Courbe des taux sans risque sous IFRS 17

Juillet 2022

4, rue Chauveau-Lagarde - 75008 Paris
T. 01 44 51 72 72
secretariat@institutdesactuaires.com
www.institutdesactuaires.com
Association loi de 1901, reconnue d'utilité publique

Institut des ACTUAIRES
Éclairer les risques, tracer l'avenir

Table des matières

1. Objet de ce document

La présente note est une contribution de l'Institut des Actuaires à ses membres, relative à la problématique d'établissement de courbes des taux d'actualisation dans le cadre des évaluations de provisions requises par la norme IFRS 17.

Elle s'attache à identifier différentes approches envisageables, sans prétention d'exhaustivité, en se fondant sur des approches développées dans la littérature académique et sur les pratiques observées dans d'autres référentiels.

2. Généralités autour de la courbe des taux

2.1 Panorama des courbes de taux utilisées

La modélisation des taux d'intérêt est un enjeu majeur pour les assureurs puisque ceux-ci sont utilisés en permanence, en particulier pour évaluer leurs engagements envers les assurés. Il est ainsi important de pouvoir représenter l'évolution de ces taux en fonction du temps à l'aide d'une structure par terme des taux d'intérêt ou courbe des taux. La courbe des taux permet de connaître pour une maturité donnée d'un instrument financier, le niveau du taux d'intérêt associé.

Il existe différentes courbes des taux que l'on peut regrouper en deux catégories :

- Les courbes de marché qui sont construites directement grâce aux observations faites sur les marchés
  - Courbe des taux **swaps**
  - Courbe des taux d'**obligations d'états**

- Les courbes implicites qui sont construites indirectement à partir des cotations de marché d'instruments financiers tels que les swaps et les obligations d'états
  - Courbe des taux **zéro-coupons**
  - Courbe des taux **forward**
  - Courbe des taux **forward instantanés**

2.2 Principes IFRS 17

La norme IFRS 17 est une norme de communication financière qui a pour but d'améliorer la cohérence de la comptabilisation des contrats d'assurance au niveau international. Elle a été publiée par l'**IASB** (*International Accounting Standards Board*) en mai 2017 mais rentrera en vigueur à partir du 1er janvier 2023. Elle remplacera la norme IFRS 4 publiée en 2004, qui était une norme temporaire établie pour disposer de méthodes de comptabilisation des contrats d'assurance pour la mise en œuvre au niveau de l'Union européenne en 2005.

Cette nouvelle norme permet notamment de fournir des informations actualisées sur les risques et la performance des contrats d'assurance et d'améliorer la transparence des informations financières communiquées par les compagnies d'assurance. Elle permet également l'introduction d'une comptabilité cohérente pour tous les contrats d'assurance présentant les mêmes caractéristiques. La norme s'applique aux comptes portant sur les éléments de passifs des contrats d'assurance et de réassurance émis, des traités de réassurance détenus par la société et des contrats d'investissement avec participation discrétionnaire émis.

Les contrats seront comptabilisés en regroupant les contrats d'assurance au niveau d'agrégation Portefeuille x Cohorte de souscription x Classe de profitabilité à la souscription :

- **Portefeuille** : les contrats sujets à des risques similaires et gérés ensemble sont regroupés.
- **Cohorte** : les contrats émis avec moins d'un an d'intervalle
- **Profitabilité** (3 catégories) : les contrats onéreux, les contrats profitables sans possibilité significative de devenir onéreux, et les autres.

Un contrat est dit onéreux lorsque ses sorties de trésorerie estimées sont supérieures à ses entrées de trésorerie estimées.

Selon les caractéristiques des groupes de contrats, il y aura plusieurs manières de valoriser les éléments du passif :

- Méthode classique **GAM** (*General Accounting Model*)

- Méthode **BBA** (*Building Block Approach*) : éligible aux contrats non participatifs dont la durée dépasse un an et aux contrats participatifs indirects

- Méthode **PAA** (*Premium Allocation Approach*) : éligible aux contrats dont la période de couverture n'excède pas une année ou dont l'évaluation du passif pour la couverture restante ne diffère pas significativement de celle faite selon la méthode usuelle

- Méthode **VFA** (*Variable Fee Approach*) : contrats participatifs directs

Sous IFRS 17, la provision d'assurance est composée de trois éléments :

- **Current estimate ou PVFCF** (*Present Value of Future Cash Flows*) : il s'agit de l'estimation des flux futurs actualisés à l'aide d'un taux à déterminer. Son calcul se rapproche de celui du **BE** (*Best Estimate*) sous Solvabilité II. Il inclut la prise en compte des primes de risques financiers.

- **RA** (*Risk Adjustment*) : il correspond à la compensation que l'entité requiert pour supporter l'incertitude des flux de trésorerie associée aux risques non-financiers.

- **CSM** (*Contractual Service Margin*) : C'est le profit non encore reconnu en revenu, estimé du groupe de contrats (pour les groupes de contrats profitables).

Le calcul de la PVFCF nécessite l'utilisation de taux d'actualisation qui seront calculés d'une manière particulière sous IFRS 17 d'où l'enjeu de la construction d'une courbe des taux sans risque selon cette norme.

§36 de IFRS 17

« Une entité doit ajuster l'estimation de ses flux de trésorerie futurs pour refléter la valeur temps de l'argent et les risques financiers liés à ces flux (…). Les taux appliqués à l'estimation des flux de trésorerie futurs (…) doivent :

a) refléter la valeur temps de l'argent, les caractéristiques des flux de trésorerie et le caractère liquide des contrats d'assurance ;
b) être en adéquation avec les prix observés sur le marché d'instruments financiers dont les flux de trésorerie ont des caractéristiques qui correspondent à celles des contrats d'assurance en terme de (…) temps, monnaie et liquidité ;
***c)** et exclure l'effet des facteurs qui influencent de tels prix observés sur le marché mais n'affectent pas les flux de trésorerie futurs des contrats d'assurance. »*

2.3 Rappels des dispositions d'IFRS 17 relatives à la construction de la courbe des taux d'actualisation

IFRS 17 précise que deux approches peuvent être mises en œuvre pour construire la courbe des taux : la méthode **bottom-up** et la méthode **top-down**. La méthode top-down consiste à estimer la prime de risque et à la soustraire à la courbe des taux de rendement du portefeuille obligataire pour obtenir la courbe des taux d'actualisation.

Le présent document se concentre sur la méthode bottom-up qui consiste à décomposer le taux d'actualisation IFRS 17 en la somme d'un taux sans risque de marché et d'une prime d'illiquidité.

- La **courbe des taux sans risque** pourra être déterminée selon différentes méthodes présentées en Partie 2. Dans certains cas, il pourra être utile d'extrapoler la courbe des taux sans risque afin d'obtenir la modélisation de taux à très long terme et de pouvoir évaluer la valeur de certains contrats dont la durée excède les maturités pour lesquelles il existe des données observables sur les marchés liquides. Les méthodes d'extrapolation seront également présentées en Partie 2.

- La **prime d'illiquidité** reflète « les différences entre les caractéristiques de liquidité des instruments financiers qui sous-tendent les taux observés sur le marché et les caractéristiques de liquidité des contrats d'assurance » (§B80 d'IFRS 17). Les différentes méthodes de calcul de la prime d'illiquidité seront présentées en Partie 3.

Contrairement à Solvabilité II, il n'y a aucune exigence en terme de granularité. Cependant, comme la prime d'illiquidité reflète les caractéristiques des contrats d'assurance, il n'est pas inenvisageable que les courbes de taux d'actualisation diffèrent en fonction de la devise et de la liquidité des portefeuilles sous-jacents. En ce qui concerne la fréquence de construction des courbes des taux sans risque, les assureurs devront disposer d'au moins une courbe pour chaque clôture d'exercice.

2.4 Comparaison avec la construction de courbes de taux sous Solvabilité II

Sous la norme Solvabilité II, la courbe des taux sans risque est fournie par l'EIOPA sur une base mensuelle à laquelle est ajoutée un **VA** (*Volatility Adjustement*) ou un **MA** (*Matching Adjustement*) (cf. 4.3.2). La correction pour volatilité est fixée par devise et est la même pour toutes les obligations d'assurance et de réassurance, à moins qu'un ajustement spécifique au pays ne soit appliqué.

Une seule méthode est utilisée pour construire la courbe des taux sans risque : la méthode bottom-up. Dans cette méthode ascendante, le dernier point liquide est fixé à 20 ans par l'EIOPA pour la zone euro et les taux sont construits à partir des données de taux swaps EURIBOR 6 mois. Pour l'extrapolation de la courbe au-delà d'une maturité 20 ans, la méthode de Smith-Wilson (cf. 3.6.2) est actuellement utilisée. Dans le cadre de la révision de Solvabilité II, d'autres approches sont envisagées, elles figurent en 3.6.3.

Contrairement à IFRS 17, Solvabilité II ne dispose pas d'une approche descendante pour dériver la courbe de rendement globale mais des similitudes existent avec les méthodes de *Volatility Adjustement* ou *Matching Adjustement*.

3. Construction d'une courbe des taux sans risque

3.1 Les données à utiliser

3.1.1 Les swaps interbancaires

Les taux de change interbancaires sont des taux auxquels les banques acceptent de se prêter de l'argent les unes aux autres. Ces taux interbancaires sont des taux publiés quotidiennement. Exemple de taux interbancaires : LIBOR, EURIBOR, SONIA, SOFR, EONIA, €STR.

L'EURIBOR et le LIBOR sont calculés à partir de déclarations journalières des banques sur leur capacité d'emprunt. Ces « déclarations » sont à la base des scandales récents sur le marché londonien, puis sur le marché européen. Suite à ces scandales, les instances européennes ont mis en place en juin 2016 le Règlement « Benchmark » définissant les nouvelles exigences en terme de calculs basés sur des volumes de transactions réelles et non plus estimées.

A ce jour, le SONIA a remplacé le LIBOR sur le marché londonien, le SOFR a remplacé le LIBOR sur le marché américain et l'€STR a remplacé l'EONIA sur le marché européen. Les swaps de taux interbancaires sont des swaps basés sur ces taux de référence et peuvent être utilisés pour déduire la structure de taux par termes. C'est le cas de la Directive Solvabilité II qui impose aux assureurs l'utilisation d'une courbe des taux fournie mensuellement par l'EIOPA, calculée à partir de l'indice des taux swap sur EURIBOR 6 mois.

Le Règlement Benchmark impose que les marchés de taux interbancaires soient profonds, liquides et transparents pour pouvoir être utilisés dans la construction de la courbe des taux. Cette condition s'appelle le **DLT** (*Deep, liquid and transparent*) assessment.

De plus, depuis l'instauration de la réglementation EMIR, les swaps sont compensés sur des chambres de compensation. Leur transparence, leur liquidité ont progressé et le risque associé serait l'équivalent d'une chambre de compensation. Entre LCH et Eurex nous avons plus de 60 000 Md€ actuellement en vie sur le marché EURO.

En raison des changements récents, une transition est en cours entre des swaps IRS et OIS. Les swaps liés au Libor pourraient disparaitre au profit des swaps sur les nouveaux taux interbancaires (SOFR, SONIA..)

Si les conditions de marché sont réunies, les nouveaux swaps de taux interbancaires sont des bons candidats pour les courbes des taux sans risques.

- **Euribor** :

L'Euribor est apparu en 1999, année de l'introduction de l'euro, en remplacement de plusieurs taux de référence, dont le Pibor en France. Il a été publié pour la première fois le 30 décembre 1998.

Il s'agit du taux moyen auquel certaines banques établies dans l'UE ou dans les pays de l'Association européenne de libre-échange (AELE) peuvent obtenir des fonds sur le marché des prêts interbancaires à court terme (non garantis) et en euros.

Les taux Euribor sont disponibles en 5 échéances différentes : une semaine, 1, 3, 6 et 12 mois.

Les Britanniques n'utilisent pas l'Euribor, mais le Libor qui est disponible sur différentes échéances (du jour au lendemain à 12 mois). Contrairement à l'Euribor, le Libor est calculé pour différentes devises.

- **Libor :**

Publié pour la première fois en 1986, le Libor est le taux d'intérêt de référence du marché monétaire interbancaire de Londres. C'est sur la base de celui-ci que les grandes banques du monde se prêtent chaque jour des milliers de milliards de dollars pour financer leurs activités.

Le Libor est publié quotidiennement à 11h30 par Thomson Reuters pour le compte de la British Banking Association. En fait, il n'y a pas un, mais 150 taux Libor, car l'indice est calculé pour 15 durées (de 1 jour à 12 mois) et pour 10 devises différentes (yen, dollar, euro, etc.).

Le taux Libor est égal à la moyenne arithmétique des taux pour une échéance donnée. Dans la pratique, l'association de banques interroge ses membres, puis retire les réponses les plus élevées et les plus basses pour obtenir une moyenne pour la partie restante.

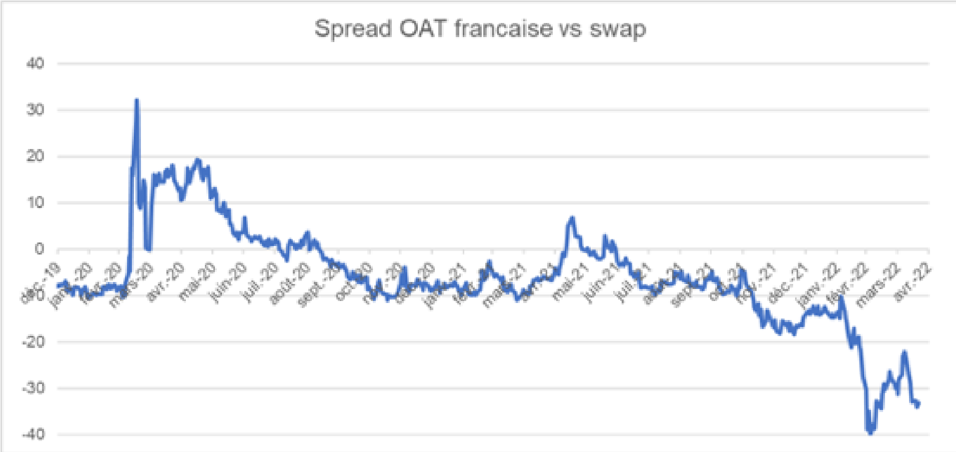
Exemple : Si le taux évalué est déterminé par 18 banques, on retire les 4 taux les plus élevés et les 4 plus bas et on extrait une moyenne des 10 taux restants.

Le Libor constitue une référence mondial pour les taux d'intérêt à court terme. Il sert notamment de référence pour les prêts à taux variable et certains produits financiers tels les futures, les options et les swaps.

3.1.2 Les obligations d’Etat et/ou corporates

Pour certaines monnaies, les conditions de liquidité ne sont pas atteintes sur les marchés des produits dérivés. Pour pallier ce manque de liquidité, les obligations d’états ou corporates peuvent être utilisés. C’est le cas du CHF et JPY dont les taux LIBOR ont disparu mais pour lesquels les remplaçants ne satisfont pas les conditions nécessaires du DLT. Ainsi, l’EIOPA préconise l’utilisation des obligations d’Etat de ces monnaies pour la construction des courbes des taux.

Par contre certains titres souverains ne permettent pas d’être retenus comme courbe sans risque. Par exemple en Europe, les courbes allemandes semblent détenir une prime d’illiquidité sur certains points et peuvent ainsi être plus basses qu’une courbe sans risque. D’autres comme l’Italie ou l’Espagne vont inclure une prime de risque assez élevée surtout en périodes de tensions politiques ou économiques. Enfin certaines courbes comme la France sont régulièrement au-dessus ou en dessous de la courbe swap en raison de critères politiques ou de liquidité. Cette fragmentation au niveau Européen ne permet pas de sélectionner de courbe souveraine de référence contrairement aux Etats-Unis.



3.1.2 Les obligations zéro-coupons

Le comité de normalisation obligataire fournie des données utilisées pour reconstituer la courbe des taux zéro-coupon. Chaque mois une courbe de taux zéro-coupon y est publiée. Cette courbe est constituée des taux et des prix zéro-coupons pour des maturités de 1 à 60 ans. Ces taux ont été calculés sur la base du marché des taux de swaps en euro, taux fixe contre EURIBOR 6 mois publiés par ICAP (broker de référence pour le marché des swaps). Cette courbe est également disponible sur le site de la Banque de France.

3.2 Retraitement du risque de crédit

Les données utilisées pour la construction des courbes des taux présentent un risque de crédit plus ou moins important. C'est le risque que l'émetteur de l'obligation fasse défaut, et que celui-ci ne parvienne plus à verser tout ou partie du coupon. Le risque de contrepartie est lié à la nature même de l'obligation et varie d'une obligation à une autre.

La courbe des taux est retraitée de ce **CRA** *(Credit Risk adjustment)* pour prendre en compte le risque de défaut.

- Dans le cadre de la courbe des taux EIOPA, celui-ci est déterminé comme la moitié de la moyenne sur un an de l'écart entre les taux swaps et de l'€STR ; il est compris entre 10 et 35 bps.

- Les taux interbancaires comme le SONIA, le SOFR et l'€STR sont considérés comme presque sans risque. Les courbes des taux calculés sur ces indices auront donc un CRA nul.

- Concernant l'utilisation des obligations, les titres obligataires émis par les entreprises sont considérés comme plus risqués que ceux émis par les Etats. Le retraitement du risque de crédit sera plus important pour une courbe déduite des emprunts des entreprises que pour celle déduite des emprunts des Etats.

  Le sujet de la pertinence des données utilisées est d'importance en la matière, il dépasse le cadre de la présente note.

3.3 Représentation des taux à partir des données de marché

Plusieurs modèles permettant de représenter la structure à terme de la courbe de taux sont proposés dans la littérature. Le tableau suivant liste les modèles qui seront présentés dans ce document.

Modèle	Type	Sous-type	Extrapolation	Utilisé par
Bootstrap	Interpolation		Pas définie	
Nelson Siegel / Svensson	Régression	Fonction parcimonieuse	Déterminée par paramètres	BCE
Interpolation par morceaux linéaire / quadratique	Interpolation	par morceaux	Peut-être explosive	
Splines	Interpolation	Splines	Peut-être explosive	
Smith-Wilson	Interpolation	Noyaux (Kernels)	Déterminée par paramètres	EIOPA
Waggoner / FNZ	Régression	Smoothed spline	Peut-être explosive	Bank of England

Les modèles de structure à terme de la courbe de taux peuvent répliquer exactement les prix des actifs utilisés pour la calibration, on parle alors de modèles d'interpolation.

Au contraire, quand il y a des contraintes de profondeur, liquidité ou transparence de ces actifs, il peut être souhaitable de ne pas répliquer les prix de manière exacte mais plutôt de privilégier une structure à terme plus lisse, on parle alors de modèles de régression.

Les actifs financiers utilisés pour calibrer ce type de modèle sont de « bonne qualité » pour les maturités courtes de la structure à terme. Pour la partie longue, voire très longue de la structure à terme, la qualité des données peut fortement se dégrader. On se pose donc naturellement la question de la capacité des modèles à extrapoler. Pour certains modèles, l'extrapolation peut être déduite / forcée par les paramètres du modèle, alors que pour les autres, il n'y pas de contrôle de l'extrapolation et le taux ultime peut être infini. Dans ce deuxième cas, il peut être intéressant de compléter le modèle avec une méthodologie d'extrapolation.

3.3.1 Bootstrapping

3.3.1.a Introduction

La construction manuelle des courbes des taux pas à pas, et la détermination des taux zéro-coupon à partir d'instruments cotés se basent sur la structure par terme des taux d'intérêt, et fonctionnent sur le principe de l'interpolation à partir de produits tels que les obligations et swaps.

Cette méthode est appliquée à partir des prix d'instruments côtés, ou d'une courbe de taux existante. De plus, elle est basée sur l'hypothèse stipulant que le prix théorique d'une obligation est la somme de ses flux actualisés au taux zéro-coupon à l'échéance de chaque flux.

3.3.1.b Modèle

- Cas d'une obligation

Le bootstrapping est une méthode permettant de reconstituer une courbe zéro-coupon pas à pas, c'est-à-dire de proche en proche, selon les maturités des obligations. En pratique, la méthode se décline comme suit :

Etape 1 : Il faut traiter les obligations dont les maturités courtes sont inférieures ou égales à un an ($t \leq 1$). En effet, puisque nous n'avons aucun coupon versé entre le moment de calcul du taux ZC et l'échéance, il suffit donc de résoudre une équation simple pour obtenir le taux :

$$r = \left(\frac{nominal}{prix} - 1\right) \times \frac{12}{m}$$

Avec :
- ***prix*** : le prix de marché
- ***m*** : la maturité (inférieure ou égale à un an)
- ***nominal*** (ou valeur faciale ou principal)

Etape 2 : Il faut étudier les titres dont les maturités sont supérieures à un an ($t > 1$). Tout d'abord, on prend, par exemple, les obligations ayant une maturité de 2 ans ($t = 2$). Grâce à la première étape, le premier flux peut être calculé avec la formule suivante :

$$VA_{2y}^{1} = \frac{C}{(1 + r_{1y})}$$

Avec :
- $\boldsymbol{C}$: le coupon
- $\boldsymbol{r_{1y}}$: le taux de maturité un an
- $\boldsymbol{VA_{2y}^{1}}$: la valeur actualisée du premier flux de l'obligation

Connaissant le prix de l'obligation et la valeur actualisée du premier flux, on peut en déduire le second flux. En effet, le prix d'une obligation est la somme des flux actualisés. :

$$VA_{2y}^{2} = P_{1<t\leq 2} - VA_{2y}^{1}$$

Avec :
- $\boldsymbol{P_{1<t\leq 2}}$: le prix de l'obligation de maturité 2 ans
- $\boldsymbol{t}$: la maturité
- $\boldsymbol{VA_{2y}^{2}}$: la valeur actualisée du second flux de l'obligation

Pour avoir le taux ZC du deuxième flux, noté $\boldsymbol{r_{2y}}$, il suffit donc de résoudre l'équation suivante :

$$VA_{2y}^{2} \times \left(1 + r_{2y}\right)^{t} = P_{1<t\leq 2} - VA_{2y}^{1}$$

Avec :
- r_{2y} : le taux ZC à retrouver

Etape 3 : Pour les maturités supérieures ou égales à trois ans, le taux ZC s'obtient en itérant la méthode. De la même manière, les taux r_{1y} et r_{2y} permettront de trouver VA_{3y}^{3} et le taux r_{3y}, et ainsi de suite.

- Cas d'un swap

Un swap de taux d'intérêt est un contrat d'échange de conditions de taux d'intérêt. Dans sa forme la plus générale, l'entité A accepte de payer des flux d'intérêts fixes à l'entité B sur une période de temps déterminée, tandis que B accepte de payer des flux d'intérêts variables à A, indexés sur un indice déterminé. Le montant nominal des intérêts n'est pas échangé.

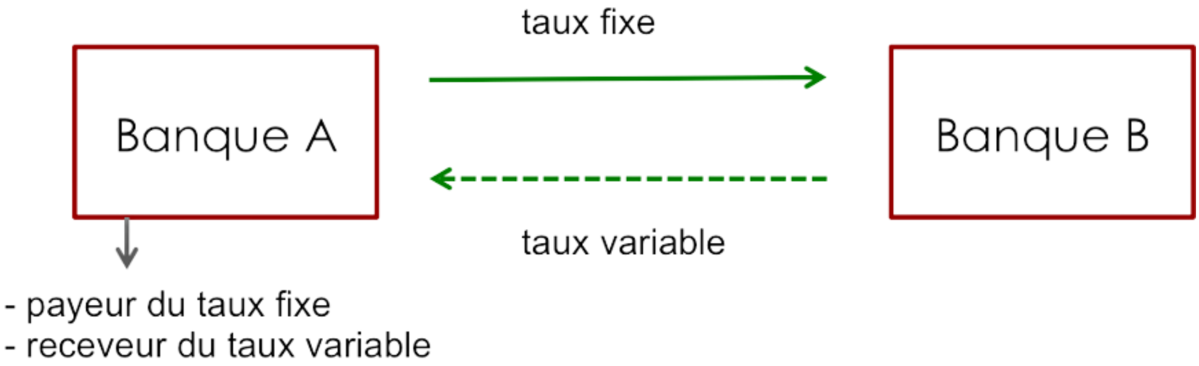


Figure 1 : fonctionnement du Swap

Le swap a donc les caractéristiques suivantes :
- Nominal, noté ***N*** : capital initial emprunté par l'émetteur de l'obligation divisé par le nombre de titres émis
- Date de valorisation
- Maturité, notée ***M***
- Périodicité de la jambe fixe, notée ***Pf***
- Périodicité de la jambe variable, notée ***Pv***
- Périodicité du taux variable
- Taux fixe du swap, noté ***ts*** qui est coté
- Taux variable, noté ***tv***
- Conventions de base de calcul

Dans le swap, deux notions sont définies :

La jambe fixe (partie fixe), notée JF, qui est la série de flux à taux fixe, et la jambe variable (partie variable), notée JV, qui est la série de flux à taux variable :

$$JF = N \times \sum_{i} (r_s \times \alpha_i) \times DF_i$$

$$JV = N \times \sum_{i} (Fwd_i \times \alpha_i) \times DF_i$$

Avec :

- $\boldsymbol{N}$: le nominal
- $\boldsymbol{r_s}$: le taux swap coté
- $\boldsymbol{\alpha_i}$: le décompte de jours dans la base choisie
- $\boldsymbol{DF_i}$: le facteur d 'actualisation en *t* = *ti*
- $\boldsymbol{Fwd_i}$: le taux forward pour la période $[t_{i-1};\ t_i]$, calculé en t_{i-1}

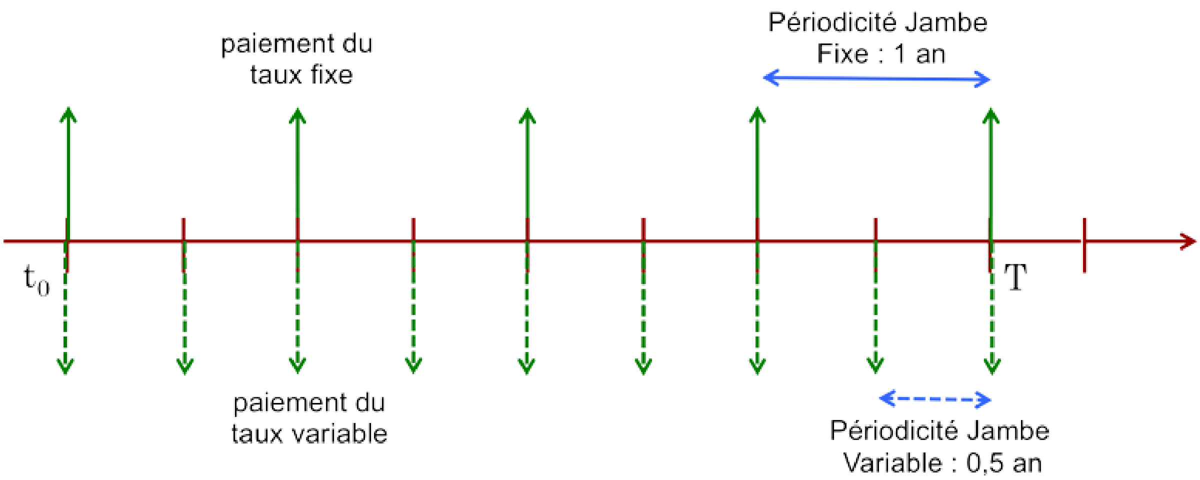


Figure 2 : Swap

On commence d'abord par expliquer la démarche de valorisation de la jambe variable d'un swap que nous utiliserons ensuite dans l'algorithme du Bootstrap.

- ***T0* ≥ 0** : date de début du swap
- **(*Ti*)*i*=1 ,... , *N*** : dates de paiement de la jambe fixe
- **δi** : fraction d'année entre deux dates de paiement de la jambe fixe selon la convention du calcul du nombre de jour
- **S(T0; TN)** : taux de la jambe fixe constant sur toute la période
- $\boldsymbol{B^{bor}}$ ***(t; Tn)*** : valeur en *t* du facteur d'actualisation de maturité *Tn*, calculé à partir d'une courbe de taux LIBOR (inconnue, aléatoire), pour *T0* < *t* ≥T*n*
- $\boldsymbol{B^{bor}}$ **(T0; T)** : valeur en T0 du facteur d'actualisation de maturité T ,calculé à partir d'une courbe de taux LIBOR (connue, déterministe)
- **(Si)i=1 ,..,M** : dates de paiement de la jambe flottante (S0 = T0 et SM = TN)
- **γi** : fraction d'année entre deux dates de paiement de la jambe variable
- **L(s; S)** : taux variable Libor (exemple Euribor 6M) sur la période [s,S]
- **L(T0; s; S)** : valeur forward du taux variable L(s; S)
- **QT** : probabilité T-forward neutre ∀T > 0
- **EP** : opérateur espérance sous la probabilité P

Si nous faisons abstraction du risque de crédit, on actualise au même taux que le taux variable, la relation suivante est donc vérifiée :

$$B^{bor}(s_{i-1}, s_i) \times \left(1 + \gamma_i \times L(s_{i-1}, s_i)\right) = 1$$

On a donc :

$$L(s_{i-1}, s_i) = \frac{1 - B^{bor}(s_{i-1}, s_i)}{\gamma_i \times B^{bor}(s_{i-1}, s_i)} = \frac{B^{bor}(s_{i-1}, s_{i-1}) - B^{bor}(s_{i-1}, s_i)}{\gamma_i \times B^{bor}(s_{i-1}, s_i)}$$

$$\Rightarrow L(s_{i-1}, s_i) = \frac{1}{\gamma_i} \times \left(\frac{B^{bor}(s_{i-1}, s_{i-1})}{B^{bor}(s_{i-1}, s_i)} - \frac{B^{bor}(s_{i-1}, s_i)}{B^{bor}(s_{i-1}, s_i)} \right)$$

Etant donné que nous avons choisi B^{bor} (., Si) comme numéraire associé à la probabilité QSi-forward neutre, toute combinaison linéaire d'actifs négociables (dans notre cas ce sont des zéros coupons sans risque) divisée par le numéraire N^{bor} (., Si) est donc une martingale sous QSi**.** De ce fait, nous obtenons :

$$E^{\mathbb{Q}si}(L(s_{i-1}, s_i)|S_0) = \frac{1}{\gamma_i} \times E^{\mathbb{Q}si} \left(\frac{B^{bor}(s_{i-1}, s_{i-1})}{B^{bor}(s_{i-1}, s_i)} - \frac{B^{bor}(s_{i-1}, s_i)}{B^{bor}(s_{i-1}, s_i)} \middle| S_0 \right)$$

D'où $\forall\, i = 1, \ldots, M,$

$$E^{\mathbb{Q}si}(L(s_{i-1}, s_i)|S_0) = \frac{1}{\gamma_i} \times \frac{B^{bor}(S_0, s_{i-1}) - B^{bor}(S_0, s_i)}{B^{bor}(S_0, s_i)} = L(S_0, s_{i-1}, s_i)$$

Valorisation de la jambe variable :

$$JV_0 = \sum_{i=1}^{M} E^{\mathbb{Q}si}(L(s_{i-1}, s_i)|S_0) \times \gamma_i \times B^{bor}(S_0, s_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \frac{B^{bor}(S_0, s_{i-1}) - B^{bor}(S_0, s_i)}{B^{bor}(S_0, s_i)} \times \gamma_i \times B^{bor}(S_0, s_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} B^{bor}(S_0, S_0) - B^{bor}(S_0, s_M)$$

D'où :

$$JV_0 = 1 - B^{bor}(T_0, T_N)$$

Cela permet ainsi d'obtenir, pour les maturités pour lesquelles on dispose de valorisation de swaps, des taux d'intérêts pour la mise en œuvre du bootstrap.

3.3.1.c Critiques

3.3.2 Nelson-Siegel

3.3.2.a Introduction

Présenté en 1987 dans le Journal of Science, le modèle de Nelson-Siegel constitue l'un des modèles de taux non stochastiques les plus utilisés [Nelson et Siegel, 1987]. Ce modèle se situe dans la catégorie des méthodes fondées sur des classes de fonctions spécifiques.

Nous supposerons avoir un taux zéro-coupon à chaque maturité. Le modèle prend en considération trois facteurs pour approximer la structure à terme de la courbe des taux d'intérêts. Ce modèle a connu un succès pour sa performance prévisionnelle comparé à d'autres approches. Contrairement à la méthode de bootstrapping, l'interpolation n'est pas nécessaire avec le modèle NS car le modèle génère automatiquement le taux pour toute maturité donnée.

3.3.2.b Modèle

Nelson et Siegel proposent de définir la courbe des taux forward par la fonction suivante :

$$f(\tau) = \beta 0 \ + \ \beta 1 \, e^{\frac{-\tau}{\lambda}} + \frac{\tau}{\lambda} \beta 2 e^{\frac{-\tau}{\lambda}}$$

Avec
- $\boldsymbol{f(\tau)}$: le taux ZC de maturité
- $\boldsymbol{\lambda}$: le paramètre d´échelle
- ***β0*** : le facteur de niveau i.e. le taux long
- ***β1*** : le facteur de rotation i.e. l'´écart entre taux court et taux long
- ***β2*** : le facteur de pente

Notons que $\lim\limits_{\tau \to \infty} \mathrm{f}(\tau) = \ \beta 0 \, \mathrm{R}(0; \ \tau)$ et $\lim\limits_{\tau \to 0} \mathrm{f}(\tau) = \ \beta 0 + \beta 1$

• ***β0*** : l'asymptote des taux forward qui peut s'interpréter comme le taux d'intérêt long terme

• ***La somme des paramètres β0 et β1*** : la valeur initiale de la courbe des taux forward soit $\beta 0 \ + \ \beta 1 = \lim\limits_{t \to 0} \mathrm{f}(0, \mathrm{t}) = \mathrm{r}0$ où $\mathrm{r}0$ est le taux court à l'instant initial.

• ***β2*** : la courbure de la fonction.

Nous pouvons déduire de cette équation les taux à terme :

$$Z(\tau) = exp\left(- \int_0^\tau f(0, u) du\right) \ \ et \ R(\tau) = \ - ln\left(\frac{Z(0,\tau)}{\tau}\right)$$

D'où

$$R(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \beta 0 \ + \beta 1 \, e^{\frac{-u}{\lambda}} + \frac{u}{\lambda} \beta 2 \, e^{\frac{-u}{\lambda}} du$$

Nous en déduisons alors la formule ci-dessous :

$$R(\tau) = \beta 0 + \beta 1 \left[\frac{1 - e^{\frac{-\tau}{\lambda}}}{\frac{\tau}{\lambda}}\right] + \beta 2 \left[\frac{1 - e^{\frac{-\tau}{\lambda}}}{\frac{\tau}{\lambda}} - e^{\frac{-\tau}{\lambda}}\right]$$

La formule de prix des obligations zéro coupon est donné par :

$$Z(\tau) = e^{-\tau R(\tau)}$$

Le prix des obligations ayant un taux de coupon non nul se décompose de la façon suivante :

$P(\tau,\theta) = \sum_{j=1}^{m} cj\ e^{-\tau j R(\tau j.\theta)}$ où $\theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda)$ est le vecteur des paramètres du modèle.

Les différents paramètres seront estimés à partir des « m » maturités $(\tau 1, \tau 2, \dots, \tau m)$ par le modèle de MCO (moindre carrés ordinaires). Le paramètre λ est considéré comme une calibration du $\beta_0, \beta_1, \beta_2$. La calibration est effectuée en minimisant la fonction objective de la formule suivante :

$$\phi\ (\theta_\lambda) = \sum_{\tau=0}^{m} w_\tau (P_e - \hat{P}_2)^2$$

Où les poids w_τ utilisés permettent de favoriser certaines maturités.

Ceux-ci peuvent :

- Être équipondérés en prenant $\forall\, \tau = 1 \dots m, w_\tau = \frac{1}{m}$ ou plus simplement, $\forall\, \tau = 1 \dots m, w_\tau = 1$
- Liés à la maturité : $\forall\, \tau = 1 \dots m, w_\tau = \frac{1}{\tau}$
- Être fixés arbitrairement si l'on souhaite interpoler avec précision une certaine partie de la courbe

3.3.2.c Critiques

Le modèle de Nelson Siegel ne peut pas être adopté dans toutes les situations réelles. En effet, la reproduction de certaines courbes de taux est parfois difficile comme par exemple lorsque la structure de la courbe présente des bosses ou des creux. Ainsi, le modèle de Nelson Siegel augmenté permet de pallier ce problème.

3.3.3 Nelson-Siegel-Svensson

3.3.3.a Introduction

La méthode Nelson-Siegel-Svensson (NSS) propose l'introduction de deux nouveaux paramètres : un deuxième paramètre d'échelle $\lambda 2$ et un nouveau paramètre $\beta 3$ qui permettront de prendre en compte les formes des courbures.

3.3.3.b Modèle

Le modèle NSS donne l'estimation du taux zéro-coupon suivante :

$$R(\tau) = \beta 0 + \beta 1 \left[\frac{1 - e^{\frac{-\tau}{\lambda 1}}}{\frac{\tau}{\lambda 1}}\right] + \beta 2 \left[\frac{1 - e^{\frac{-\tau}{\lambda 1}}}{\frac{\tau}{\lambda 1}} - e^{\frac{-\tau}{\lambda 1}}\right] + \beta 3 \left[\frac{1 - e^{\frac{-\tau}{\lambda 2}}}{\frac{\tau}{\lambda 2}} - e^{\frac{-\tau}{\lambda 2}}\right]$$

Avec

- $\boldsymbol{\lambda 1}$: le premier paramètre d'échelle
- $\boldsymbol{\lambda 2}$: le deuxième paramètre d'échelle
- $\boldsymbol{\beta 0}$: le facteur de niveau
- $\boldsymbol{\beta 1}$: le facteur de rotation
- $\boldsymbol{\beta 2}$: le facteur de pente
- $\boldsymbol{\beta 3}$: le facteur de courbure supplémentaire

Notons que $\lim_{\tau \to \infty} R(\tau) = \beta 0$ et $\lim_{\tau \to 0} \mathrm{R}(\tau) = \beta 0 + \beta 1$.

3.3.3.c Critiques

Grâce aux deux paramètres supplémentaires, ce modèle permettra de mieux s'adapter aux différentes maturités à interpoler. Nelson-Siegel-Svensson possède donc des meilleures qualités d'ajustement aux différentes courbes.

Cependant, il sera nécessaire d'estimer les six paramètres pour calibrer le modèle et plus le nombre de paramètres est important, plus les risque d'instabilité et d'erreur sont élevés. Ce modèle sera donc moins adapté dans une optique de projection des taux en univers monde réel.

3.3.4 Nelson-Siegel dynamique

3.3.4.a Introduction

Diebold et Li (2006) étendent le modèle NS en permettant aux facteurs latents d'être dynamiques. Cette évolution de la courbe de taux dans le temps est cruciale pour comprendre son interaction avec le cycle économique.

3.3.4.b Modèle

Pour faciliter la tâche, nous prendrons les notations suivantes :

- $F1(\tau) = \frac{1 - e^{(\frac{-\tau}{\lambda})}}{\frac{\tau}{\lambda}}$
- $F2(\tau) = F1(\tau) - e^{\frac{-\tau}{\lambda}}$
- $R(\tau) = \beta 0 + \beta 1 F1(\tau) + \beta 2\, F2(\tau)$

Équation de mesure :

$$R_t(\tau_m) = \beta_0 t + \beta_1 t F1(\tau_m) + \beta_2 t F2(\tau_m) + \varepsilon_t(\tau_m)$$

Où :

$$R_t(\tau_m) = F\beta t + \varepsilon_t(\tau_m) \qquad (1)$$

Avec :

- $\beta t = (\beta_0 t\,, \beta_1 t\,, \beta_2 t)'\,,\ F = (1, F1, F2)$
- $F1(\tau m) = \frac{1-e^{\left(\frac{-\tau m}{\lambda}\right)}}{\frac{\tau m}{\lambda}}$
- $F2(\tau m) = F1(\tau m) - e^{\frac{-\tau m}{\lambda}}$

$R_t(\tau_m)$ représente le taux observé à la période *t = 1…, T* pour la maturité τ_m, *m = 1…, n.*

Le vecteur βt est spécifié à l'aide d'un vecteur autorégressif d'ordre 1, $VAR(1)$ et son estimation est utilisée pour déterminer les taux à l'équation (1). D'où l'appellation d'équation de transition.

Cette technique fournit des estimations du maximum de vraisemblance et des estimations optimales filtrées et lissées des facteurs sous-jacents (*Diebold et al., 2006*). Cette procédure permet d'avoir des estimateurs plus efficaces.

3.3.5 Remarque sur l'utilisation des modèles de type Nelson-Siegel

Idée à développer : L'UFR découle du calibrage des modèles. Une vision alternative de ces modèles peut être de considérer que l'on connaît a priori l'UFR (et fixer les paramètres en conséquence dans le modèle de régression pour le calibrage).

3.3.6 Modèle de Waggoner

Le modèle de Waggoner (1997) utilise des splines cubiques lissés pour représenter la structure à terme du taux forward. Il s'agit d'un modèle de spline (*cf section 3.4.2*) complété d'un terme de régulation qui pénalise le spline par un critère de rugosité.

Dans ce modèle, on cherche à minimiser :

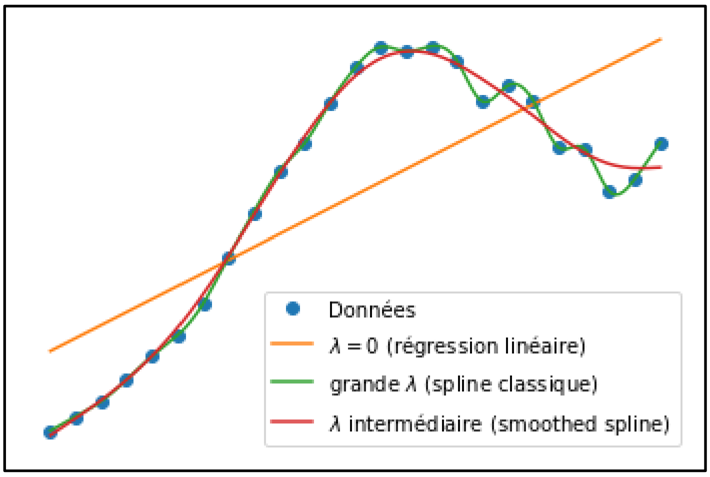
$$\sum_i \left(f(\tau_i) - f^*(\tau_i)\right)^2 + \int_0^{\tau_{max}} \lambda(t)\left(f''(t)\right)^2 dt$$

Où :

- $\left(f(\tau_i) - f^*(\tau_i)\right)^2$ est la différence au carré entre le taux observé sur le marché et le taux prédit par le modèle pour la maturité τ_i
- $\left(f''(t)\right)^2$ est le carré de la dérivée seconde de la fonction de taux. Ce carré représente la rugosité de la fonction sur la maturité t. On pondère l'importance de la rugosité en t par la fonction $\lambda(t)$ et on considère toutes les valeurs de t entre 0 et la maturité maximale.

Le premier terme a pour but de trouver une fonction qui passe au plus proche des données de marché et le deuxième terme cherche à minimiser la rugosité de cette fonction. Le compromis entre les deux contraintes est établi par la fonction $\lambda(t)$.

Pour mieux comprendre, considérons le cas $\lambda(t) = 0$. Dans ce cas, le spline passe par tous les points ce qui revient à une interpolation par spline classique (*voir 3.4.2*). Dans les cas où $\lambda(t)$ a une très grande valeur, on cherche une fonction peu rugueuse : une fonction qui n'a aucune rugosité est une droite qui passe entre les données (soit une régression linéaire). Avec des valeurs de $\lambda(t)$ intermédiaires, on obtient alors une fonction lissée qui offre un compromis entre erreur quadratique et rugosité.



La fonction $\lambda(t)$ est centrale dans le calibrage du modèle de Waggoner ; il peut s'agir d'une fonction constante (dans ce cas on parle du modèle de Fisher, Nychka, and Zervos (1995)), d'une fonction par paliers, ou d'une fonction paramétrique. Quand la fonction $\lambda(t)$ n'est pas constante, on utilise une fonction positive croissante. Elle est croissante car les données de marché sont habituellement de meilleure qualité pour les maturités courtes que l'on souhaite répliquer au mieux, et de moins bonne qualité pour les maturités plus longues où l'on peut dans ce cas préférer avoir une fonction lisse.

3.4 Méthodes d'interpolation

L'interpolation et le lissage sont deux méthodes fondamentalement différentes permettant de traiter la problématique de l'approximation de données. Ou encore, on doit approximer des résultats expérimentaux par une droite ou un autre type de polynôme, car ces derniers sont des fonctions simples qui peuvent être facilement manipulable mathématiquement.

L'objectif de cette partie est de présenter les différentes interpolations qui nous permettrons d'obtenir les valeurs des taux spot, forward ou des prix d'obligation zéro coupon pour toute maturité.

3.4.1 Interpolation linéaire par morceaux

Pour éviter les oscillations sur certaines fonctions, il est plus judicieux d'appliquer une interpolation polynomiale de faible degré par morceaux.

Dans cette interpolation, nous considérons qu'entre deux points, la valeur de la fonction vaut une constante, égale à la valeur du point précédent, du point suivant ou égale à la moyenne des valeurs des points encadrants. Cette interpolation est très facile mais elle peut être suffisante si le nombre de points est très important[1].

[1] Cours d'interpolation, intégration et dérivation numérique MPSI 1 LYCCE CARNOT (DIJON)

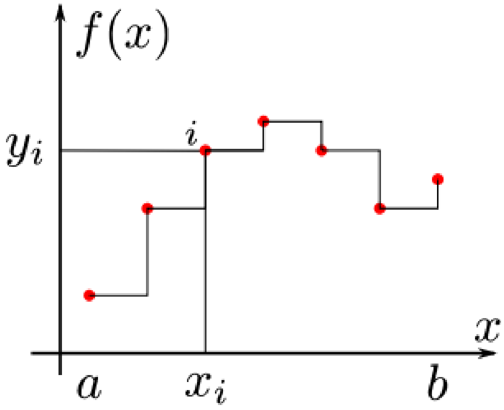


Figure 3 : Interpolation de degré 0

- **Interpolation linéaire par morceaux (degré 1)**

On prend l'équation basique $(ax + b)$ que nous allons adopter entre deux points successifs, passant évidement par les deux points :

$$\forall\, x \in [xi, xi+1], \qquad y = yi + (x - xi).\ \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

La fonction que nous allons obtenir est continue mais sa dérivée est incontinue.

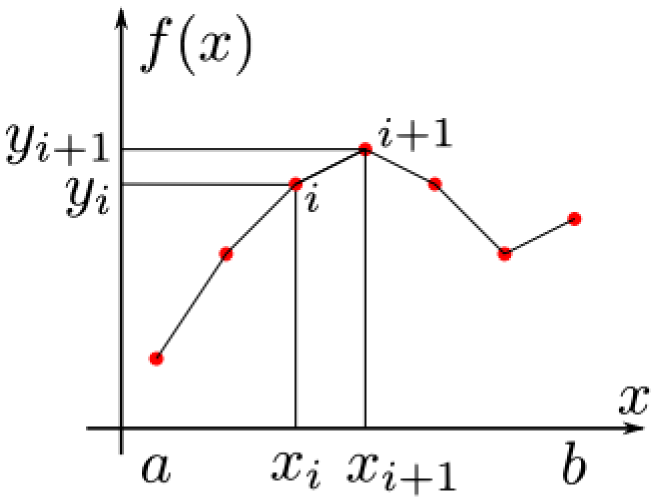


Figure 4 : Interpolation de degré 1

- **Interpolation quadratique par morceaux (degré 2)**

On prône l'équation $(ax^2 + bx + c)$ adoptée sur chaque intervalle regroupant 3 points successifs, passant par les 3 points.

La fonction obtenue est continue mais sa dérivée ne l'est pas car elle présente des discontinuités de la pente entre chaque portion de parabole. L'interpolation spline résout ce problème et assure une continuité C^1.

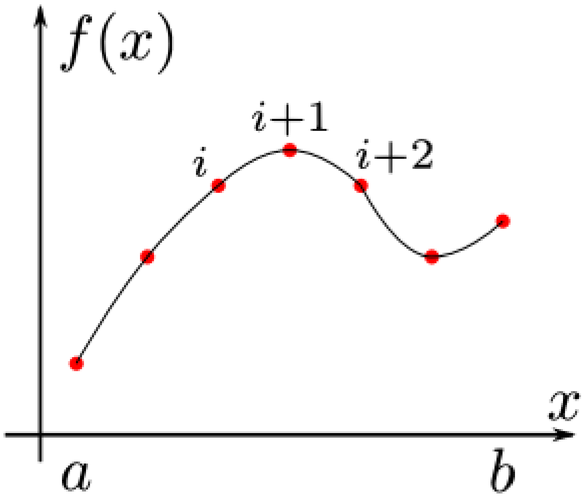


Figure 5 : Interpolation de degré 2

L'objectif de cette étude est de l'utiliser pour la construction de courbes des taux. L'interpolation linéaire se fait d'ailleurs selon l'objectif visé. En effet, si le modèle de projection sélectionné se base sur les prix des obligations zéro coupon, il est envisageable de réaliser l'interpolation sur ceux-ci et d'en déduire dans un second temps les taux spot.

Considérons que nous avons $N+1$ observations d'une notation à une même date à des maturités différentes. Cette grandeur pouvant être des prix d'obligation zéro coupons, des taux spot ou des taux forward. On note que chaque observation doit être liée à des obligations zéro coupon ayant les mêmes caractéristiques sauf pour leurs maturités. Nous supposons que τ est la durée séparant la date de valorisation et la date de maturité de l'obligation avec $\tau = T - t$.

Voici les formules s'appliquant en fonction de la notation considérée $\forall\, \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$:

- Interpolation des prix d'obligations zéro coupon :

$$\forall\, i = 0, \ldots, N-1 \qquad Z(\tau) = \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} Z(\tau_{i+1}) + \frac{\tau_{i+1} - \tau}{\tau_{i+1} - \tau_i} Z(\tau_i)$$

- Interpolation des taux spots :

$$\forall\, i = 0, \ldots, N-1 \qquad R(\tau) = \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} R(\tau_{i+1}) + \frac{\tau_{i+1} - \tau}{\tau_{i+1} - \tau_i} R(\tau_i)$$

- Interpolation des taux forward :

$$\forall\, i = 0, \ldots, N-1 \qquad f(\tau) = \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} f(\tau_{i+1}) + \frac{\tau_{i+1} - \tau}{\tau_{i+1} - \tau_i} f(\tau_i)$$

Notons que les résultats obtenus sont différents et dépendent de la notation retenue pour réaliser l'interpolation linéaire. En effet, supposons que nous travaillons sur les prix d'obligations zéro coupon, le prix zéro coupon de maturité τ sera donné à partir des prix observés à l'aide de la formule suivante :

$$\forall\, i = 0, \dots, N-1 \qquad Z(\tau) = \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i}\, Z(\tau_{i+1}) + \frac{\tau_{i+1} - \tau}{\tau_{i+1} - \tau_i}\, Z(\tau_i)$$

Rappelons les formules liant les taux *forward* et les taux *spots* aux prix des obligations zéro coupon :

$$f(t,T) = \frac{\partial}{\partial T}(-\ln Z(t,T)) \iff Z(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}$$

Nous déduisons des formules ci-dessous que les taux forward interpolés seront $\forall\, i = 0, \dots, N-1$ tel que $\forall t$:

$$f(\tau) = \frac{\partial}{\partial T}(-\ln Z(\tau))$$

$$f(\tau) = \frac{\partial}{\partial T}\left(-\ln\left\{\frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i}\, Z(\tau_{i+1}) + \frac{\tau_{i+1} - \tau}{\tau_{i+1} - \tau_i}\, Z(\tau_i)\right\}\right)$$

$$f(\tau) = \frac{Z(\tau_i) - Z(\tau_{i+1})}{(\tau - \tau_i)\, Z(\tau_{i+1}) - (\tau_{i+1} - \tau_i)\, Z(\tau_i)}$$

$$f(\tau) = \frac{e^{-\int_t^{T_i+t} f(t,u)du} - e^{-\int_t^{T_{i+1}+t} f(t,u)du}}{(\tau - \tau_i)\, e^{-\int_t^{T_{i+1}+t} f(t,u)du} - (\tau_{i+1} - \tau_i)\, e^{-\int_t^{T_i+t} f(t,u)du}}$$

Nous pouvons déduire les taux spot interpolés comme suit :

$\forall\, i = 0, \dots, N-1,$

$$R(\tau) = -\ln Z(\tau)/\tau$$

$$R(\tau) = -\frac{\ln\left[\frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i}\, Z(\tau_{i+1}) + \frac{\tau_{i+1} - \tau}{\tau_{i+1} - \tau_i}\, Z(\tau_i)\right]}{\tau}$$

$$R(\tau) = -\frac{\ln\left[\frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i}\, e^{-\int_t^{T_{i+1}+t} f(t,u)du} + \frac{\tau_{i+1} - \tau}{\tau_{i+1} - \tau_i}\, e^{-\int_t^{T_i+t} f(t,u)du}\right]}{\tau}$$

L'interpolation linéaire des taux est utilisée dans la mesure des taux spot avant de procéder à la projection de ceux-ci.

Nous utilisons une telle méthode pour sa simplicité et sa facilité à être implémentée informatiquement. La linéarité des grandeurs présentées ci-dessus peut être respectable lorsque l'on dispose de nombreuses observations. Cependant, elle est à éviter lorsque les maturités à disposition sont trop éloignées et que la courbe des taux entre deux maturités laisse apparaître des courbes non négligeables.

De plus, l’avantage de l'interpolation linéaire est qu’elle permet d'obtenir des valeurs pour la grandeur sélectionnée à toute maturité mais n'assure pas le lissage de la courbe. Néanmoins, la courbe des taux obtenue ne sera pas dérivable aux dates d'observations ce qui sera difficile lors de l'utilisation d'un modèle qui nécessite d’avoir la pente de la courbe des taux spot à toute date.

3.4.2 L'interpolation par splines

Les polynômes d'interpolation montrent des problèmes d'oscillation lorsque le degré est assez élevé et quand les fonctions à interpoler présentent des plateaux. En pratique il est rare que l'on utilise des polynômes de degré plus élevé que 4 ou 5, sans que ceux-ci deviennent mal représentés par la fonction, comme le démontre la figure suivante qui interpole avec un polynôme de degré 9.

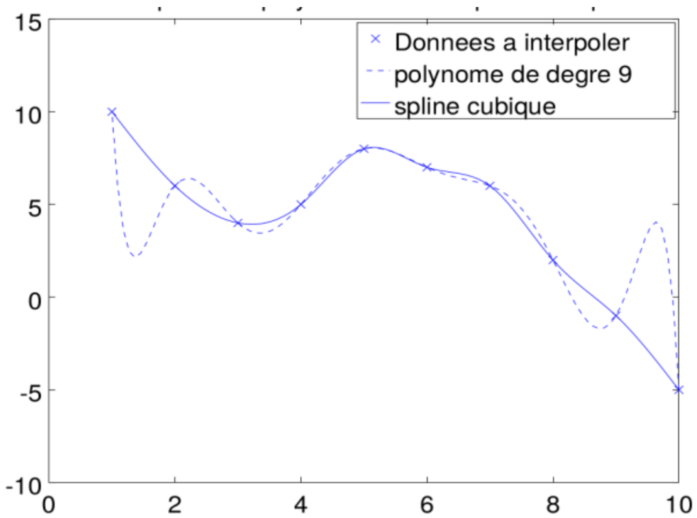


Figure 6 : Comparaison spline et polynôme

L'interpolation par splines permet de pallier la particularité des courbes obtenues à partir d'une interpolation linéaire telle que définie dans le paragraphe précédent. Cette méthode est un développement de l'interpolation linéaire par morceaux consistant à utiliser des polynômes de degrés supérieurs à 1 entre les différents points d'observation.

La régularité d'une courbe se mesurant à sa différentiablité, nous devrons nous assurer que la courbe obtenue est dérivable en tout point afin que toute la complexité du modèle liée à l'utilisation du polynôme de degré supérieur ou égal à 2 soit justifiée par rapport à l'utilisation de l'interpolation.

Supposons, comme vu dans le paragraphe, que nous disposons de N observations $x_i, \dots, x_N$ que nous souhaitons interpoler, où $\forall\, i = 0, \dots, N$, x_i représente l'observation n°i de maturité τ_i du prix d'une obligation zéro coupon, d'un taux spot ou d'un taux forward.

Nous posons que $s_{k,i}$ la spline de degré k correspond à l'intervalle $[\tau_i\, , \tau_{i+1}]$.

Les deux caractéristiques importantes qui nous permettrons de définir une spline sont les suivantes :

$$\forall\ i = 0, \dots, N-1,\ \ s_{k,i} = \ s_{k|[\tau_i,\tau_{i+1}]}\ avec\ s_k \in\ C^{K-1}[\tau_i\ ,\tau_{i+1}]$$

La spline d'ordre k, $s_{k,i}$, se calcule par la formule suivante :

$$\forall\ i = 0, \dots, N-1,\ \ s_{k,i} = \ \sum_{J=0}^{K} s_{j,i}\,(\tau - \tau_i)^j$$

Où les $(k+1)\ N$ coefficients $s_{j,i}$ sont les paramètres à calculer pour connaître l'entière structure des splines permettant l'interpolation des notations.

Afin d'identifier ces coefficients, différentes contraintes sont imposées :

- La première contrainte est la **contrainte de dérivabilité :** il faut que nous assurions la continuité des dérivées d'ordre $k-1$ aux points d'observations, puisque la continuité implique forcément la dérivabilité :

$$m = 0, \dots, K-1\ , \forall\ i = 0, \dots, N-1,\ \ s_{k,i-1}^{(m)}(\tau_i) = \ s_{k,i}^{(m)}(\tau_i)$$

avec $k(N-1)$ contraintes de dérivabilité.

- La deuxième contrainte est la **contrainte d'interpolation** : il faut s'assurer que l'interpolation passe bien par tous les points d'observation :

$$\forall\ i = 0, \dots, N,\ \ s_k(\tau_i) = \ (x_i)$$

avec $N+1$ contraintes d'interpolation.

Nous avons donc $k(N-1) + N + 1 = (k+1) - k + 1$ contraintes pour estimer $(k+1)\ N$ paramètres.
Pour $k \geq 2$, les $k-1$ paramètres restants seront déterminés à partir de contraintes ajoutées sur les dérivés des polynômes.

Trois types de contraintes additionnelles existent et sont définies à partir des formules suivantes en fonction de la parité et de l'ordre de la spline :

- Si k est impair : $k = 2l - 1$ et il y a donc $2l - 2$ degrés de libertés. Les contraintes sont les suivantes :

Interpolation périodique :

$$\forall m = 1 \dots 2l-2\ ,\ \ s_k^{(m)}(\tau_0) = \ s_k^{(m)}(\tau_N)$$

Interpolation naturelle :

$$\forall m = 1 \dots 2l-2\ ,\ \ s_k^{(m)}(\tau_0) = \ s_k^{(m)}(\tau_N) = 0$$

- Si k est pair : : $k = 2l$ et il y a donc : $2l - 1$ degrés de libertés. Les contraintes sont les suivantes :

Interpolation périodique :

$$\forall m = 1 \dots 2l - 1 \,, \quad s_k^{(m)}(\tau_0) = s_k^{(m)}(\tau_N)$$

Interpolation naturelle :

$$\forall m = 1 \dots 2l - 1 \,, \quad s_k^{(m)}(\tau_0) = s_k^{(m)}(\tau_N) = 0 \,, \qquad s_k^{(2l-1)}(\tau_0) = 0$$

Notons que certaines contraintes ne sont retenues uniquement lorsque $l \geq 2$.

3.4.3 Les splines cubiques

Lorsqu'on cherche à interpoler sur un segment $[a, b]$ une fonction f par un polynôme P, c'est-à-dire si on cherche un polynôme P tel qu'en certains points a_i, on ait $P(a_i) = f(a_i)$, alors un des problèmes rencontrés est le phénomène de Runge. Même en augmentant le nombre de points d'interpolation, l'approximation globale peut être mauvaise. En outre, le calcul du polynôme P devient compliqué, pouvant donner lieu à des erreurs d'arrondi.

Une autre idée consiste à utiliser plusieurs polynômes de bas degré sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, et de recoller ces polynômes pour définir une fonction sur l'intervalle tout entier. On va demander à la fonction de posséder un minimum de régularité (continuité, dérivabilité). Ces conditions entraînent une augmentation du degré des polynômes utilisés. Il faut alors trouver un bon compromis et la méthode qui se trouve être la plus communément adoptée est celle des splines cubiques.

Généralement la fonction des splines cubiques s'écrit de la manière suivante :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Les splines cubiques sont régulièrement utilisées car ils permettent d'avoir une approximation C^2(dérivée première continue d'ordre 1). Celles-ci sont en outre suffisamment régulières pour la construction de modèles de projection de courbes de taux.

Supposons que nous travaillons sur les taux spot et construisons à titre d'exemple une spline naturelle d'ordre 3 sur l'intervalle $[\tau_i \,, \tau_{i+1}]$ avec $i \in [0, N-1|]$:

$$\forall\, \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}, \; R(\tau) = R_i(\tau) = \sum_{J=0}^{K} s_{j,i}\,(\tau - \tau_i)^j$$

$$\forall\, \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}, \; R(\tau) = R_i(\tau) = s_{0,i} + s_{1,i}(\tau - \tau_i)^1 + s_{2,i}(\tau - \tau_i)^2 + s_{3,i}(\tau - \tau_i)^3$$

$$\forall\, \tau_{i-1} \leq \tau \leq \tau_i, \; R(\tau) = R_{i-1}(\tau) = s_{0,i-1} + s_{1,i-1}(\tau - \tau_{i-1})^1 + s_{2,i-1}(\tau - \tau_{i-1})^2 + s_{3,i-1}(\tau - \tau_{i-1})^3$$

La spline étant cubique (ordre $k = 3$), $(k+1)N = 4N$ contraintes doivent être déterminées. Nous devons donc déterminer 4 contraintes pour chacun des N intervalles $[\tau_i, \tau_{i+1}]$:

- Contraintes de dérivabilité :

$$\forall\, \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}, \quad R_{i-1}^{(1)}(\tau_i) = R_i^{(1)}(\tau_i)$$
$$\forall\, \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}, \quad R_{i-1}^{(2)}(\tau_i) = R_i^{(2)}(\tau_i)$$

- Contraintes d'interpolation :

$$\forall\, \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}, \quad R(\tau) = R_i(\tau) = x_i$$

En supposant que les splines construites soient des splines naturelles, il vient la dernière condition :

$$R^{(2)}(\tau_0) = R^{(2)}(\tau_N)$$

L'ensemble des 4 conditions ci-dessus suffisent à identifier les 4 coefficients $s_{0,i}, s_{1,i}, s_{2,i}, s_{3,i}$pour tout i dans l'intervalle $[|0, N-1|]$.

3.4.4 La différence entre interpolation linéaire et interpolation spline cubique

La méthode d'interpolation linéaire effectue un ajustement local en définissant une fonction Piecewise linéaire continue entre les points de données adjacents. Cependant, la méthode d'interpolation de spline cubique est un ajustement global. En effet, les méthodes globales utilisent tous les points donnés pour calculer simultanément tous les coefficients relatifs à tous les intervalles d'interpolation. C'est pourquoi, chaque point de donnée affecte la totalité de la spline cubique. Si vous déplacez un point, toute la courbe change en conséquence. De ce fait, il est plus difficile d'imposer une forme souhaitée à une spline cubique. Ceci est notamment visible sur les fonctions renfermant des parties linéaires ou des changements brusques dans la courbe.

La figure suivante montre un échantillonnage qui a été fait sur une fonction (cos(x²/9)). Nous avons pris 8 points (gauche) ou 40 points (droite) sur l'intervalle [0,10] et nous interpolons ensuite avec les deux méthodes.

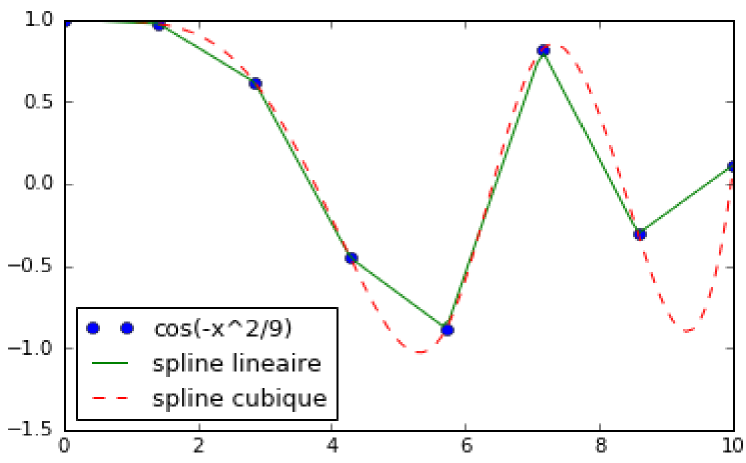


Figure 7 : Comparaison des splines cubique et linéaire

On constate que la spline cubique, avec un faible nombre de points, réussit à représenter avec une précision relativement bonne la forme de la fonction réelle alors que la spline linéaire s'éloigne considérablement de la forme réelle de la fonction.

3.5 Extrapolation

Les compagnies d'assurance se retrouvent régulièrement confrontées à la situation où la durée des engagements de leurs passifs est supérieure à celui des instruments financiers utilisés pour la construction de la courbe de taux. Dans cette situation, une extrapolation de la courbe des taux doit se faire.

La norme IFRS 17 ne préconise pas de méthodes particulières dans la réalisation de cet objectif. Néanmoins, on retrouve, dans le paragraphe 82, un point concernant l'utilisation du maximum possible des données de marché qui aura un impact sur l'extrapolation à travers la détermination du dernier point liquide **LLP** (*Last Liquid Point*).

Afin de déterminer ce LLP, deux approches se dessinent. Une première approche consiste à faire un parallèle avec Solvabilité II et à utiliser un LLP 20 ans comme le suggère l'EIOPA dans son papier sur la calibration de sa courbe de taux sans risque . L'autre approche consisterait à utiliser un ensemble de méthodes statistiques et de jugement d'expert pour définir ce point. Suite à la détermination du LLP, différentes méthodes d'extrapolations peuvent être envisagées.

3.5.1 Prolongements paramétriques

3.5.1.a Introduction

Une première approche consiste à utiliser des méthodes paramétriques pour extrapoler la courbe des taux. La méthode repose sur une observation des points disponibles pour les maturités en-dessous de 20 ans et l'application de méthodes d'adéquation des données. Autrement dit, on va chercher à estimer un certain nombre de paramètres d'une fonction prédéfinie en minimisant l'écart entre la fonction et les points déjà connus par la méthode des moindre carrés.

3.5.1.b Modèle

L'estimation des paramètres se résout par :

$$\tilde{\theta} = arg\,min\left\{\sum_{i=1}^{n}(g(x_i,\theta) - f(x_i))^2\right\}$$

La fonction f correspond aux observations et la fonction g correspond à la fonction que l'on veut approcher pour l'extrapolation, celle-ci dépendant de paramètres spécifiques.

La fonction g peut prendre différentes formes :

- Polynôme : $g(x,\alpha) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ …
- Log-linéaire : $g(x,a,b) = alog(x) + b$
- Puissance : $g(x,a,b) = a\,x^b$
- Exponentiel : $g(x,a,b) = a\,e^{bx}$

Une autre possibilité consiste à utiliser la méthode des splines cubiques pour extrapoler la courbe ce qui implique de prendre en paramètre d'entrée un taux fixe de long terme **UFR** (*Ultimate Forward Rate*), taux fixé par l'EIOPA chaque année. La méthode repose sur une interpolation polynomiale par morceaux : la spline peut alors changer de forme à chaque nœud. Cela permet une approximation plus précise de la courbe extrapolée.

Il est également possible de paramétrer g de sorte que $g^{(n)}(x_{llp}) = f^{(n)}(x_{llp})$ où x_{llp} est la dernière observation liquide **LLP** (*Last Liquidity Point*) et (n) la n-ième dérivée de chaque fonction avec $n \in \{0,1,\dots,N\}$. N dépend du nombre de paramètres de g.

3.5.1.c Critiques

D'un point de vue théorique, il est souhaitable que $\lim_{x\to\infty} g(x)$ soit une valeur finie qui correspondrait à son taux forward ultime. Ce n'est cependant pas le cas pour ces fonctions. On pourrait alors utiliser la fonction de Nelson et Siegel pour y palier, ou bien une autre fonction ayant un UFR.

3.5.2 Smith-Wilson

3.5.2.a Introduction

Nous allons nous concentrer à présent sur la méthode d'extrapolation de Smith-Wilson. Cette méthode est celle qui est mise en avant dans le cadre de la norme Solvabilité II par l'EIOPA. Elle repose sur 2 paramètres en entrée : un taux long terme **UFR** (*Ultimate Forward Rate*), et un taux de convergence $\boldsymbol{\alpha}$.

3.5.2.b Modèle

Dans son document sur la calibration de l'UFR , l'EIOPA propose de le définir comme étant la somme d'un taux réel attendu (correspondant à une moyenne des taux historiques réels) et un taux d'inflation attendu, déterminé à partir des projections de la banque centrale.

Cette approche consiste à ajuster une courbe à partir d'un nombre N d'observations sur le prix de zéro-coupons. On obtient, en sortie de modèle, une courbe d'évolution du prix $P(t)$ de notre zéro-coupon en fonction de la maturité de ce dernier. Puis dans un second temps, en utilisant la relation qui lie le taux d'intérêt au prix du zéro-coupon, on obtient une structure par terme de taux.

La mise en place de cette méthode nécessite de disposer de N instruments financiers et de J dates de paiement $u_1, u_2, \dots, u_j$.

Le modèle suppose que le prix du zéro-coupon s'exprime comme la somme du terme $e^{-UFR\times t}$ et d'une combinaison linéaire de N fonctions noyaux K_i :

$$P(t) = e^{-UFR\times t} + \sum_{i=1}^{N} \zeta_i \times K_i(t)$$

avec ζ, une série de paramètres calculés pour approximer la courbe de taux.

On définit les fonctions noyaux par l'expression suivante :

$$K_i(t) = \sum_{j=1}^{J} c_{i,j} \times W(t,u_j)\,, \qquad t > 0, \qquad i = 1,\dots,N$$

Avec :

- $\boldsymbol{c_{i,j}}$ qui correspond au cash-flow de l'instrument i au temps u_j

- $\boldsymbol{W(t, u_j)}$ qui sont les fonctions symétriques de Wilson définies comme suit :

$$W(t, u_j) = e^{-UFR \times (t+u_j)} \times \{\alpha \min(t, u_j) - 0{,}5 \times e^{-\alpha max\,(t,u_j)} \times (e^{\alpha min\,(t,u_j)} - e^{-\alpha min\,(t,u_j)})\}$$

Avec α le paramètre permettant de contrôler la vitesse de convergence des taux forward estimés vers le taux forward asymptotique.

Pour chaque instrument financier utilisé, on va pouvoir calculer une fonction de noyau. Ensuite, en incorporant la fonction de prix dans l'équation du prix de marché, on obtient un système linéaire à résoudre. La résolution de ce système va permettre de définir les paramètres ζ.

3.5.2.c Critiques

Notons que cette méthode est basée sur la résolution d'un système d'équations linéaires ce qui semble plus stable que la méthode de minimisation des moindres carrées utilisée dans la plupart des modèles de courbes de taux.

Cependant, la méthode est basée sur l'estimation de l'UFR et sur le fait que les taux forward devraient converger vers ce taux à long terme à une certaine vitesse α. L'estimation de la courbe extrapolée est très sensible à ces deux paramètres et de mauvaises hypothèses peuvent conduire à une estimation de la courbe bien différente.

3.5.3 Méthode alternative (révision de Solvabilité II)

3.5.3.a Introduction

Une nouvelle méthodologie pour l'extrapolation a été introduite fin 2020 par l'EIOPA à l'occasion de la révision 2020 de Solvabilité II. Cette méthodologie appelée « méthode d'extrapolation alternative » se rapproche de ce qui est envisagé par le marché français pour l'extrapolation sous IFRS 17. Elle utilise l'**UFR**, recalculé par l'EIOPA chaque année, ainsi qu'un **FSP** (*First Smoothing Point*), point à partir duquel l'extrapolation va être réalisée. Le FSP peut être différent du LLP.

Le but de cette nouvelle méthode introduite est de : «

I - Faciliter une évaluation appropriée du business assurantiel à long terme

II - Assurer une convergence fiable vers un niveau moyen à long terme (UFR)

III - Considérer de façon appropriée les contraintes particulières résultant de la législation nationale

IV - Atténuer l'impact des tumultes du marché à court terme sur la solvabilité des assureurs

V - Eviter la volatilité artificielle et contribuer à la stabilité du marché même en cas de situations de stress

VI - Considérer les relations entre marge de risque, VA et risque de taux d'intérêt

VII - Promouvoir la gestion des risques. »

AAE (2021). Extrapolation paper final.

Pour résumer, le but est de trouver un compromis satisfaisant entre introduire plus d'informations provenant directement du marché au-delà du **LLP** (*Last Liquid Point*) et limiter les impacts négatifs tels que la volatilité sur l'évaluation des passifs à long terme.

3.5.3.b Modèle

La formule d'extrapolation utilisée pour allonger la courbe calcule les taux forward instantanés à partir du FSP et pour toutes les maturités FSP + h avec h, les années post FSP. Ce calcul nécessite la connaissance de l'UFR, le choix d'un FSP, le choix d'un paramètre α qui détermine la vitesse de convergence vers l'UFR, ainsi que le calcul du **LLFR** (*Last Liquid Forward Rate*).

- L'**UFR** (somme du taux de croissance long terme et de l'inflation) et $\boldsymbol{\alpha}$ sont des données fournies par l'EIOPA, même si l'on peut tester les formules avec des données variables pour observer les impacts. (UFR = 3,45% en 2022 et α = 10% en général)

- Le **FSP** est choisi de manière à coïncider avec le moment où la disponibilité des obligations devient limitée. Ce moment est déterminé à l'aide du critère dit du volume résiduel. Il s'agit de considérer que le marché n'est plus profond et liquide lorsque le volume cumulé des obligations avec des maturités supérieures ou égales à la dernière maturité représente moins de 6% du volume total des obligations de marché. Actuellement, le FSP est de 20 ans comme le LLP. (Le LLP est lui défini sur la base de plusieurs critères dont le critère de volume résiduel mais aussi le critère d'ajustement ainsi que l'étude des volumes et nombres de transactions effectuées sur le marché des swaps et des obligations.)

- Le **LLFR** se détermine après choix du FSP et se calcule comme la moyenne pondérée des taux forward situés avant et après le FSP. Ces taux sont au nombre de 5 et sont considérés constants pour chacune des 5 périodes prises en compte : 15-20 ans, 20-25 ans, 20-30 ans, 20-40 ans et 20-50 ans. Les poids dépendent de la liquidité respective des taux (déterminés à partir de l'étude DLT annuelle de l'EIOPA).

Formule de calcul des taux forward par méthode d'extrapolation alternative :

$$f_{FSP,FSP+h} = ln(1 + UFR) + (LLFR - ln(1 + UFR)) \times B(a,h) \quad avec \quad B(a,h) = \frac{1 - e^{-ah}}{ah}$$

Une fois la courbe des taux extrapolée, il faut appliquer l'ajustement de volatilité **VA** (*Volatility Adjustment*) :

« L'EIOPA a identifié les principaux objectifs suivants qui peuvent être attribués à la VA :

1. Prévenir les comportements d'investissement pro-cycliques ;

2. Atténuer l'impact des exagérations des spreads obligataires sur les fonds propres ;

3. Reconnaître les caractéristiques d'illiquidité des engagements dans l'évaluation des provisions techniques. »

EIOPA (2020). Background document on the opinion on the 2020 review of Solvency II.

La VA est ici appliquée pour les maturités situées avant le FSP ainsi que pour le dernier taux forward situé avant le FSP (période 15-20 ans), qui est utilisé pour la détermination du LLFR, mais pas pour les taux forward situés après le FSP.

Pour les maturités situées avant le FSP :

$$f_{x,x+y}^{VA} = f_{x,x+y} + V$$

Calcul du LLFR après ajustement de la volatilité :

$$LLFR^{VA} = w_{20} \times f_{15,20}^{VA} + w_{25} \times f_{20,25} + w_{30} \times f_{20,30} + w_{40} \times f_{20,40} + w_{50} \times f_{20,50}$$

L'EIOPA a émis des recommandations en ce qui concerne le paramètre α de convergence vers l'UFR afin de limiter l'impact de l'introduction de la méthode. Ces recommandations modifient légèrement la valeur du paramètre qui est fixé à 10% à la base. Ces modifications pourront s'appliquer jusqu'en 2032 (fin de la période d'application des mesures transitoires). Ainsi, le paramètre prendra la valeur de :

- 10 % si le taux d'intérêt au FSP est supérieur ou égal à 0,5%
- X quand le taux d'intérêt au FSP est inférieur ou égal à -0,5% (X égal à 20% la première année puis décroissance linéaire jusqu'à 10% en 2032)
- une interpolation linéaire pour un taux d'intérêt au FSP situé entre -0,5% et 0,5%

3.5.3.c Critiques

La méthode alternative décrite par l'EIOPA a été choisie car elle présente des avantages comparée aux autres options qui avaient été initialement discutées afin de pouvoir construire une courbe de taux pour des maturités élevées. Les autres options proposées étaient : (avec utilisation de la méthode Smith-Wilson pour l'extrapolation)

1) Garder un **LLP à 20 ans** mais ajouter des contraintes supplémentaires au niveau des piliers 2 et 3 (notamment dans le reporting RSR + SFCR)
2) Augmenter le **LLP à 30 ans** (balance entre améliorer la market-consistency des provisions techniques et la gestion des risques et maintenir la stabilité des provisions techniques et des fonds propres)
3) Augmenter le **LLP à 50 ans** (coïncide avec le dernier point liquide en ne prenant en compte que le marché des swaps)

En réalisant différentes études, l'EIOPA a pu observer que le SCR global diminue beaucoup moins avec l'utilisation de la méthode alternative comparée aux autres options (12 points de pourcentage d'écart pour la méthode alternative contre 30 et 49 pour respectivement un LLP à 30 ans et 50 ans). On peut aussi noter que la duration et la convexité des passifs d'assurance calculées avec la courbe des taux de la méthode alternative coïncident mieux avec celles calculées par la méthode classique sans UFR que pour n'importe quelle autre option avec utilisation de la méthode Smith-Wilson.

Néanmoins, la méthode présente également quelques limites. On pourra notamment citer le fait que la méthode est très sensible au choix de l'UFR et du paramètre de vitesse de convergence α. Des études ont aussi montré que la méthode alternative est d'autant meilleure que le taux au FSP est proche de l'UFR. Enfin, la variation du LLFR implique une modification globale de l'extrapolation et le LLFR peut facilement varier, par exemple, en cas d'inversement de la structure de la courbe des taux swaps.

4. Prime d'illiquidité

4.1 Principes IFRS 17 (questions portefeuille de l'entreprise / de référence / mixtes)

La liquidité d'un actif représente sa capacité à être vendu facilement et rapidement sur le marché au prix égal à la valeur actualisée de ses flux de trésorerie futurs.

Les obligations d'états sont considérées comme les actifs les plus liquides du marché. Au contraire, les obligations du secteur privé sont souvent moins liquides car plus risquées (notamment à cause du risque de défaut de l'émetteur).

L'investissement de l'assureur dans des obligations d'entreprises privées traduit alors sa capacité à investir dans des actifs moins liquides et ainsi à prendre une plus grande part de risque. La prime d'illiquidité ajoutée au taux sans risque pour évaluer les passifs d'assurance peut donc être vue comme la différence de prix entre les obligations du secteur privé et du secteur public (obligations d'états).

Les passifs d'assurance sont couverts par des actifs présentant des caractéristiques similaires à ces passifs (illiquidité, maturité, monnaie). Compte tenu du fait que la prime est calculée dans un premier temps par rapport aux actifs détenus, on peut dire que la prime dépend de la nature des passifs.

Il y a trois choses à étudier avant d'appliquer une prime d'illiquidité :

- Déterminer le pourcentage maximal de la prime d'illiquidité des actifs à utiliser pour la valorisation des passifs
- Déterminer la granularité de la prime d'illiquidité pour les passifs (quel pourcentage allouer à chaque catégorie de passifs)
- Déterminer pour quelles maturités une prime est applicable

En ce qui concerne le premier point, le CEIOPS considère que 100% de la prime d'illiquidité des actifs peut être utilisé pour la valorisation des passifs mais que le pourcentage peut être plus faible en fonction de la nature des passifs. Toujours selon le CEIOPS, la prime devrait s'appliquer pour des maturités comprises entre 24 et 48 ans selon la devise mais ne devrait pas s'appliquer pour la partie extrapolée de la courbe.

On distingue alors trois classes de passifs pour l'application de primes d'illiquidité :

Pourcentage de prime attribué	50%	75%	100%
Type de contrats	Contrats non-vie en général, contrats vie sans participation aux bénéfices, contrats de réassurance	Contrats vie avec participation aux bénéfices en général, produits d'épargne pure, différents types de rentes	Rentes viagères et non viagères principalement

4.2 Données nécessaires

4.3 Approches envisageables

4.3.1 Méthode MCEV

4.3.1.a Introduction

Le **MCEV** (*Market Consistent Embedded Value*) est considéré comme la somme de l'actif net réévalué et de la **VIF** (*Value In Force*) du portefeuille d'entreprise. La VIF est elle-même déduite de la **PVFP** (*Present Value of Future Profits*) après prise en compte du coût du capital, des coûts des risques non couvrables et du coût des options et garanties. L'Embedded Value a été mise en place pour permettre une représentation fidèle de la valeur d'une compagnie d'assurance vie du point de vue de l'actionnaire.

4.3.1.b Modèle

Pour le calcul de la VIF, le CRO Forum mentionne un taux de référence, comme proxy pour le taux d'intérêt sans risque, adapté à la devise, échéance et liquidité des flux de passifs.

Les passifs sont segmentés en passifs liquides et non liquides. Pour les passifs non liquides, l'utilisation de la courbe des taux swaps à laquelle une prime d'illiquidité serait incluse est suggéré.

Une définition des passifs liquides est également mentionnée : passif avec des cash flows non prédictibles.

L'inclusion de la prime d'illiquidité doit se faire en cohérence avec les contraintes réglementaires, les contraintes internes à l'entreprise et avec la politique d'investissement. Ces éléments peuvent conduire à limiter la prise en compte d'une telle prime d'illiquidité.

La prime d'illiquidité, si au final, elle est incluse dans le calcul du taux de référence doit être évaluée à partir de données des marchés financiers.

Le CRF Forum précise également que l'utilisation des données Solvabilité II est possible (calibrage) :

- Courbe des taux sans risque
- Crédit risk adjustment
- Matching Adjustment
- Volatility Adjustment.

4.3.1.c Critiques

4.1.1 Approche Solvabilité II : le *Volatility Adjustement*

4.3.2.a Introduction

Le **VA** (*Volatility Adjustment*) a été introduit dans Solvabilité II à l'issue de l'étude branches longues.
L'objectif poursuivi était de prendre en compte les caractéristiques d'illiquidité des passifs d'assurance en limitant les variations importantes des spreads.
Le principe énoncé était le suivant : les entreprises qui ont des passifs longs peuvent les couvrir avec des actifs avec une prime d'illiquidité. Elles peuvent ainsi obtenir un rendement additionnel dans la mesure où elles ont des cash flows stables qui leur permettent d'investir avec un risque limité de ventes forcées.

4.3.2.b Modèle

Le VA actuellement en vigueur est constitué de 2 composantes : une composante devise et une composante pays. Le calcul des VA repose sur la prise en compte de portefeuilles d'actifs représentatifs des portefeuilles des assureurs (entreprises européennes pour le VA devise Euro, portefeuilles nationaux pour le VA pays), périodiquement mis à jour, établis à partir des données de reporting XBRL transmises par les entreprises d'assurance.
Les portefeuilles ainsi définis sont segmentés entre les emprunts d'état et les obligations corporate. La somme de ces deux composantes est différente de 100% pour tenir compte des actifs autres que les actifs de taux d'intérêt.

La mesure d'illiquidité est mise en œuvre en estimant le spread du portefeuille représentatif au-delà de la courbe des taux sans risque, corrigée de la portion attribuée au risque de crédit ou de défaut (spread fondamental). Cette portion est estimée à partir d'une moyenne long terme des spreads observés associé à une probabilité de défaut ou de baisse de notation des actifs.

Rendement du portefeuille représentatif = taux d'intérêt sans risque + spread fondamental + VA

avec VA = 65% * spread corrigé du risque de crédit

4.3.2.c Critiques

La méthode d'évaluation de cette prime d'illiquidité a fait l'objet de nombreuses critiques qui ont conduit à ce que sa refonte soit incluse dans la revue 2020 de Solvabilité II. Les principales critiques portent sur :

- Le coté figé des portefeuilles représentatifs dans le temps (duration et poids relatif des différents actifs) ;
- La divergence possible entre les portefeuilles représentatifs et les portefeuilles réels des assureurs produisant des phénomènes de sur ou sous compensation ;
- Le floor à 0 de la valeur des spreads ;
- **La non prise en compte des caractéristiques des passifs d'assurance ;**
- La mauvaise estimation de la correction pour risque ;
- La volatilité trop importante liée à l'activation ou non du VA pays sur les Fonds Propres des assureurs.

La proposition d'amendement de la Commission Européenne de septembre 2021 consiste à introduire dans la formule du VA devise un ratio mesurant les écarts de sensibilité à une variation des écarts de crédit entre les actifs et les passifs d'assurance d'une entreprise d'assurance. La valeur du ratio est comprise entre 0 et 1.

La formule du VA devient :

VA = 85% * ratio de sensibilité aux écarts de crédit * spread corrigé du risque de crédit

4.3.3 MEDAF

4.3.3.a Introduction

Le **MEDAF** (*Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers*) est une méthode qui consiste à évaluer le taux de rendement attendu d'un actif en fonction d'un risque systématique déterminé. Le but est de prévoir combien rapportera un actif sur la durée en fonction de l'offre et la demande attendues dans le cadre d'un marché à l'équilibre.

3.3.3.b Modèle

Le modèle se base sur la théorie de Markowitz développée en 1952 qui consiste à construire un portefeuille optimal au sens espérance-variance. Les rendements des actifs considérés sont supposés gaussiens et se situent sur la frontière efficiente ce qui signifie que toute autre allocation conduit à une espérance de gain identique avec un portefeuille plus risqué ou une espérance de gain plus faible pour un portefeuille de risque identique.

Le modèle se résume alors par les équations :

$$E[R_i] = R_f + \beta_i(E[R_m] - R_f)$$

$$\beta_i = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_m}\frac{\sigma_m}{\sigma_i}$$

Avec :

- $\boldsymbol{R_i}$: la rentabilité d'un titre ou portefeuille quelconque i risqué
- $\boldsymbol{R_f}$: la rentabilité d'un actif sans risque
- $\boldsymbol{\beta_i}$: le coefficient de volatilité sectorielle
- $\boldsymbol{R_m}$: la rentabilité moyenne du marché
- $\boldsymbol{E[R_m] - R_f}$: la prime de risque de marché

Il repose sur les hypothèses suivantes :

- Marché de concurrence pure et parfaite
- Les investisseurs mesurent le risque par la variance du rendement uniquement
- Les achats et ventes à découvert sont possibles et sans conséquence sur le cours du titre
- Les emprunts au taux sans risque sont possibles sans limite
- Unicité de l'horizon de placement des investisseurs

D'autres facteurs autre que le coefficient $\boldsymbol{\beta_i}$ peuvent expliquer le rendement d'un actif coté. En effet, si les investisseurs achètent des obligations corporate à une petite ou moyenne entreprise, cela peut les pousser à demander un rendement qui dépasse celui des grandes entreprises en prenant en compte, dans le calcul du MEDAF, une prime dite de taille.

L'existence d'une telle prime est justifiée par le fait que les petites et moyennes entreprises sont plus fortement exposées aux variations du cycle économique, exposition non totalement prise en compte dans le calcul classique du MEDAF. Deuxièmement, les investisseurs qui acquièrent ce genre de titres supportent des coûts de liquidité plus importants et c'est ce coût d'illiquidité qui expliquerait en partie la mise en place d'une prime de taille.

Le modèle s'écrit alors :

$$E[R_i] = R_f + \beta_i\left(E[R_m] - R_f\right) + R_s$$

Avec $\boldsymbol{R_s}$: la prime de risque spécifique.

La prime de taille peut être évaluée de plusieurs manières différentes mais la meilleure reste l'approche historique. L'observation des données du passé sur les rendements ajusté du risque de petites et moyennes entreprises permet de faire émerger une prime de taille. Deux études ont déjà été menées sur le sujet : l'une par Morningstar sur des données de sociétés américaines depuis 1926, l'autre par Duph & Phelps sur des données depuis 1963, en excluant les sociétés ayant fait une entrée en bourse récente, et en effectuant une régression linéaire pour lisser les observations obtenues par taille.

Le choix de l'une ou l'autre des études dépend des critères affectés aux recherches effectuées comme la plage de temps ou l'inclusion de sociétés ayant des rendements inférieurs à ceux prévus par la MEDAF du fait de leur entrée récente en bourse.

3.3.3.c Critiques

Premièrement, les hypothèses prises pour la définition du modèle sont jugées trop restrictives et ont été allégées par les suite. De plus, certains tests empiriques ont permis de montrer que ce ne modèle ne pouvait pas expliquer tous les effets qui existent sur le marché. Enfin, le modèle ne prend pas en compte les taxes ni les transactions.

5. Appréciation et gouvernance

Bonnes pratiques, validation & revue :

Dans le travail de détermination de la courbe des taux pour les contrats d'assurance comptabilisés selon IFRS17, il est clé que des postulats de principe portés par IFRS17.B68 soient respectés, à savoir :

1. Les taux d'actualisation utilisés ne doivent pas aller à l'encontre des données de marché pertinentes disponibles et les variables, autres que de marché, utilisées ne doivent pas aller à l'encontre des variables de marché observables ; et
2. Il doit être tenu compte des conditions actuelles du marché du point de vue d'un intervenant de ce marché.

Les principaux écueils suivants doivent être évités et documentés :

1. Le taux d'actualisation utilisé ne reflète pas le taux sans risque et la prime d'illiquidité ;
2. Il est fait une utilisation inappropriée d'hypothèses dans la fixation du taux d'actualisation (par exemple, taux à terme ultime, prime d'illiquidité, écarts de crédit, etc.) ;
3. Des taux d'actualisation incorrects sont entrés dans le(s) modèle(s) ;
4. Des données incohérentes/incomplètes du portefeuille d'actifs détenus/du portefeuille de référence utilisé sont employées ;
5. Les flux de trésorerie qui varient en fonction des rendements de tout sous-jacent financier n'ont pas été actualisés à l'aide de taux reflétant cette variabilité ; ou n'ont pas été ajustés pour l'effet de cette variabilité ;
6. Les estimations des taux d'actualisation ne sont pas cohérentes avec les autres estimations utilisées pour évaluer les contrats d'assurance, créant ainsi des doubles comptages ou des omissions.

Lors de la détermination des taux d'actualisation, il convient d'évaluer la pertinence des taux d'intérêt utilisés par exercice comptable et d'apprécier les changements par rapport à la période précédente. Il convient également de vérifier qu'une approche ascendante ou descendante est utilisée de manière cohérente pour les groupes de contrats d'une période à l'autre.

Pour une approche ascendante :

a) Évaluer le taux sans risque pour la période observable en se référant aux points de données de marché liquides
b) Pour la période non observable, évaluer l'extrapolation vers un taux à long terme (taux à terme ultime).
c) Pour la prime d'illiquidité, évaluer si la technique utilisée pour dériver la prime d'illiquidité est raisonnable et justifiable et si l'illiquidité est appropriée en fonction du profil de liquidité du produit sous-jacent dans le groupe de contrats. Envisager la possibilité d'une analyse comparative par rapport au marché et/ou d'un nouveau calcul.

Pour une approche descendante :

a) Evaluer les actifs de référence ou les actifs propres pour déterminer s'ils sont compatibles avec le portefeuille qui serait utilisé pour soutenir le groupe de contrats d'assurance.
b) Évaluer les ajustements pour les risques de crédit et autres risques inhérents au portefeuille de référence ou aux actifs propres. Le cas échéant, évaluer l'extrapolation vers le taux à long terme.

En cas d'usage de portefeuilles réplicants, il convient d'évaluer si le portefeuille sélectionné est raisonnable et justifiable.

Enfin, il convient de mener une analyse comparative par rapport au marché et/ou aux informations internes et vérifier que l'entrée des taux d'actualisation dans le(s) modèle(s) est correctement appliquée.

En matière d'actuariat, les guidances suivantes sont à respecter :

ISAP4 :

1. Compte tenu des jugements mis en œuvre notamment, d'une part, pour apprécier les données de marché les plus pertinentes, au vu notamment de liquidité limitée et, d'autre part, des différentes méthodes de lissage disponibles et de leurs coefficients de paramétrage, l'actuaire doit s'assurer, dans le cadre de la mise en œuvre d'une norme comptable internationale, de sa compréhension et de sa maîtrise des notions de matérialité dans le cadre de son travail d'actuaire, de sa participation à l'élaboration d'états financiers comptables et de leur audit ;
2. En matière d'estimation des taux d'actualisation pour des périodes au-delà de celles pour lesquelles des données observables provenant d'un marché actif sont disponibles, l'actuaire devrait tenir compte de l'évolution prévue des taux actuels au fil du temps en utilisant les meilleurs renseignements disponibles dans les circonstances, y compris les prix du marché observables ;
3. Dans le cadre des contrats d'assurance comptabilisés selon le modèle VFA, l'actuaire doit tenir compte de la politique d'investissement de l'entité, telle qu'elle est appliquée dans la pratique, en tenant compte des communications de l'entité aux différentes parties prenantes et, le cas échéant, le comportement prévu des assurés. De plus, s'il ne retient qu'un portefeuille de référence, l'actuaire doit apprécier si celui-ci ne diverge pas, à chaque pas de temps, du portefeuille réellement détenu ;
4. Pour l'estimation de la prime d'illiquidité, l'actuaire doit apprécier la robustesse et la pertinence de l'approche retenue quelles que soient les diverses conditions de marché afin de refléter l'illiquidité des flux de trésorerie sous-jacents aux passifs concernés ;
5. En matière d'ajustements au titre des primes de marché, de défaut ou assimilées, l'actuaire doit considérer les méthodes possibles de calcul de ces ajustements aux taux de marché observés. Les méthodes comprennent les techniques listées dans ce document (celles fondées sur le marché, des techniques de modèles structurels et des techniques de pertes de crédit attendues / inattendues notamment) ;
6. L'actuaire doit s'assurer de documenter et divulguer les changements d'estimations, d'hypothèses ou de méthodes, leurs raisons e.g. changement de processus, leurs justifications et leurs impacts ;

ISAP1 :

7. Lors de la construction du modèle ou des modules sous-jacents (sélection, modification, élaboration ou utilisation) à la construction de la courbe des taux d'actualisation, l'actuaire doit s'assurer de la gouvernance en place afin qu'il existe un cadre de gestion des risques de modèle approprié qui traite de l'identification des risques de modèle, de l'évaluation de ces risques et des actions appropriées pour atténuer ces risques, telles qu'une validation de modèle adéquate, une documentation et des contrôles de processus ;
8. Afin de s'assurer de la validation appropriée du modèle, celle-ci doit s'attacher à des évaluations selon lesquelles :
    a. Le modèle correspond raisonnablement à l'usage auquel il est destiné. Les éléments que l'actuaire devrait considérer, le cas échéant, comprennent la disponibilité, la granularité et la qualité des données et des intrants requis par le modèle, la pertinence des relations reconnues et la capacité du modèle à générer une gamme appropriée de résultats autour des valeurs attendues ;
    b. Le modèle est conforme à ses spécifications ; et
    c. Les résultats du modèle peuvent être reproduits de manière appropriée.

    La validation doit être effectuée par une ou des personnes qui n'ont pas développé le modèle, à moins que cela n'impose une charge disproportionnée par rapport au risque du modèle ;
9. L'actuaire doit comprendre le contexte dans lequel le modèle sera utilisé, comment les données du modèle seront fournies et comment l'actuaire s'attend à ce que les résultats du modèle soient utilisés ;
10. Lors de la sélection d'un modèle, l'actuaire doit :
    a. Comprendre le modèle ;
    b. Comprendre les conditions dans lesquelles il convient d'utiliser le modèle, y compris les limites du modèle ;
    c. Être convaincu qu'il existe une documentation adéquate sur la construction et le fonctionnement du modèle (y compris, le cas échéant, la portée, l'objectif, la méthodologie, la qualité statistique, l'étalonnage et l'adéquation à l'usage prévu), et des conditions dans lesquelles il est approprié d'utiliser le modèle, y compris toutes les limites du modèle ;
11. Lors de la modification d'un modèle existant, l'actuaire doit :
    a. Comprendre le modèle ;
    b. Documenter, le cas échéant, les modifications apportées à la portée, l'objectif, la méthodologie, la qualité statistique, l'étalonnage, l'adéquation à l'usage prévu et les conditions dans lesquelles il convient d'utiliser le modèle, y compris toutes les limites du modèle.
    c. S'assurer qu'un processus de contrôle des modifications approprié est en place afin d'éviter les modifications non autorisées du modèle, de documenter toutes les modifications apportées et de permettre d'annuler, le cas échéant, toutes les modifications ;
12. Lors de l'élaboration d'un nouveau modèle, l'actuaire doit :
    a. Documenter, le cas échéant, la conception, la construction et le fonctionnement du modèle (y compris, le cas échéant, la portée, l'objectif, la méthodologie, la qualité statistique, l'étalonnage et l'adéquation à l'usage prévu), et les conditions dans lesquelles il est approprié d'utiliser le modèle, y compris toutes les limitations du modèle ;
13. Lors de l'utilisation d'un modèle, l'actuaire doit :
    a. Comprendre le modèle ;
    b. S'assurer que les conditions d'utilisation du modèle sont remplies ;
    c. S'assurer qu'il existe des contrôles appropriés sur les entrées et les sorties du modèle ;
    d. Considérer chaque fois que le modèle est utilisé, si la validation doit être menée en tout ou en partie ;
    e. Comprendre et, le cas échéant, expliquer les différences importantes entre les différentes exécutions du modèle et s'assurer qu'il existe un processus de contrôle adéquat pour les exécutions de production. Dans le cas de modèles stochastiques, il doit s'assurer qu'un

nombre suffisant d'exécutions du modèle sont effectuées et comprendre les différences matérielles entre les différentes exécutions du modèle ;

f. Comprendre les actions de gestion ou les réponses supposées dans le modèle et déterminer si des changements au modèle sont nécessaires ;

g. Documenter, le cas échéant, les limites, les intrants, les hypothèses clés, les utilisations prévues et les résultats du modèle ;

14. L’actuaire s’assure que les informations à disposition des utilisateurs prévus du modèle ou de ses résultats soient en mesure de comprendre :
    a. Les limites et incertitudes, et leurs implications ; et
    b. Les actions ou réponses de gestion supposées dans le modèle, et leurs implications.

En matière d’audit, la norme ISA540 (Audit des estimations comptables et des informations y afférentes) fixe le cadre des travaux, ainsi que les recommandations du GGPC.

BIBLIOGRAPHIE

Principes IFRS 17 :

[1] IASB (2020). *IFRS 17 Insurance Contracts.*

[2] IASB (2017). *IFRS 17 Effects Analysis.*

[3] EIOPA (2018). *EIOPA's analysis of IFRS 17 insurance contracts.*

[4] IASB (2017). *IFRS 17 standards project summary.*

Les données :

https://www.eurex.com/ec-en/clear/clearing-volume

https://www.lch.com/services/swapclear/volumes

Mesures de liquidité :

[5] Bulpitt, T. *IFRS 17 : liquidity characteristics of insurance liabilities.*

Modèles de taux d'intérêt :

[6] Brigo, D. and Mercurio, F. (2006). *Interest rate models – Theory and practice*. Springer, 2 edition.

[7] Hull, J. (1997). *Options, futures and other derivatives, 3rd edition.* Prentice-Hall, New Jersey.

[8] Musiela, M. and Rutkowski, M. (1998). *Martingale Methods in Financial Modeling.* Springer, Berlin.

[9] Planchet, F., Thérond, P., and Juillard, M. (2011). *Modèles financiers en assurance. Analyses de risques dynamiques, 2e édition.* Economica, Paris.

[10] Planchet, F., Thérond, P., and Kamega, A. (2009). *Scénarios économiques en assurance.* Economica, Paris.

[11] Roncalli, T. (1997). *La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique : application à la structure par terme française du 10 février 1994 au 30 août 1996.* PhD thesis, Université Montesquieu, Bordeaux IV.

[12] Smith, A. and Wilson, T. (2001). *Fitting yield curves with long term constraints.* Technical report, Bacon and Woodrow.

[13] Laurent, J.-P., Norberg, R., and Planchet, F. editors (2016). *Modelling in life insurance – A management perspective.* EEA series. Springer international publishing.

Méthodes paramétriques d'interpolation :

[14] Ng Liething, A.; Pieren, M.; Du Chouchet, P. and Gauville, R. (2015/2016). *Création d'un outil de couverture de taux d'intérêt en ligne.*

[15] Gbongué, F. (2019). *Amélioration de la méthodologie de construction de la courbe des taux sans risque dans la zone UEMOA.*

[16] Monferrini, J. (2018). *Projection des taux négatifs sous la probabilité monde réel.*

[17] Réginald Baron, S. (2016). *Implémentation de la simulation de Monte-Carlo au modèle dynamique de Nelson-Siegel.*

[18] EIOPA (2019). *Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures.*

[19] Haguet, E. (2012). *Mémoire : Calibrage d'un modèle de taux gaussien à 2 facteurs.*

Extrapolation :

[20] Society of actuaries. (2019). *Méthodes d'évaluation des flux de trésorerie qui dépassent la courbe de rendement maximale.*

[21] EIOPA (2022). *On the calculation of UFR.*

[23] AAE (2021). *Extrapolation paper final.*

[24] S. Hagan, P.; West G. (2008). *Interpolation Methods for Yield Curve Construction.* WILMOTT magazine.

[25] Bodin, M. ; Malal-Burguete, M. ; Payen, K. (2014/2015). *Construction de la courbe des taux Swap Solvabilité II.* Rapport de bureau d'études EURIA.

[26] Bossy, M. (2013). *Introduction à la modélisation financière en temps continue & Calcul Stochastique.*

[27] MPSI 1 Lycée Carnot (Dijon). *Cours d'interpolation, intégration et dérivation numérique.*

Prime d'illiquidité :

[28] CEIOPS (2010). *Task Force Report on the Liquidity Premium.*

[29] Society of actuaries. (2010). *Calculating liquidity premiums for insurance contracts.*

[30] EIOPA (2011). *Report on the fifth Quantitative Impact Study QIS5 for solvency II.*