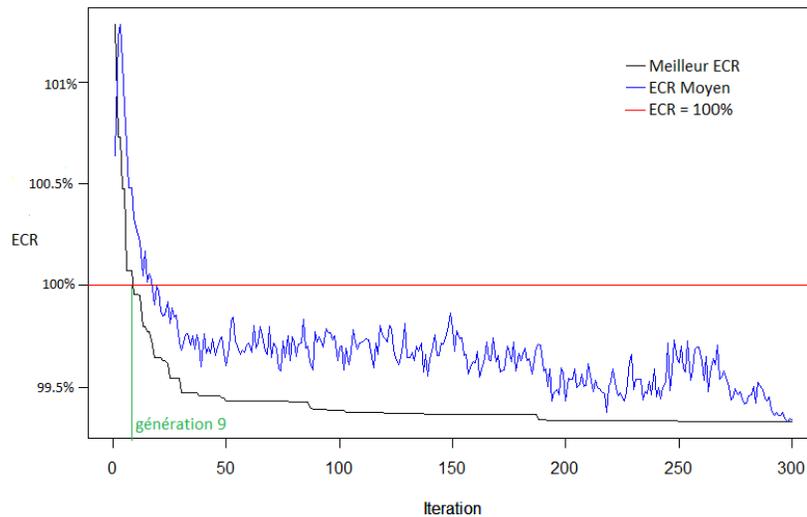


FIGURE 2 – Résultats de l'algorithme génétique

Enfin, il est important d'effectuer une analyse de sensibilité afin d'étudier l'impact des différents paramètres de notre algorithme (taille de la population, nombre d'élites et taux de mutation) sur la qualité des solutions et la convergence de l'algorithme. En effet, une population de grande taille offre une plus large possibilité de recherche mais augmente en même temps le temps de calcul. Le nombre d'élites et le taux de mutation doivent aussi être adaptés pour optimiser le fonctionnement de l'algorithme génétique.

## Executive summary

To cover itself against deviations in its loss ratio, the AXA Germany entity is reinsured within Axa Global Re. Axa Global Re covers four portfolios through specific quotas : the German quotas. This reinsurance structure covers four lines of business : motor, liability, engineering and marine.

German quota shares operate differently from traditional quota shares. Claims are no longer counted at the end of the year. The S/P or LR ratio (claims/premiums or *Loss Ratio*) is defined as the claims recorded at the end of the year excluding IBNR, net after reinsurance, divided by the net earned premium after reinsurance. This ratio is multiplied by a gross-up factor to account for claims that will occur during the underwriting year but are reported after the year-end. The gross-up factor is also used to take into account the development of claims already booked. It is a contractual parameter defined by Axa Germany and calibrated on the basis of historical data.

Due to their special structure, it must be ensured that there is sufficient risk transfer for each branch. The aim is to improve the profitability of the reinsurance structure by minimising the ECR (Economic Combined Ratio). The ECR makes it possible to reflect the profitability of a branch of activity. It is a tool for steering the year's underwriting, taking into account the capital requirements of shareholders. It thus provides an economic view of underwriting performance.

$$ECR = CYCR + AjustementCat + ValeurTemps + Tax + Coc + TaxCoC$$

To ensure that there is sufficient risk transfer from the ceding company to the reinsurer, ERD constraints have been defined for each line of business. The ERD (Expected Reinsurer Deficit) is the probable loss of the reinsurer. It defines the risk as the product of the probability of economic loss and the average severity of the loss, relative to the expected premium.

$$ERD = \frac{p \times T}{P}$$

Knowing that a variable commission is applied for each of the four lines of business, our main objective is to develop a genetic algorithm to find the bounds of the loss ratios for the application of variable commissions and the ceded margins that allow the ECR to be minimised, while respecting the constraints on the ERD per line of business and on the total margin. Indeed, the variable commission allows the commission paid to the ceding company to be adapted to the observed loss experience. The cedant receives more commission if the observed S/P ratio is low. If the S/P ratio is high, the cedant will receive less commission. Thus, a scale for the application of the variable commission is determined. Let m be the lower bound and M the upper bound of the scale for the variable commission. Then we have :

$$Commission = \max(1 - \text{margin} - M, \min(1 - \text{margin} - m, 1 - \text{margin} - S/P))$$

Thus, it takes the following values :

- **1 - margin - m** if  $LRQS \leq m$  : it is the maximum commission
- **1 - margin - M** if  $LRQS \geq M$  : this is the minimum commission
- **1 - margin - LRQS** if  $m \leq LRQS \leq M$

With  $LRQS = S/P \times \text{facteur de majoration}$

We therefore have :  $\text{minimum commission} \leq \text{commission} \leq \text{maximum commission}$

In short, our problem is to find the following three parameters for each branch :

- the **margin**
- the lower bound for the application of the variable commission
- the upper limit for the application of the variable commission

To simplify the notation, the abbreviations with indexes 1, 2, 3 and 4 will refer respectively to the automobile, civil liability, engineering and marine sectors. Our problem can therefore be formalised as follows :

$$\mathbf{min (ECR)} \quad \text{avec :} \quad ERD_i \geq E\% \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^4 \text{marge}_i \leq M$$

To solve this problem, we used genetic algorithms. These are adaptive heuristic search algorithms that belong to the larger group of evolutionary algorithms. The advantage is that they require few assumptions and can find high quality solutions to optimisation and search problems.

As in nature, the population is considered to consist of different individuals. Each individual or chromosome represents a potential solution and consists of genes, which are unique to it and define its characteristics. The population must be in the solution search space. Each individual is represented as a finite length vector of components or genes. The objective of the genetic algorithm will therefore be to find combinations of genes that will result in successful individuals.

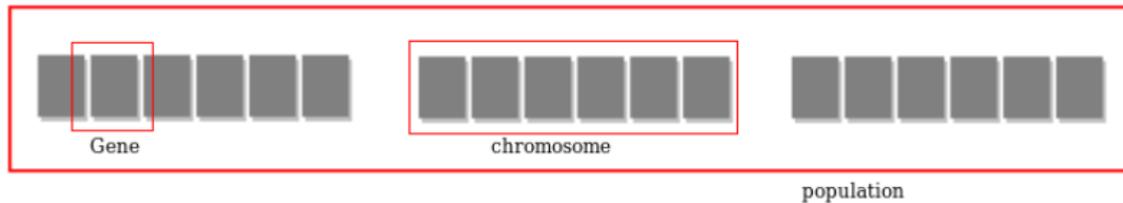


FIGURE 3 – Représentation des solutions

Genetic algorithms are based on the following steps :

- **Generating an initial population** : A genetic algorithm starts with an initial population, usually randomly generated. One can nevertheless try to insert into the initial population, individuals of good quality, in the hope that the algorithm will converge more quickly towards an optimum. This requires finding these good candidates, which is not always easy.
- **Evaluation** : The evaluation of the population makes it possible to measure the performance of the solutions. An evaluation function must be defined and often coincides with the function to be optimised. This function must be evaluated for each solution. The evaluation of this function must be optimal in terms of calculation time. Indeed, the function will be tested for all individuals of all generations. An evaluation function that is expensive in terms of computation time will considerably increase the computation time of the algorithm.
- **Selection** : The selection of individuals is decisive for the search for solutions. Indeed, selecting the individuals amounts to determining from which individuals the new individuals will be created. In general, individuals with poor performance will have less chance of being selected and therefore of reproducing. When selecting, it is important to maintain the genetic diversity of the population. Indeed, if we select only good quality individuals, we have a strong chance of losing certain genes in the population.
- **Crossover or reproduction** : Once the parent chromosomes are selected, son chromosomes are generated through breeding, also called crossover or crossing over. As with genetic inheritance in biology, the child chromosomes will be made up of the genes of both parents. By combining the genes of both parents in this way, it is hoped that the son chromosome will perform better.
- **Mutation** : In the natural evolution of species, during the replication of chromosomes, errors can occur and some genes can be copied incorrectly. This phenomenon is called mutation in biological language. Sometimes these mutations make the individual more efficient than its peers. In genetic algorithms, the same mechanism is attempted. An individual is randomly selected from

the population and then, again at random, some of its genes are modified. The hope is to create a better solution with the change made.

The genetic algorithm is tested with : a population of 100 chromosomes, 300 generations or iterations, 20 elites and a mutation probability of 20 The graph below shows the results obtained with the algorithm.

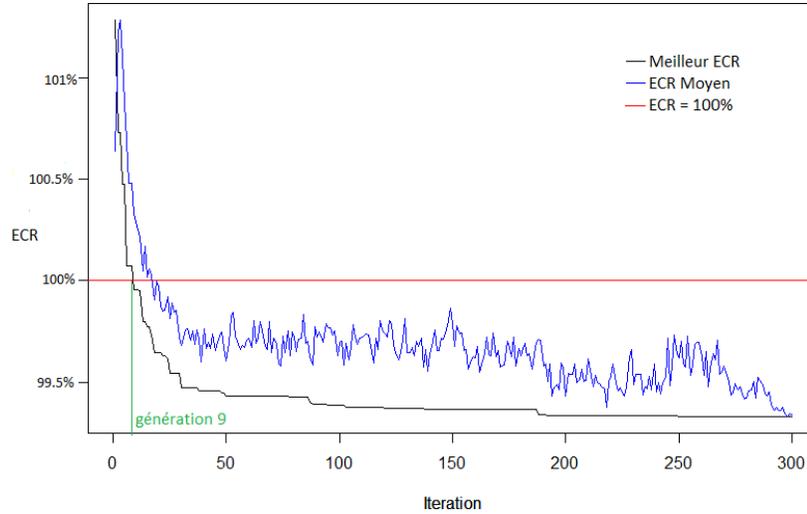


FIGURE 4 – Results of the genetic algorithm

Finally, it is important to perform a sensitivity analysis to study the impact of the different parameters of our algorithm (population size, number of elites and mutation rate) on the quality of the solutions and the convergence of the algorithm. Indeed, a large population size offers a larger search possibility but increases the computation time. The number of elites and the mutation rate must also be adapted to optimise the functioning of the genetic algorithm.

## Remerciements

Tout d'abord, je remercie mon tuteur de stage Maxime CAVALGANTE pour sa disponibilité, ses conseils et son encadrement tout au long de mon alternance.

Je remercie ensuite l'ensemble de l'équipe d'Axa Global Re, particulièrement l'équipe Analytics & Pricing pour son accueil chaleureux.

Merci à mon relecteur et ami Yancouba DIATTA pour sa disponibilité et ses suggestions.

J'adresse également ma reconnaissance au personnel administratif et à l'ensemble des professeurs de l'ISUP, pour l'encadrement et pour l'accompagnement qu'ils m'ont octroyés depuis le début de ma formation.

Enfin, je remercie, mes parents pour leurs encouragements et leur soutien permanent.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>2</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Note de synthèse</b>	<b>4</b>
<b>Executive summary</b>	<b>8</b>
<b>Remerciements</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1 Spécificités de la réassurance</b>	<b>16</b>
1.1 Définition et formes de réassurance . . . . .	16
1.2 Les différents types de réassurance . . . . .	17
1.2.1 La réassurance proportionnelle . . . . .	17
1.2.2 La réassurance non-proportionnelle . . . . .	20
1.3 Les quotes-parts allemandes . . . . .	22
1.3.1 Les différentes branches couvertes . . . . .	22
1.3.2 Le ratio économique combiné . . . . .	24
1.3.3 Les outils de mesure de transfert de risque . . . . .	26
<b>2 Description et traitement des données</b>	<b>33</b>
2.1 La réassurance chez Axa Global Re . . . . .	33
2.2 Les données disponibles . . . . .	33
2.3 Modélisation du rapport sinistre/prime . . . . .	35
2.4 Qualité et traitement des données . . . . .	35
<b>3 Les algorithmes génétiques</b>	<b>37</b>
3.1 Historique et définition . . . . .	37
3.1.1 Historique . . . . .	37
3.1.2 Définition . . . . .	37
3.2 Représentation des solutions . . . . .	39
3.2.1 Représentation binaire . . . . .	39
3.2.2 Représentation réelle . . . . .	39
3.3 Population initiale . . . . .	40

3.4	Evaluation des individus . . . . .	40
3.5	Sélection . . . . .	41
3.5.1	Les méthodes de sélection par rang . . . . .	41
3.5.2	Sélection par tournoi . . . . .	41
3.5.3	Sélection par roulette . . . . .	41
3.6	Les opérateurs génétiques . . . . .	42
3.6.1	L'opération de reproduction . . . . .	42
3.6.2	L'opérateur de mutation . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Application aux quotes-parts allemandes</b>	<b>46</b>
4.1	Formalisation du problème . . . . .	46
4.2	Méthode de résolution . . . . .	47
4.2.1	Codage des solutions . . . . .	47
4.2.2	Génération de population initiale . . . . .	48
4.2.3	Evaluation des individus . . . . .	49
4.2.4	Sélection et opérations génétiques . . . . .	51
4.2.5	Récapitulatif . . . . .	52
4.3	Analyses des résultats . . . . .	54
4.3.1	Minimisation de l'ECR . . . . .	54
4.3.2	Qualité de la population finale . . . . .	56
4.3.3	Répartition de la population finale . . . . .	56
4.3.4	Sensibilité par rapport à la taille de la population . . . . .	57
4.3.5	Sensibilité par rapport au nombre d'élites . . . . .	58
4.3.6	Sensibilité par rapport au taux de mutation . . . . .	59
4.4	Limites et enrichissement de la méthode . . . . .	61
4.4.1	Complexité algorithmique . . . . .	61
4.4.2	Optima globaux . . . . .	61
4.4.3	Les solutions proposées par l'algorithme . . . . .	62
	<b>Conclusion</b>	<b>63</b>
	<b>A Représentation de quelques solutions</b>	<b>67</b>
	<b>B Résultat de l'algorithme sur une population initiale</b>	<b>69</b>
	<b>C Résultat de l'algorithme sur une population finale</b>	<b>70</b>

## Introduction

La réassurance est un contrat par lequel, moyennant une prime, l'assureur se décharge sur autrui des risques dont il est responsable. Le réassureur ne se substitue en rien aux engagements de la société d'assurance qu'il réassure, mais lui permet une mutualisation de son portefeuille sur plusieurs années et dans plusieurs zones géographiques. La réassurance est ainsi devenue un moyen de gestion des risques indispensable dans le monde de l'assurance.

Afin de faire face aux déviations de son ratio de sinistralité, Axa Germany se fait réassurer par Axa Global Reinsurance à travers une structure de réassurance spécifique : les quotes-parts allemandes. La calibration de cette structure de réassurance dépend essentiellement des négociations entre les deux parties, mais aussi de la réglementation locale allemande. L'objectif de ce mémoire est d'optimiser la structure de réassurance. Il s'agit de minimiser le ratio combiné économique tout en s'assurant que le niveau de transfert de risque défini par la réglementation allemande est atteint. Notre méthode d'optimisation est basée sur les algorithmes génétiques.

Dans la première partie de ce mémoire, nous allons étudier les spécificités de la réassurance. Cela nous permettra de mieux comprendre le fonctionnement de la réassurance, ses différentes formes et ses différents types. Nous allons également étudier le fonctionnement des quotes-parts allemandes ainsi que les outils de mesure de transfert de risque. Nous allons aussi nous intéresser aux différents composants de l'ECR puis nous verrons sa méthode de calcul.

Dans la deuxième partie, nous parlerons des données qui sont utilisées, ainsi que des traitements qui ont été faits. Nous présenterons aussi Axa Global Reinsurance, afin de mieux comprendre ses activités.

La troisième partie sera consacrée à une présentation des algorithmes génétiques. Nous allons détailler les différentes étapes pour la mise en place d'un algorithme génétique.

Enfin, la dernière partie sera consacrée à l'application d'un algorithme génétique pour la résolution de notre problème. Nous détaillerons les différentes étapes de l'algorithme mise en place. Ensuite, nous analyserons les résultats obtenus avant de faire une étude de sensibilité sur les différents paramètres de l'algorithme. Nous terminerons cette partie en mettant en exergue les limites de notre étude et des algorithmes génétiques plus particulièrement.

# Chapitre 1

## Spécificités de la réassurance

### 1.1 Définition et formes de réassurance

La réassurance peut être définie comme l'assurance des assureurs. C'est une opération par laquelle une société d'assurance transfère tout ou une partie de ses risques à une autre société appelée le réassureur moyennant une prime. Elle permet la division des risques sans diviser le contrat de l'assuré. La compagnie d'assurance qui se fait réassurer est appelée la cédante et celle qui accepte de la réassurer est appelée le réassureur. Même en étant réassurée, une société d'assurance reste engagée vis à vis de ses clients. Les conditions de la réassurance sont définies dans un traité de réassurance.

La réassurance peut prendre différentes formes : la réassurance obligatoire, la réassurance facultative et la réassurance facultative-obligatoire.

- On parle de réassurance obligatoire lorsque la cédante cède l'ensemble de son portefeuille d'une branche d'activité. La réassurance est dite obligatoire car une fois le traité conclu, le réassureur doit accepter tous les risques liés au portefeuille, avec les conditions définies dans le traité. Elle est adaptée aux portefeuilles composés de risques homogènes.
- La réassurance facultative se fait risque par risque. L'assureur choisit de céder certains de ses risques ou polices, et le réassureur décide de les accepter ou non en fonction de son exposition au risque, de son appétit au risque, de sa stratégie d'entreprise, etc. Elle concerne principalement les risques atypiques nécessitant une tarification spécifique.
- La réassurance facultative-obligatoire est la forme de réassurance la moins utilisée. L'assureur a la liberté de céder les risques de son choix et le réassureur a l'obligation de les accepter. Les conditions de ce type de traité sont définies à l'avance en fonction de la nature du risque, de la rétention minimale de l'assureur, de l'engagement maximal du réassureur, etc. Les frais de gestion de cette forme de réassurance sont très élevés.

Il existe deux types de réassurance selon le partage du risque : la réassurance proportionnelle et la réassurance non-proportionnelle.

## 1.2 Les différents types de réassurance

Dans cette partie, nous allons voir les différents types de réassurance selon le partage du risque. Le graphique ci dessous montre les différentes formes et types de réassurance que nous allons expliquer dans la suite.

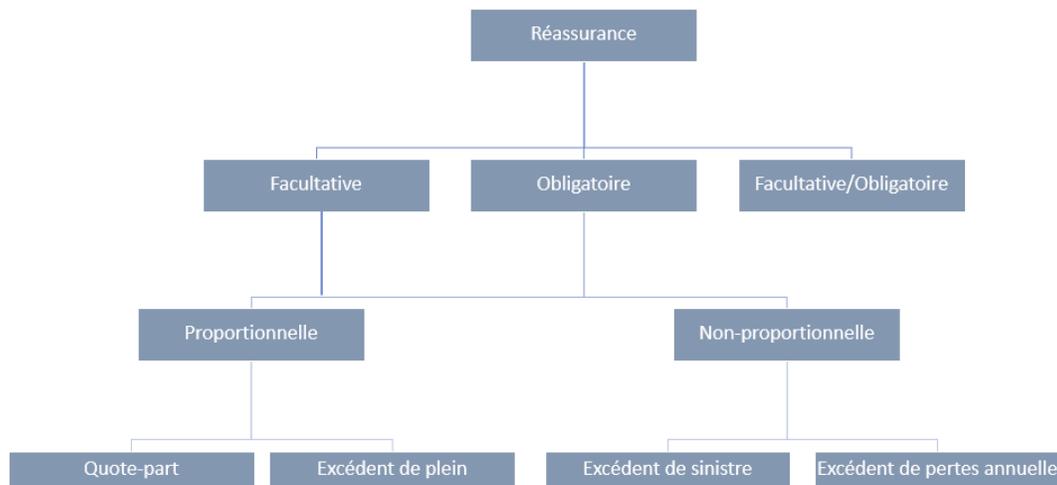


FIGURE 1.1 – Types et formes de réassurance

### 1.2.1 La réassurance proportionnelle

La réassurance proportionnelle est basée sur l'exposition et offre une protection verticale. Le risque est partagé d'une manière proportionnelle entre l'assureur et le réassureur. En contrepartie, la cédante verse au réassureur un pourcentage de prime équivalent au pourcentage de risque cédé. La principale variable à négocier entre le réassureur et la cédante est la commission de réassurance. Comme la cédante cède sur la base des primes commerciales, elle s'attend à ce que le réassureur contribue proportionnellement à ses frais d'acquisition et de gestion via une commission de réassurance.

On distingue deux types de réassurance proportionnelle : la réassurance en quote-part et la réassurance en excédent de plein.

## La réassurance en quote-part

C'est le type de réassurance le plus simple à mettre en œuvre. Un taux de cession unique est appliqué au portefeuille. La cédante cède alors ce taux de risque au réassureur et lui verse en contrepartie le même pourcentage des primes perçues. Le quote-part a l'avantage d'être simple à mettre en œuvre et à comptabiliser, d'offrir un meilleur partage du sort entre le réassureur et la cédante, et d'améliorer la marge de solvabilité de la cédante. Cependant, le montant des primes cédées est élevé pour la cédante et le portefeuille net de réassurance reste hétérogène. En effet, la cédante cède ses primes sur du business pour lequel elle pourrait peut-être retenir davantage. C'est le cas par exemple des petits risques. On notera QP X% un quote part de cession X%. Le graphe ci-dessous illustre le fonctionnement d'un QP 60% .

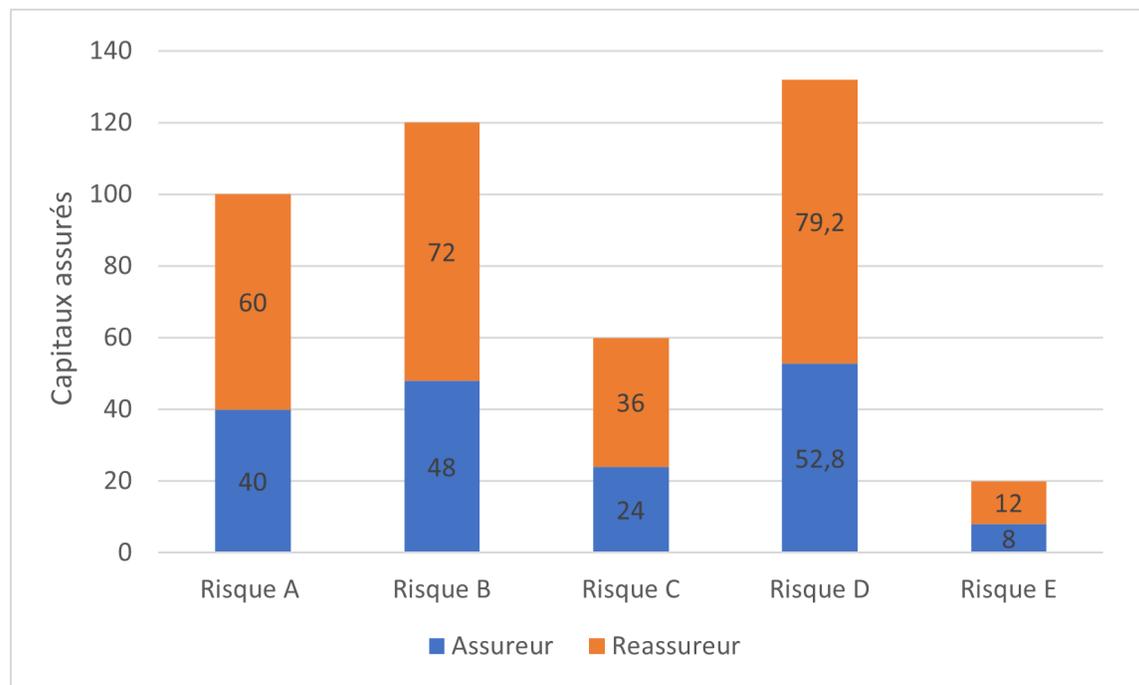


FIGURE 1.2 – Quote-part avec une cession de 60%

## La réassurance en excédent de plein

L'assureur décide d'un montant K assuré (plein de conservation) qu'il conserve comme rétention. Il cède l'excédent au réassureur jusqu'à un montant maximal. Le réassureur n'intervient que si la somme assurée dépasse un certain niveau de capital (la rétention). Le taux de cession se calcule risque par risque.

En comparaison avec un quote-part, l'excédent de plein offre une meilleure réduction de la volatilité et une cession de prime moins élevée pour l'assureur. Cependant, il nécessite une connaissance des capitaux assurés et une gestion plus lourde. L'excédent de plein est aussi inadapté pour certains risques comme par exemple les risques cycliques comme la grêle ou les risques catastrophes naturelles avec des petits sinistres comme la tempête.

On note  $\alpha$  XP  $\beta$  pour désigner un excédent de plein dont le plein de conservation est de  $\beta$  et dont la capacité est de  $\alpha$ .

La figure suivante illustre le fonctionnement d'un excédent de plein.

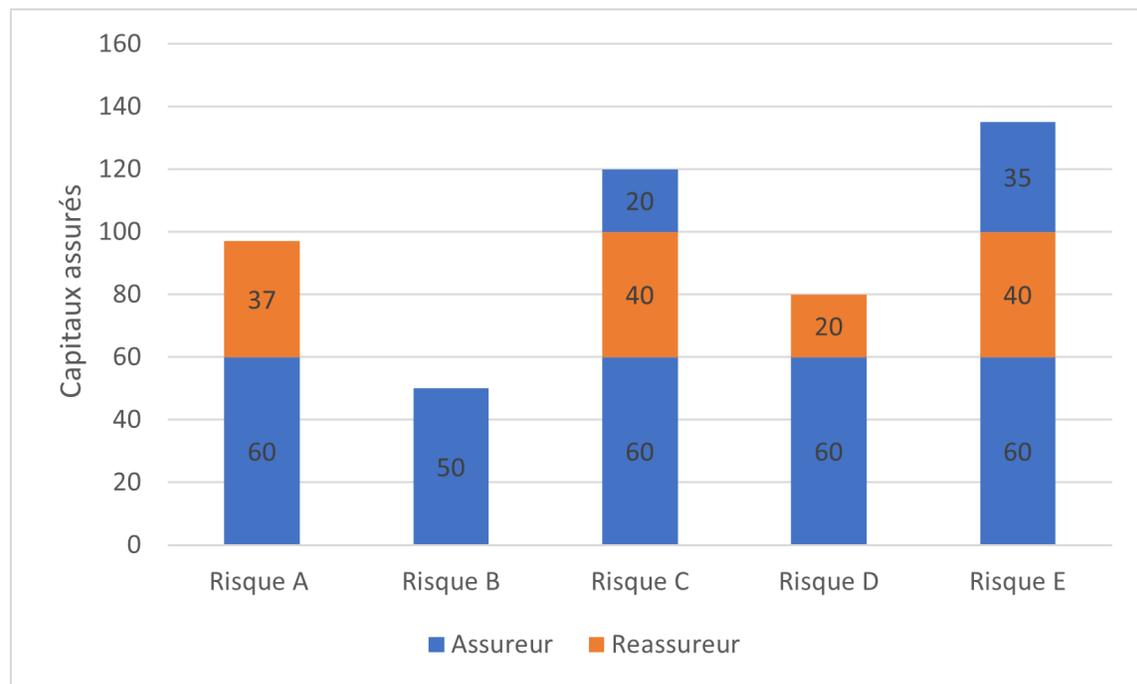


FIGURE 1.3 – excédent de plein 40 XP 60

Considérons les risques A, B, C, D, et E respectivement de somme assurée 87, 50, 120, 80 et 13. Pour chaque risque, on peut calculer le taux de cession de la cédante.

$$\text{Risque A : taux de cession} = \frac{37}{37 + 60} = 38,14\%$$

$$\text{Risque B : taux de cession} = \frac{0}{50} = 0\%$$

$$\text{Risque C : taux de cession} = \frac{40}{20 + 40 + 60} = 33,33\%$$

Les taux de cession des risques D et E se calculent de la même manière que ceux des risques A et C respectivement. Si un sinistre venait à se produire pour un risque donné, le réassureur prendrait en charge le montant du sinistre à hauteur du taux de cession.

Exemples : On suppose que les sinistres suivants se sont produits : Risque A : sinistre de 80, Risque B : sinistre de 45 et Risque C sinistre de 120. Le montant des sinistres cédé se calcule comme suit :

- Risque A : Montant du sinistre à la charge du réassureur =  $80 \times 38,14\% = 30,51$
- Risque B : Montant du sinistre à la charge du réassureur =  $50 \times 0\% = 0$
- Risque C : Montant du sinistre à la charge du réassureur =  $120 \times 33,33\% = 40$

### 1.2.2 La réassurance non-proportionnelle

En réassurance non-proportionnelle, l'engagement du réassureur ne dépend pas des capitaux assurés, mais de la sinistralité. Le réassureur prend en charge les sinistres à partir d'un certain seuil (franchise ou priorité) et dans la limite de la couverture de réassurance. La limite d'intervention supérieure du traité (plafond ou limite) est la somme de la franchise et de la couverture maximale de réassurance (capacité ou portée). La prime de la réassurance non-proportionnelle est convenue entre le réassureur et la cédante et est souvent exprimée en pourcentage de la somme des primes commerciales d'assurance du portefeuille assuré.

#### La réassurance en excédent de sinistre

La réassurance en excédent de sinistre se fait par risque (police ou localité) ou par événement. Pour la couverture d'un excédent de sinistre par risque, le réassureur indemnise la cédante pour chaque sinistre portant sur un risque (police ou localité) dès que le montant du sinistre dépasse la franchise. Dans le cadre d'un excédent de sinistre par événement, on considère comme unité de sinistre un sinistre global causé par un même événement.

L'intervention du réassureur ne dépasse pas la portée qui est préalablement convenue dans le traité. Pour éviter d'être trop exposé une fois que la portée est atteinte, il est possible pour l'assureur de négocier des reconstitutions. Ainsi, dès que la sinistralité impacte la couverture, celle-ci se reconstitue moyennant le versement d'une prime complémentaire qui est au prorata de la prime initiale et de la fraction consommée de la portée. De même, afin de repousser l'intervention du réassureur et réduire la prime, la cédante peut accepter une rétention annuelle supplémentaire en sus de la priorité. Cette rétention supplémentaire est appelée AAD (*Annual Aggregate Deductable*).

#### La réassurance en excédent de perte annuelle

Comme son nom l'indique, ce type de réassurance permet de se protéger contre un excédent de perte annuelle. Ce ne sont plus les pertes par risque ou par événement

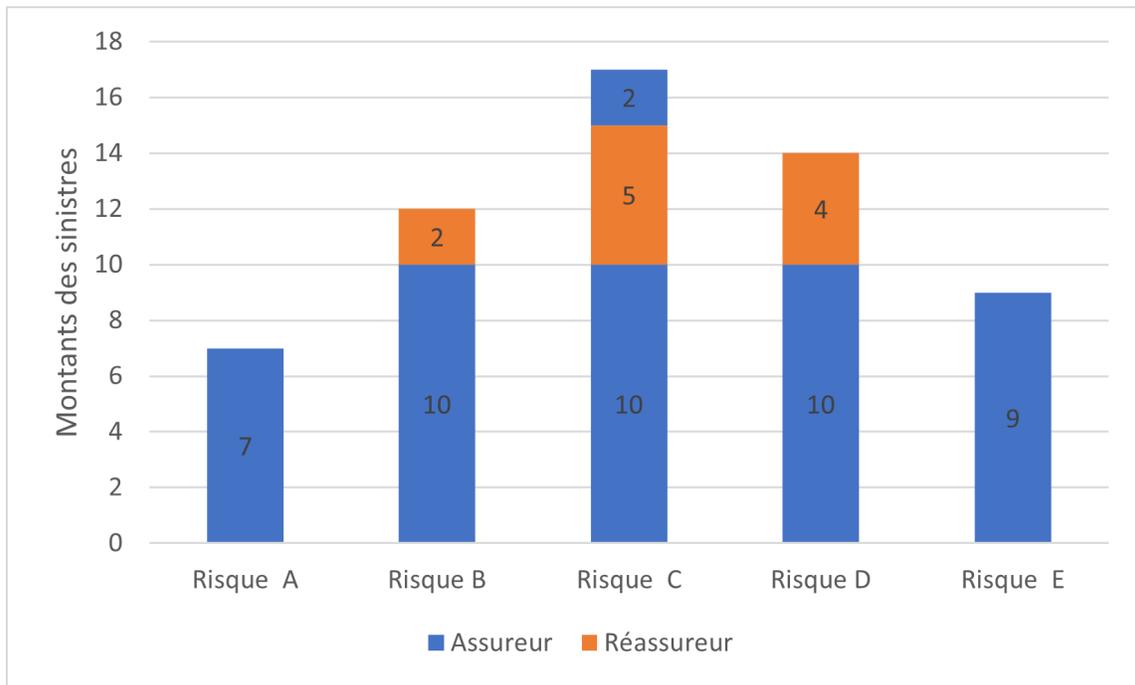


FIGURE 1.4 – excédent de sinistre par risque 5XS10 sans reconstitutions

qui sont considérées, mais plutôt l'intégralité de la charge de sinistre de la période de couverture. Le réassureur intervient dès que la sinistralité annuelle atteint la priorité et dans la limite de la capacité. Les bornes d'un excédent de perte annuelle sont généralement exprimées en pourcentages. Ce type de traité est très efficace pour protéger le bilan de l'assureur de la fluctuation des pertes en exercice. Cependant, elle est coûteuse pour la cédante.

La figure ci-dessous permet d'illustrer le fonctionnement d'un excédent de perte annuelle de franchise 90% et de limite 140%.

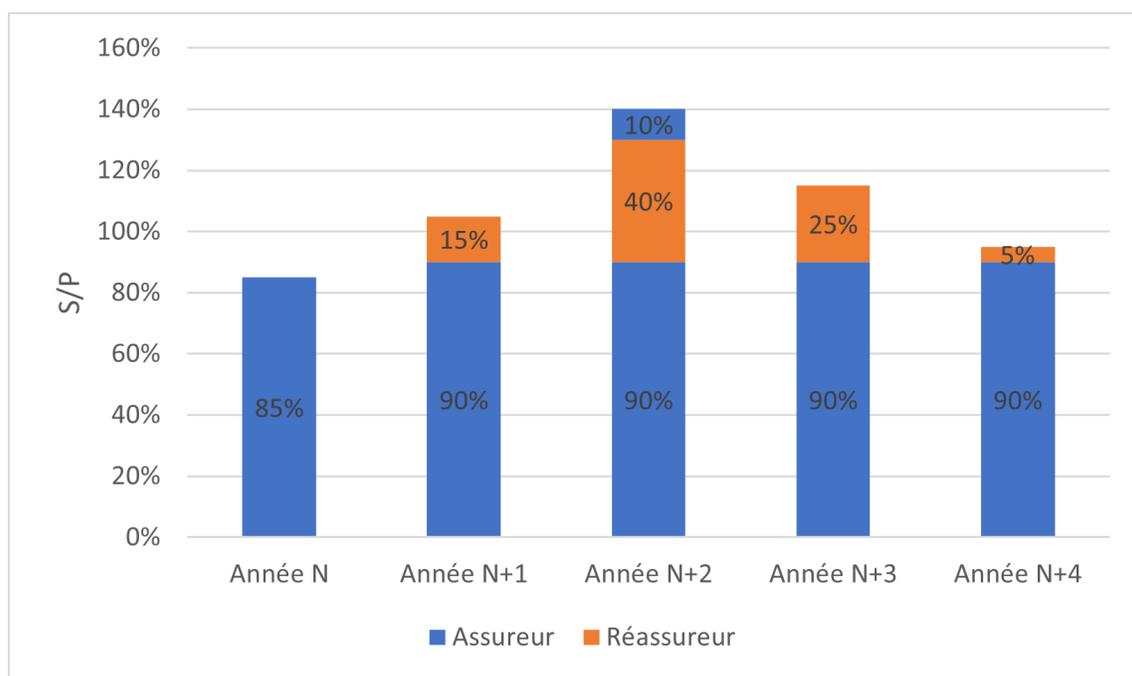


FIGURE 1.5 – Excédent de perte annuelle de franchise 90% et de limite 130%

## 1.3 Les quotes-parts allemandes

### 1.3.1 Les différentes branches couvertes

Pour se couvrir contre les déviations de son ratio de sinistralité, l'entité AXA Germany se fait réassurer au sein d'Axa Global Re. Ainsi, Axa Global Re couvre quatre portefeuilles à travers des quotes-parts spécifiques. Les branches cédées dans le cadre de ces quotes-parts sont : l'automobile, le dommage aux biens, l'ingénierie et le marine. Les différentes garanties par branche sont :

- *l'automobile* : dommage aux biens automobile, dommages aux biens, accidents de la circulation.
- *les dommages aux biens* : incendie, foudre, explosion, aéronef, risques politiques (troubles civils, malveillance, grève), impact de véhicules, fuite de gicleurs, dommages aux conduites d'eau, tempête, grêle, tremblement de terre, glissement de terrain, affaissement, pression de la neige, avalanche, éruption volcanique, cambriolage et vol, inondation, inondation suite à une tempête, responsabilité civile incendie, dommages pécuniaires suite à un incendie, incendie dans les polices multirisques habitation.
- *l'ingénierie* : montage tous risques y compris la responsabilité civile, bris de machines y compris la responsabilité civile, équipement électronique tous risques y compris tremblement de terre, tous les risques informatiques, risques

de génie civil lorsque l'assurance est souscrite sur la base des conditions allemandes, divers autres risques (par exemple garantie des machines, perte de profits anticipée, Perte de bénéfices).

- *le marine* : coque océanique, risques liés à la construction navale, coque fluviale, coque intérieure, coque de bateau de plaisance, responsabilité civile des bateaux de plaisance, cargaison, pertes consécutives à la cargaison, expositions (sauf les expositions d'art), entrepôts frigorifiques, objets de valeur, transports de fonds, responsabilité civile des transporteurs, responsabilité civile des transitaires, camping, stocks en transit, blanchisseries, fourrures, assurance de biens pour les films, assurance d'indemnisation des producteurs de films.

Pour les quotes-parts allemandes, la réassurance se fait en *cut off*. En effet, on arrête de comptabiliser les sinistres à la fin de l'année de souscription (mois de décembre). Le rapport sinistres/primes est défini comme étant les sinistres comptabilisés à la fin de l'année hors IBNR<sup>1</sup> (*Incurred But Not Reported*), nets de réassurance, divisée par la prime acquise nette de réassurance. Ce ratio est multiplié par un facteur de majoration pour tenir compte des sinistres qui auront lieu durant l'année de souscription mais qui seront déclarés après la fin de l'année. Ce facteur de majoration sert aussi à tenir compte du développement des sinistres déjà comptabilisés. C'est un paramètre contractuel défini par Axa Germany, calibré sur la base des données historiques.

Ainsi on a ces rapports sinistre/prime :

- *LR (Loss Ratio)* : qui est égal au ratio sinistre/prime observé en fin d'année.
- *QS LR (Quota-Share Loss Ratio)* : qui est égal au rapport sinistre/prime multiplié par le facteur de majoration

Le QS LR peut être différent du LR réel observé sur 1 an puisque les réserves réelles ne doivent pas correspondre exactement à ces seuils.

Ensuite, une commission variable est calibrée pour chaque branche d'activité. La commission variable permet d'adapter la commission versée à la cédante à la sinistralité observée. La cédante touche plus de commission si le ratio S/P observé est faible. Si à l'inverse ce ratio est élevé, la cédante touchera moins de commission. Ainsi, on détermine une échelle pour l'application de la commission variable. Soient  $m$  la borne inférieure et  $M$  la borne supérieure de l'échelle pour la commission variable. On a alors :

$$Commission = \max(1 - marge - M, \min(1 - marge - m, 1 - marge - LRQS))$$

---

1. Les IBNR sont les sinistres qui ont eu lieu et dont l'assureur n'a pas encore connaissance.

Telle que définie, elle prend les valeurs suivantes :

- **1 - marge - m** si  $LRQS \leq m$  : c'est la commission maximale
- **1 - marge - M** si  $LRQS \geq M$  : c'est la commission minimale
- **1 - marge - LRQS** si  $m \leq LRQS \leq M$

Ainsi on a :  $commission\ minimum \leq commission \leq commission\ maximale$

### 1.3.2 Le ratio économique combiné

Le ratio combiné économique (ECR ou Expected Combinated Ratio en anglais ) permet de refléter la rentabilité d'une branche d'activité. C'est un outil de pilotage de la souscription de l'année prenant en compte les exigences de capital des actionnaires. Elle permet ainsi d'avoir une vision économique de la performance de souscription.

$$ECR = CYCR + AjustementCat + ValeurTemps + Tax + Coc + TaxCoC$$

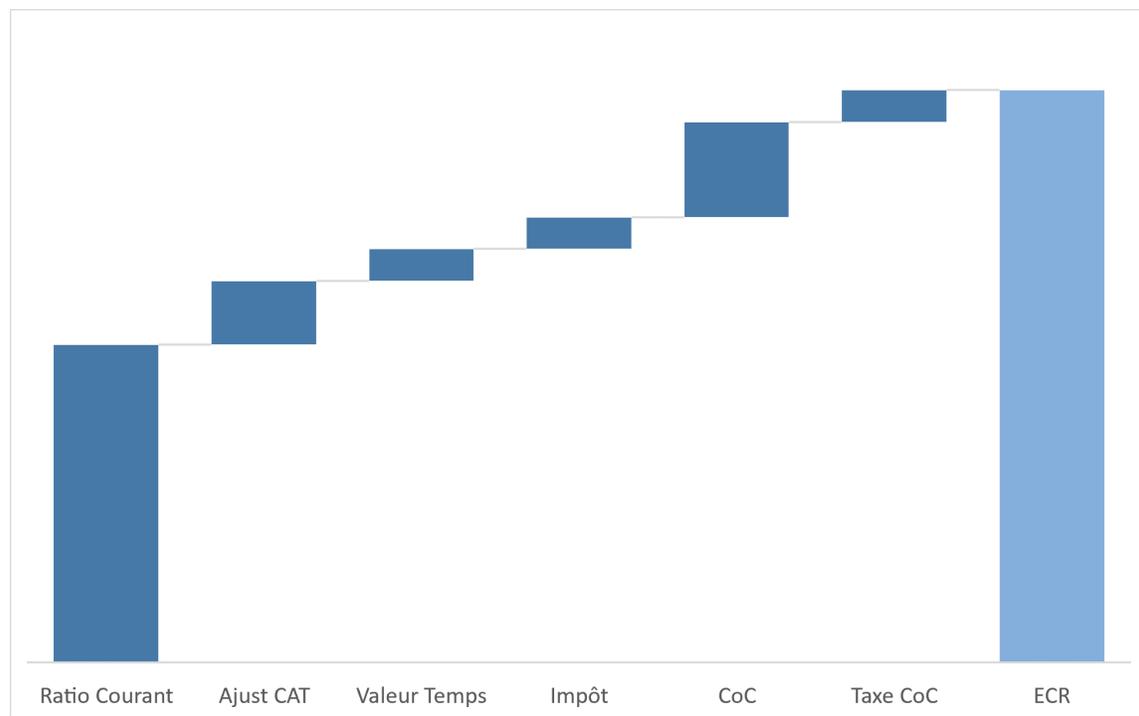


FIGURE 1.6 – Composantes de l'ECR

Dans la suite, nous allons expliquer les différentes composantes de l'ECR.

#### Le ratio combiné courant

Le ratio combiné courant ou CYCR ( *Current Year Combinated Ratio* ) reflète la rentabilité des produits pour l'année à venir. C'est un ratio qui prend en compte les

décaissements et les encaissements. Il se calcule de la manière suivante :

$$RC = \frac{\text{charge courant} + \text{frais}}{\text{primes acquises}}$$

Il peut être décomposé en la somme de deux ratios :

- Le *Loss Ratio (LR)* ou ratio Sinistre/Prime (S/P) : C'est le rapport entre les dépenses liées à la sinistralité, net de réassurance, et les cotisations acquises, net de réassurance.
- Le taux de chargement ou *expense ratio* : il prend en compte les coûts de commercialisation et de gestion (les commissions versées aux agents et aux courtiers, les coûts d'administration et les frais de gestion des sinistres) qu'il divise par les cotisations acquises

### Ajustement CAT

L'ajustement CAT est nécessaire si le ratio de sinistralité est différent de celui modélisé. Elle permet de prendre en compte les sinistres exceptionnels liés aux événements CAT. Comme l'ECR mesure la performance de souscription, la non prise en charge de ces événements peut entraîner une vision erronée de cette performance.

### Valeur Temps

Puisque la valeur financière émerge de l'écart temporel entre le paiement des primes et le paiement des pertes (et des dépenses), nous pouvons considérer une valeur temporelle pour considérer le revenu d'investissement. Cette valeur temps est définie comme la différence entre le résultat actualisé et non actualisé. Elle est particulièrement importante pour les activités de longue durée car la rentabilité dépend principalement des revenus d'investissement. La valeur temporelle n'est prise en compte que pour les branches longues.

### Impôt

L'impôt doit être appliqué au résultat net de la valeur temps, incluant le bénéfice provenant de l'effet d'actualisation (revenus d'investissement). Les données fiscales proviennent directement des directives du Groupe qui incluent le taux d'imposition prévu pour l'année suivante. On tient compte de l'impôt pour le calcul de l'ECR car c'est le résultat net qui sera distribué aux actionnaires.

### Coût du capital ou CoC

Le coût du capital correspond à la rémunération du capital local diversifié généré par le résultat de souscription de l'année en cours. Le capital local diversifié est égal à la somme du STEC prime diversifié et du STEC CAT diversifié.

Le STEC (*Short Terme Economical Capital*) est l'équivalent du SCR<sup>2</sup> (*Solvency Capital Requirement*) dans le référentiel Solvabilité 2<sup>3</sup>. Il s'obtient en faisant la différence entre le quantile 200 ans (VaR à 99.5) et la moyenne.

$$STEC = VaR_{99.5}(\text{Résultat}) - \mathbb{E}(\text{Résultat})$$

## Taxes sur le coût du capital

Un effet fiscal supplémentaire est inclus dans l'ECR : la taxe sur le coût du capital qui correspond au coût frictionnel du capital lié à l'imposition du rendement des actifs. Les actifs détenus en face du capital sont supposés être sans risque (cadre risque neutre). Ils produisent un revenu sans risque avant impôt.

### 1.3.3 Les outils de mesure de transfert de risque

La mesure du risque est essentielle dans le cadre des contrats d'assurance ou de réassurance. En effet, une mesure précise du risque permet une meilleure gestion de celui-ci et est nécessaire pour effectuer une tarification des contrats d'assurance et des traités de réassurance. Cela permet ainsi de s'assurer que le bénéfice attendu d'une transaction est suffisant pour compenser le risque assumé.

Pour qu'un contrat soit considéré comme une assurance ou une réassurance, il doit permettre un transfert de risque suffisant. Dans ce cas, les primes cédées sont considérées comme une perte de revenu et les pertes cédées comme un avantage. Sinon, les fonds versés sont considérés comme un dépôt ou un avantage.

Dans la suite nous allons voir plusieurs outils mathématiques qui permettent de mesurer le transfert de risque.

#### Définition : Mesure de risque

Une fonction  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une mesure de risque dit cohérente si pour tout  $X, Y \in \Omega$ , elle vérifie les conditions suivantes :

- Monotonie : Si  $X \leq Y$  alors  $\rho(X) \leq \rho(Y)$
- Invariance par translation : Pour tout  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\rho(X + m) = \rho(X) + m$
- Homogénéité positive : Pour tout  $\lambda \geq 0$ ,  $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$
- Sous additivité :  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

---

2. Le SCR est le niveau de fonds propres nécessaires à l'assureur pour faire face à ses engagements à un horizon un an avec un seuil de confiance de 99,5%, dans le cadre de la norme solvabilité 2.

3. Solvabilité 2 est une norme réglementaire européenne qui est entrée en vigueur le 1er janvier 2016 et qui vise à mieux adapter les fonds propres des compagnies d'assurance et de réassurance.

## VaR

La VaR *Value at Risk* (VaR) est une mesure de risque couramment utilisée en assurance pour évaluer le risque de pertes financières. La VaR est une mesure statistique qui est utilisée pour estimer le montant maximum de perte qu'une compagnie d'assurance pourrait subir dans des conditions normales de marché. Elle est souvent utilisée pour déterminer la perte maximale acceptable pour une compagnie d'assurance, en fonction de son niveau de tolérance au risque. La VaR est calculée en prenant en compte le niveau de confiance (en général, un niveau de confiance de 95% est utilisé) et en évaluant la perte maximale qui pourrait être subie dans une période donnée (en général, un jour ou une semaine).

Sa large utilisation au sein des institutions financières dans le monde et plus particulièrement en Europe, explique en partie son choix pour la réglementation Solvabilité II.

Pour calculer la VaR, il faut nécessairement tenir compte de la distribution du portefeuille, du niveau de confiance choisi et de l'horizon temporel considéré. Mathématiquement, la VaR au niveau  $\alpha \in [0; 1]$  représente le quantile de niveau  $\alpha$ . On a :

$$VaR_\alpha = x_\alpha$$

ou encore

$$VaR_\alpha = \inf \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha)$$

La VaR n'est pas une mesure de risque cohérente car elle n'est pas sous additive. En effet, fusionner deux portefeuilles ne réduit pas le risque car la VaR n'est pas une fonction convexe.

Exemple : Loi de Pareto

Une loi de Pareto de paramètre  $(x_{max}, k)$  est caractérisée par :

$$\mathbb{P}[X > x] = \left(\frac{x_{max}}{x}\right)^k$$

Considérons deux variables aléatoires indépendantes de lois de Pareto de paramètres (2,1) et (2,2). Alors :

$$\exists \alpha \mid VaR_\alpha[X + Y] > VaR_\alpha[X] + VaR_\alpha[Y]$$

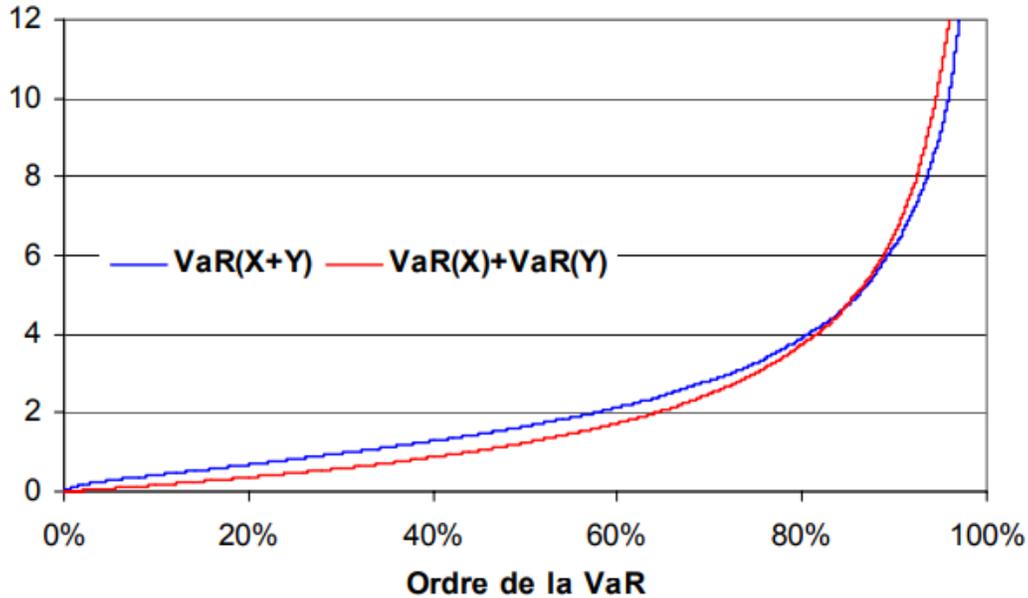


FIGURE 1.7 – Exemple VaR loi de Pareto  $\alpha$

L’avantage de la VaR c’est qu’il est facile à calculer et à expliquer. Cependant, il présente certains inconvénients :

- Il faut choisir un niveau de confiance arbitraire
- La VaR ne tient pas compte des pertes au delà du seuil choisi contrairement à la T-VaR, qu’on étudiera juste après.

### La T-VaR

Bien que la VaR soit une mesure utile pour évaluer le risque de pertes financières, elle ne prend pas en compte les pertes extrêmes qui peuvent survenir dans des conditions exceptionnelles de marché. C’est là qu’intervient la *Tail Value at Risk* (TVaR). La TVaR est une mesure de risque qui prend en compte les pertes potentielles au-delà du niveau de confiance spécifié dans la VaR. Elle est souvent utilisée par les compagnies d’assurance pour évaluer les risques liés à des événements rares mais potentiellement catastrophiques, tels que des tremblements de terre ou des ouragans. La TVaR permet aux compagnies d’assurance de mieux quantifier leur risque de perte extrême et de prendre des mesures pour protéger leur portefeuille.

Soit  $X$  une variable aléatoire représentant la distribution des résultats d’un portefeuille, la TVaR au niveau  $\alpha$  est définie par :

$$TVaR_{\alpha}(X) = -\frac{1}{1-\alpha} \int_p^1 VaR_{\gamma} d\gamma$$

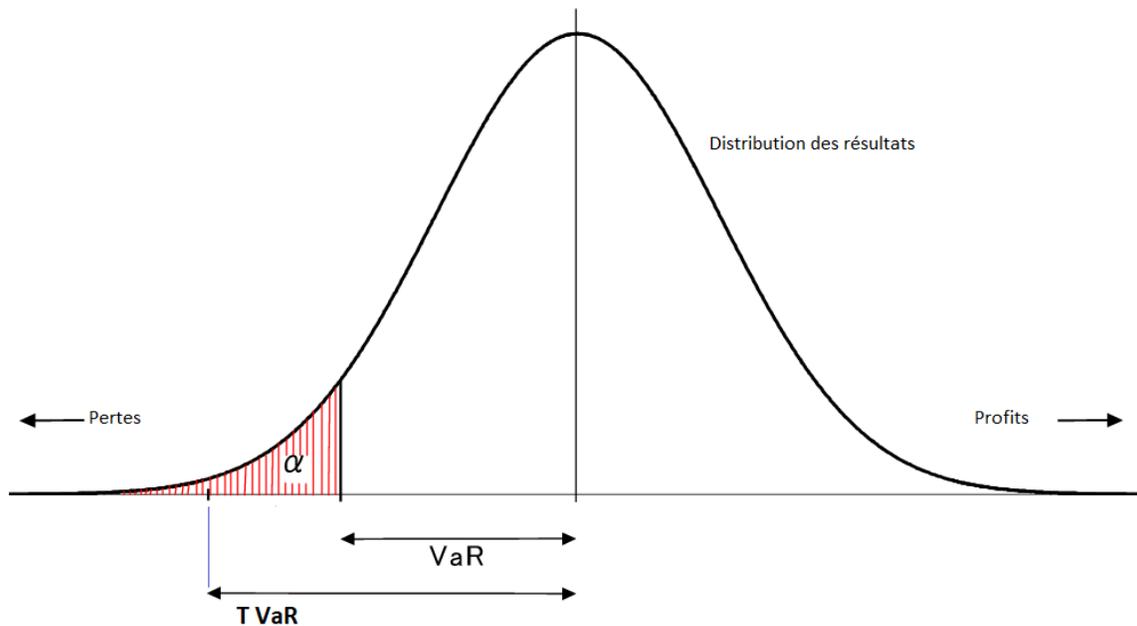


FIGURE 1.8 – VaR et T-VaR au niveau  $\alpha$

Bien que la VaR et la TVaR soient toutes deux des mesures de risque utiles pour les compagnies d'assurance, elles ont des différences clés. La VaR mesure le risque de pertes financières dans des conditions normales de marché, tandis que la TVaR prend en compte les pertes potentielles au-delà du niveau de confiance spécifié dans la VaR. La TVaR est donc considérée comme une mesure plus complète du risque de perte extrême. De plus, la VaR est souvent considérée comme une mesure de risque conservatrice, car elle ne prend pas en compte les pertes potentielles au-delà de son niveau de confiance. En revanche, la TVaR est considérée comme plus précise, car elle prend en compte les pertes potentielles au-delà du niveau de confiance de la VaR. Cependant, la TVaR peut être plus difficile à calculer que la VaR, car elle nécessite souvent des modèles de simulation plus complexes. En fin de compte, le choix entre la VaR et la TVaR dépendra des besoins spécifiques de la compagnie d'assurance et du niveau de précision requis pour évaluer le risque de pertes extrêmes.

## L'ERD

L'ERD (Expected Reinsurer Deficit) est la perte probable du réassureur. Il définit le risque comme étant le produit de la probabilité de perte économique et de la sévérité moyenne de la perte, par rapport à la prime attendue.

$$ERD = \frac{p \times T}{P}$$

Avec :

p= probabilité de perte de revenu net

T= gravité moyenne de la perte économique nette, lorsqu'elle se produit

P= prime attendue.

L'ERD doit prendre en compte tous les paramètres économiques de l'activité, pas seulement les pertes et les gains. Les pertes sont généralement une composante majeure de la distribution du rendement total. L'ERD doit aussi considérer la valeur temps des flux au taux sans risque. Les primes, les dépenses et les revenus d'investissement, ainsi que les termes variables des contrats sensibles aux pertes et d'autres données financières pertinentes pour le rendement total sont également inclus. Les taux après impôt ou avant impôt peuvent être utilisés, selon le contexte de la structure du modèle, les taux après impôt étant généralement utilisés pour actualiser les flux de trésorerie après impôt et les taux avant impôt étant généralement utilisés pour actualiser les flux de trésorerie avant impôt.

Exemple Calculons l'ERD pour un XS avec les caractéristiques suivantes :

Tranches de sinistres	Probabilité	Gain/perte actualisés
0	95%	20
10	3%	60
300	1%	270
500	1%	431

Prime = 500

L'ERD se calcule comme suit :

$$p = \text{Probabilité de perte nette} = 3\% + 1\% + 1\% = 5\%$$

$$T = \text{Sévérité moyenne des sinistres} = \frac{60 \times 3\% + 270 \times 1\% + 431 \times 1\%}{5\%} = 176.2$$

$$ERD = \frac{p \times T}{P} = \frac{5\% \times 176.2}{500} = 1,76\%$$

### La règle des 10/10

La règle des 10-10 est souvent utilisée pour tester le transfert de risque. Cette règle exige qu'il y ait 10% de chance de faire au moins 10% de perte, relativement à la prime. Un contrat qui satisfait la règle des 10/10 a un ERD supérieur ou égal à 1%. En effet, on a :

$$ERD = \frac{p \times T}{P} = p \times \left(\frac{T}{P}\right) \geq 10\% \times 10\% = 1\%$$

Ainsi, la règle 10-10 correspond à une règle ERD de 1%. Une règle ERD de 1% admettra tous les contrats qui passent la règle des 10-10. Cependant, la règle ERD 1%

admettra également certains contrats qui ne satisfont pas à la règle des 10/10 mais qui transfèrent le risque. Il s'agit des risques à faible fréquence et à haute sévérité (comme les risques catastrophes naturelles) et des risques à forte fréquence et à faible sévérité (couvertures quote-part par exemple).



# Chapitre 2

## Description et traitement des données

Dans cette partie, nous allons décrire les données utilisées dans notre étude. Nous allons aussi discuter de la qualité de ces données et expliquer les traitements qui ont été effectués avant leur utilisation

### 2.1 La réassurance chez Axa Global Re

Au service du Groupe AXA et de ses entités, AXA Global Re est une filiale dynamique, agile et innovante, mêlant la flexibilité d'une structure à taille humaine (150 salariés) à une forte expertise interne en assurance IARD et LS. AGRe regroupe des fonctions opérationnelles de réassurance (Relation Clients, Souscription, Sinistres, Actuariat), mais aussi des fonctions supports (gestion des risques, finance, RH, informatique, juridique et audit).

AXA Global Re ambitionne d'être le réassureur du groupe pour toutes les lignes d'activité, en soutenant le développement des entités, en protégeant les résultats et le bilan et en conservant la valeur, tout en renforçant sa visibilité externe.

AGRe opère sur plusieurs branches d'activités :

- Les dommages aux biens ou Property
- La responsabilité civile ou General Third Party Liability (GTPL)
- La responsabilité civile automobile ou Motor Third Party Liability (MTPL)
- La vie ou Life
- L'assurance relative à la marine, l'aviation, le transport ou l'art
- Le cyber

### 2.2 Les données disponibles

On dispose de plusieurs données sinistres et des données financières. Les données sinistres sont des données fournies par Axa Germany. Les données dont nous disposons sont :

- **Les paramètres financiers** : Il s'agit d'un fichier comportant des informations financières qui sont appliquées pour le calcul de l'ECR ou d'autres paramètres liés au traité.

discountRate	expensive	tax	coc	targetSolvencyRatio
0				

Il comporte :

- la colonne **discountRate** qui est le taux de change : pas d'impact dans notre étude car toutes les devises sont en euros
  - La colonne **expensive** : les dépenses (coûts de commercialisation, frais de gestions, etc.) dans le calcul de l'ECR
  - La colonne **tax** : les taxes dans le calcul de l'ECR
  - La colonne **CoC** : coût du capital dans le calcul de l'ECR
  - La colonne **targetSolvencyRatio** : Ratio de solvabilité
- **les paramètres de la réassurance** : C'est un fichier qui comporte les informations relatives au traité de réassurance et certaines informations spécifiques à la structure de réassurance mise en place. Ce sont notamment, pour chaque branche, les primes, le taux de cession de la réassurance, le ratio S/P brute de réassurance, la moyenne et la variance des IP ratios (Incurred/Paid ou ratio de paiement des sinistres) et le GrossUpFactor (Expliqué précédemment).

LOB	Premium	CessionRate	TargetLR	IPratioMu	IPratioSigma	GrossUpFactor
MTL						
MOD						
PTY						
ENG						
MAR						

- **Les strips** : Les strips sont les données qui contiennent les rapports Sinistres/Primes. On dispose de 50 000 strips pour chacune des branches. Pour le Motor, on aura les strips MTL et les strips MOD. Pour chaque branche, on dispose des ratios, segmenté en 3 catégories :

- Net ATT&ATY LR : les sinistres atypiques et attritionnels
- NET CAT LR : les sinistres CAT
- Net MM LR : les sinistres **man made**. Les sinistres man made sont des sinistres qui sont causés par l'activité humaine.

simulations	Net ATT & ATY LR	NET CAT LR	Net MM LR	MAR
1	0,4401	0,0076	0	0,447726539
2	0,6246	0,008	0	0,632636506
...	...	...	...	...
50000	0,6246	0,008	0	0,632636506

- **Les stecks diversifiés** : Il s'agit d'un tableau dont les colonnes sont les poids donnés de STEC prime dans le STEC total et les lignes donnent les niveaux de STEC par pas de 10 000 000. Pour rappel, le STEC est l'équivalent du SCR dans le moderne interne du groupe AXA.

## 2.3 Modélisation du rapport sinistre/prime

En raison de la structure des traités, les ratios S/P sont calculés sur la base des extractions précédentes. Axa Allemagne fournit son business plan afin de déterminer le ratio S/P sur une année. Ce chiffre obtenu est comparé à celui obtenu par AGRe en se basant sur l'historique de sinistre sur une année, des expertises réalisées, et des données commerciales etc.

Tout d'abord, on simule 50 000 strips qui sont calibrés sur le ratio S/P qu'on veut déterminer. Ensuite, on suppose que la proportion moyenne des pertes payées après une année est égale à la moyenne des  $n$  dernières années (Ce nombre d'années considéré dépend de la branche d'activité.). L'écart-type associé à cette moyenne est déterminé sur la base des données historiques actualisées. On obtient ainsi une moyenne ( $m$ ) et un écart-type ( $sd$ ). Ainsi, le ratio de paiement est calibré sur une distribution log normale de paramètres ( $m, sd$ ).

## 2.4 Qualité et traitement des données

La qualité des données est un élément très important en réassurance. Il est essentiel d'avoir une bonne qualité des données pour une meilleure évaluation des risques et une modélisation plus juste.

Les données qu'on utilise, celles qu'on a décrites précédemment, sont de bonne qualité. En effet, il n'y a pas de données manquantes pour les données sinistres car elles ont été recalibrées et simulées. Quelques retraitements ont été faits avant leur utilisation. Les strips ont été retraités pour avoir une corrélation de 20% entre le CAT et le Man made.



# Chapitre 3

## Les algorithmes génétiques

### 3.1 Historique et définition

#### 3.1.1 Historique

Les algorithmes génétiques sont inspirés de la théorie de l'évolution des espèces de Charles Darwin. En 1859, le naturaliste Charles Darwin a publié son célèbre ouvrage *L'origine des espèces*. Dans cet ouvrage, il présente une théorie expliquant le phénomène de l'évolution. A l'époque, Darwin était déjà très connu de la communauté scientifique pour ses travaux sur le terrain et ses recherches en géologie. Ses travaux s'inscrivent dans la même dynamique que ceux du naturaliste français Jean-Baptiste de Lamarck, qui avait soutenu 50 années plus tôt que toutes les espèces vivantes ont évolué au fil du temps et proviennent d'un seul ou de quelques ancêtres communs. Darwin a soutenu avec Alfred Wallace que cette évolution est le fruit du processus de la sélection naturelle.

Environ un siècle plus tard, cette théorie a inspiré le professeur John Holland qui a essayé d'implémenter artificiellement des systèmes évolutifs qui sont basés sur le processus de la sélection naturelle.

Ces travaux ont ensuite mené aux algorithmes génétiques, qui sont maintenant utilisés pour trouver des solutions approchées pour certains problèmes d'optimisation.

#### 3.1.2 Définition

Les algorithmes génétiques (AG) sont des algorithmes de recherche heuristiques adaptatifs qui appartiennent à la plus grande partie des algorithmes évolutionnaires. Ils sont basés sur la sélection naturelle des espèces et la génétique. Il s'agit d'une manière intelligente d'exploiter la recherche aléatoire à partir de données historiques pour diriger la recherche vers la région la plus performante dans l'espace des solutions. Ils sont souvent utilisés pour créer des solutions de haute qualité aux problèmes d'optimisation et aux problèmes de recherche.

Les algorithmes génétiques recherchent l'espace des solutions d'une fonction en utilisant une évolution simulée, c'est-à-dire la stratégie de survie du plus "fort". En général, les meilleurs individus d'une population ont tendance à se reproduire et à survivre à la génération suivante, améliorant ainsi les générations successives. Cependant, les individus les moins bons peuvent, par chance, survivre et se reproduire également. Les algorithmes génétiques permettent de résoudre des problèmes linéaires et non linéaires en explorant toutes les régions de l'espace d'état et en explorant de manière exponentielle les zones prometteuses par le biais d'opération de mutation, de croisement et de sélection appliquées aux individus de la population.

La mise en place d'un algorithme génétique nécessite l'élaboration des critères suivants : la représentation des solutions, l'évaluation des individus, la sélection, les opérations de croisement et de mutation, l'élitisme et le critère d'arrêt.

La figure ci-dessous montre les différentes étapes d'un algorithme génétique.

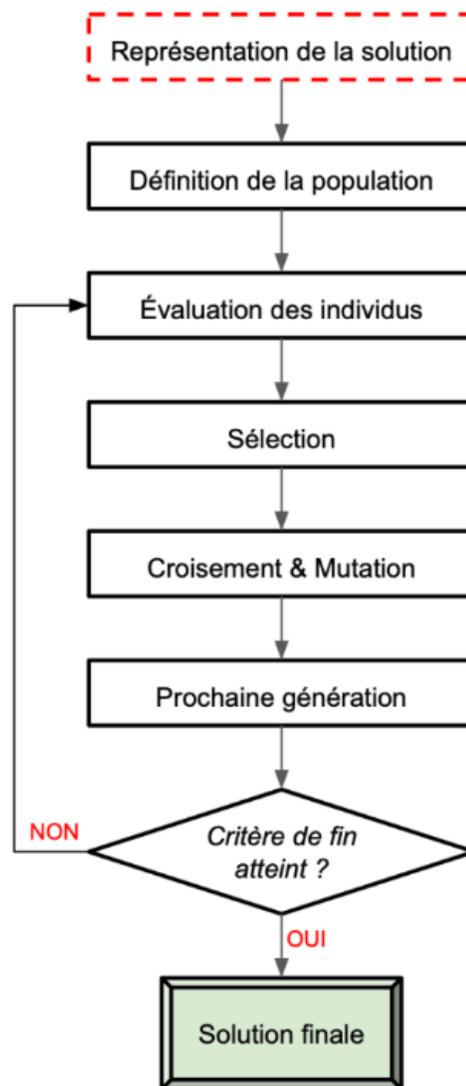


FIGURE 3.1 – Etapes d'un algorithme génétique

## 3.2 Représentation des solutions

### 3.2.1 Représentation binaire

Ce type de codage a été le premier à être utilisé dans le domaine des algorithmes génétiques. Il présente plusieurs avantages : un alphabet minimum de 0,1, une facilité de développement d'opérateurs génétiques et un fondement théorique (théorie des schémas). Cependant, ce type de codage présente également certains inconvénients :

- Les performances de l'algorithme sont dégradées devant les problèmes d'optimisation de grande dimension à haute précision numérique. Pour de tels problèmes, les AG basés sur les chaînes binaires ont de faibles performances
- La distance de Hamming entre deux nombres voisins (nombre de bits différents) peut être assez grande dans le codage binaire : l'entier 7 correspond à la chaîne 0111 et la chaîne 1000 correspond à l'entier 8. Or la distance de Hamming entre ces deux chaînes est de 4, ce qui crée bien souvent une convergence, et non pas l'obtention de la valeur optimale. Cet inconvénient peut être évité en utilisant un codage de Gray par exemple.

### 3.2.2 Représentation réelle

Pour un algorithme génétique, l'un des points les plus importants est la manière dont sont codées les solutions. Il est essentiel de bien représenter les solutions pour une meilleure appréhension du problème à résoudre.

Comme dans la nature, on considère que la population est constituée d'individus différents. Chaque individu ou chromosome représente une solution potentielle et est constitué de gènes, qui lui sont propres et qui définissent ses caractéristiques. La population doit être dans l'espace de recherche des solutions. Chaque individu est représenté comme un vecteur de longueur finie de composants ou gènes. L'objectif de l'algorithme génétique sera donc de trouver des combinaisons de gènes qui donneront des individus performants.

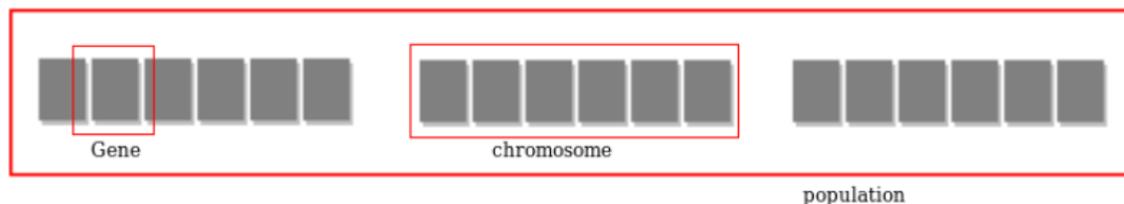


FIGURE 3.2 – Représentation des solutions

### 3.3 Population initiale

Comme indiqué sur la figure 3.1, après avoir défini le codage des solutions, l'algorithme génétique commence par une population initiale, généralement générée aléatoirement. On peut néanmoins essayer d'insérer dans la population initiale, des individus de bonne qualité, en espérant que l'algorithme converge plus rapidement vers un optimum. Cela nécessite de trouver ces bons candidats, ce qui n'est pas toujours facile.

L'insertion de bons candidats ne garantit pas forcément une meilleure convergence. En effet, une simple modification des gènes d'un individu (mutation) peut améliorer considérablement sa qualité. Le croisement entre deux solutions de mauvaise qualité peut donner naissance à une solution acceptable. Dans les parties qui vont suivre, nous expliquerons en détails en quoi consistent ces opérations de croisement et de mutation.

Pour une meilleure recherche des solutions, la population initiale doit être diversifiée afin de couvrir l'espace de recherche des solutions. Ainsi, l'algorithme pourra explorer toute l'espace de recherche. La taille de la population est aussi un facteur déterminant pour un algorithme génétique. Ces algorithmes étant généralement très coûteux en temps de calcul, une population de très grande taille a tendance à augmenter considérablement le temps de calcul de l'algorithme génétique. A l'inverse, une population de très petite taille va diminuer les chances de convergence de l'algorithme. Il convient donc de choisir une population assez grande pour pouvoir couvrir l'espace de recherche des solutions, mais aussi assez petite pour que le temps de calcul soit raisonnable.

La taille de la population étant constante au fil des générations, les individus de mauvaise qualité doivent mourir afin de permettre l'insertion de nouvelles solutions. Le choix des solutions qui vont survivre dépendra des opérations d'évaluation, de sélection et de reproduction que nous allons détailler dans les prochaines sections.

### 3.4 Evaluation des individus

L'évaluation de la population permet de mesurer la performance des solutions. Une fonction d'évaluation, ou fonction Fitness doit être définie et coïncide souvent avec la fonction à optimiser. Cette fonction doit être évaluée pour chaque solution. L'évaluation de cette fonction doit être optimale en temps de calcul. En effet, la fonction va être testée pour tous les individus de toutes les générations. Une fonction d'évaluation coûteuse en temps de calcul va augmenter considérablement le temps de calcul de l'algorithme.

## 3.5 Sélection

La sélection des individus est déterminante pour la recherche de solutions. En effet, sélectionner les individus revient à déterminer à partir de quels individus, les nouveaux individus seront créés. En général, les individus de mauvaises performances auront moins de chance d'être sélectionnés, donc de se reproduire. Lors de la sélection, il est important de garder la diversité génétique de la population. En effet, si on ne sélectionne que des individus de bonne qualité, on a de forte chance de perdre certains gènes dans la population.

### 3.5.1 Les méthodes de sélection par rang

Ces méthodes consistent à choisir les individus ayant les meilleurs scores d'adaptation. Chaque chromosome  $i$  aura une probabilité d'être sélectionné qui dépend de son rang.

Exemple : Méthode de sélection géométrique normalisée :

$$\mathbb{P}[\textit{selection du } i^{\textit{eme}} \textit{ individu}] = \frac{q}{1 - (1 - q)^P} (1 - q)^{r(i)-1}$$

Avec :

$q$  = probabilité de sélectionner le meilleur individu

$r$  = le rang de l'individu

$P$  = la taille de la population

### 3.5.2 Sélection par tournoi

La sélection par tournoi consiste à tirer aléatoirement  $j$  individus parmi la population initiale et de garder le meilleur individu. Cette opération est répétée plusieurs fois jusqu'à l'obtention de tous les parents. Avec cette méthode, les individus les moins performants auront plus de chances d'être sélectionnés, ce qui peut favoriser la diversité génétique.

### 3.5.3 Sélection par roulette

Cette méthode consiste à associer à chaque individu un segment dont la longueur est proportionnelle à sa performance. On reproduit ici le principe du tirage aléatoire qu'on utilise dans les casinos, avec une structure linéaire. Ces segments sont ensuite concaténés sur un axe que l'on normalise entre 0 et 1. On tire alors un nombre aléatoire de distribution uniforme entre 0 et 1, puis on regarde quel est le segment sélectionné. Lorsque la dimension de la population est réduite, il est difficile d'obtenir en pratique l'espérance mathématique de sélection en raison du peu de tirages effectués. Un biais de sélection plus ou moins fort existe suivant la dimension de la population. On a :

$$\mathbb{P}[\textit{selection du } i^{\textit{eme}} \textit{ individu}] = \frac{F_i}{\sum_{j=1}^P F_j}$$

Avec :

$F_i$  la *fitness* ou performance de l'individu  $i$

$P$  la taille de la population.

On voit que la méthode de la sélection par roulette décrite ci-dessus est plus adaptée au problème de maximisation, mais elle peut être réadaptée pour traiter un problème de minimisation.

## 3.6 Les opérateurs génétiques

### 3.6.1 L'opération de reproduction

Une fois que les chromosomes parents sont sélectionnés, on génère des chromosomes fils grâce à la reproduction, aussi appelée croisement ou enjambement. Comme avec l'héritage génétique en biologie, les chromosomes fils seront constitués des gènes de leurs deux parents. En combinant ainsi les gènes des deux parents, on espère que le chromosome fils sera plus performant.

Il existe plusieurs manières de faire des croisements. Une des méthodes les plus simples consiste, une fois que les deux parents sont sélectionnés, de choisir aléatoirement un nombre  $i$ , entre 1 et le nombre de gènes ( $N_g$ ). Ensuite, les  $i$  premiers gènes du fils seront constitués des gènes de l'un des parents et les gènes restants seront les mêmes que ceux du second parent.

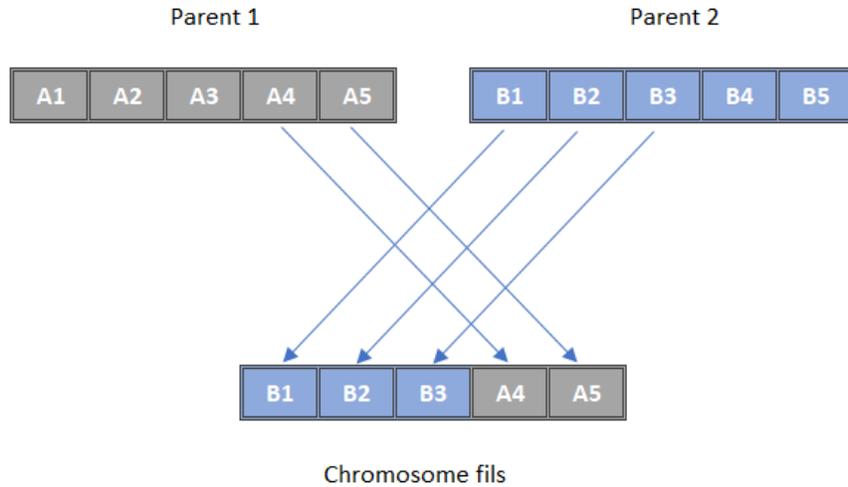


FIGURE 3.3 – croisement en un point

Il existe une autre méthode similaire qui permet de faire le croisement en plusieurs points. On choisit plusieurs points de croisements, ce qui donne beaucoup plus de possibilités de création pour le chromosome fils.

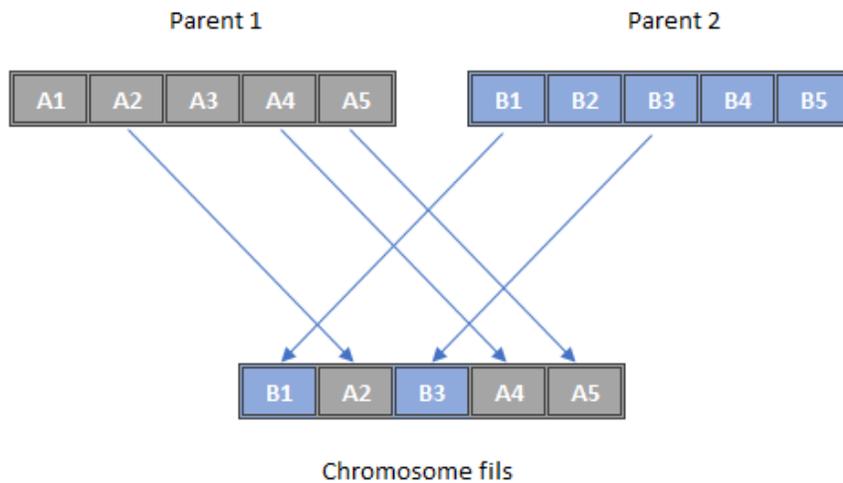


FIGURE 3.4 – croisement en plusieurs points

### 3.6.2 L'opérateur de mutation

Dans l'évolution naturelle des espèces, lors de la réplication des chromosomes, il arrive que des erreurs se produisent et que certains gènes soient mal copiés. Ce

phénomène est appelé mutation dans le langage biologique. Ces mutations qui entraînent la modification des gènes, peuvent avoir des conséquences sur la survie de l'individu. En effet, cela peut représenter un désavantage vis à vis des autres individus. Cependant, il arrive que ces mutations rendent l'individu plus performant que ses pairs.

Pour les algorithmes génétiques, on essaie de reproduire le même mécanisme. Un individu est sélectionné aléatoirement parmi la population, puis, toujours aléatoirement, quelques-uns de ses gènes sont modifiés. On espère ainsi créer une meilleure solution grâce au changement effectué.

La manière de modifier les gènes doit être définie dans l'algorithme et doit produire des solutions qui sont dans l'espace de recherche considéré. Les mutations sont faciles à mettre en œuvre, mais leur importance est capitale pour le fonctionnement de l'algorithme génétique. Elles vont permettre une meilleure exploration de l'espace de recherche et évitent ainsi de stagner vers un optimum local. Un taux de mutation doit être défini afin de contrôler la proportion de la population à muter.



FIGURE 3.5 – Mutation d'un chromosome



# Chapitre 4

## Application aux quotes-parts allemandes

Dans cette partie nous allons expliciter notre problématique et détailler les différentes étapes pour la mise en place d'un algorithme génétique.

### 4.1 Formalisation du problème

Comme expliqué dans la première partie, les quotes-parts allemandes ont une structure particulière. La structure se compose de quatre branches avec des contraintes au niveau de la calibration de chaque branche, mais aussi au niveau global.

En effet, pour chaque branche, il y a une contrainte sur l'ERD (*Expected Reinsurer Deficit*), celui-ci doit être supérieur ou égal à un pourcentage  $E\%$ . Cette contrainte sur l'ERD permet d'assurer qu'il y a suffisamment de transfert de risque de la cédante vers le réassureur. Il y a aussi une contrainte sur la marge totale cédée par le groupe, qui se négocie entre le réassureur et la cédante. Une marge trop élevée va entraîner une dégradation de l'ERD tandis qu'une marge trop faible détériore l'ECR, donc la rentabilité de la structure de réassurance.

Sachant qu'une commission variable est appliquée pour chacune des quatre branches d'activités, notre objectif principal est de développer un algorithme génétique pour trouver les bornes des ratios de sinistre pour l'application des commissions variables et les marges cédées qui permettent de minimiser l'ECR, tout en respectant les contraintes sur les ERD par branche et sur la marge totale. On se retrouve à chercher les trois paramètres suivants pour chaque branche :

- La **marge**
- La borne inférieure pour l'application de la commission variable qu'on notera **minLR**
- La borne supérieure pour l'application de la commission variable qu'on notera **maxLR**

On a donc au total 12 paramètres à chercher.

Pour plus de clarté, formalisons le problème. Pour simplifier la notation, les abréviations ayant pour indice 1, 2, 3 et 4 feront référence respectivement à l'automobile, aux dommages aux biens, à l'ingénierie et au marine

$$\min (\text{ECR}) \quad \text{avec :} \quad ERD_i \geq E\% \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^4 \text{marge}_i \leq M$$

Pour rappel, on a :

$$ECR = CYCR + AjustementCat + ValeurTemps + Tax + Coc + TaxCoC$$

$$CYCR = \frac{\text{charge courant} + \text{frais}}{\text{primes acquises}}$$

Avec :

- ECR = **Economic combined ratio**, le ratio économique combiné
- CYCY = **Current year combined ratio**, le ratio combiné courant
- CoC = **Cost of capital**, le coût du capital

La commission variable s'applique comme suit :

$$Commission = \max(1 - \text{margin} - \text{maxLR}, \min(1 - \text{margin} - \text{minLR}, 1 - \text{margin} - \text{LRQS}))$$

Avec :

$$LRQS = LR \times \text{GrossUpFactor}$$

## 4.2 Méthode de résolution

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, un algorithme génétique peut être codé de différentes manières. A chaque étape de l'algorithme, on a la liberté de choisir une méthode, en fonction du problème à résoudre.

### 4.2.1 Codage des solutions

Notre population initiale est constituée de chromosomes possédant chacun 12 gènes. Ces gènes représentent les douze paramètres que l'on cherche afin de minimiser l'ECR.



FIGURE 4.1 – Codage des solutions

Les marges sont comprises entre 1 et 10% car au-delà de 10%, la marge totale deviendrait trop élevée. En effet, un espace de recherche plus vaste pourrait réduire la vitesse de convergence de l'algorithme. Ainsi, pour éviter que l'algorithme explore des zones sans solutions, on se restreint à un espace de recherche dans lequel on a plus de chance de respecter les contraintes. Pour chaque branche le ratio S/P espéré doit être compris entre les bornes de la commission variable.

Le tableau suivant récapitule l'espace de recherche pour chaque gène.

Borne inf	Gène	Borne Sup
0.01	marge1	0.1
0	minLR1	0.67
0.67	maxLR1	1
0.01	marge2	0.1
0	minLR2	0.70
0.70	maxLR2	1
0.01	marge3	0.1
0	minLR3	0.48
0.48	maxLR1	1
0.01	marge4	0.1
0	minLR4	0.57
0.57	maxLR4	1

#### 4.2.2 Génération de population initiale

On a initialisé l'algorithme avec une population de N chromosomes, chaque chromosome possédant 12 gènes. Pour générer les N chromosomes, une loi uniforme a été utilisée de telle sorte que les chromosomes obtenus soient dans l'espace de recherche considéré.

Pour $i = 1$ à $12$ : $g_i = borneInf + U(0, 1) * (borneSup - borneInf)$ Fin
--

Les graphiques ci-dessous montrent la répartition de la population initiale de 100 chromosomes générée par l'algorithme pour chaque branche.

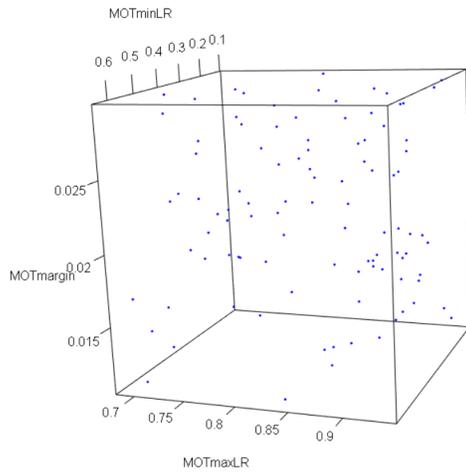


FIGURE 4.2 – Automobile

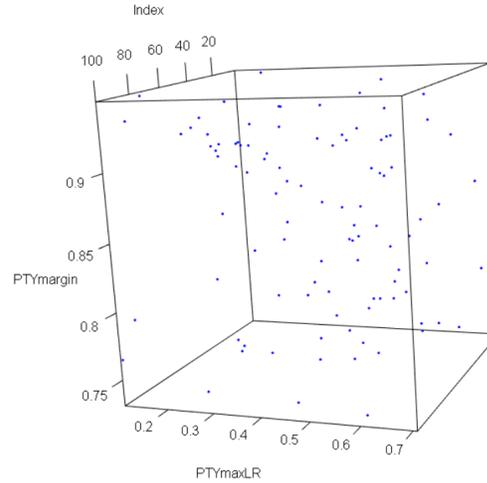


FIGURE 4.3 – dommage aux biens

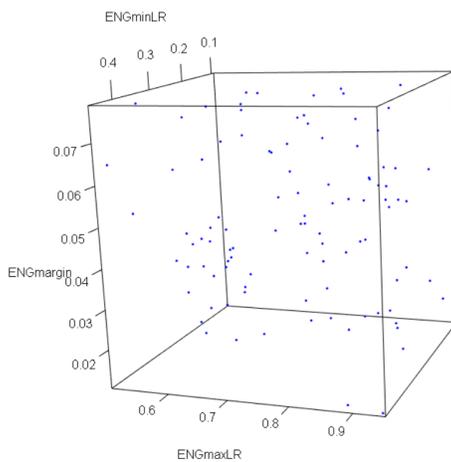


FIGURE 4.4 – Ingénierie

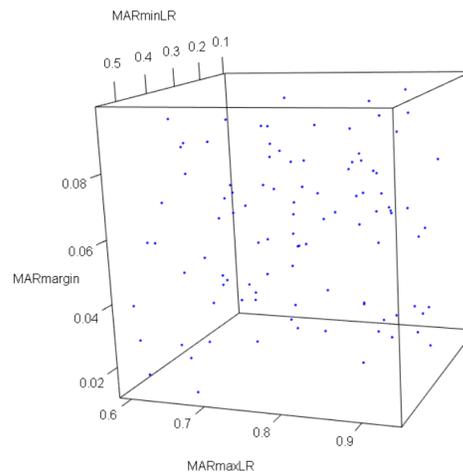


FIGURE 4.5 – Marine

On voit que pour chaque branche, les chromosomes sont assez dispersés dans l'espace de recherche. Les opérations de croisement et de mutation vont permettre d'explorer l'espace de recherche. On remarque aussi l'importance de la taille de la population. Plus la taille de la population est grande, plus on augmente les chances d'avoir une bonne solution dans une génération. Cependant, comme expliqué précédemment, un compromis doit être fait entre la taille de la population et le temps de calcul.

### 4.2.3 Evaluation des individus

Une fois qu'on a obtenu la population initiale, tous les individus sont évalués. L'évaluation des individus se fait comme suit :

- Calcul de l'ERD pour chaque branche

- Calcul de l'ECR par branche
- Calcul de la marge totale cédée
- Calcul de l'ECR au global

L'ECR au global est obtenu de la manière suivante :

$$\frac{\sum_{i=1}^4 ECR_i \times Prime_i}{\sum_{i=1}^4 Prime_i}$$

Après le calcul de l'ECR et de l'ERD, on définit un score qui permet de juger de la performance des solutions. Ce score va nous permettre de tenir compte des contraintes d'ERD et de la marge totale.

$$F = \begin{cases} ECR & \text{si } \forall i = 1, 2, 3, 4, ERD_i \geq E \text{ et } \sum_{i=1}^4 marge_i \leq M \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec ce score défini, les meilleures solutions ont les scores les plus faibles. Les solutions qui ne respectent pas les contraintes se font attribuer la valeur maximale de l'ECR et auront moins de chances de survivre. Cette valeur maximale est arbitraire car on aurait pu choisir une valeur plus grande, pourvu qu'elle soit assez éloignée de 1, car on cherche à obtenir un ECR global inférieur à 1. En effet, l'idée est de dégrader encore plus sa valeur de performance afin de diminuer considérablement sa chance de survie.

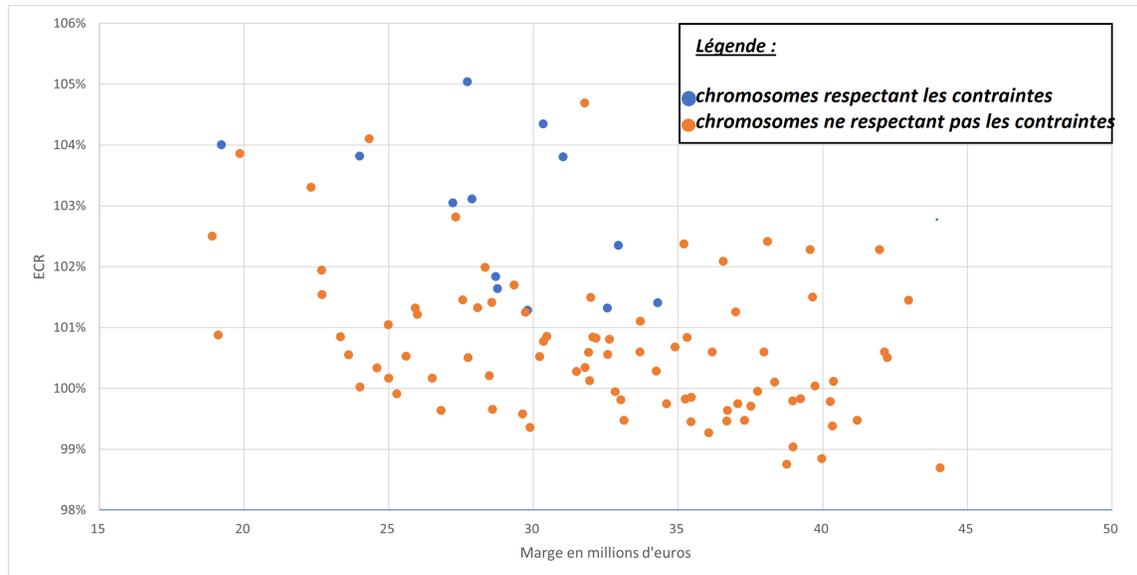


FIGURE 4.6 – Performance de la population initiale

Le graphique ci-dessus permet d'évaluer la qualité des chromosomes qui composent la population initiale. On se fixe comme objectif de trouver une marge de réassurance inférieure à 35 millions et des ERD par branche supérieurs ou égaux à 1%.

Les points représentés en bleu sont les chromosomes qui après l'étape d'évaluation, respectent les contraintes définies. Ils représentent 13% de la population. Ainsi, la meilleure solution de cette population initiale est le chromosome possédant l'ECR le plus bas parmi ces points bleus, avec un ratio combiné de 101,28%. Ce qui n'est pas encore rentable.

#### 4.2.4 Sélection et opérations génétiques

Après l'évaluation de toute la population, vient l'étape de la sélection. Dans cette étape, on commence par ranger la population par ordre croissant de performance (Ordre décroissant pour le score défini). Nous avons choisi de faire une sélection par élitisme car elle est très simple à mettre en œuvre et garantit la survie des meilleures solutions.

Sur les  $N_{pop}$  chromosomes de chaque génération on choisit  $n_{élites} < N_{pop}$  meilleurs chromosomes qui vont survivre pour la génération suivante. Les gènes de ces chromosomes "élus" vont rester inchangés et vont permettre la génération des  $N_{pop} - n_{élites}$  individus restants pour la prochaine génération.

Ainsi, les  $N_{pop} - n_{élites}$  individus restants vont être générés par des croisements et des mutations sur toute la population.

Introduisons quelques notations pour plus de simplicité :

- $P_j(i)$  :  $i^{ième}$  individu de la  $j^{ième}$  génération rangée par ordre croissant de performance, c'est à dire :  $F(P_j(i)) \leq F(P_j(i+1)) \quad \forall i, j \geq 1$
- $P'_j(i)$  :  $i^{ième}$  individu de la  $j^{ième}$  génération avant rangement des individus par ordre croissant de performance.
- $g_i$  le  $i^{ième}$  gène de l'individu  $P'(i)$  avant mutation et  $g'_i$  le  $i^{ième}$  gène de l'individu  $P'(i)$  après mutation

L'étape de sélection et de croisement se fait comme suit :

```

    Pour i = 1 à n :
         $P'_{j+1}(i) = P_j(i)$ 
    Fin pour.
    Pour i = n+1 à N :
    -Tirage aléatoirement d'un couple (Parent1 , Parent2) entre 1 et N.
    -Tirage aléatoirement du nombre de points de croisement c entre 0
      et le nombre de gènes.
    - $P'_{j+1}(i) =$  croisement du couple (Parent1 ; Parent2) au point c
    Fin Pour

```

La méthode de croisement utilisée est la méthode de croisement en un point à la section 3.6.1

L'opération de mutation a été définie avec une probabilité  $p_m$  qui permet de contrôler le taux de mutation dans la population, d'une génération à une autre. En effet, un paramètre  $p_m$  est passé en argument dans l'algorithme génétique. Et l'opération de mutation qui permet de passer d'une valeur  $g$  d'un gène à une valeur  $g'$  est définie comme suit :

```

    Pour i = 1 à 12 :
        Si  $Unif([0; 1]) \leq p_m$  :
    -Tirage aléatoirement d'un nombre d dans l'ensemble  $\{-1, 1\}$ 
         $g'_i = g_i + d \times (borneSup - borneInf * Unif([0; 1]))$ 
    Fin Pour
        Si  $g_i \leq borneInf_i$  alors :
             $g'_i = borneInf_i + Unif([0, 1]) * (borneSup_i - borneInf_i)$ 
        Si  $g_i \geq borneSup_i$  alors :
             $g'_i = borneSup_i - Unif([0, 1]) * (borneSup_i - borneInf_i)$ 

```

L'opération de mutation que nous avons définie nous assure que l'on ne sort pas de l'espace de recherche.

## 4.2.5 Récapitulatif

Dans cette partie, nous allons faire un récapitulatif des étapes qu'on a décrites dans la partie précédente. Mais avant cela, présentons les différents paramètres d'entrée et les paramètres de sortie de l'algorithme.

Les différents paramètres d'entrée de l'algorithme sont :

- $N_{pop}$  : taille de la population ou nombre d'individus pour chaque génération.
- $N_{iters}$  : nombre de générations fixé
- $n_{\text{élite}}$  : nombre d'élites ou de survivants d'une génération à une autre.

- $p_m$  : probabilité de mutation
- $\mathbf{F}$  : fonction d'évaluation qui permet d'évaluer la performance des solutions.
- $\mathbf{MIN}$  : C'est les bornes inférieures de l'espace de recherche des gènes pour les chromosomes. C'est donc un vecteur de longueur  $n_{\text{gènes}}$ .

On a :  $\mathbf{MIN} = (\text{borneInf}_1, \text{borneInf}_2, \dots, \text{borneInf}_{n_{\text{gènes}}})$

- $\mathbf{MAX}$  : C'est les bornes supérieures de l'espace de recherche des gènes pour les chromosomes. C'est aussi un vecteur de longueur  $n_{\text{gènes}}$ .

On a :  $\mathbf{MAX} = (\text{borneSup}_1, \text{borneSup}_2, \dots, \text{borneSup}_{n_{\text{gènes}}})$

### Etape 1 : Génération de la population initiale

Pour  $i = 1$  à  $n_{\text{gènes}}$  :

$g_i = \text{borneInf} + U(0, 1) * (\text{borneSup} - \text{borneInf})$

Fin

La méthode décrite ci- dessus permet la génération d'un individu. Elle est répétée  $N_{pop}$  de fois pour générer une population de  $N_{pop}$  chromosomes.

### Etape 2 : Evaluation de la population

Dans cette étape, on évalue tous les chromosomes de la génération puis on les ordonne par ordre croissant de performance.

- $P_j(i)$  :  $i^{\text{ieme}}$  individu de la  $j^{\text{ieme}}$  génération rangée par ordre croissant de performance, c'est à dire :  $F(P_j(i)) \leq F(P_j(i+1)) \quad \forall i, j \geq 1$ .
- $P'_j(i)$  :  $i^{\text{ieme}}$  individu de la  $j^{\text{ieme}}$  génération avant rangement des individus par ordre croissant de performance.

### Etape 3 : Sélection puis croisement

Pour  $i = 1$  à  $n_{\text{élite}}$  :

$P'_{j+1}(i) = P_j(i)$

Fin pour.

Pour  $i = n+1$  à  $N$  :

-Tirage aléatoirement d'un couple (Parent1 , Parent2) entre 1 et  $N$ .

-Tirage aléatoirement du point de croisement  $c$  entre 0

et le nombre de gènes  $n_{\text{gènes}}$ .

- $P'_{j+1}(i) =$  croisement du couple (Parent1 ; Parent2) au point  $c$

Fin Pour

Dans cette étape, on sélectionne les  $n_{\text{élite}}$  meilleurs individus de la génération  $j$  puis on les insère dans la génération  $j+1$ . On effectue ensuite des croisements sur toute la population (y compris les élites) pour générer  $N_{pop} - n_{\text{élites}}$  chromosomes qui vont subir l'opération de mutation à l'étape suivante.

#### Etapes 4 : Mutation

Pour  $i = 1$  à  $n_{\text{gènes}}$  :

Si  $Unif([0; 1]) \leq p_m$  :

-Tirage aléatoirement d'un nombre  $d$  dans l'ensemble  $\{-1, 1\}$

$$g'_i = g_i + d \times (borneSup - borneInf * Unif([0; 1]))$$

Fin Pour

Si  $g_i \leq borneInf_i$  alors :

$$g'_i = borneInf_i + Unif([0, 1]) * (borneSup_i - borneInf_i)$$

Si  $g_i \geq borneInf_i$  alors :

$$g'_i = borneInf_i - Unif([0, 1]) * (borneSup_i - borneInf_i)$$

Les  $N - n_{\text{élites}}$  individus restants vont subir l'étape de mutation. Chaque individu aura une probabilité  $p_m$  d'être muté.

**Tant que le critère d'arrêt n'est pas atteint : reprendre l'étape 2**

### 4.3 Analyses des résultats

Dans cette section, on va tester les performances de l'algorithme génétique. Nous allons aussi faire des études de sensibilité sur les différents paramètres passés en argument dans l'algorithme développé. La fonction d'évaluation définie pour la suite est :

$$F = \begin{cases} ECR \text{ si } \forall i = 1, 2, 3, 4, ERD_i \geq E \text{ et } \sum_{i=1}^4 marge_i \leq M \\ F_{max} \text{ sinon} \end{cases}$$

On fixe arbitrairement la valeur de  $E$  à 1%.

#### 4.3.1 Minimisation de l'ECR

On teste l'algorithme avec les paramètres suivants :  $N_{pop} = 100$ ,  $N_{iters} = 300$ ,  $n_{\text{élites}} = 20$ ,  $p_m = 0.2$ . Le graphique ci dessous nous montre les résultats obtenus avec l'algorithme.

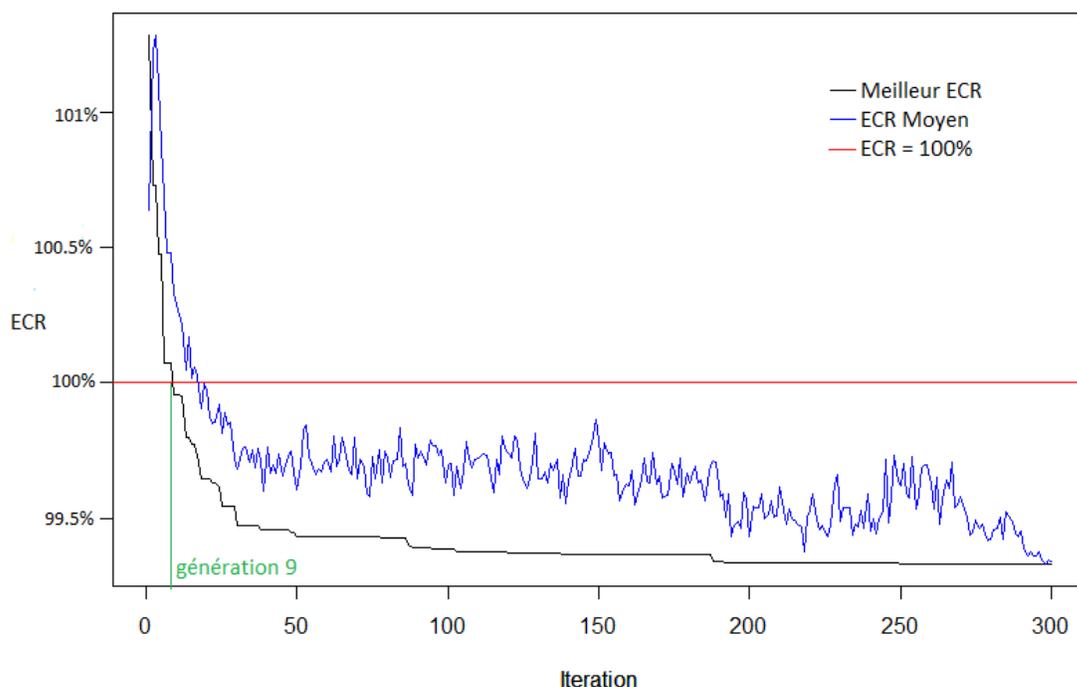


FIGURE 4.7 – Résultats de l’algorithme génétique

La courbe noire représente l’ECR pour la meilleure solution trouvée par l’algorithme en fonction de la génération. La courbe bleue nous montre la moyenne de l’ECR pour chaque génération. Enfin, la courbe rouge représente le seuil de rentabilité de l’ECR, c’est à dire la valeur de 100% d’ECR.

Pour la courbe noire, qui représente la meilleure solution par génération, on remarque une forte diminution de l’ECR lors des 50 premières itérations avec un seuil de rentabilité atteint dès la 9<sup>ième</sup> génération. Cela est assez logique car lors des premières itérations, il y’a beaucoup de zones inexplorées dans l’espace de recherche. Ainsi, on a beaucoup de chance d’améliorer la qualité de l’ECR d’une génération à une autre. Après la 50<sup>ième</sup> génération, on remarque une forte diminution de la vitesse de convergence de l’algorithme au cours des générations. En effet, il devient de plus en plus difficile d’améliorer l’ECR au fil des générations parce que d’une part l’ECR devient de plus en plus bas et d’autre part il reste de moins en moins de zones inexplorées dans l’espace de recherche.

La courbe bleue nous montre l’évolution de la moyenne de l’ECR des chromosomes par génération. Elle a globalement la même tendance que la courbe noire, ce qui traduit une amélioration globale de la performance de la population. On remarque cependant que cette courbe peut prendre des valeurs plus élevées d’une génération à une autre. En effet, l’ECR moyen de la population peut augmenter sans pour

autant dégrader le meilleur ECR. Les nouveaux individus insérés dans une génération peuvent être d'une moins bonne qualité que ceux qui n'ont pas survécus, entraînant ainsi une augmentation de la moyenne. La méthode de sélection utilisée nous garantit toujours la survie du meilleur individu.

### 4.3.2 Qualité de la population finale

Nous avons vu dans la partie précédente que l'algorithme permet l'amélioration de la performance des solutions au fil des générations. Le graphique ci-dessous montre la différence entre la population initiale et la population finale.

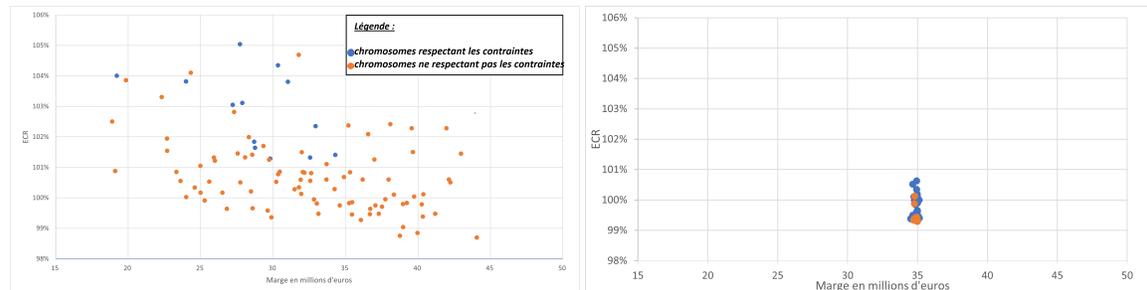


FIGURE 4.8 – Population initiale

FIGURE 4.9 – Population finale

On observe une amélioration considérable du nombre de solutions respectant les contraintes. Dans la population initiale, il n'y avait que 13% des chromosomes qui respectent les contraintes de l'algorithme. Ce nombre passe à 79% pour la population finale. On a beaucoup de solutions avec des ECR inférieurs à 100% dans la population finale alors que dans la population initiale, il n'y avait aucune solution en dessous de ce seuil de rentabilité.

Par ailleurs, on remarque aussi une concentration de la population finale autour de la marge cible de 35 millions de marge. Avec la population initiale on a des marges qui varient entre 19 et 44 millions.

Au vu de la comparaison entre la population initiale et la population finale, on voit que l'algorithme a permis d'améliorer considérablement la qualité globale de la population au fil des générations.

### 4.3.3 Répartition de la population finale

Afin de mieux comprendre le fonctionnement de l'algorithme génétique, on s'intéresse à la répartition de la population finale. La figure ci-dessous montre la répartition des chromosomes de la dernière génération dans l'espace de recherche des solutions pour chaque branche.

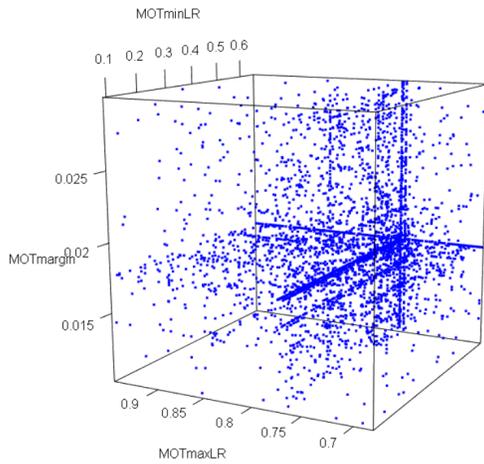


FIGURE 4.10 – Automobile

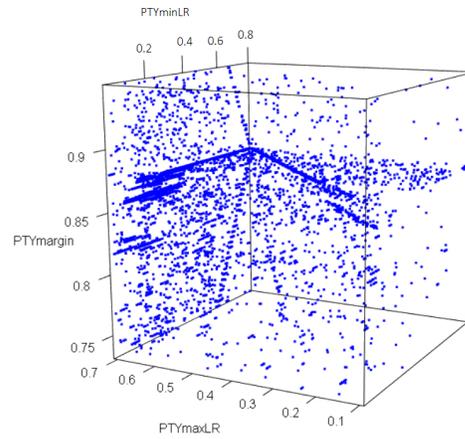


FIGURE 4.11 – dommage aux biens

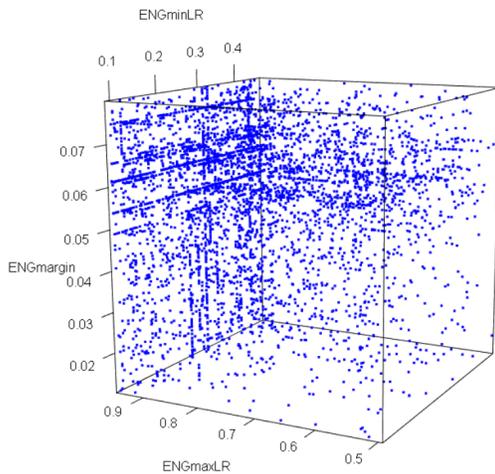


FIGURE 4.12 – Ingénierie

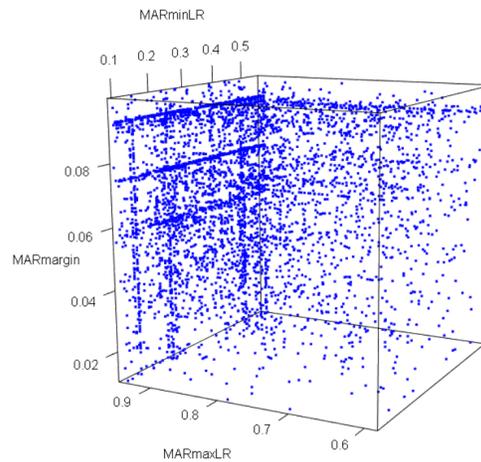


FIGURE 4.13 – Marine

On observe une répartition très hétérogène des chromosomes. Les zones de fortes concentrations sont les zones où l’algorithme a plus accentué ses recherches. Cela peut s’expliquer par le mode de sélection élitiste utilisé. En effet, certains gènes sont surreprésentés car les chromosomes qui les contiennent ont un bon score.

#### 4.3.4 Sensibilité par rapport à la taille de la population

Dans cette section, on va étudier l’impact de la taille de la population sur la convergence de l’algorithme génétique. On teste l’algorithme avec un nombre de génération  $N_{\text{générations}} = 100$ , un taux de mutation  $p_m = 0.2$  et un nombre  $n_{\text{élites}} = 20\%$  de la population. On fait varier la taille de la population  $N_{\text{Pop}}$  en on obtient les résultats suivants :

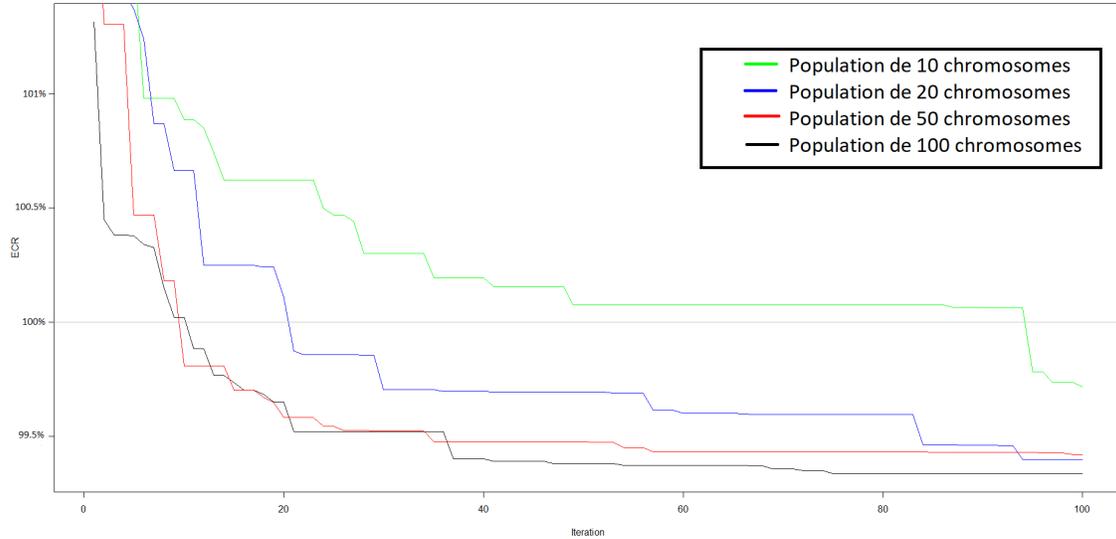


FIGURE 4.14 – Sensibilité par rapport à la taille de la population

Comme on pouvait s’y attendre, on voit que l’augmentation de la population améliore la vitesse de convergence de l’algorithme. Pour le même nombre de générations, les solutions trouvées par l’algorithme sont meilleures pour les populations de plus grande taille. Cela n’a rien d’étonnant car pour un même nombre de générations, plus la taille de la population est grande, plus l’algorithme explore l’espace de recherche des solutions. L’augmentation de la taille de la population augmente les chances de trouver des bonnes solutions.

### 4.3.5 Sensibilité par rapport au nombre d’élites

La méthode de sélection par élitisme est l’une des méthodes de sélection les plus simples à mettre en œuvre. De plus, elle garantit la sélection des meilleures solutions testées par l’algorithme dans une génération. Cependant, le nombre d’élites peut jouer un rôle important dans la convergence de l’algorithme génétique.

On teste l’algorithme avec un nombre de génération  $N_{\text{générations}} = 100$ , une population  $N_{\text{Pop}}$  de 100 individus et un taux de mutation  $p_m = 0.2$  (20%). On fait varier le taux de mutation en testant différentes valeurs. Le graphe ci-dessous montre les résultats obtenus.

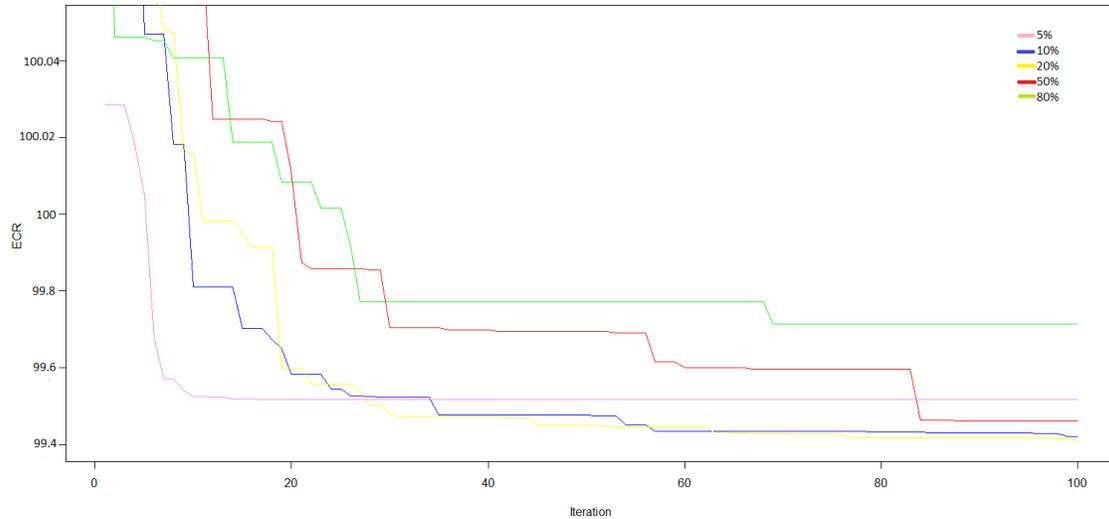


FIGURE 4.15 – Sensibilité par rapport au nombre d’élites

On remarque une diminution plus forte de l’ECR pour un taux de 5% d’élites lors des premières générations. Cela peut s’expliquer par une plus large exploration de l’espace de recherche des solutions. En effet, les individus choisis comme élites sont directement conservés pour la génération suivante. Elles ne subissent donc pas les opérations de croisement et de mutation. Ainsi, le nombre d’élites est inversement proportionnel au nombre de solutions pouvant être croisées ou mutées. Cependant, on remarque une stabilisation de la courbe avant la 20<sup>ième</sup> à la 100<sup>ième</sup> itération. En effet, un taux d’élitisme faible peut entraîner la perte des bon gènes et donc des bons chromosomes au fil des générations.

Les courbes avec des élites de 10%, 20% et 50% ont une tendance assez similaires avec un meilleur ECR pour 20% d’élites. En effet, le nombre d’élites est assez élevé pour conserver les meilleurs chromosomes mais aussi suffisamment adapté pour permettre une bonne exploration de l’espace de recherche des solutions.

La courbe en vert avec 80% d’élites a une convergence plus lente que les autres courbes avec un ECR plus élevé à la dernière itération. Un taux d’élitisme très élevé a tendance à détériorer la convergence de l’algorithme. En effet comme expliqué précédemment, un nombre d’élites important entraîne un faible nombre de chromosomes à muter et donc moins de possibilité d’exploration de l’espace de recherche des solutions. On remarque d’ailleurs que cette courbe est très similaire à celle obtenue à la partie 4.3.5 avec une faible population.

### 4.3.6 Sensibilité par rapport au taux de mutation

Dans cette section, on va étudier l’impact du taux de mutation sur la convergence de l’algorithme génétique. On fait tourner l’algorithme avec un nombre de génération

$N_{\text{génération}} = 100$ , une population  $N_{\text{Pop}}$  de 100 individus et un nombre d'élites  $n_{\text{élites}} = 20\%$  de la population soit 20 élites. On fait varier le taux de mutation en testant différentes valeurs. Les résultats obtenus sont représentés dans la figure ci-après :

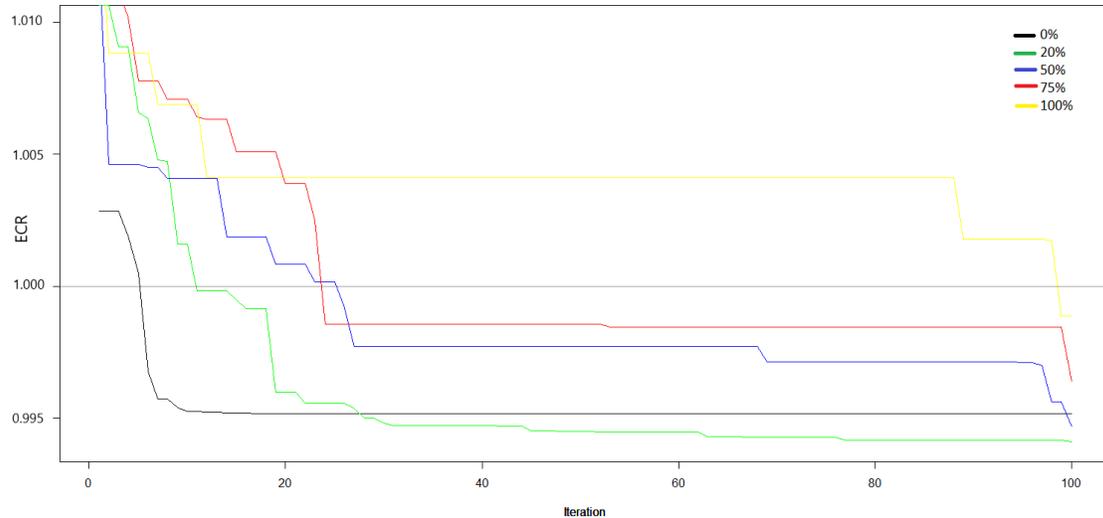


FIGURE 4.16 – Sensibilité par rapport au taux de mutation

Pour tester notre algorithme, l'une des premières questions qui se posent est le choix du taux de mutation à appliquer. Il est très important de bien choisir le taux de mutation.

Sur 100 générations, l'ÉCR le plus bas est obtenu pour un taux de mutation de 20% (courbe verte). Notons cependant que les courbes jaune, rouge et bleue semblent ne pas finir de converger au bout de la 100<sup>ème</sup> génération. Cependant, ce qui nous intéresse le plus est la rapidité de convergence de l'algorithme en fonction du taux de mutation.

Pour un taux de mutation de 0% (courbe noire), on remarque un meilleur ÉCR à l'initialisation. Cela ne dépend pas du taux de mutation fixé. En effet, la population initiale est générée selon une méthode donnée, mais reste aléatoire. Même en lançant l'algorithme plusieurs fois avec les mêmes paramètres, on obtient une différence sur la performance du meilleur individu de chaque population initiale. Par ailleurs, pour 0% de mutation, on remarque une rapide diminution de l'ÉCR lors des 10 premières générations avant d'observer une stabilisation de la courbe. À partir de la 10<sup>ème</sup> génération, l'ÉCR n'évolue plus jusqu'à la 100<sup>ème</sup> génération. Cela veut dire qu'en 90 itérations, l'algorithme n'est pas parvenu à améliorer la solution. L'absence de mutation pourrait expliquer ce phénomène. En effet, les mutations permettent de créer de nouveaux individus dans la population en gardant la plupart des gènes de la population. L'absence de mutation peut donc entraîner une absence de diversité génétique et une stagnation de la performance des solutions.

Les courbes bleue et rouge (respectivement 50% et 75% de mutation) ont une allure assez similaire. On remarque une diminution assez rapide de l'ECR lors des premières itérations. Ensuite, on observe une longue phase de stagnation où les solutions ne s'améliorent plus ou s'améliorent faiblement. Un taux de mutation trop élevé, donc inadéquate, peut entraîner un changement trop important de la population. En effet, si beaucoup d'individus sont mutés à chaque itération, il y'a un risque très élevé de ne pas garder les bons gènes dans la population. Un taux de mutation inadéquat ralentit donc la convergence de l'algorithme génétique. Le comportement des deux courbes juste avant la 100ième itération montre que l'algorithme n'a pas fini d'améliorer les solutions. Cependant le retard d'amélioration significative témoigne de la lenteur de la convergence de l'algorithme.

## 4.4 Limites et enrichissement de la méthode

### 4.4.1 Complexité algorithmique

L'un des inconvénients les plus connus des algorithmes génétiques est le temps de calcul. En effet, l'algorithme teste beaucoup de solutions avec la fonction d'évaluation. Dans notre étude, nous n'avons pas échappé à ce problème. En effet l'algorithme met un temps  $t$  secondes pour évaluer une solution. Ainsi, il faut  $t \times N_{Pop}$  secondes pour évaluer la première génération. Le temps de calcul nécessaire pour lancer l'algorithme génétique dépend aussi du nombre d'élites défini. L'augmentation du nombre d'élites diminue le temps de calcul. En effet, à partir de la deuxième génération, seuls les nouveaux individus sont évalués car les survivants lors de la génération précédente ont déjà été évalués et leurs performances sauvegardées. Ainsi, le temps de calcul nécessaire est :

$$\text{Temps de calcul} = t \times N_{pop} + t(N_{pop} - n_{élites})(N_{iters} - 1)$$

D'après la formule, on voit mieux que l'augmentation de la taille de la population ou du nombre de générations augmente le temps de calcul. A l'inverse, l'accroissement du nombre d'élites diminue le temps de calcul. Il est souvent difficile de trouver les bons paramètres pour exécuter l'algorithme car il n'existe pas de méthode précise pour bien les choisir. Il est cependant important de bien les choisir car la convergence de l'algorithme en dépend. Souvent, il faut exécuter l'algorithme plusieurs fois avant de trouver les paramètres optimaux ; ce qui limite son efficacité.

### 4.4.2 Optima globaux

Les algorithmes génétiques nous ont permis de trouver de nombreuses solutions à notre problème. Cependant, ils ne permettent pas de prouver l'existence d'un optimum global. On ne peut pas s'assurer que les solutions proposées par l'algorithme sont des optima globaux. Même après un nombre important de générations, on peut seulement être sûr de s'approcher de la solution optimale, si elle existe

Un autre problème important est celui des optima locaux. En effet, lorsque la population évolue, il est possible que certains gènes de bonne qualité deviennent majoritaires dans la population. Cela peut entraîner l'algorithme à converger vers les individus possédant ces gènes, et à s'écarter des solutions plus intéressantes mais trop éloignées de la solution vers laquelle on converge. Pour vaincre ce phénomène, on peut essayer différentes méthodes comme l'ajout de quelques individus générés aléatoirement, des méthodes de sélections différentes ou l'augmentation la probabilité de mutation des individus.

### **4.4.3 Les solutions proposées par l'algorithme**

Il arrive que les meilleures solutions proposées par l'algorithme ne soient pas tout à fait convenables. En effet, en plus de la minimisation du ratio combiné économique et des contraintes fixées, il faut aussi tenir compte de l'application de la commission variable. L'algorithme peut parfois proposer un intervalle trop petit pour l'application de la commission variable. Par exemple : une commission variable pour un loss ratio compris entre 55% et 60%. Ce problème se résout facilement en adaptant l'espace de recherche des solutions afin d'augmenter la largeur de l'intervalle.

## Conclusion

Les algorithmes génétiques permettent de trouver des solutions à des problèmes d'optimisation non convexes sans faire beaucoup d'hypothèses. Elles offrent une grande flexibilité de paramétrage. Chaque étape de l'algorithme peut être adapté pour respecter les contraintes d'optimisation.

Au fil de ce mémoire, nous avons développé les différentes étapes de notre algorithme génétique pour qu'il soit adapté à notre problème d'optimisation. Ainsi, l'algorithme mis en place nous a permis d'optimiser l'ECR sous contrainte d'ERD. En effet, en se fixant un ERD par branche supérieur ou égal à 1%, avec une certaine valeur de marge totale cible, on obtient des solutions qui permettent d'avoir un ECR rentable en dessous de 100%. Un ERD supérieur à 1% signifie que le réassureur a au moins 1% de chance de subir des pertes. En outre l'ECR permet de mesurer la rentabilité de la structure de réassurance. Un ECR en dessous de 100% signifie que la structure de réassurance est rentable pour l'assureur.

La convergence de l'algorithme dépend des méthodes choisies à chaque étape : génération de la population initiale, méthode de sélection, méthode de croisement, méthode de mutation. Elle dépend également des paramètres d'entrée de l'algorithme tels que la taille de la population, le nombre d'élites, le pourcentage de mutation. Les analyses de sensibilité nous ont permis de mesurer l'impact de ces différents paramètres sur la convergence de l'algorithme. Une population de grande taille augmente les chances de trouver de meilleures solutions mais a pour conséquence un temps de calcul considérable. Le nombre d'élites et le taux de mutation doivent être adaptés à la taille de la population et faire l'objet d'analyses de sensibilité afin de trouver les bons seuils.

Les étapes de croisement et de mutation sont primordiales pour la convergence de l'algorithme. En effet, elles permettent une meilleure exploration de l'espace de recherche et évitent à l'algorithme de stagner dans des minimums locaux. Ainsi, elles permettent d'améliorer la vitesse de convergence et la qualité des solutions proposées par l'algorithme.

Malgré des résultats très satisfaisants de notre algorithme, on ne peut pas s'assurer que les solutions proposées par l'algorithme sont des optima globaux. C'est l'un des inconvénients majeurs des algorithmes génétiques.

# Table des figures

1	Représentation des solutions . . . . .	6
2	Résultats de l'algorithme génétique . . . . .	7
3	Représentation des solutions . . . . .	10
4	Results of the genetic algorithm . . . . .	11
1.1	Types et formes de réassurance . . . . .	17
1.2	Quote-part avec une cession de 60% . . . . .	18
1.3	excédent de plein 40 XP 60 . . . . .	19
1.4	excédent de sinistre par risque 5XS10 sans reconstitutions . . . . .	21
1.5	Excédent de perte annuelle de franchise 90% et de limite 130% . . . . .	22
1.6	Composantes de l'ECR . . . . .	24
1.7	Exemple VaR loi de Pareto $\alpha$ . . . . .	28
1.8	VaR et T-VaR au niveau $\alpha$ . . . . .	29
3.1	Etapes d'un algorithme génétique . . . . .	38
3.2	Représentation des solutions . . . . .	39
3.3	croisement en un point . . . . .	43
3.4	croisement en plusieurs points . . . . .	43
3.5	Mutation d'un chromosome . . . . .	44
4.1	Codage des solutions . . . . .	47
4.2	Automobile . . . . .	49
4.3	dommage aux biens . . . . .	49
4.4	Ingénierie . . . . .	49
4.5	Marine . . . . .	49
4.6	Performance de la population initiale . . . . .	50
4.7	Résultats de l'algorithme génétique . . . . .	55
4.8	Population initiale . . . . .	56
4.9	Population finale . . . . .	56
4.10	Automobile . . . . .	57
4.11	dommage aux biens . . . . .	57
4.12	Ingénierie . . . . .	57
4.13	Marine . . . . .	57
4.14	Sensibilité par rapport à la taille de la population . . . . .	58
4.15	Sensibilité par rapport au nombre d'élites . . . . .	59
4.16	Sensibilité par rapport au taux de mutation . . . . .	60

A.1 Branche Automobile . . . . .	68
A.2 Branche R. Civile . . . . .	68
A.3 Branche Ingénierie . . . . .	68
A.4 Branche Marine . . . . .	68

# Bibliographie

- [1] *HOUCK C. , Joines J. and Kay M () (2001) : « A genetic algorithm for function Optimization : a Matlab Implementation. »North Carolina State University.*
  
- [2] *HUDE T. (2019) Le ratio combiné économique, modélisation et discussion sur la vision qu'il offre de la profitabilité économique. Mémoire d'actuariat. Institut du Risk Management.*
  
- [3] <https://fr.acervolima.com/algorithmes-genetiques/>
  
- [4] *DESROCHERS C. (2009) « Assessing the transfer of risk : an actuarial perspective. »Taxing Times Volume 5, -Issue 1*
  
- [5] <https://ledatascientist.com/algorithmes-genetique/>
  
- [6] *JOVET S. (2021) Optimisation d'une politique de résiliations ciblées à l'aide d'un algorithme génétique : application à un portefeuille mexicain. Mémoire d'actuariat, CNAM.*
  
- [7] *BOUTOILLE (2013) Etude d'un programme de retrocession à l'aides d'algorithmes génétiques. Mémoire d'actuariat. Université Paris Dauphine.*
  
- [8] *HOLLAND J (1992) Adaptation in Natural and Artificial Systems. MIT Press.*



# Annexe A

## Représentation de quelques solutions

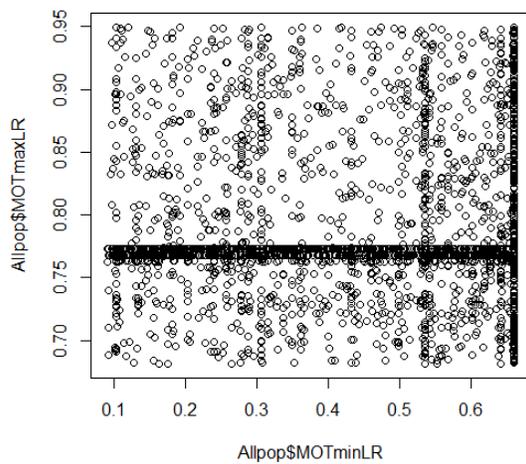


FIGURE A.1 – Branche Automobile

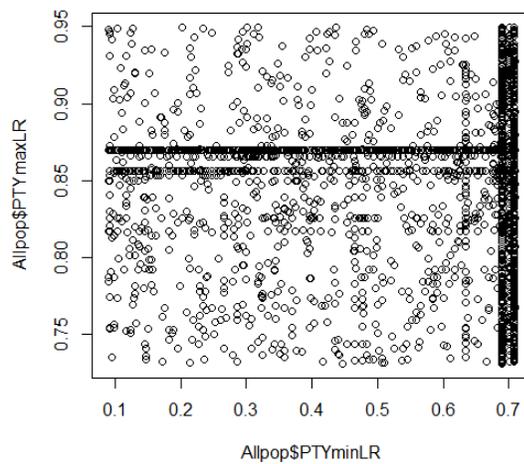


FIGURE A.2 – Branche R. Civile

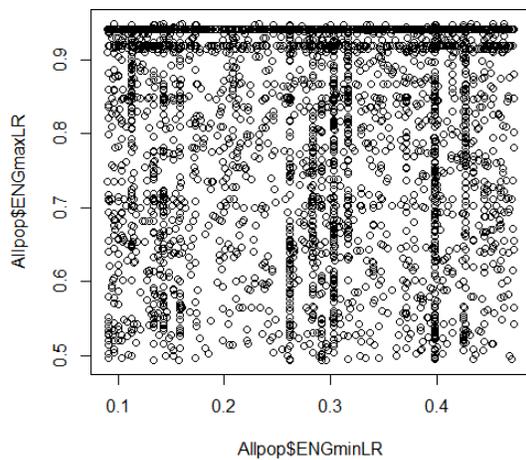


FIGURE A.3 – Branche Ingénierie

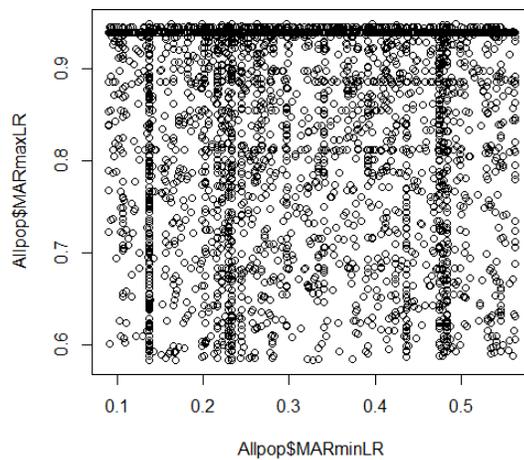


FIGURE A.4 – Branche Marine

# Annexe B

## Résultat de l'algorithme sur une population initiale

Individus	MOTERD	MOTECR	PTYERD	PTYECR	ENGERD	ENGECR	MARERD	MARECR	Margin	ECR	F
5	1,67%	100,67%	1,04%	100,52%	1,09%	98,32%	4,57%	104,18%	38 336 283,46	100,60%	F_max
11	1,85%	100,85%	1,37%	99,95%	3,35%	104,49%	3,04%	101,57%	41 541 560,79	101,09%	101,09%
44	1,24%	100,69%	2,41%	101,71%	1,57%	101,47%	7,71%	105,67%	28 093 353,30	101,31%	101,31%
32	1,49%	101,01%	1,57%	100,23%	1,57%	100,34%	15,35%	110,39%	32 127 424,43	101,35%	F_max
70	1,77%	101,05%	1,27%	100,62%	1,43%	101,83%	18,90%	112,36%	32 631 079,66	101,75%	101,75%
18	2,41%	101,36%	1,62%	100,22%	1,11%	98,51%	32,23%	118,39%	42 715 807,91	101,86%	101,86%
65	3,23%	102,18%	1,38%	100,77%	3,11%	103,51%	2,85%	102,09%	32 455 038,36	102,00%	F_max
47	3,14%	102,11%	2,09%	100,64%	2,13%	103,05%	4,30%	104,07%	28 812 009,57	102,01%	102,01%
67	3,89%	102,66%	3,06%	101,79%	1,23%	100,88%	1,65%	98,79%	33 567 392,56	102,03%	102,03%
43	2,36%	101,51%	3,59%	102,99%	1,68%	103,20%	4,18%	104,17%	23 506 519,78	102,19%	F_max
75	3,41%	102,27%	1,32%	101,17%	3,16%	106,01%	3,07%	99,97%	29 048 637,93	102,28%	102,28%
92	4,92%	103,34%	1,11%	100,51%	1,36%	101,46%	2,16%	99,95%	27 148 979,91	102,29%	102,29%
80	3,70%	102,36%	1,14%	99,67%	4,65%	105,67%	8,36%	105,96%	39 047 566,16	102,34%	F_max
2	2,98%	102,06%	2,25%	101,66%	2,21%	102,59%	12,60%	109,19%	26 426 285,63	102,47%	F_max
49	3,29%	102,29%	1,10%	100,86%	3,45%	103,87%	11,10%	108,23%	27 738 081,99	102,51%	102,51%
61	3,84%	102,59%	1,11%	101,04%	1,60%	101,02%	14,24%	109,85%	30 344 329,72	102,53%	F_max
27	3,21%	102,35%	2,81%	102,24%	3,43%	103,50%	4,84%	104,15%	26 487 084,73	102,56%	F_max
79	5,23%	103,51%	1,55%	98,14%	1,72%	101,28%	18,97%	112,44%	33 468 938,02	102,62%	F_max
77	3,65%	102,53%	3,31%	102,33%	1,46%	100,39%	15,72%	110,83%	30 757 690,04	102,77%	F_max
87	6,87%	104,38%	1,28%	99,78%	8,10%	108,10%	3,44%	100,51%	44 077 555,68	103,51%	103,51%
78	6,71%	104,37%	1,86%	101,32%	2,20%	102,84%	5,24%	104,79%	24 558 645,86	103,55%	F_max
38	4,90%	103,40%	1,37%	99,88%	2,18%	101,53%	42,39%	121,97%	29 417 092,18	103,57%	F_max
55	3,49%	102,40%	1,99%	101,81%	6,88%	108,23%	24,23%	115,14%	20 305 270,86	103,70%	103,70%
89	7,52%	104,82%	1,72%	101,40%	1,87%	102,44%	15,08%	110,22%	26 435 839,97	104,13%	F_max
48	8,19%	105,18%	1,74%	101,92%	1,27%	100,16%	15,33%	110,50%	22 240 320,75	104,23%	104,23%
16	8,41%	105,26%	1,13%	99,79%	1,51%	102,92%	19,98%	113,07%	27 995 548,87	104,26%	F_max
26	7,28%	104,66%	2,76%	99,79%	1,65%	100,93%	46,53%	123,28%	27 464 677,29	104,33%	104,33%
37	6,88%	104,50%	1,37%	98,75%	4,80%	107,07%	37,47%	120,29%	19 990 853,05	104,48%	104,48%
22	6,52%	104,22%	2,34%	101,84%	6,15%	106,83%	26,02%	115,80%	33 355 369,49	104,70%	F_max

# Annexe C

## Résultat de l'algorithme sur une population finale

Individu	MOTERD	MOTECR	PTYERD	PTYECR	ENGERD	ENGECR	MARERD	MARECR	ECR
7921	2,07%	101,36%	1,06%	97,09%	1,14%	99,64%	1,75%	98,27%	100,02%
7922	1,37%	100,74%	1,06%	97,09%	1,03%	97,94%	1,88%	99,95%	99,57%
7923	1,01%	100,41%	1,00%	96,99%	1,03%	97,93%	1,88%	99,95%	99,34%
7924	1,01%	100,44%	1,01%	97,47%	1,10%	99,24%	2,36%	100,53%	99,64%
7925	1,04%	100,49%	1,01%	97,07%	1,03%	97,94%	1,88%	99,95%	99,41%
7926	1,01%	100,41%	1,11%	97,83%	1,03%	97,93%	1,88%	99,94%	99,53%
7927	1,08%	100,58%	1,02%	97,89%	1,03%	97,93%	2,11%	100,23%	99,66%
7928	1,37%	100,74%	1,01%	97,47%	1,07%	98,13%	2,11%	100,24%	99,69%
7929	1,01%	100,41%	1,06%	100,02%	1,02%	97,78%	18,85%	112,44%	100,79%
7930	1,01%	100,41%	1,00%	96,99%	1,03%	97,83%	2,52%	100,72%	99,38%
7931	1,01%	100,41%	1,00%	96,99%	1,04%	98,04%	1,88%	99,94%	99,35%
7932	1,01%	100,41%	1,00%	96,99%	1,30%	99,14%	1,88%	99,94%	99,47%
7933	1,01%	100,44%	1,01%	97,11%	1,02%	97,78%	1,88%	99,95%	99,37%
7934	1,35%	100,74%	1,01%	97,47%	1,03%	97,93%	1,88%	99,93%	99,65%
7935	1,01%	100,41%	1,00%	97,00%	1,86%	100,74%	2,11%	100,23%	99,67%
7936	0,54%	99,93%	1,16%	97,95%	1,17%	98,67%	5,47%	103,90%	99,60%
7937	1,01%	100,41%	1,00%	96,99%	1,03%	97,94%	1,88%	99,93%	99,34%
7938	1,00%	100,37%	1,06%	97,10%	1,03%	97,93%	1,88%	99,94%	99,34%
7939	0,77%	100,24%	1,08%	97,20%	1,03%	97,94%	1,88%	99,93%	99,28%
7940	1,37%	100,78%	1,00%	96,99%	1,03%	97,93%	1,88%	99,94%	99,56%
7941	1,01%	100,44%	1,03%	97,04%	1,04%	97,99%	1,88%	99,95%	99,38%
7942	1,01%	100,41%	1,00%	97,00%	1,03%	97,94%	1,88%	99,94%	99,34%
7943	1,18%	100,57%	1,00%	96,99%	1,03%	97,94%	1,97%	100,02%	99,44%
7944	0,87%	100,27%	1,02%	97,16%	1,09%	99,15%	1,36%	97,46%	99,27%
7945	1,37%	100,74%	1,03%	97,62%	1,05%	98,04%	1,99%	100,08%	99,71%
7946	1,01%	100,41%	1,00%	96,99%	1,03%	97,94%	1,90%	100,01%	99,35%
7947	0,87%	100,26%	1,00%	96,99%	1,07%	98,14%	1,92%	100,08%	99,28%
7948	1,01%	100,41%	1,03%	97,06%	1,03%	97,94%	1,90%	100,01%	99,36%
7949	1,01%	100,41%	1,00%	96,99%	1,30%	99,15%	1,88%	99,94%	99,47%
7950	1,01%	100,41%	1,01%	97,06%	1,02%	97,79%	1,88%	99,93%	99,34%
<b>7951</b>	<b>1,03%</b>	<b>100,48%</b>	<b>1,01%</b>	<b>97,09%</b>	<b>1,07%</b>	<b>98,11%</b>	<b>2,24%</b>	<b>100,19%</b>	<b>99,44%</b>
7952	1,01%	100,41%	1,03%	97,05%	1,03%	97,89%	1,90%	100,01%	99,35%
7953	1,01%	100,41%	1,00%	97,01%	1,07%	98,11%	1,92%	100,08%	99,37%
7954	1,01%	100,41%	1,00%	97,00%	1,03%	97,94%	8,49%	106,06%	99,73%
7955	1,18%	100,60%	1,00%	96,99%	1,04%	97,98%	1,88%	99,95%	99,46%
7956	1,01%	100,44%	0,97%	96,92%	1,08%	98,25%	3,34%	101,58%	99,48%
7957	1,01%	100,41%	1,10%	97,14%	1,02%	97,89%	1,88%	99,94%	99,37%
7958	1,03%	100,47%	1,04%	97,14%	1,03%	97,95%	1,79%	99,60%	99,39%
7959	1,01%	100,41%	1,00%	96,99%	1,04%	97,99%	1,88%	99,94%	99,34%
7960	1,01%	100,41%	1,00%	97,00%	1,31%	100,11%	1,88%	99,94%	99,58%
7961	1,01%	100,41%	1,00%	96,99%	1,30%	100,10%	1,88%	99,94%	99,59%