

# Défis méthodologiques des risques émergents : risques extrêmes et assurance paramétrique

**Nisrine MADHAR**

**Market Stress test quantitative analyst**

**Natixis**

**Maud THOMAS**

**Professeure des Universités**

**ISFA - Université Lyon 1**

**Daniel NKAMENI**

**Doctorant/Consultant en Actuariat**

**Detralytics**

# Risques émergents et risques extrêmes

**Risques émergents** : un risque nouveau, ou connaissant une évolution nouvelle.

➤ Exemples :

- risque épidémiologique (ancien mais avec survenance brutale d'un contexte nouveau)
- risque climatique (évolution diffuse)
- risque cyber (nouveau dans sa nature)

➤ Problème d'assurabilité :

- l'évolution nécessite l'ajustement des modèles
- on souhaite assurer de nouveaux risques (publics nouveaux, ou périmètre nouveau)

**Risques extrêmes** :

- La perte est très élevée, dépasse un seuil élevé
- Peu de données au-dessus de ce seuil
  - Inférence basée uniquement sur une fraction (potentiellement faible des données)
- Adapter les méthodes classiques

# Plan de l'atelier

## I. Évaluation des risques extrêmes grâce à la simulation de points extrêmes

1. Motivation
2. Mesures de risque extrême
3. Vecteur de Pareto généralisée multivariés
4. Clé de l'algorithme
5. Résultats numériques

## II. Un cadre optimal d'assurance paramétrique pour les pertes extrêmes

1. Aperçu de l'assurance paramétrique
2. L'assurance paramétrique est-elle une solution ?
3. Approche mathématique
4. Illustrations

# Partie 1

## Évaluation des risques extrêmes grâce à la simulation de points extrêmes

# Évaluation des risques extrêmes grâce à la simulation de points extrêmes

## Introduction

- **Objectif:** Le but est de quantifier le plus précisément possible la perte que peut atteindre un facteur de risque cible  $X_j$  sous des conditions extrêmes à travers l'estimation de tail risk metrics (TRMs)
- **Contraintes:**
  - Les TRMs sont calculés à des **niveaux extrêmes**
  - Sur un ensemble de facteurs de risque présentant une certaine dépendance notée
  - $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_d)$
  - Tirer parti de la dépendance de  $\mathbf{X}$  pour quantifier le risque de  $X_j$
- **Méthodologie:** *Simulation d'événements extrêmes multivariés* pour permettre une évaluation du risque extrême univarié en tenant compte de la dépendance.

# Évaluation des risques extrêmes grâce à la simulation de points extrêmes

## Approche proposée

- **Deux algorithmes de simulation non paramétriques d'extrêmes multivariés étendant la procédure développée par Legrand et al. (2023)**
  - « *Simulation conditionnelle des extrêmes multivariés* » permettant d'inférer des quantités liées à certaines distributions conditionnelles
  - « *Simulation jointe des extrêmes multivariés* » facilitant l'estimation des TRMs
- **Principales contributions des approches non paramétriques proposées:**
  - Elargir le nombre d'observations au-delà d'un niveau extrême
  - Assurer des estimations plus fiables
  - Permettre l'extrapolation au-delà des niveaux de données observées

# Évaluation des risques extrêmes grâce à la simulation de points extrêmes

## Mesures de risque extrême

➤ Les TRMs d'intérêt sont définis ci-dessous:

- L'**Expected Shortfall** (ES) au niveau  $\alpha \in (0,1)$  est définie comme suit

$$ES_{\alpha}(X_j) = \mathbb{E}[X_j | X_j > VaR_{\alpha}(X_j)] = \frac{1}{\alpha} \int_{VaR_{\alpha}(X_j)}^{\infty} x f_j(x) dx,$$

où  $VaR_{\alpha}(X_j) = \inf\{x \in \mathbb{R}: \mathbb{P}(X_j > x) \leq \alpha\}$  avec  $\alpha = \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

- **La limitation de l'ES** réside dans son évaluation univariée du risque qui **ignore la dépendance** que  $X_j$  pourrait présenter avec d'autres facteurs de risque.
- Deux **TRMs alternatifs** ont été considérés tenant compte de la **dépendance** dans leur **évaluation univariée** d'un facteur de risque cible  $X_j$

# Évaluation des risques extrêmes grâce à la simulation de points extrêmes

## Mesure de risque extrême

- La *multivariate marginal expected shortfall* (MES) de  $X_j$  au niveau  $\alpha$  est définie comme

$$MES_{\alpha}(X_j; \mathbf{X}) = \mathbb{E}[X_j | \mathbf{X}_{-j} \geq \mathbf{v}_{-j}^{\alpha}] = \int_{\mathbb{R}} x_j f_{X_j | \mathbf{X}_{-j} \geq \mathbf{v}_{-j}^{\alpha}}(x_j) dx_j,$$

où  $\mathbf{v}^{\alpha} = \mathbf{VaR}_{\alpha}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^d$  et  $f_{X_j | \mathbf{X}_{-j} \geq \mathbf{v}_{-j}^{\alpha}}(x_j)$  désigne la densité conditionnelle de  $X_j$  sachant  $\mathbf{X}_{-j} \geq \mathbf{v}_{-j}^{\alpha}$ .

- La définition de Goegebeur et al.(2024) concernant la *dependent conditional tail expectation* (DCTE) dans le cadre bivariée a été étendue au cas multivarié

$$DCTE_{\alpha}(X_j; \mathbf{X}) = \mathbb{E}[X_j | \mathbf{X} \geq \mathbf{v}^{\alpha}] = \int_{\mathbb{R}} x_j f_{X_j | \mathbf{X} \geq \mathbf{v}^{\alpha}}(x_j) dx_j.$$

# Évaluation des risques extrêmes grâce à la simulation de points extrêmes

## Vecteurs de Pareto généralisée multivariés

➤ Soit  $X$  un vecteur aléatoire de dimension  $d$ , le **vecteur d'excès** est défini comme

$$Z = X - u \mid X \not\leq u$$

où  $u \in \mathbb{R}^d$  est un **vecteur de seuils soigneusement choisis** et  $\not\leq$  signifie qu'au moins une composante de  $X - u$  est positive.

➤ Rootzén et al. (2018) ont montré qu'un vecteur **MGP standard (sMGP)**  $Z$  peut être **décomposé** comme suit

$$Z = E + T - \max(T), \quad (1)$$

où  $E$  est une **variable exponentielle unitaire** et  $T$  un **vecteur aléatoire** de dimension  $d$  indépendant de  $E$ .

➤ Tout vecteur  $X$  peut être transformé en un vecteur sMGP en suivant les étapes décrites ci-dessous

1. **Standardiser** les données  $X$  à des **marges exponentielles**  $X^E$ ,

$$X_j^E = \log\left(\left(1 - F_j(X_j)\right)\right), \text{ for } j = 1, \dots, d,$$

où  $F_j$  la fonction de répartition associée au  $j$ -ème facteur de risque pour  $j = 1, \dots, d$ .

2. Calculer le **vecteur d'excès multivariés** comme défini dans Rootzén and Tajvidi (2006)

$$Z = X^E - u^E \mid X^E \not\leq u^E,$$

où  $u^E$  est vecteur de seuils soigneusement choisis sur l'échelle exponentielle.

# Évaluation des risques extrêmes grâce à la simulation de points extrêmes

## Base fondamentale de l'algorithme

- A partir de l'équation (1), la **base fondamentale** de l'algorithme est dérivée en considérant simplement la différence multivariée suivante

$$\Delta^{j,k} = Z_j - Z_k = T_j - T_k, \text{ for all } j, k = 1, \dots, d \quad (2)$$

- L'équation (2) peut être réécrite comme suit

$$Z_j = E + \sum_{k=1, k \neq j}^d \Delta^{j,k} \prod_{\ell=1, \ell \neq k}^d \mathbb{1}_{\Delta^{\ell,k} < 0} \text{ for all } j, k = 1, \dots, d \quad (3)$$

où  $\mathbb{1}$  désigne la fonction indicatrice.

- Exemple pour  $d = 2$ , en considérant  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$  and  $\mathbf{T} = (T_1, T_2)$  suivant l'équation(3) on obtient

$$\begin{cases} Z_1 = E + T_1 - \max(\mathbf{T}) \\ Z_2 = E + T_2 - \max(\mathbf{T}) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} Z_1 = E + \Delta \mathbb{1}_{\Delta < 0} \\ Z_2 = E - \Delta \mathbb{1}_{\Delta \geq 0} \end{cases}$$

avec  $\Delta := Z_1 - Z_2 = T_1 - T_2$ .

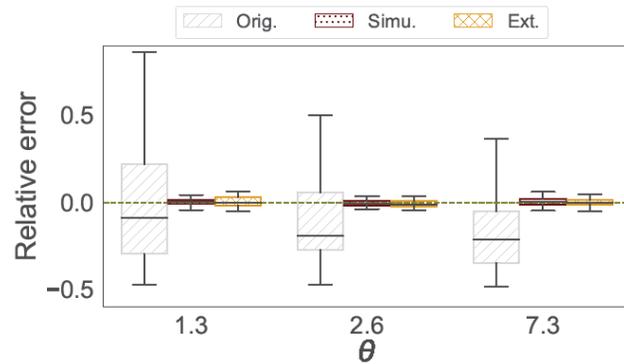
# Évaluation des risques extrêmes grâce à la simulation de points extrêmes

## Cadre de simulation

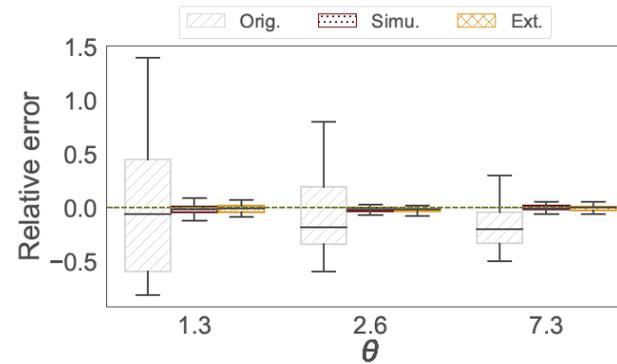
- Soit  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  un vecteur aléatoire avec des marginales suivant des lois de Student
- Une **hypothèse sous-jacente** de notre algorithme de simulation est qu'il existe une certaine **dépendance** entre les **composantes** de  $\mathbf{X}$
- Pour que cette hypothèse soit vérifiée la copule de **Gumbel** (Nelsen, 2006) a été considérée
- Les tests numériques sont réalisés sur des ensembles de données simulées  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{1500 \times 3}$ , avec  $\nu_1 = 2, \nu_2 = 3$  et  $\nu_3 = 2.5$ .

# Évaluation des risques extrêmes grâce à la simulation de points extrêmes

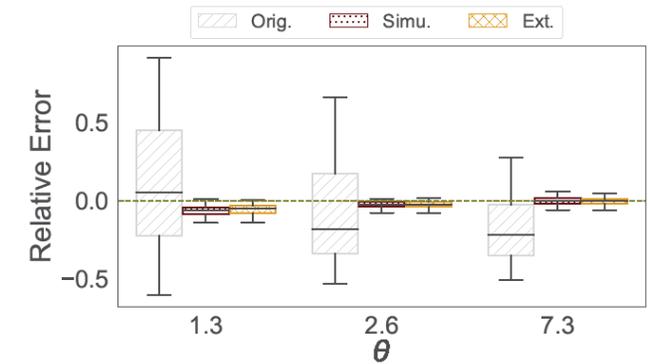
## Résultats numériques



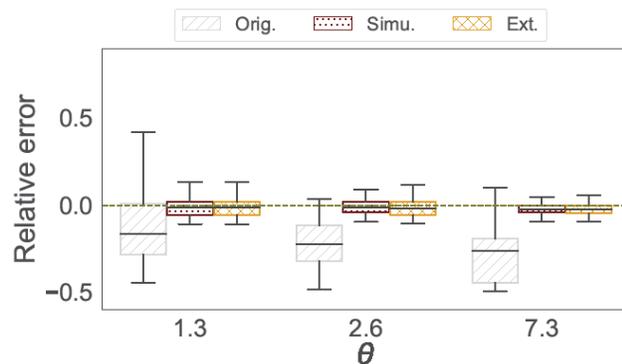
(a)  $ES_{0.9975}$



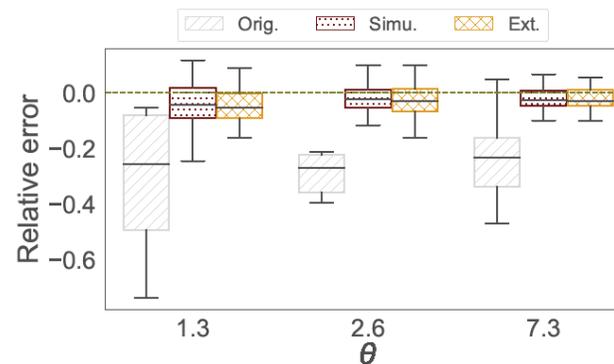
(b)  $MES_{0.9975}$



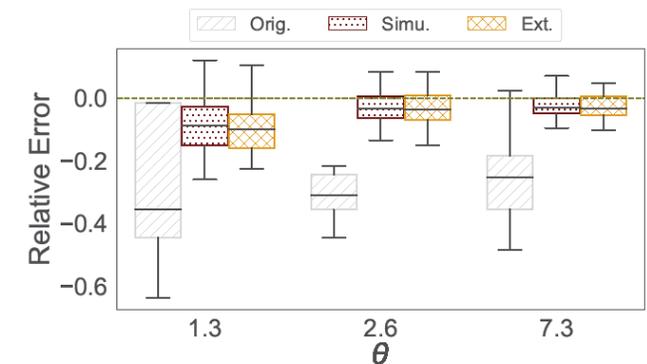
(c)  $DCTE_{0.9975}$



(d)  $ES_{0.9997}$



(e)  $MES_{0.9997}$



(f)  $DCTE_{0.9975}$

**Figure 1:** Distribution des erreurs sur les estimations de TRMs à l'aide de l'algorithme de simulation jointe.

# Évaluation des risques extrêmes grâce à la simulation de points extrêmes

## Conclusion

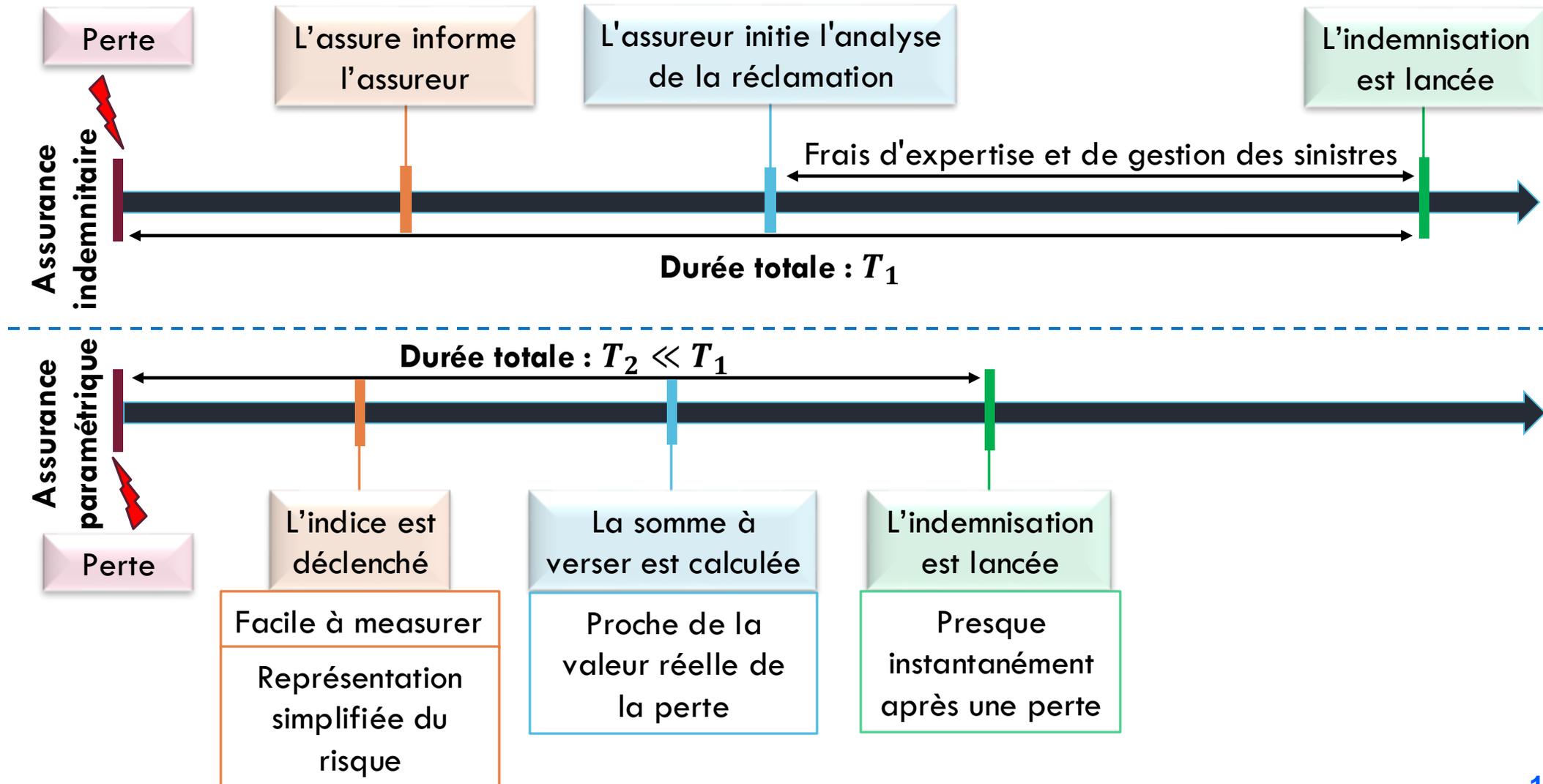
- Une **préoccupation majeure** lors de l'estimation des risques à des niveaux élevés est la **rareté des données**
- Ce problème a été traité au travers du développement d'une approche de **simulation non paramétrique des extrêmes multivariés**, permettant une estimation précise des TRMs
- La **performance** des algorithmes a été démontrée à la fois sur des données simulées et sur des données réelles
- Les travaux futurs pourraient se concentrer sur la **combinaison de notre approche de simulation** avec des **techniques d'estimation plus sophistiquées** que les méthodes empiriques

# Partie 2

## Un cadre optimal d'assurance paramétrique pour les pertes extrêmes

# Un aperçu de l'assurance paramétrique (1/3)

## Définition and caractéristiques de l'assurance paramétrique



# Un aperçu de l'assurance paramétrique (2/3)

## Exemples d'application de l'assurance paramétrique

Soit  $Y$  la perte réelle d'un assuré,  $W$  un indice facilement mesurable et  $\phi_\theta$  une fonction de paiement telle que  $\phi_\theta(W)$  soit aussi proche que possible de  $Y$



Assurance agricole

$Y =$  perte suivant un épisode de sécheresse

$W =$  niveau de précipitation mesuré sur la période

Assurance cyber

$Y =$  coût lié à une violation de données

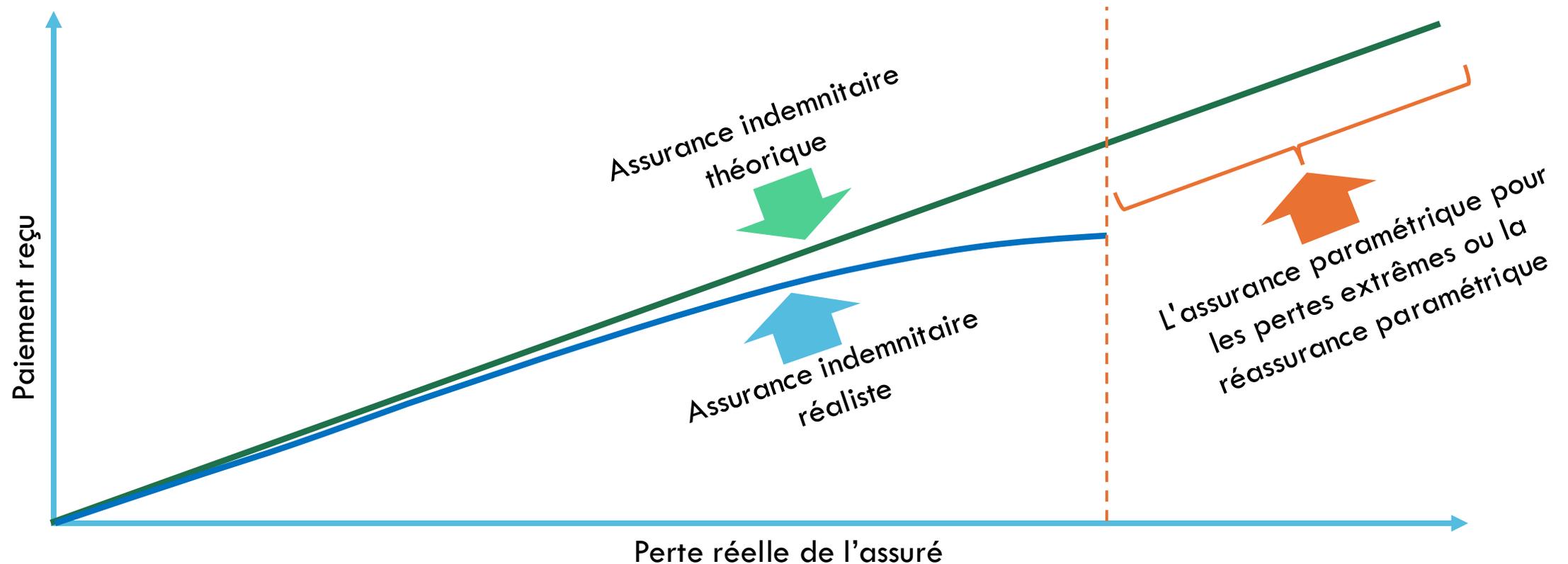
$W =$  volume de données volées



# Un aperçu de l'assurance paramétrique (3/3)

## L'assurance paramétrique pour les pertes extrêmes

L'assurance paramétrique pourrait offrir une solution efficace pour couvrir les pertes extrêmes difficiles à évaluer, soit en raison de leur forte volatilité, soit à cause du manque de données, ce qui rend difficile le développement des modèles nécessaires à une couverture efficace et rentable.

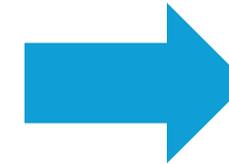


# Questions de recherche

## La réassurance paramétrique est-elle une solution ?

### Avantages de l'assurance paramétrique pour les pertes extrêmes

- Indemnisation rapide
- Moins coûteux
- Contrôle de la volatilité
- Compensation des pertes indirectes
- Adaptable aux avancées technologiques
- Prévisibilité des montants d'indemnisation pour l'assureur



### Réassurance paramétrique

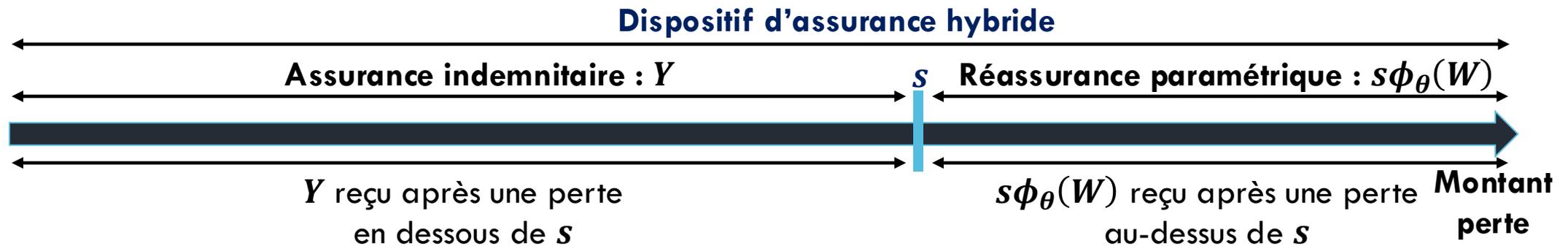
Tire parti des avantages de l'assurance paramétrique pour les pertes non couvertes par les assureurs.

- Est-il possible de combiner les **avantages et l'acceptation généralisée de l'assurance indemnitaire** avec les **avantages de l'assurance paramétrique** dans un seul dispositif ?
- Un **modèle d'assurance hybride** qui combine de manière optimale l'assurance indemnitaire avec la réassurance paramétrique pourrait-il offrir une solution ?

# Approche mathématique (1/2)

## Le dispositif d'assurance hybride

Soit  $W$  une variable aléatoire qui représente un indice facilement observable et mesurable, et  $Y$  les pertes réelles subies par les assurés exposés à un risque donné. Nous supposons que  $\mathbb{E}(Y|Y > s, W) > s\phi_\theta(W)$ .



La fonction de paiement du contrat hybride proposé est donnée par :

$$I(X, Y, s, \theta) = Y\mathbb{1}_{Y \leq s} + s\phi_\theta(W)\mathbb{1}_{Y > s}$$

Nous supposons que  $s$  est connu et suffisamment grand.  $s$  pourrait par exemple être la franchise d'un contrat de réassurance.

**Question: Comment déterminons-nous le(s) paramètre(s) optimal(aux)  $\theta^*$  ?**

## Approche mathématique (2/3)

### Un accent sur les préférences de l'assuré

**Ce qui est généralement fait :** Minimisation de l'écart entre les paiements de l'indice et les pertes réelles, indépendamment des préférences et du bien-être des assurés.

$$\min_{\theta} \mathbb{E} \left[ (Y - I(X, Y, s, \theta))^2 \right]$$

**Notre approche :** Prendre en compte le bien-être des assurés dans la construction des contrats paramétriques. Cette approche présente l'avantage d'augmenter la probabilité que les assurés acceptent le contrat proposé..

$$\begin{cases} \max_{\theta} \mathbb{E}[U(\omega + I(X, Y, s, \theta) - Y - P)] \\ s. t. P = (1 + \theta)\mathbb{E}[I(X, Y, s, \theta)] \end{cases}$$

Où  $U(\cdot)$  est l'utilité des assurés,  $I(X, Y, s, \theta)$  est le paiement du contrat d'assurance,  $Y$  les pertes réelles subies par les assurés et  $P$  la prime d'assurance.

**Question:** Cette approche fonctionne-t-elle pour les pertes à queue lourde ?

## Approche mathématique (2/3)

### Le problème final de l'assuré

Nous adaptons notre approche aux **pertes à queue lourde** en maximisant l'utilité du taux d'indemnisation des assurés. **Si nous supposons que  $Y$  suit une distribution à queue lourde**, alors le problème de l'assuré s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} \max_{\theta \in \Theta} \mathbb{E} \left[ U \left( \frac{Y \mathbb{1}_{Y \leq s} + s \phi_{\theta}(W) \mathbb{1}_{Y > s}}{Y} - f(P^{\beta}) \right) \right] \\ \text{s. t. } P = (1 + \tau) \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{Y \leq s} + s \phi_{\theta}(W) \mathbb{1}_{Y > s}] \end{cases}$$

Où  $\tau$  est le facteur de chargement de la prime et  $\Theta = \{\theta : \mathbb{E}[Y | Y > s, W] > s \phi_{\theta}(W)\}$ .

La fonction  $f \in [0, 1]$  est choisie comme:

$$f(x) = \frac{x}{1 + x}$$

Nous utilisons l'utilité exponentielle  $(U(v) = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha v})$  pour caractériser les préférences des assurés.

## Illustrations (1/2)

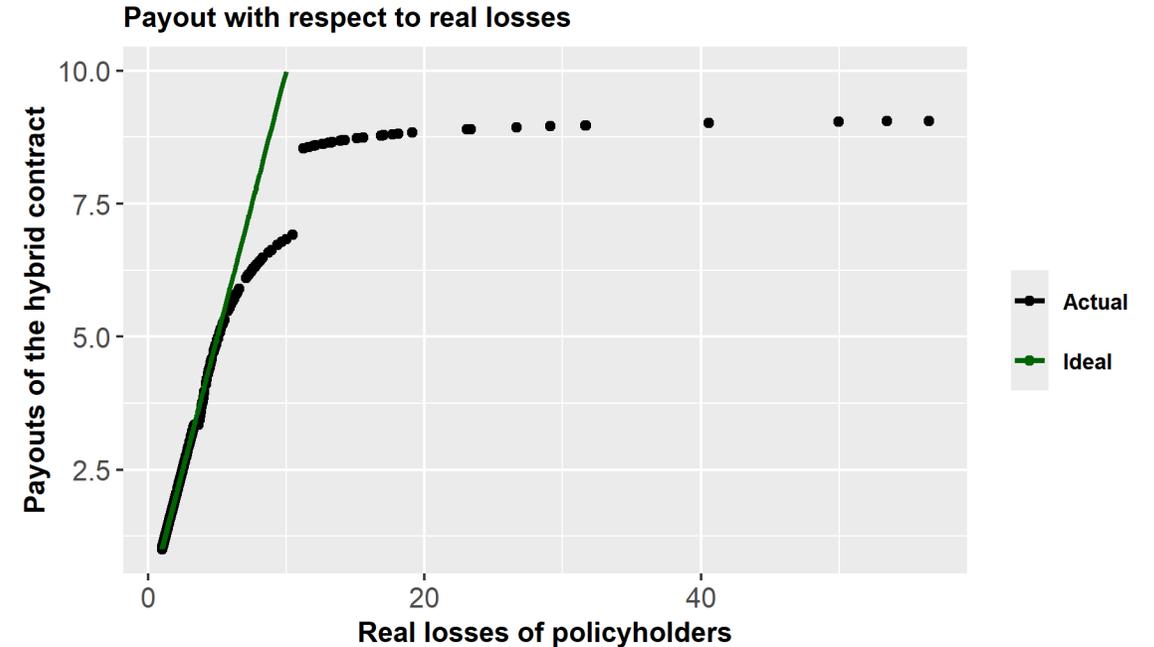
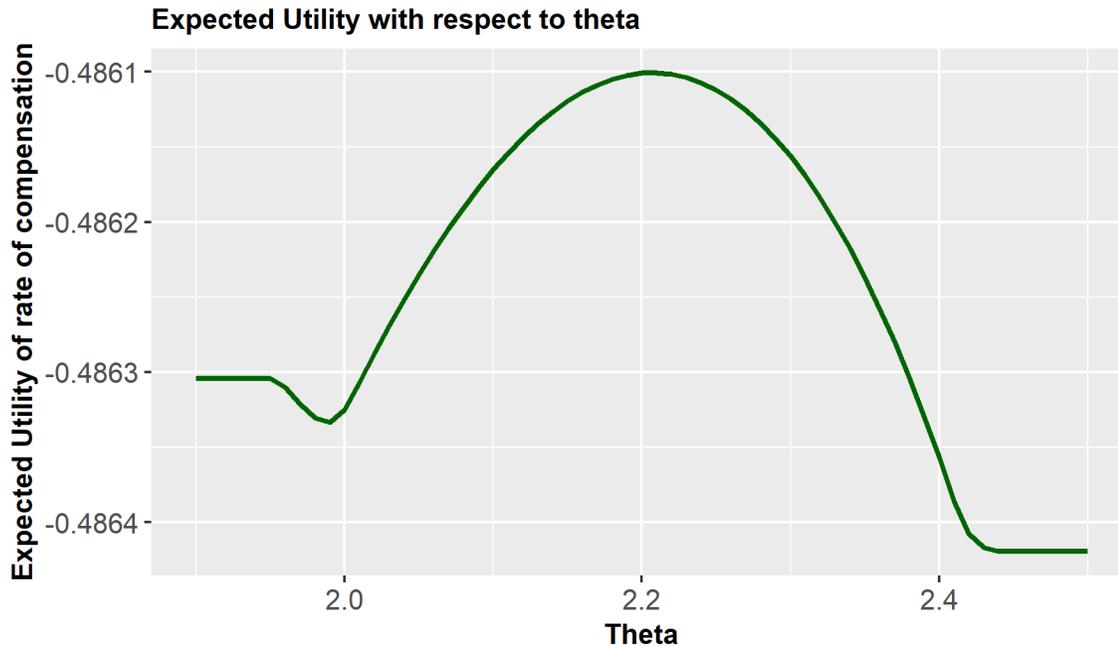
### Avec des données simulées

➤ Taille de l'échantillon  $n = 1000$

➤  $\mathbb{P}(Y > y | W = w) = y^{-\frac{1}{\gamma(w)}}$  avec  $\gamma(w) = a + bw$  et  $W \sim Unif(0,1)$

➤  $s. \phi_{\theta}(w) = \max \left\{ \min \left[ \frac{s \cdot \gamma(w)}{\gamma(w) - 1}, \left( s + \frac{7-s}{0,1} \right) \mathbb{1}_{w \leq 0,97} + \max(e^{\theta \cdot w}, 7) \mathbb{1}_{w > 0,97} \right], s \right\}$

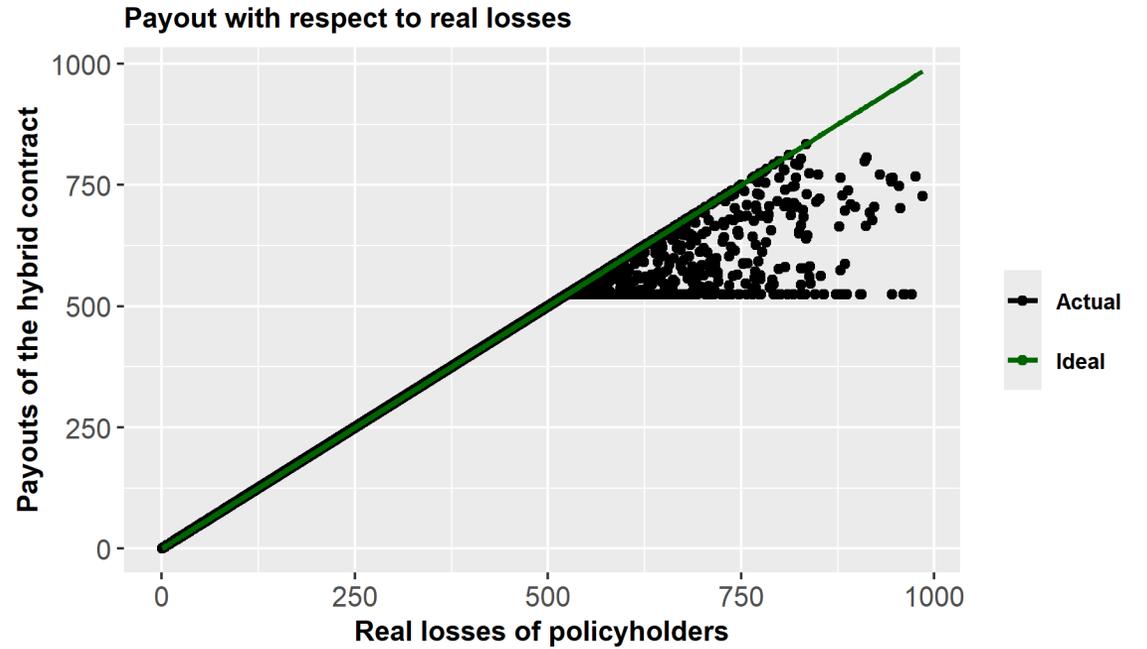
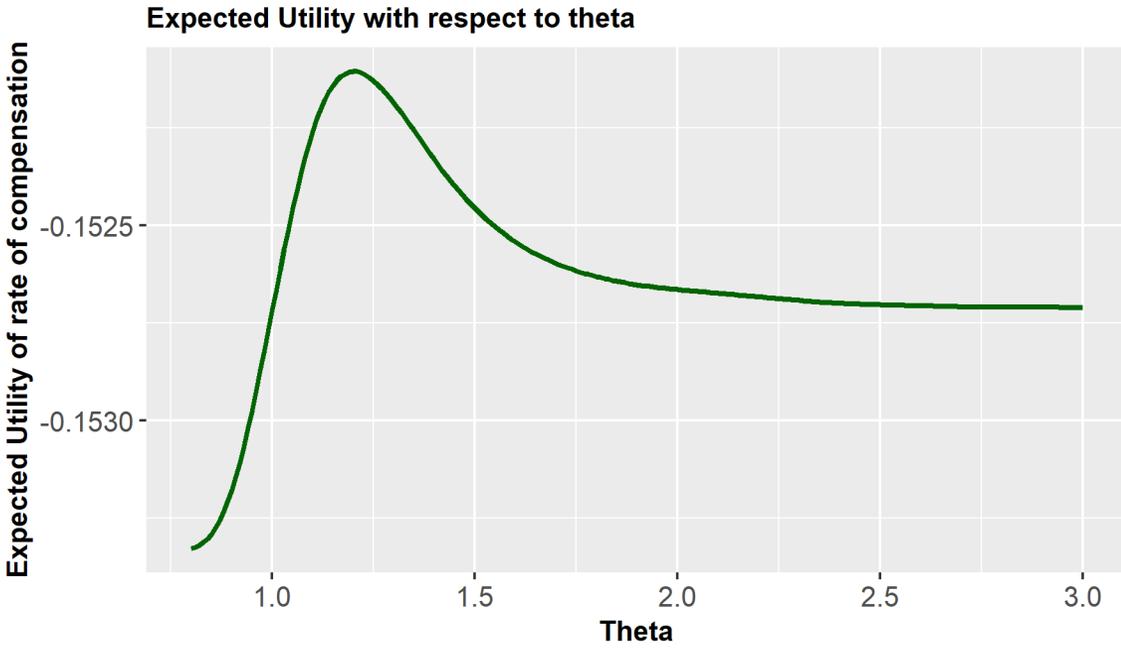
➤  $s = q_{85\%}(Y)$



# Illustrations (2/2)

## Avec des données réelles

- Taille de l'échantillon  $n = 8613$
- $Y$ : **Pertes annuelles de rendement de maïs** dans l'État de l'Illinois sur la période de 1937 à 2021 (USDA)
- $W = \sum_{i=1}^d \varphi_i X_i$  où  $X_i$  sont des variables climatiques de la bases PRISM et  $\varphi_i$  obtenue par régression linéaire
- $s. \phi_{\theta}(w) = \max\{\min[y, w. \theta], s\}$
- $s = q_{90\%}(Y)$



# Conclusion

- Présentation de deux méthodes pour l'analyse des risques extrêmes
  1. Augmentation du nombre de points dans les régions extrêmes pour améliorer l'estimation des mesures de risque extrême
  2. Un cadre optimal d'assurance paramétrique pour les pertes extrêmes
  
- **A retenir :**
  - Risques extrêmes et/ou risques émergents nécessitent d'adapter les méthodes actuelles
  - Ce n'est pas spécifique aux risques extrêmes
  - Parfois cela passe par la recherche
  
- Cadre du sous-groupe de travail *Méthodes actuarielles et nouveaux risques* (du GT Anticiper en Univers Incertain)