Solvabilité et compétition

Une approche par la théorie des jeux

Christophe Dutang, CEREMADE, Univ. Paris-Dauphine, PSL Univ.

SCOR colloquium, 12/12/2019

Plan

INTRODUCTION

Objectifs de la présentation

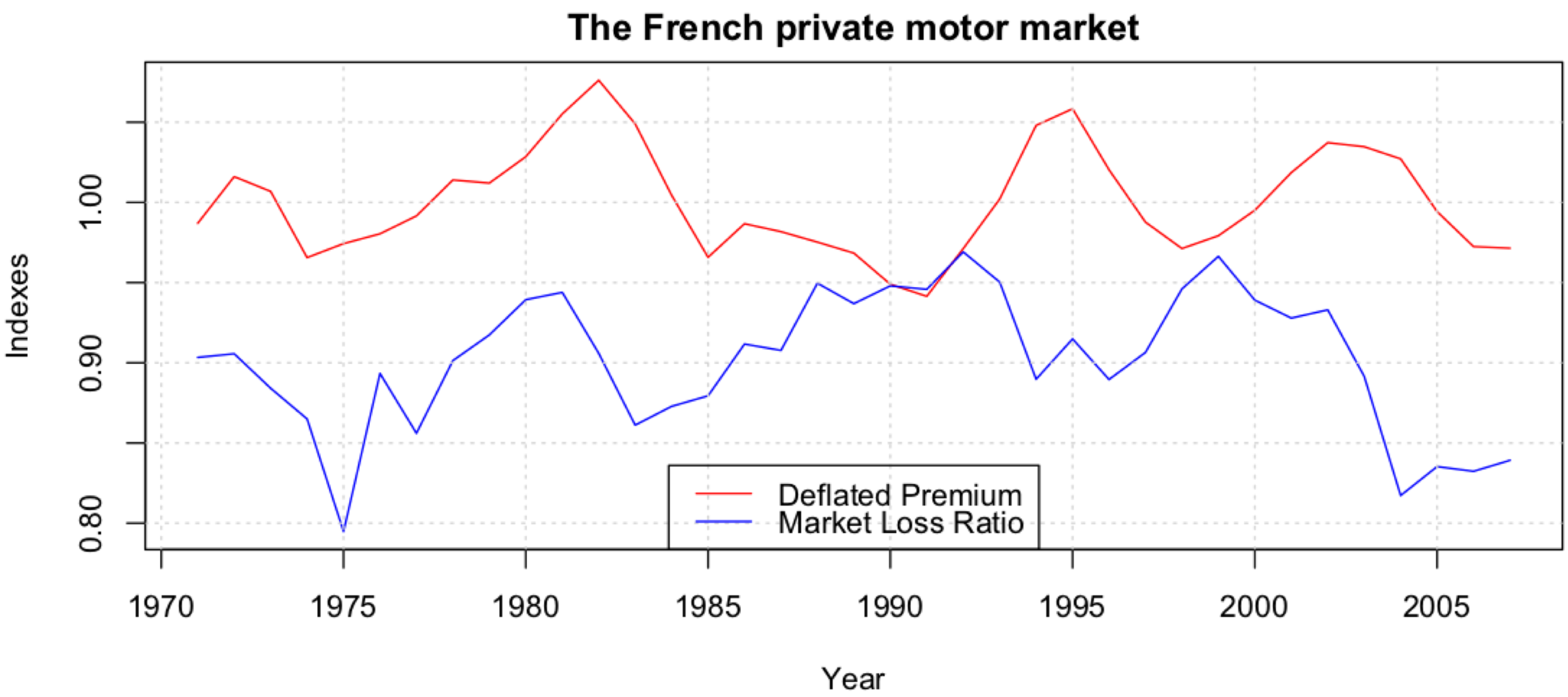
Cette présentation se concentre sur

- la modélisation de la ***compétition*** sur les marchés d'assurance ***non-vie*** (de particuliers)
- en tenant compte des spécificités de l'assurance
  - le paiement d'un prime entraine un ***transfert*** de risque à l'assureur,
  - l'aléa de la sinistralité réside sur la ***fréquence*** et la ***sévérité*** des sinistres,
  - pour faire face à leurs engagements, les assureurs mettent un place un capital de ***solvabilité***,
- et de la compétition entre assureurs
  - les assureurs sont des ***compétiteurs***,
  - les assurés ont un comportement de ***résiliation aléatoire*** impacté par le prix proposé.
- mais on n'impose pas de cycles de marché.

Mise en évidence de cycles de marché

Pour rappel, on utilise générateurs les indicateurs suivants :

- ratio sinistre sur prime (S/P) ou loss ratio (LR),
- prime marché,
- résultat de souscription,
- nombre d'entrées et de sorties,



Raisons de l’existence de cycle de marchés

Les raisons usuelles avancées dans la littérature, voir Feldblum (2001) :

– la tarification actuarielle : incertitude et retard d’information,
– la philosophie de la souscription : psychologie de masse et manque de coordination,
– les fluctuations des taux d’intérêts : impact sur le résultat d’investissement,
– la compétition : toute part de marché à gagner se fait par une rupture sur les prix, faible différentiation des produits.

Une chose est sûre: il est admis qu’une cause seule ne peut expliquer pleinement la présence d’un cycle!

Mesure des cycles de marché

En utilisant un modèle autorégressif AR(2) (un des modèles les plus simples)

$$X_t - m = a_1(X_{t-1} - m) + a_2(X_{t-2} - m) + \epsilon_t.$$

Si $a_2 < 0$ et $a_1^2 + 4a_2 < 0$, alors la période vaut

$$p = 2\pi \mathrm{arccos}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{-a_2}}\right).$$

Sur les données de prime marché, on trouve $m = 1$, $a_1 = 1.175$, $a_2 = -0.613$. Ainsi $p = 8.707$.

- d'autres modèles classiques peuvent utilisés : ARMA, ARIMA
- ou plus avancés : modèles cointégrés incluant les loss ratio, CPI, GDP, .. comme variables explicatives

MODÉLISATION DES MARCHÉS D’ASSURANCE

Le modèle proposé

On considère le jeu répété entre assureurs, c’est à dire la répétition d’un jeu sur une période.

Le jeu sur une période repose sur 4 composantes essentielles du marché de l’assurance non vie :

- les assureurs sont les joueurs et définis par
  - une fonction *objectif*,
  - une contrainte de *solvabilité*.
- les assurés ne sont pas des joueurs mais génèrent deux sources d’aléa
  - un modèle de *comportement de résiliation*,
  - un modèle de *sinistralité*.

Un modèle de comportement (1/4)

Considérons I assureurs sur un marché de n assurés. Soit $x \in [\underline{x}, \overline{x}]^I$ les prix.

Le choix de l'assuré i suit une loi multinomiale $\mathcal{M}_I(1, p_{j\rightarrow}(x))$ où $p_{j\rightarrow}(x) = (p_{j\rightarrow 1}(x), \dots, p_{j\rightarrow I}(x))$ et j est l'assureur de i par le passé.

– La probabilité $p_{j\rightarrow k}(x)$ pour $j \neq k$ a pour expression

$$p_{j\rightarrow k}(x) = \frac{e^{f_j(x_j, x_k)}}{1 + \sum_{l\neq j} e^{f_j(x_j, x_l)}}$$

– La probabilité $p_{j\rightarrow j}(x)$ a pour expression

$$p_{j\rightarrow k}(x) = \frac{1}{1 + \sum_{l\neq j} e^{f_j(x_j, x_l)}}$$

où la fonction $f_j(x_j, x_l)$ représente la sensibilité au prix $\bar{f}_j(x_j, x_l) = \mu_j + \alpha_j \frac{x_j}{x_l}$ et $\tilde{f}_j(x_j, x_l) = \tilde{\mu}_j + \tilde{\alpha}_j(x_j - x_l)$.

Un modèle de comportement (1/4)

A l'échelle du marché,

- les tailles de portefeuilles sont une somme de vecteur multinomiaux

$$N(x) = \begin{pmatrix} \overline{C}_{1,1} \\ \vdots \\ \overline{C}_{1,J} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \overline{C}_{J,1} \\ \vdots \\ \overline{C}_{J,J} \end{pmatrix}$$

où $\overline{C}_j \sim \mathcal{M}_I(n_j, p_{j\rightarrow}(x))$ et n_j est la taille de portefeuille initiale.

- La taille de portefeuille de l'assureur j est
- $N_j(x) = B_{jj}(x) + \sum_{k=1,k\neq j}^{I} B_{kj}\,(x)$.
- où $B_{kj} \sim \mathcal{B}(n_k, p_{k\rightarrow j}(x))$.

Hypothèses : comportement iid des assurés, taille de marché constante N.

Un modèle de sinistralité (2/4)

Considérons un modèle fréquence – sévérité pour les sinistres.

- Ainsi, le sinistre de l'assuré i a pour expression

$$Y_i = \sum_{l=1}^{M_i} Z_{i,l} ,$$

- où M_i est le nombre de sinistres, $(Z_{i,l})_l$ les montants et $M_i \perp Z_{i,l}$.

Hypothèse : indépendance des sinistres $(Y_i)_i$

- La perte totale de l'assureur j est

$$S_j(x) = \sum_{i=1}^{N_j(x)} Y_i .$$

Une fonction objectif (3/4)

Le choix de la fonction objectif $x \mapsto O_j(x)$ se justifie par

- des critères économiques : pour x_{-j} donné, $x_j \mapsto O_j(x)$ doit être décroissante en x_j et dépendre d'une prime seuil π_j,
- des conditions mathématiques : $x_j \mapsto O_j(x)$ doit être strictement concave.

On choisit

$$O_j(x) = \frac{n_j}{N}\left(1 - \beta_j\left(\frac{x_j}{m_j(x,n)} - 1\right)\right) \times \left(x_j - \pi_j\right)$$

- où la prime seuil π_j est

$$\pi_j = \omega_j \overline{a}_{j,0} + (1 - \omega_j)\overline{m}_0$$

- et la prime moyenne marché $m_j(x,n)$ peut être de deux types

- une moyenne arithmétique des prix concurrents $m_j(x) = \frac{1}{I-1}\sum_{k\neq j} x_k$.
- une moyenne pondérée des prix concurrents $m_j(x,n) = \frac{1}{N-n_j}\sum_{k\neq j} n_k\, x_k$.
- $\overline{a}_{j,0}$, $\overline{m}_0$, ω_j représentent la prime actuarielle moyenne, la prime marché moyenne et le facteur de crédibilité, respectivement.

Une contrainte de solvabilité (4/4)

On souhaite une fonction $x_j \mapsto g_j^1(x_j)$ explicite et concave.

- On choisit une contrainte de solvabilité
$$K_j + n_j(x_j - \pi_j)(1 - e_j) \geq k_{99.5}\sigma(Y)\sqrt{n_j},$$
- où e_j est le taux de frais et $k_{99.5}$ est le coefficient tel que
$$E(Y)n_j + k_{99.5}\sigma(Y)\sqrt{n_j} \approx \mathrm{VaR}_{99.5}\left(\sum_{i=1}^{n_j} Y_i\right).$$
- Ainsi, la fonction contrainte g_j est définie par
$$g_j^1(x_j) = \frac{K_j + n_j(x_j - \pi_j)}{k_{99.5}\sigma(Y)\sqrt{n_j}} - 1$$
- avec $k_{99.5} = 3$.

Modèle sur une période – séquence de jeu

Sur une période, le jeu se déroule comme suit.

- Les assureurs fixent leur prime selon un équilibre de Nash $x^\star$ en résolvant pour tout $j \in \{1, \dots, I\}$
$$x_{-j} \mapsto \underset{x_j, g_j(x_j) \geq 0}{\mathrm{argmax}} \; O_j(x_j, x_{-j}).$$
- Les assurés choisissent aléatoirement leur nouvel assureur selon $p_{k \to j}(x^\star)$: on obtient $N_j(x^\star)$.
- Pour l'année de couverture, les sinistres $S_j(x^\star)$ sont simulés aléatoirement selon un modèle fréquence – sévérité et leur taille de portefeuille.
- Le résultat de souscription est déterminé
$$UW_j(x^\star) = N_j(x^\star) x_j^\star (1 - e_j) - S_j(x^\star).$$

Modèle sur une période – propriétés

Prop. 1 : Le jeu d'assurance considéré admet un unique équilibre de Nash.

Prop. 2 : Soit $x^\star$ la prime d'équilibre du jeu à I assureurs. Pour tout joueur j, si $x_j^\star \in]\underline{x}, \overline{x}[$, la prime d'équilibre $x_j^\star$ dépend des paramètres de la manière suivante :

z	$x_j^\star = \underline{x}, \overline{x}$ $z \mapsto x_j^\star(z)$	$x_j^\star$ solv. constr. $z \mapsto x_j^\star(z)$	no act. constraint $z \mapsto x_j^\star(z)$ if (5)	 $z \mapsto x_j^\star(z)$ if (6)
π_j	—	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
β_j	—	—	$\searrow$	$\searrow$
n_j	—	unknown	—	$\nearrow$ if $\pi_j > 2$, $\searrow$ oth.
K_j	—	$\searrow$	—	—
$\sigma(Y)$	—	$\nearrow$	—	—

PASSAGE À UN JEU RÉPÉTÉ

Paramétrage dynamique

Considérons le volume de prime $\mathrm{GWP}_{j,t}$, la taille de portefeuille $n_{j,t}$, le capital $K_{j,t}$ pour le joueur j en t.

- Au début de chaque période, on détermine la prime moyenne marché
$$\overline{m}_{t-1} = \frac{1}{d}\sum_{u=1}^{d} \frac{\sum_{j=1}^{N} \mathrm{GWP}_{j,t-u} \times x^{\star}_{j,t-u}}{\mathrm{GWP}_{.,t-u}}$$
- et les primes actuarielles de chaque assureur
$$\overline{a}_{j,t} = \frac{1}{1-e_{j,t}}\frac{1}{d}\sum_{u=1}^{d} \frac{s_{j,t-u}}{n_{j,t-u}}.$$
- Ainsi, on a $\pi_{j,t} = \omega_j \overline{a}_{j,t} + (1-\omega_j)\overline{m}_{t-1}$.
- Les fonctions objectif et contrainte deviennent

$$O_{j,t}(x) = \frac{n_{j,t}}{n}\left(1-\beta_{j,t}\left(\frac{x_j}{m_j(x,n_t)}-1\right)\right)(x_j-\pi_{j,t}),\ g^1_{j,t}(x_j) = \frac{K_{j,t}+n_{j,t}(x_j-\pi_{j,t})}{k_{995}\sigma(Y)\ \sqrt{n_{j,t}}} - 1.$$

Modèle répété – séquence de jeu

Pour la période t, le jeu se déroule comme suit.

- Les assureurs maximisent leur fonction objectif
$$\sup_{x_{j,t}} O_{j,t}(x_{j,t}, x_{-j,t}) \text{ tel que } g_{j,t}(x_{j,t}) \geq 0.$$
- Une fois la prime d'équilibre $x_t^\star$ déterminée, les assurés résilient ou renouvellent. On obtient une réalisation $n_{j,t}^\star$ de $N_{j,t}(x^\star)$.
- La perte agrégée $S_{j,t}$ est simulée selon un modèle de sinistre : PLN. On obtient $s_{j,t}$.
- Le résultat de souscription de l'assureur j est ensuite déterminé
$$UW_{j,t} = n_{j,t}^\star \times x_{j,t}^\star \times (1 - e_j) - s_{j,t}.$$
- Enfin, le capital est donné par
$$K_{j,t} = K_{j,t-1} + UW_{j,t}.$$
- Le joueur j est dit ruiné si $K_{j,t} < 0$ ou $n_{j,t}^\star \approx 0$

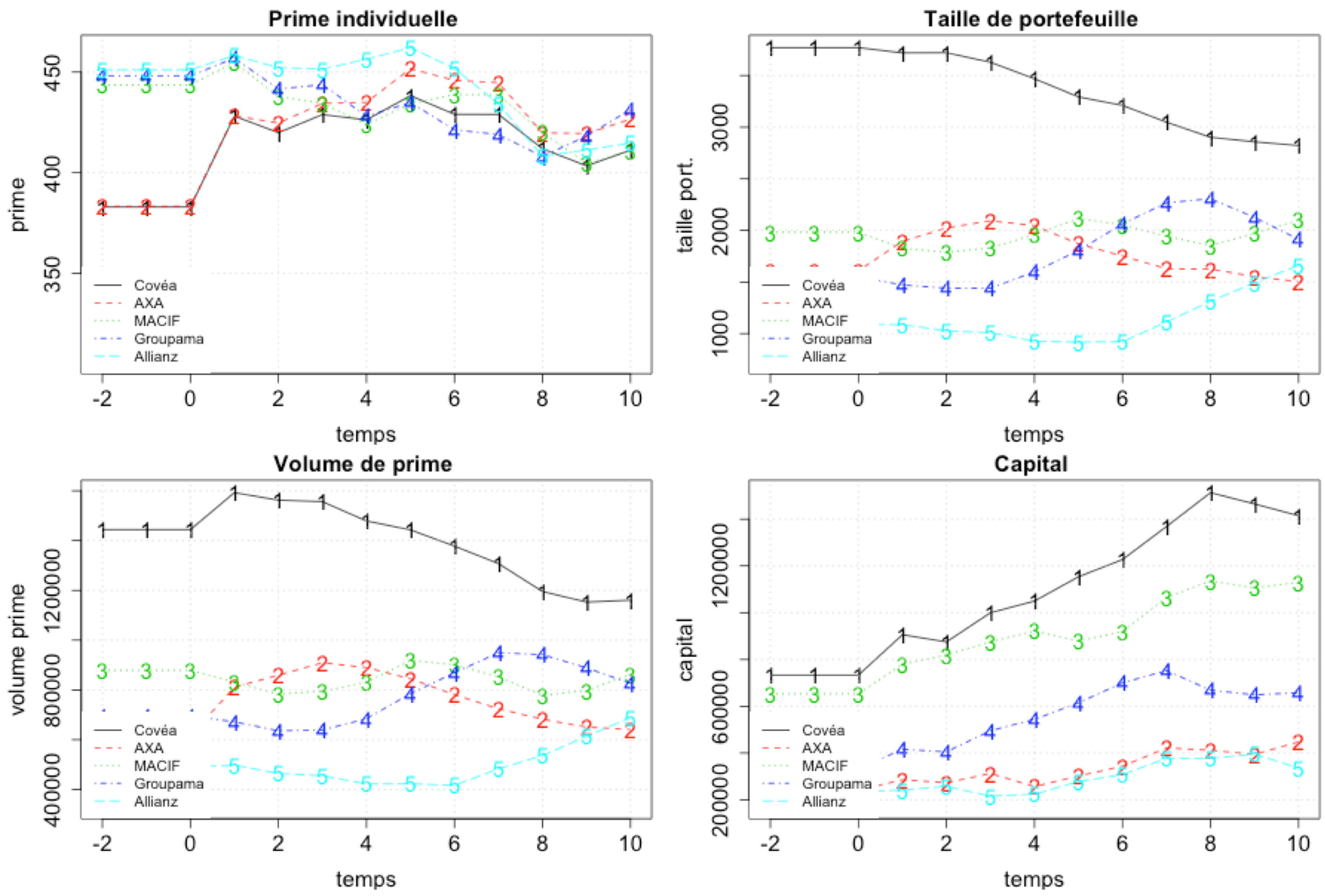
Modèle répété – hypothèses de modélisation

Modélisation des 5 premiers assureurs auto français

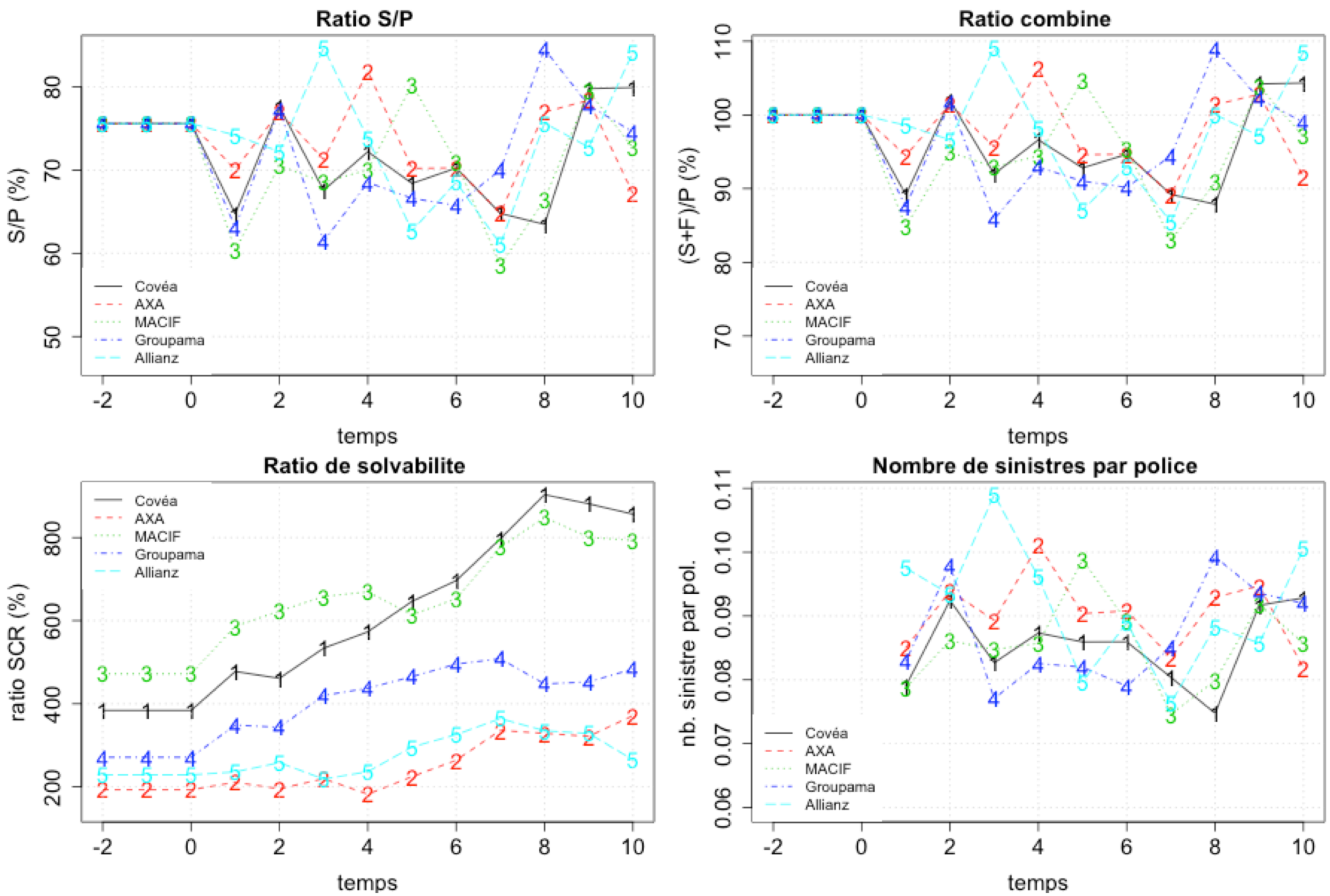
- modèle de sinistre Poisson / lognormale
- modèle de résiliation multinomial sur montant absolu $\tilde{f}_j$
- proxy marché est la moyenne arithmétique simple $m_j(x)$
- prime technique $\pi_{j,t} = a_j(t)$ propre à l'assureur j
- Source Argus de l'assurance

Rang	Assureur	Chiffre d'affaires 2018 (en M€)	Nombre de contrats en 2018	Part du segment auto dans le CA global en 2018
1	Covéa	3 866,0	9 863 001	25,9%
2	Axa	2 514,0	4 208 037	9,8%
3	Groupe Macif	1 921,0	5 184 961	60,9%
4	Groupama	1 844,3	4 060 859	Non communiqué
5	Allianz	1 602,0	2 845 310	Non communiqué

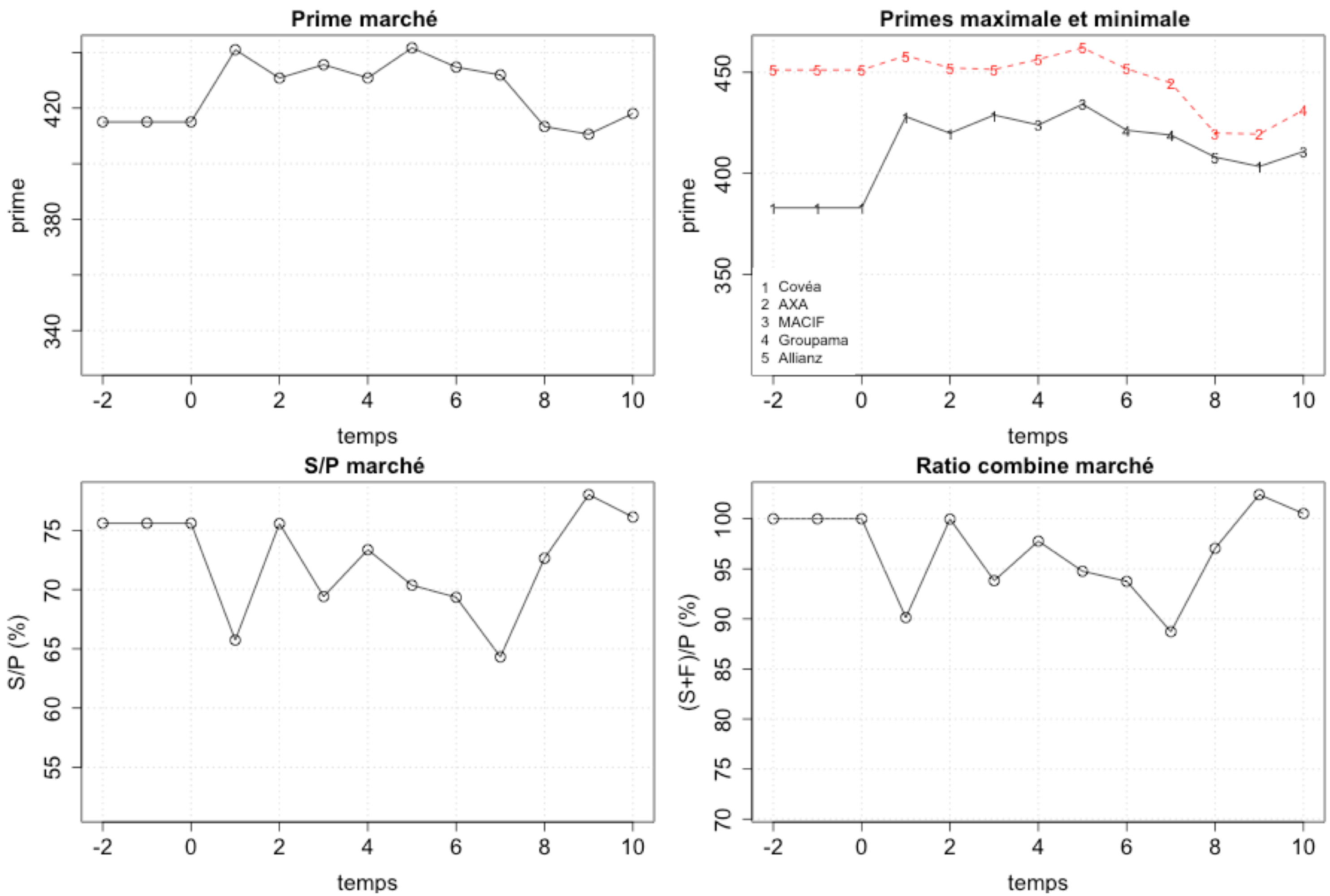
Modèle répété – exemple de trajectoire (1/3)



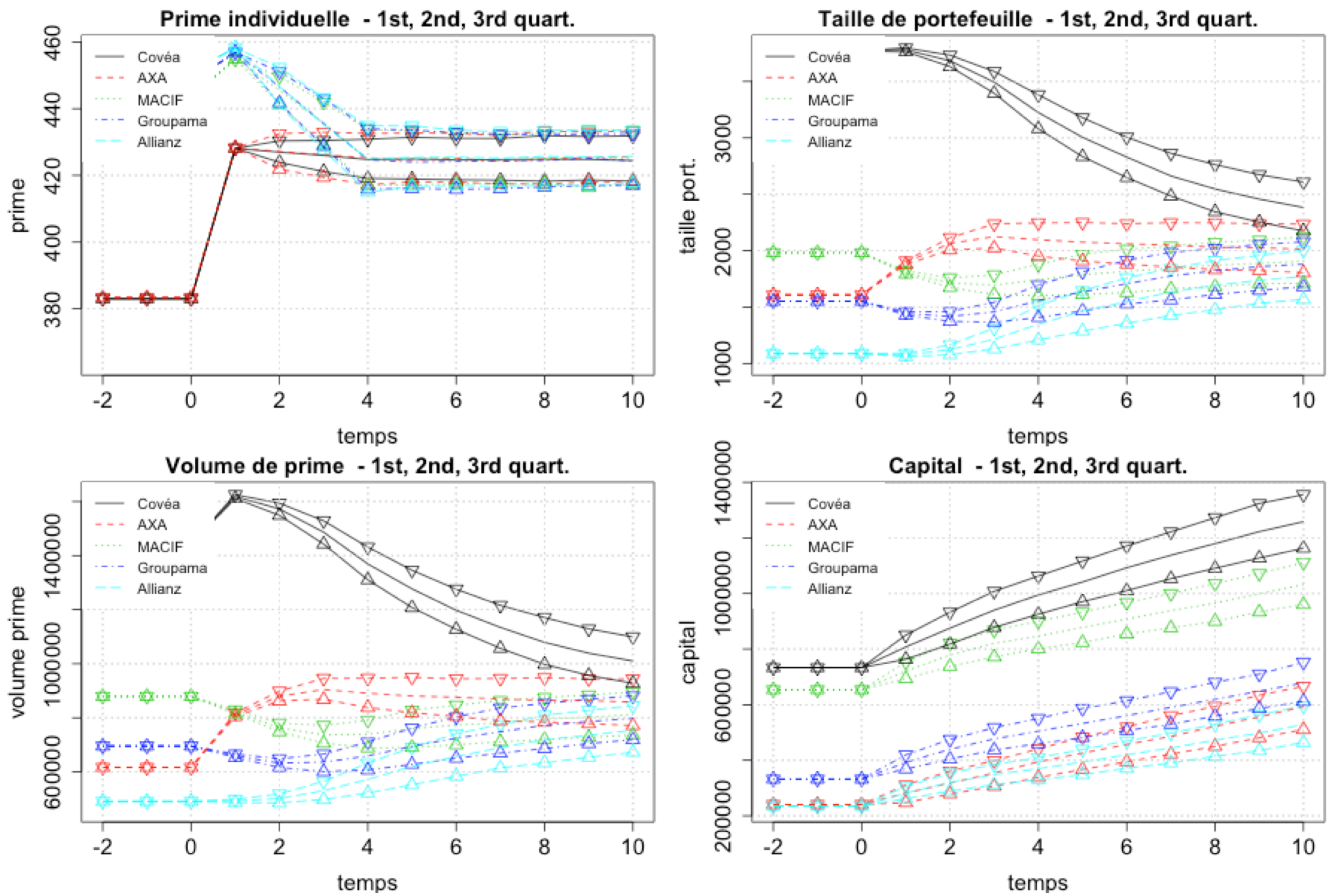
Modèle répété – exemple de trajectoire (2/3)



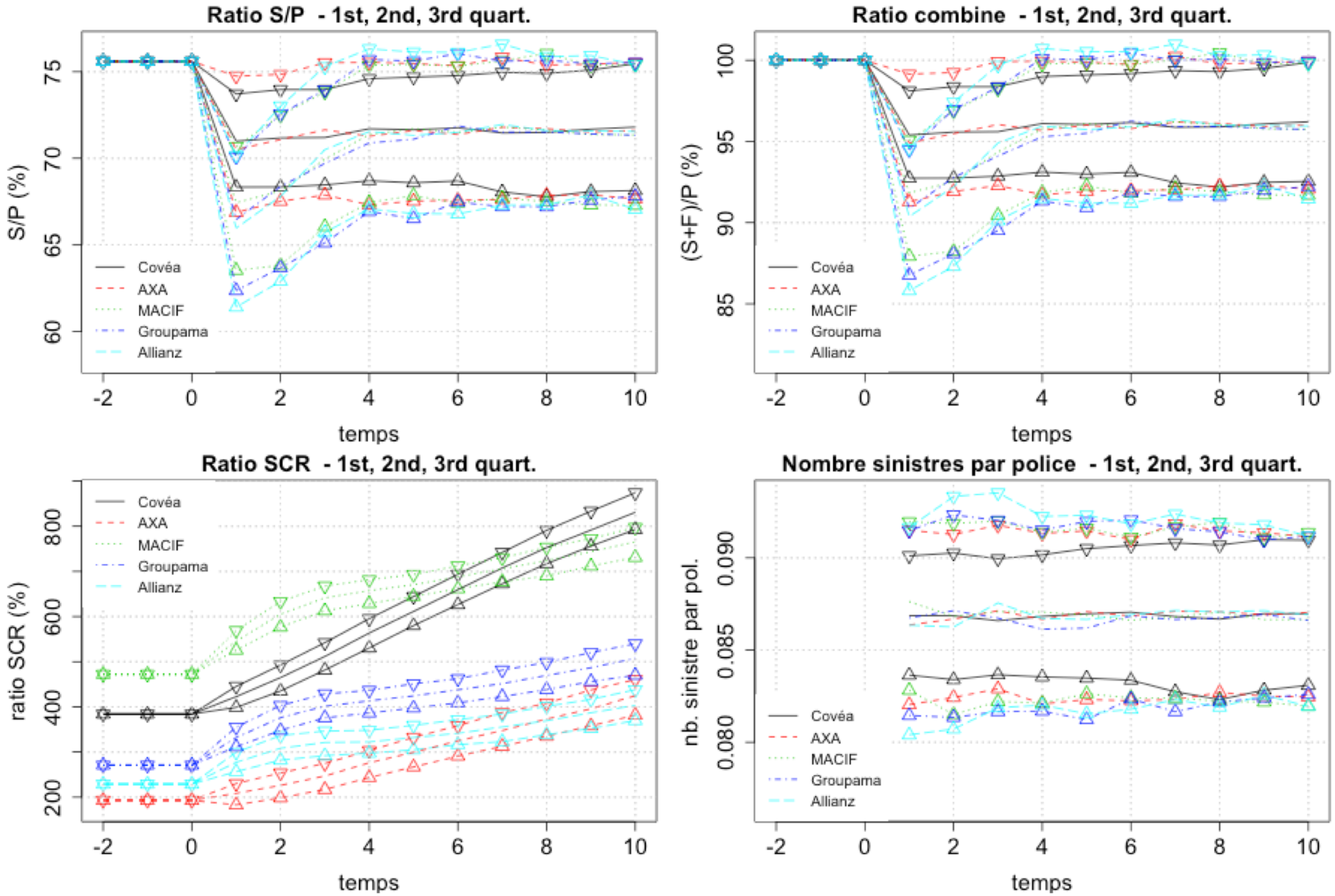
Modèle répété – exemple de trajectoire (3/3)



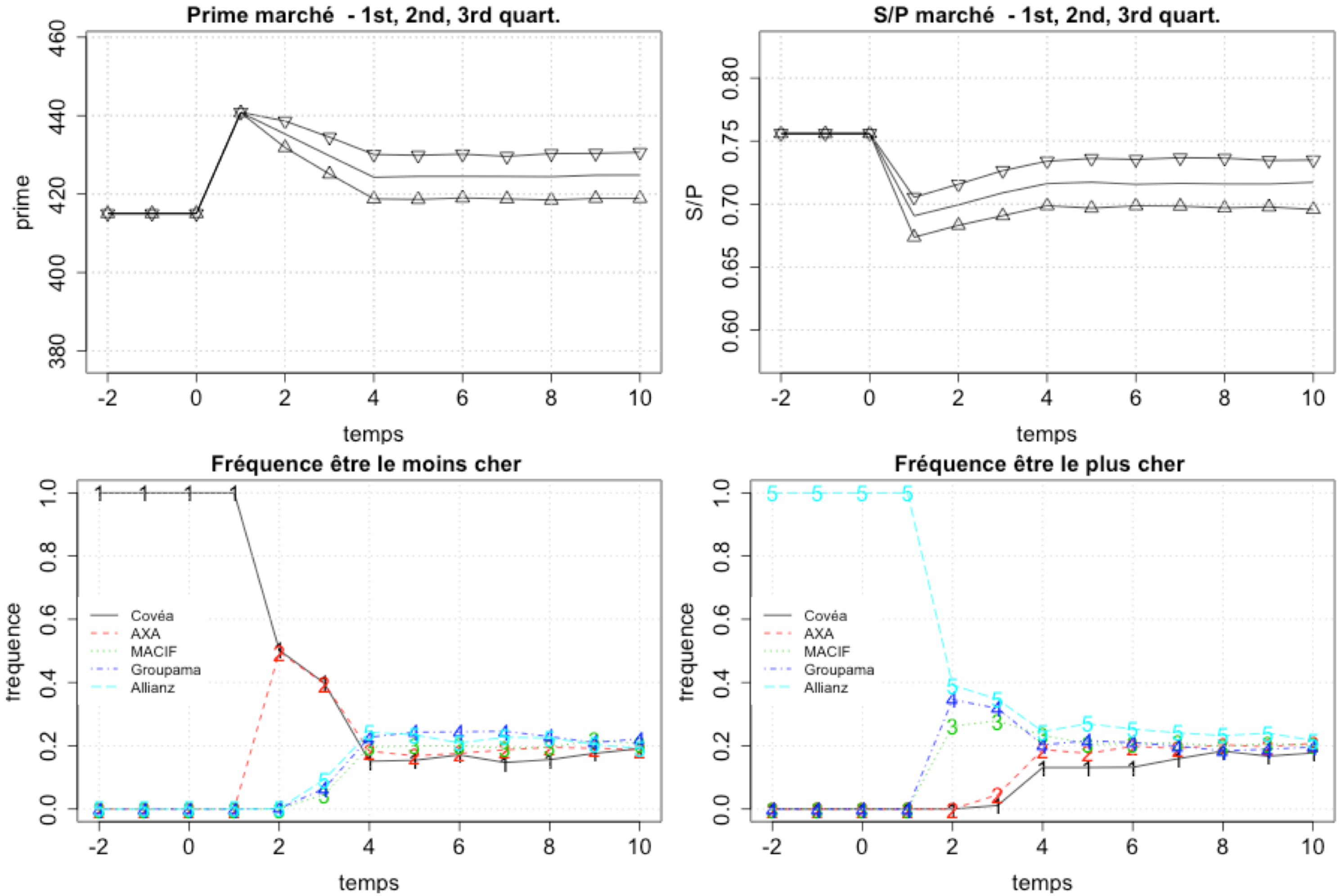
Modèle répété – quartiles sur 1000 trajectoires (1/3)



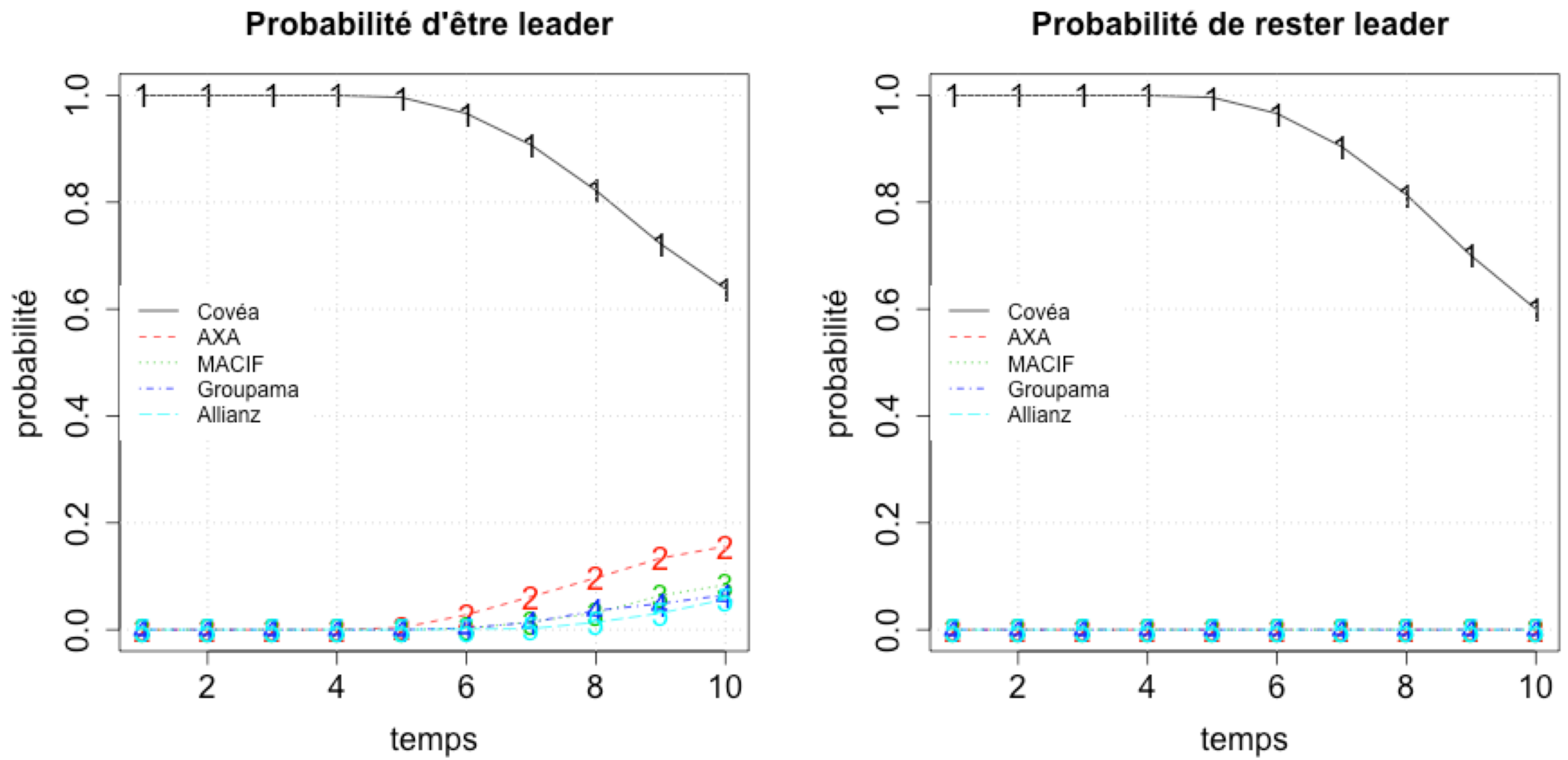
Modèle répété – quartiles sur 1000 trajectoires (2/3)



Modèle répété – quartiles sur 1000 trajectoires (3/3)

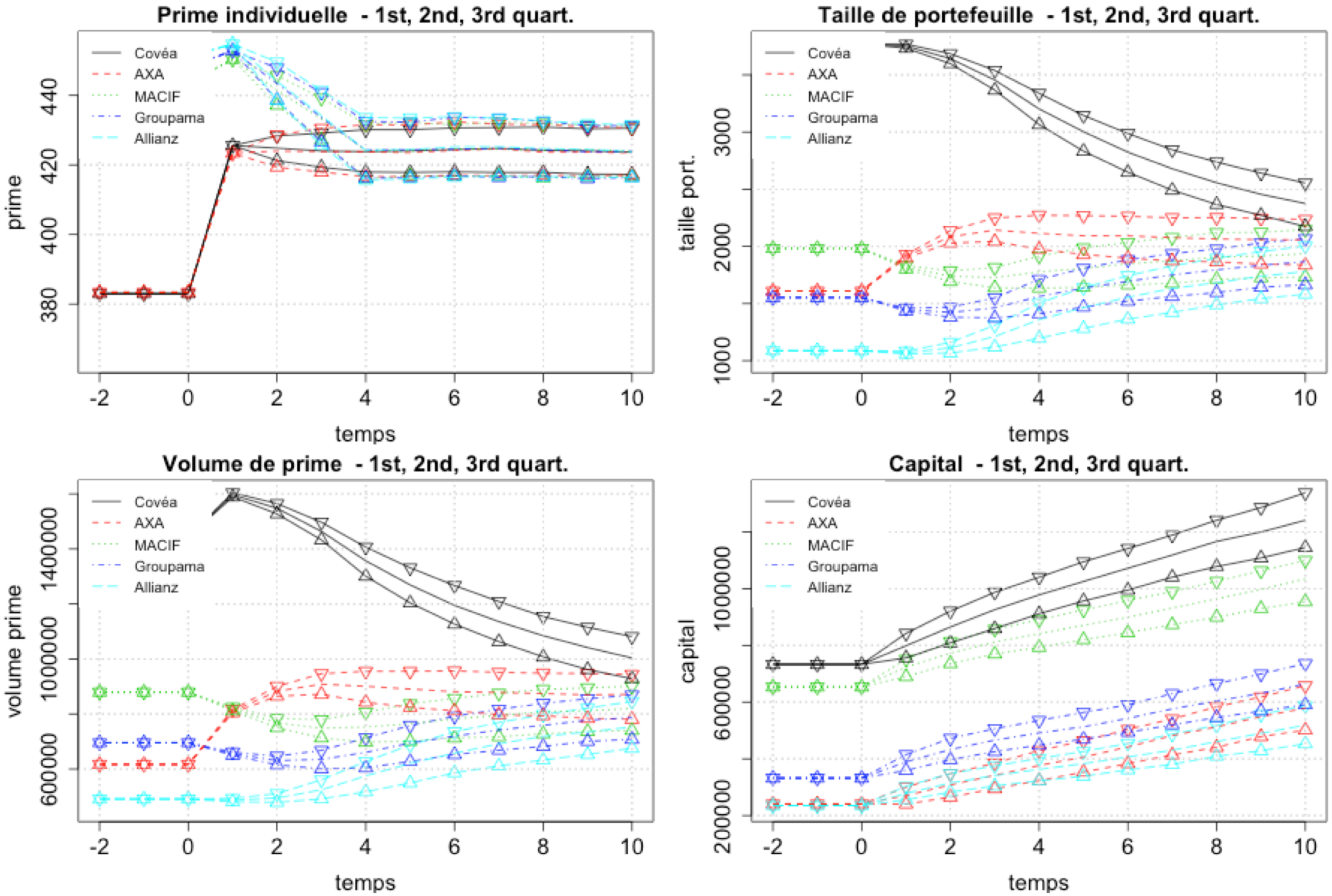


Modèle simple répété – probabilités de ruine / leader

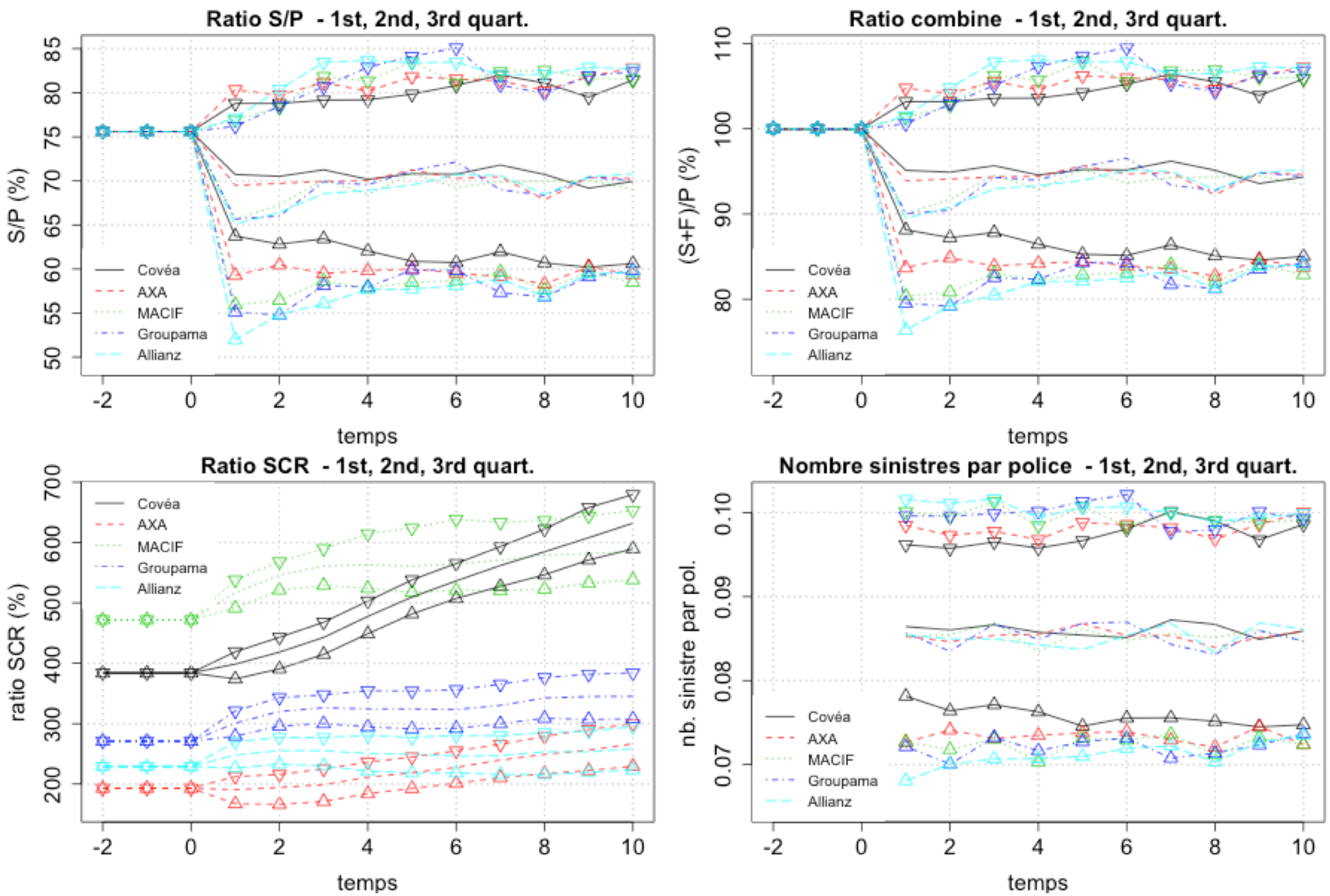


ANALYSE DE SENSIBILITÉ

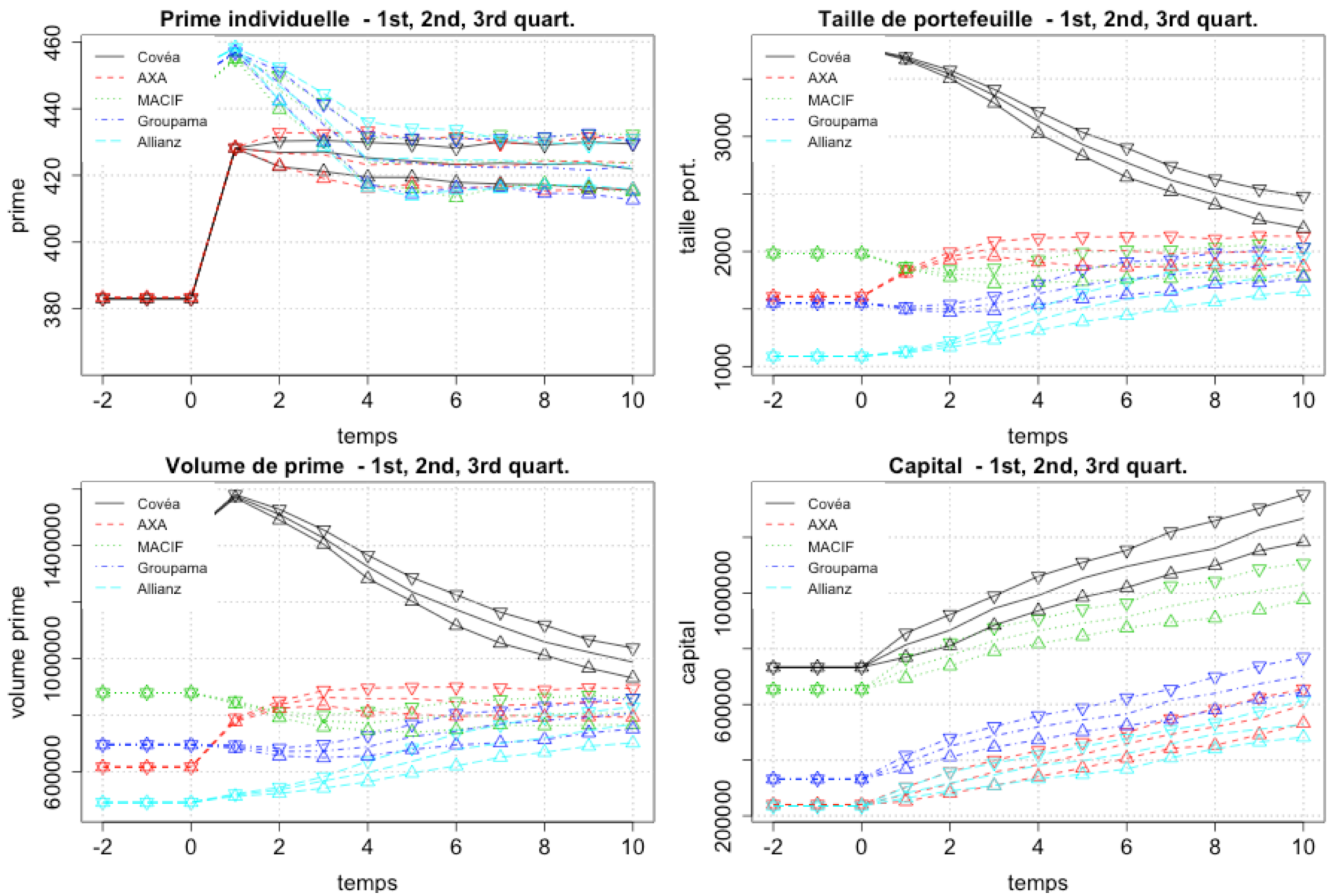
Proxy de marché – moyenne pondérée



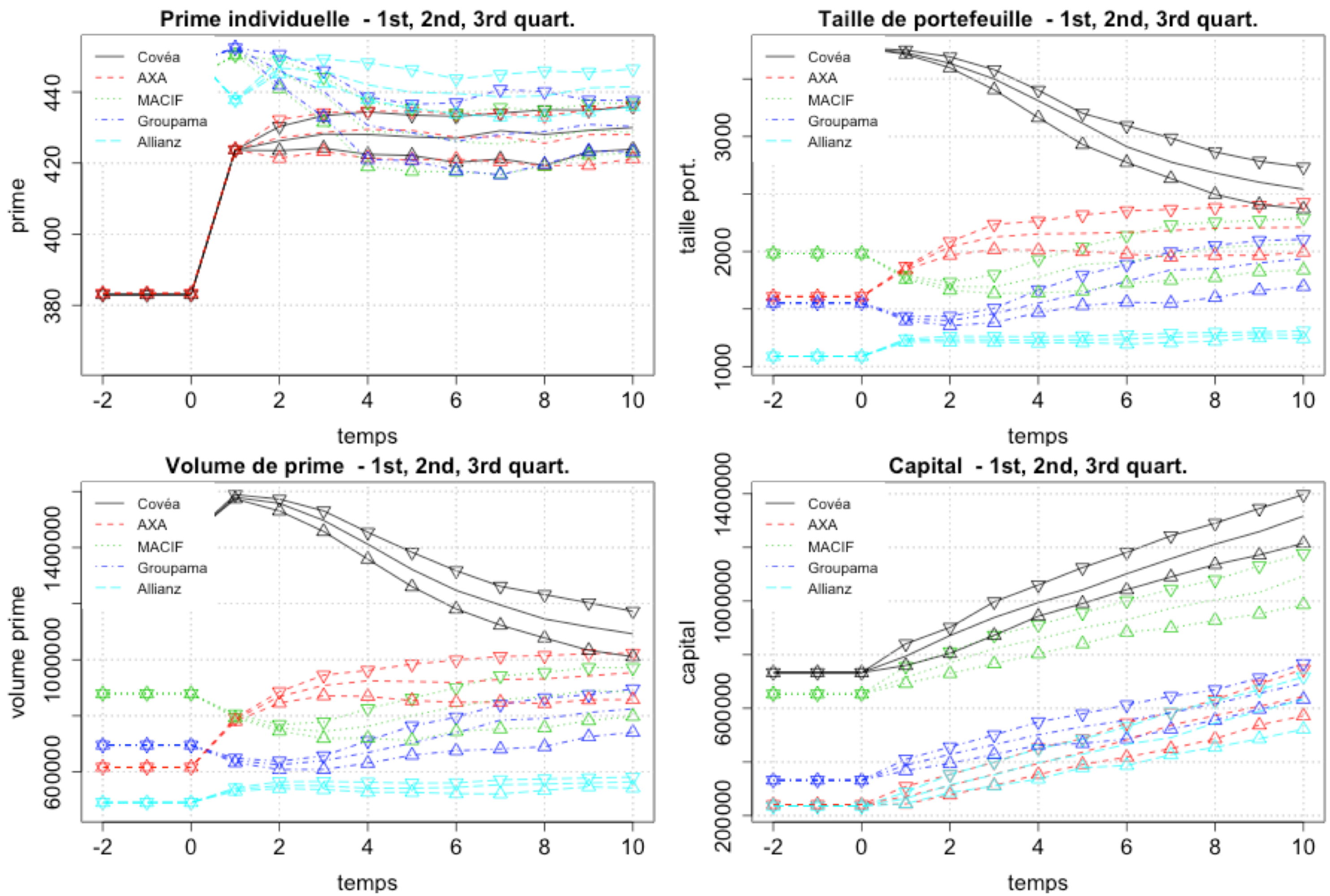
Modèle de sinistre – binomiale négative / lognormale



Modèle de comportement – montant relatif

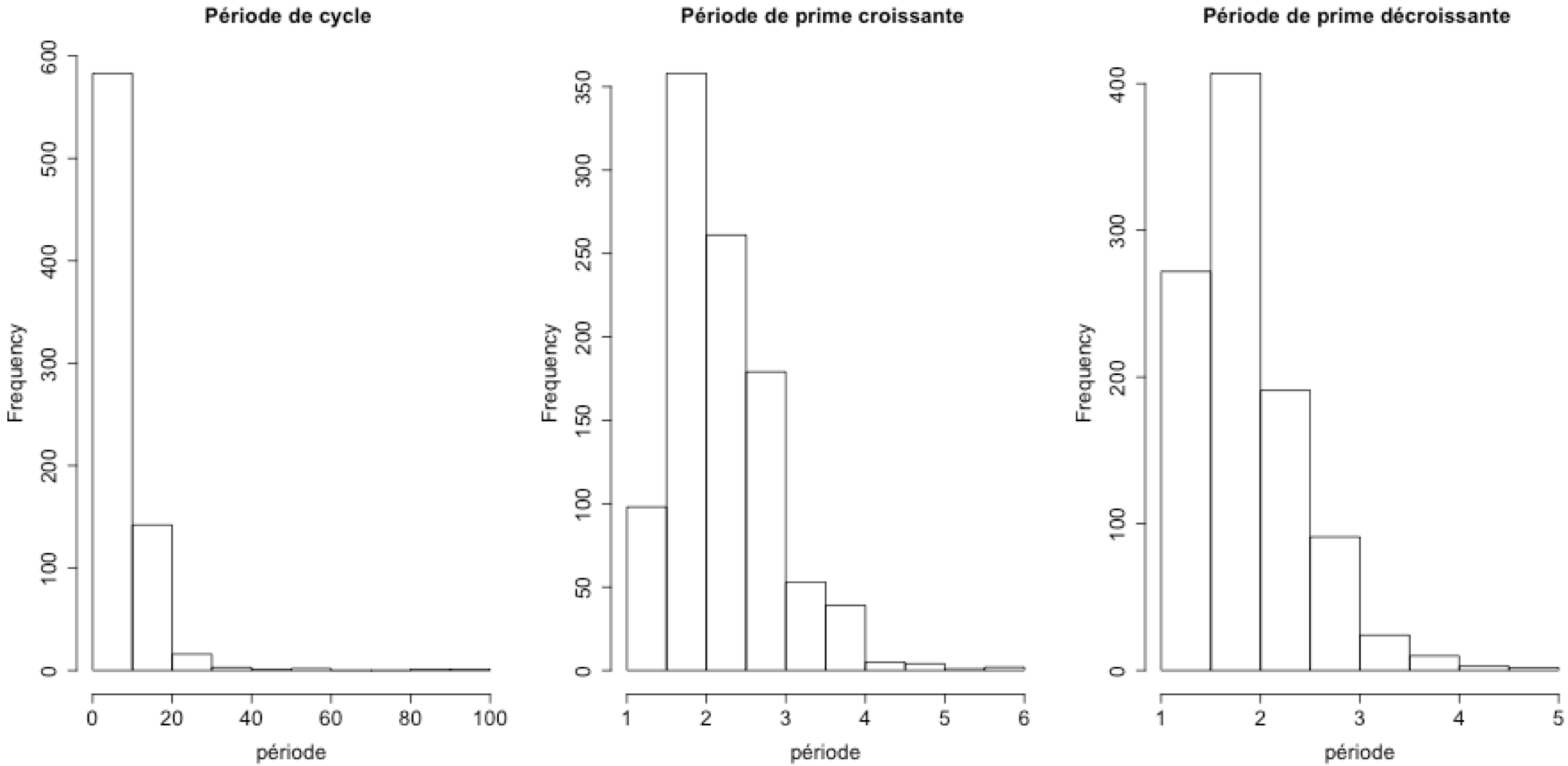


Calcul prime technique – cas d'un assureur suiveur



Cyclicité

Calibration d'un AR(2) $X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \mathcal{E}_t$. Si $a_2 < 0$ et $a_1^2 + 4a_2 < 0$, alors (X_t) p-périodique avec $p = 2\pi \arccos\left(\frac{a_1}{2\sqrt{-a_2}}\right)$.



CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Conclusion

- La théorie des jeux non-coopératifs est adaptée pour modéliser les marchés d'assurance.
- Sur une période, un certain nombre de propriétés peuvent être montrées.
- Sur plusieurs périodes, le jeu simple répété montre
  - Des conséquences fortes du comportement client.
  - Dans une moindre mesure de la sinistralité.
  - A paramètres identiques, le marché s'équilibre à long terme.
- Dans certains cas, les trajectoires de la prime marché sont cycliques.

Perspectives

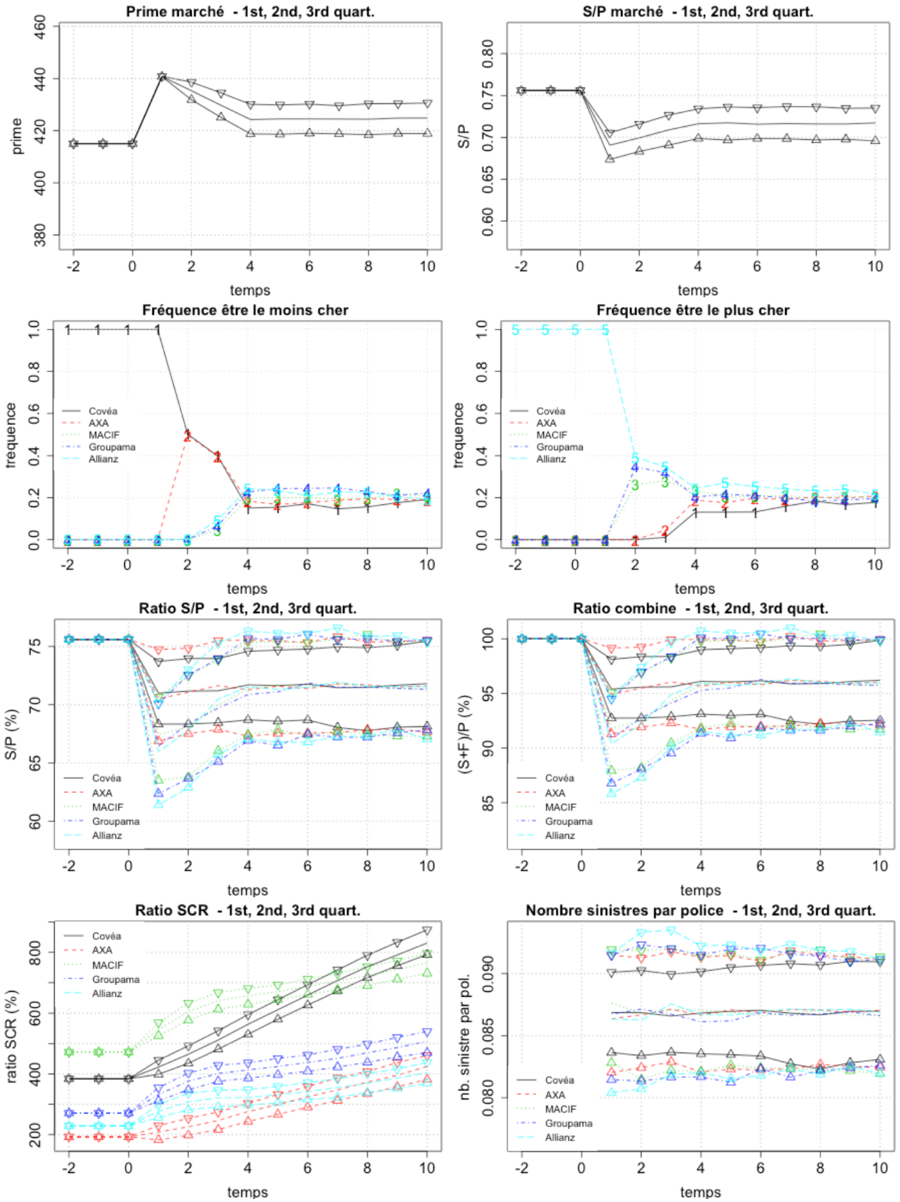
– Autres tests à réaliser :
  - nouvel arrivant sur le marché
  - les 10 premiers assureurs plutot que les 5 premiers assureurs
  - paramétrage dynamique des frais en fonction de la taille du portefeuille

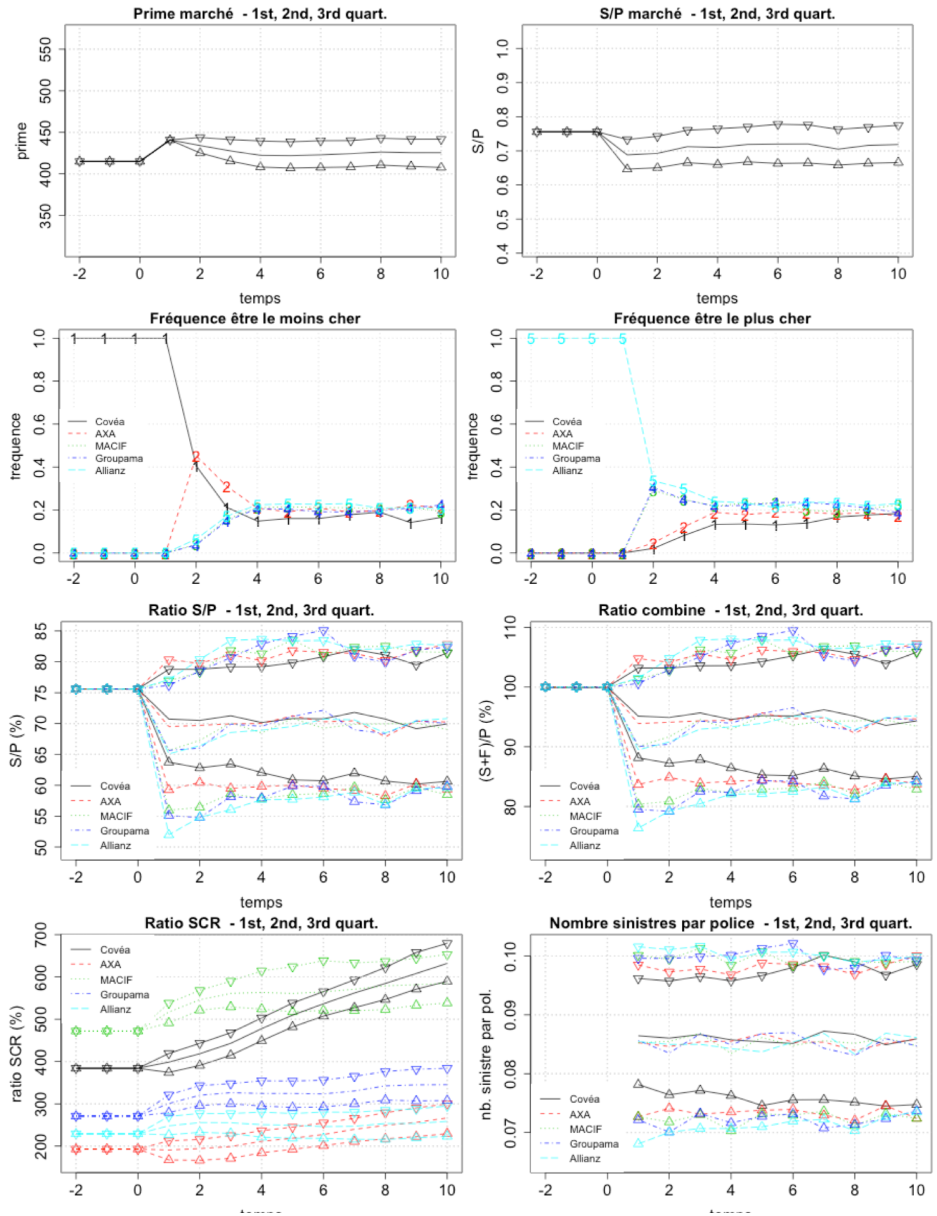
– Prise en compte de
  - plusieurs types de risques pour les assurés
  - prise en compte de la valeur temps
  - prise en compte d'un modèle de sévérité catastrophique

– Références :

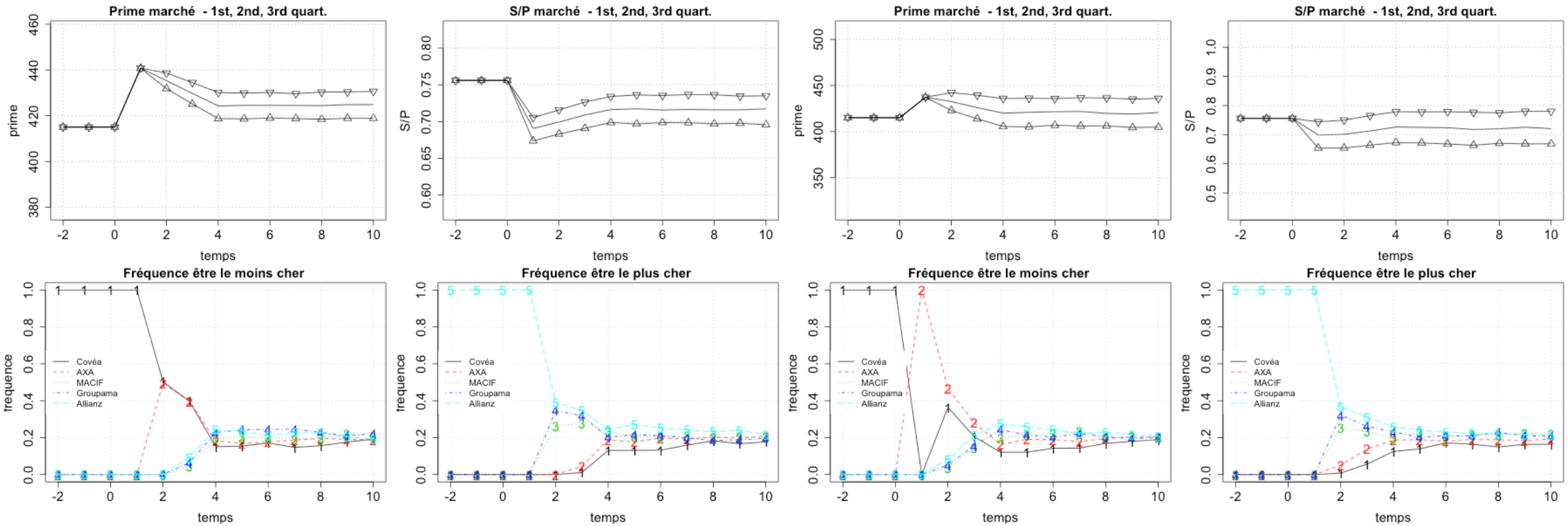
  - Feldblum, S. (2001). Underwriting cycles and business strategies. In CAS proceedings
  - H. Albrecher, C. Dutang, S. Loisel (2013). Competition between non-life insurers under Solvency constraints : a game-theoretic approach, European Journal of Operational Research
  - C. Mouminoux (2018). Behavioral Biases and Strategies of Insurance Market Players, Ph.D. thesis
  - R Core Team (2019). R : A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

Annexe – effet sinistralité en fréquence





Annexe – effet sinistralité (fréquence) et proxy marché



Annexe – effet sinistralité en sévérité