Allocation du capital, de la théorie à la pratique

Lucas Richard
Olivier Renaudin
Ali Goumar
Pauline Plancke

1. Introduction
2. Éléments théoriques sur l’allocation de capital économique
3. Mise en œuvre opérationnelle
4. Communication autour de l’allocation

1. Introduction
2. Éléments théoriques sur l’allocation de capital économique
3. Mise en œuvre opérationnelle
4. Communication autour de l’allocation

Introduction

Le SCR (Solvency Capital Requirement) correspond au capital économique dont a besoin une compagnie d'assurance ou de réassurance pour subsister après la survenance du quantile 0,5% de la distribution de fonds propres à horizon un an.

Le SCR est calculé de la façon suivante :

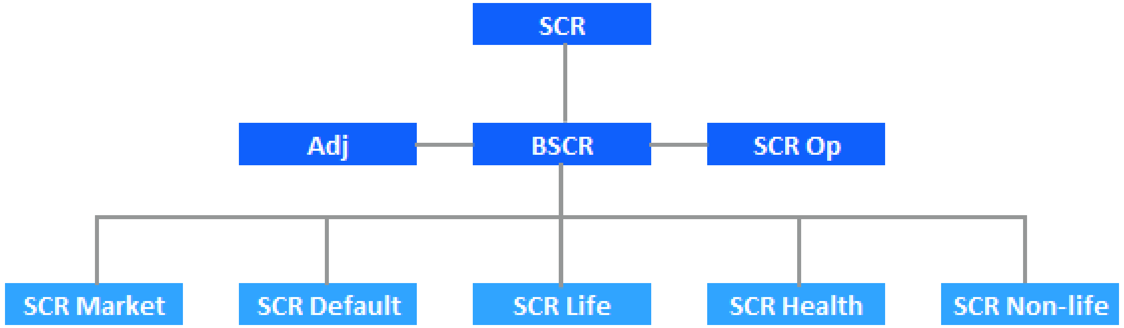
$$SCR = BSCR + SCR\ Op\ - Adj$$

Toutefois, le BSCR n'est pas calculé via l'addition des modules présents ci-dessous, mais plutôt comme :

$$BSCR = \sqrt{X'M\ X}$$

Où :

- X correspond au vecteur des sous-SCR ;
- M correspond à la matrice de corrélation entre ces sous-SCR, visible à droite.



	Marché	Défaut	Vie	Santé	Non-vie
Marché	100%	25%	25%	25%	25%
Défaut	25%	100%	25%	25%	50%
Vie	25%	25%	100%	25%	0%
Santé	25%	25%	25%	100%	0%
Non-vie	25%	50%	0%	0%	100%

Problématique

Le calcul du BSCR n'est pas linéaire, ce qui pose plusieurs problèmes :

- *Pour le top management :*
  - ✓ Comprendre les variations du BSCR d'un inventaire à l'autre, donc du SCR, peut être complexe ;
  - ✓ Savoir quelles branches sont rentables ou non par rapport à leur capital l'est davantage ;
  - ✓ Cependant, une compagnie d'assurance doit toujours respecter son appétence aux risques.

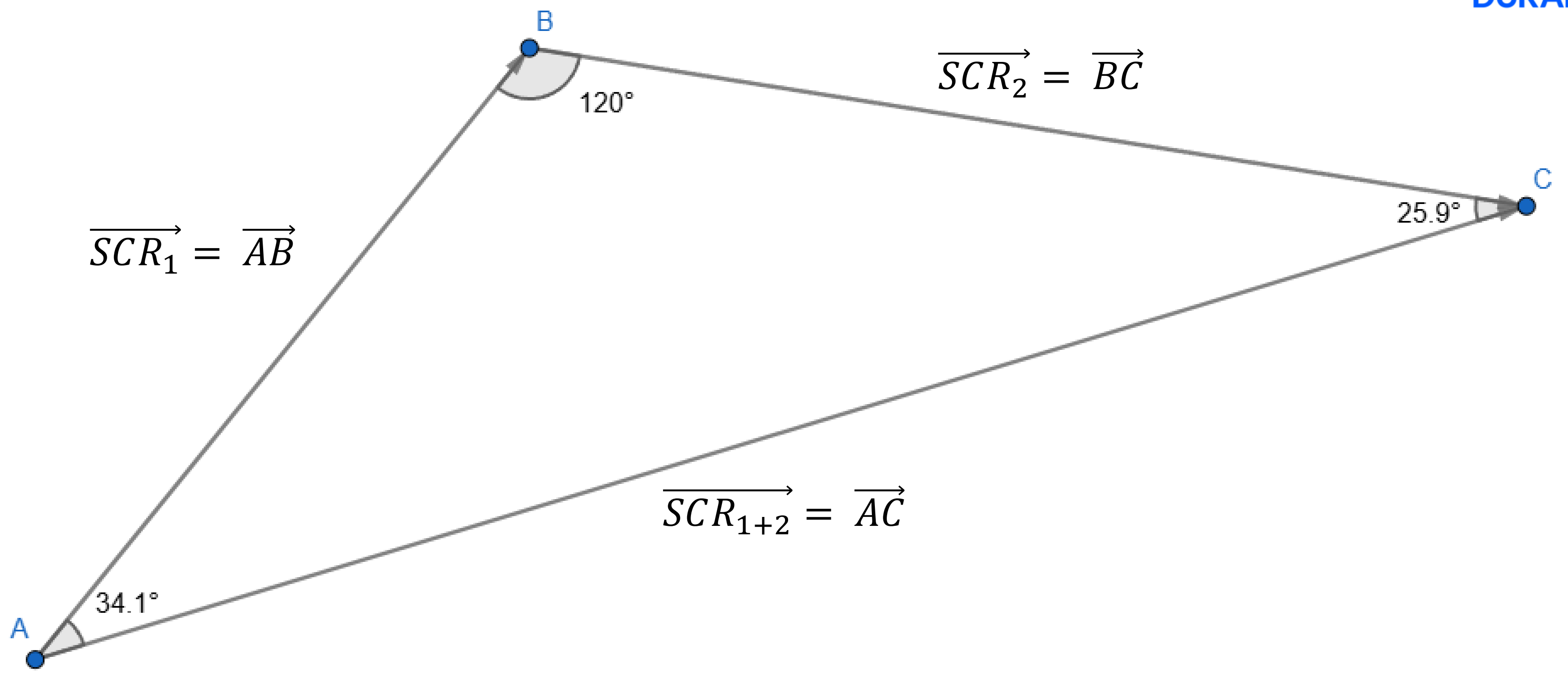
  → **Le SCR semble être une boîte noire, alors qu'il s'agit d'un aspect capital dans le pilotage d'une compagnie d'assurance.**

- *Pour les actuaires :*
  - ✓ Communiquer autour du BSCR, et de ses variations, est complexe envers des non-initiés ;
  - ✓ Faire des tests de sensibilité peut être chronophage ;
  - ✓ Il est difficile d'aider à piloter l'entreprise autour du SCR sans outils supplémentaires.

  → **Les actuaires peuvent aller au-delà de la production et apporter une plus-value en accompagnant le top management s'ils se dotent d'outils supplémentaires.**

NB : la non-linéarité est également valable pour les sous-SCR.

Un exemple de triangle (1/4)



Problème : il n'y a pas de relation linéaire directe entre SCR_{1+2}, SCR_1 et SCR_2.

Un exemple de triangle (2/4)

Théorème d'Al-Kashi :

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})}$$

On pose:

$$c = -\cos(\widehat{ABC})$$

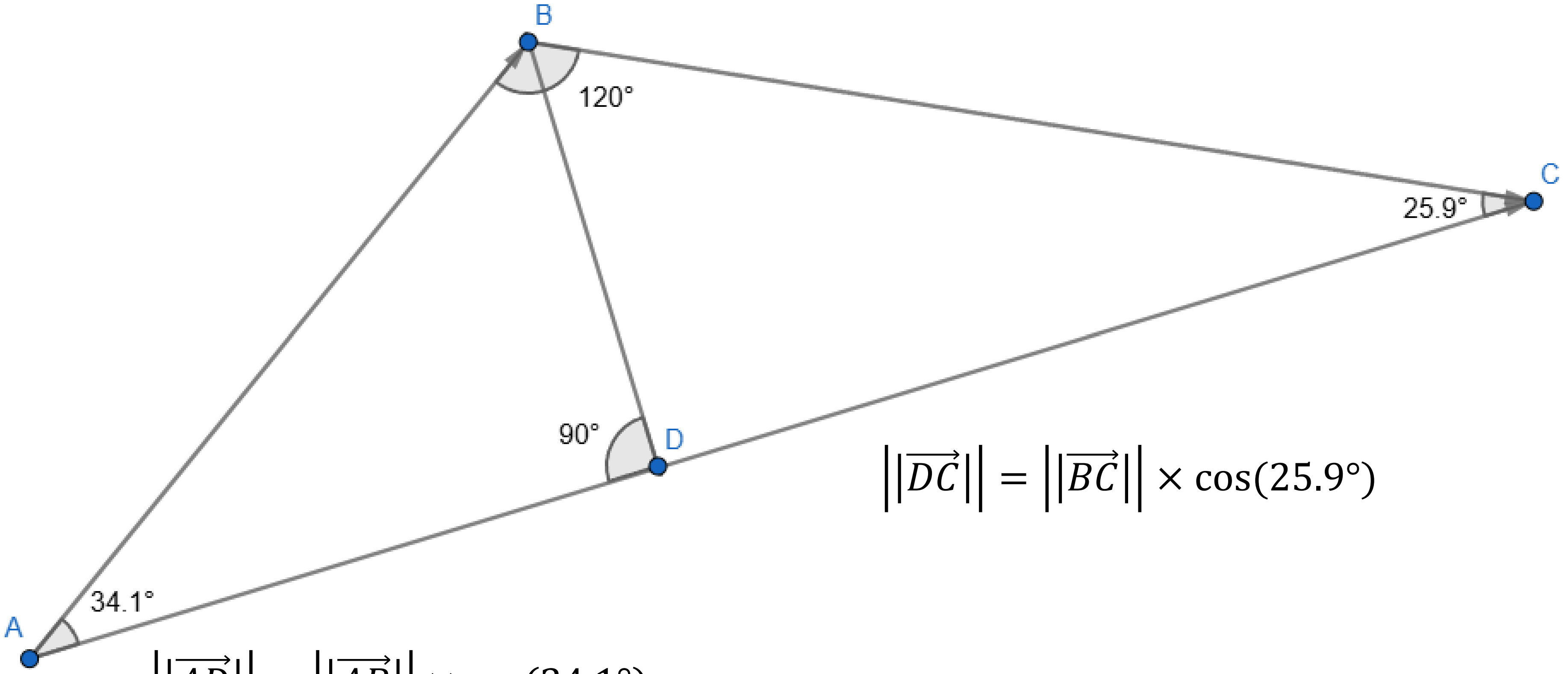
Ce qui implique que :

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 + 2c \times AB \times BC}$$

Si $\widehat{ABC} = 120°$, alors $c = 0.5$. La constante c correspond donc à la corrélation entre les deux segments AB et BC.

En pratique, cette visualisation se fait en dimension n, mais la dimension 2 aide à comprendre la construction globale du SCR.

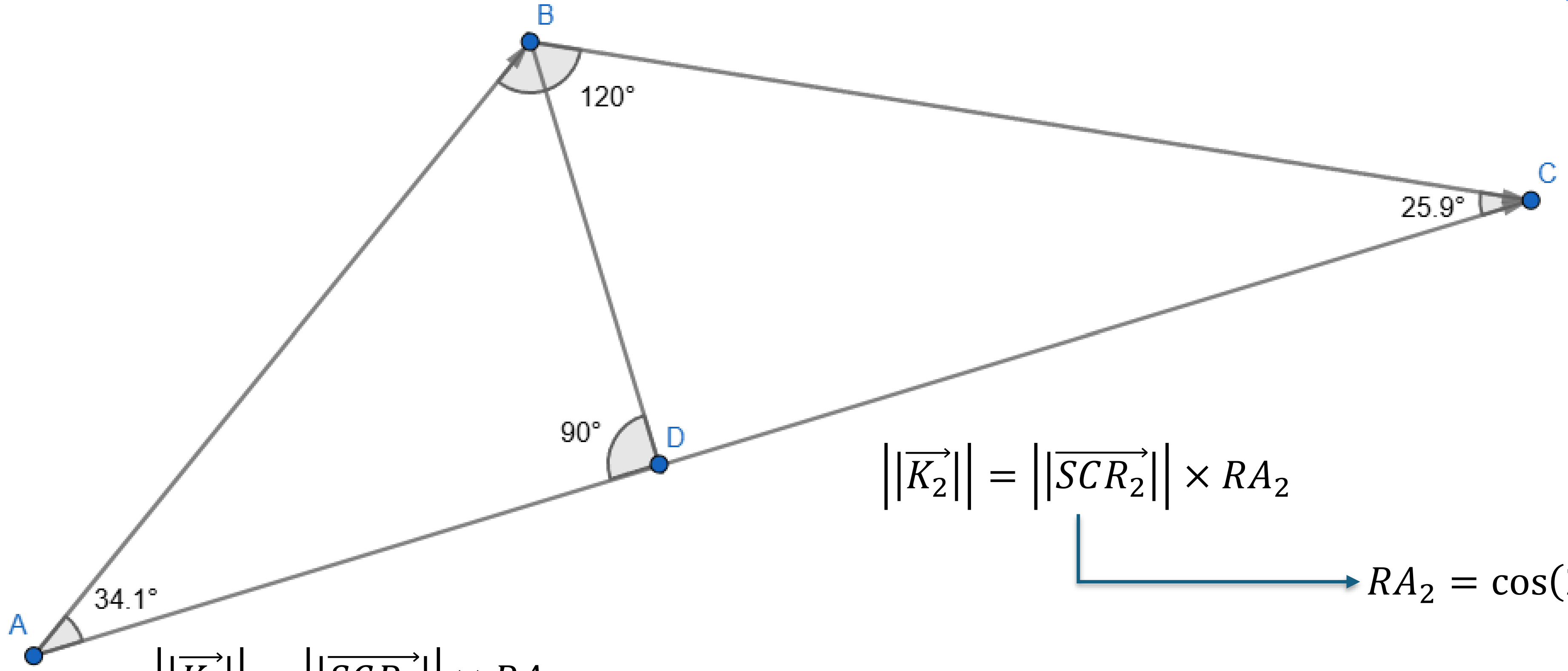
Un exemple de triangle (3/4)



$$\left|\left|\overrightarrow{DC}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{BC}\right|\right| \times \cos(25.9°)$$

$$\left|\left|\overrightarrow{AD}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| \times \cos(34.1°)$$

Un exemple de triangle (4/4)



$$\left\|\overrightarrow{K_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{SCR_2}\right\| \times RA_2$$

$$RA_2 = \cos(25.9°) \simeq 90\%$$

$$\left\|\overrightarrow{K_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{SCR_1}\right\| \times RA_1$$

$$RA_1 = \cos(34.1°) \simeq 83\%$$

Ratio d'allocation

En pratique, on écrit plutôt :

$$K_i = RA_i \times SCR_i$$

Où RA_i est le ratio d'allocation alloué à SCR_i.

Ainsi, on peut construire une relation linéaire entre le BSCR et les sous-SCR qui le composent :

$$BSCR = \sum_{i=1}^{5} RA_i \times SCR_i$$

NB : le même type de relation peut être écrit à des mailles plus fines :

- Chaque sous-SCR étant construit comme le BSCR, on peut écrire chaque sous-SCR comme étant une combinaison linéaire des éléments le composant ;
- Chaque SCR élémentaire (actions type 2, longévité, CAT non-vie, primes et provisions santé…) peut ainsi être réparti par contrats ;
- On peut donc calculer une contribution marginale linéaire au BSCR, puis au SCR de chaque élément d'actif ou de passif, et mesurer sa rentabilité à travers.

RORAC (1/2)

Chaque K_i correspond donc au capital économique alloué à chaque sous-SCR.

Pour une compagnie d'assurance, la rentabilité d'une affaire ou d'une branche d'activité s'apprécie au regard du capital consommé par celle-ci.

Soit r_i le résultat associé à la branche i, dont on connaît le capital alloué K_i. On définit le RORAC (Return On Risk-Adjusted Capital) de la manière suivante :

$$RORAC_i = \frac{r_i}{K_i}$$

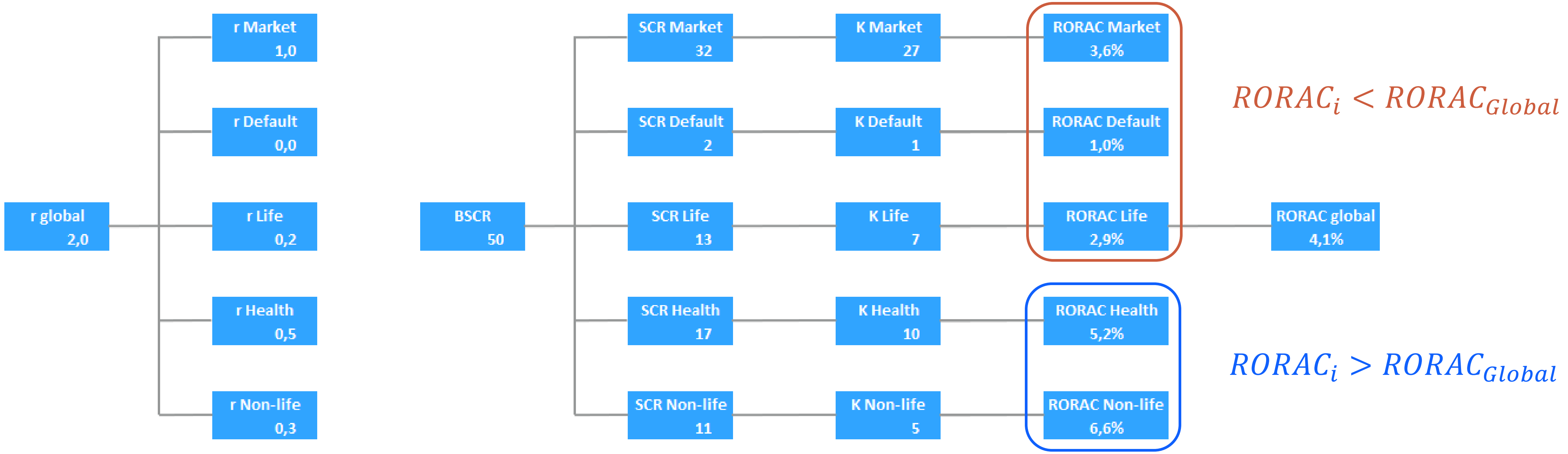
Pour chaque contrat ou branche d'activité, on peut donc déterminer sa rentabilité en calculant son RORAC. Un actuaire peut donc mettre en avant les contrats ou/et branches d'activité pour lesquelles le RORAC est plus élevé que le RORAC global, **ce qui permet à une compagnie d'assurance d'agir pour maximiser son RORAC, c'est-à-dire son résultat global compte tenu de son capital disponible.**

RORAC (2/2)

Le résultat global ne se diversifie pas :

$$r_{Global} = r_{Mkt} + r_{Def} + r_L + r_H + r_{NL}$$

Exemple d'analyse du RORAC :



Pour améliorer la rentabilité globale de cette compagnie, elle peut souscrire davantage de risques santé et non-vie, car ce sont les poches pour lesquelles le RORAC est le plus élevé.

Applications principales

Applications principales de l'allocation de capital économique :

- Déterminer les activités générant davantage de rentabilité ;
- Analyser l'impact du New Business dans le portefeuille global ;
- Améliorer son plan d'entreprise ;
- Adapter son plan de réassurance ;
- Faire des simulations rapides d'impact de SCR en fonction d'actions spécifiques (protection du portefeuille actions, mise en run-off de l'activité prévoyance…) ;
- Expliquer au top management les impacts réels liés à chaque sous-SCR ;
- Construire des management actions ;
- Et autres possibilités.

1. Introduction
2. Éléments théoriques sur l’allocation de capital économique
3. Mise en œuvre opérationnelle
4. Communication autour de l’allocation

Contexte

Objectif

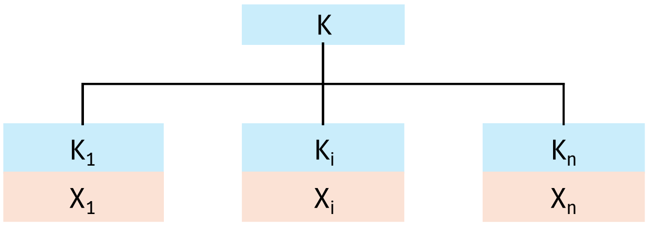
Allouer un montant global de capital à différents segments sur la base des risques associés à ceux-ci.

Données

- K : le montant de capital à allouer
- N : l'ensemble des n segments sur lesquels le capital doit être alloué (risques, périmètres d'activité…)
- X_i : la variable aléatoire réelle modélisant le risque associé au segment $i \in N$

Recherchés

- K_i : le montant de capital alloué au segment $i \in N$
- ω_i : clé d'allocation pour le segment i, telle que $K_i = \omega_i . K$



Méthodologie

- Choix d'une mesure de risque
- Choix d'une méthode d'allocation

Mesure de risque

Définition

Une application $\rho : \mathcal{VA} \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{VA}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles).

Propriétés

1. Monotonie $\quad \forall X, Y \in \mathcal{VA}, \quad \mathrm{X} \leq \mathrm{Y}\ \mathrm{p.s.} \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$
2. Invariance par translation $\quad \forall X \in \mathcal{VA}, \ \forall c \in \mathbb{R}, \quad \rho(X + c) = \rho(X) + c$
3. Homogénéité positive $\quad \forall X \in \mathcal{VA}, \ \forall c \in \mathbb{R}^+, \quad \rho(c.X) = \mathrm{c}.\rho(X)$
4. Sous-additivité $\quad \forall X, Y \in \mathcal{VA}, \quad \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

Mesure cohérente

Exemples

- Ecart-type
- Value at Risk $\quad \mathrm{VaR}_\alpha(X) = Inf\{x \in \mathbb{R} \,/\, \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x}) \geq \alpha\} \qquad (0 \leq \alpha \leq 1)$
- Tail Value at Risk $\quad \mathrm{TVaR}_\alpha(X) = E(X \mid X > \mathrm{VaR}_\alpha(X))$ $\quad$ cohérente

Institut

Impact marginal et RORAC

Impact marginal

Idée : évaluer la contribution au risque global d'un segment particulier.

- segment $i \in N$
- ensemble de segments $S \subset N$ contenant i
- réel h compris entre 0 et 1

$$I_i(h,S) = \frac{\rho(X_S) - \rho(X_S - hX_i)}{h}$$

RORAC

Idée : évaluer la rentabilité d'une activité ou d'un périmètre en tenant en compte du niveau de risque associé.

$$RORAC(X) = \frac{E[X]}{\rho(X)} \qquad RORAC(X_i) = \frac{E[X_i]}{\rho(X_i)}$$

Méthode d'allocation

Définition

Une méthode d'allocation Λ associe à chaque mesure de risque ρ le n-uplet $\left(\rho^{\Lambda}(X_i/X)\right)_{i\in N}$ des contributions au risque de chaque segment.

Clé d'allocation : $\omega_i = \dfrac{\rho^{\Lambda}(X_i/X)}{\rho(X)}$

RORAC post-allocation : $RORAC(X_i/X) = \dfrac{E[X_i]}{\rho^{\Lambda}(X_i/X)}$

Propriétés (méthode d'allocation cohérente)

1. Allocation complète $\sum_{i\in N} \rho^{\Lambda}(X_i/X) = \rho(X)$
2. Symétrie $\forall\, i,j \in N,\ \ si\ \forall\, S\ tel\ que\ \ i,j \in S,\ \ I_i(h,S) = I_j(h,S) \quad alors \quad \rho^{\Lambda}(X_i/X) = \rho^{\Lambda}(X_j/X)$
3. Allocation sans risque L'allocation du capital à un segment non risqué est nulle
4. No undercut $\forall\, S \subset N,\ \ \sum_{i\,\in\, S} \rho^{\Lambda}(X_i/X) \le \rho(X_S)$
5. Compatibilité RORAC

$\forall\, i \in N$, si $RORAC(X_i/X) > RORAC(X)$ alors $\exists\, \varepsilon_i > 0,\ \forall\, h \in [0;\varepsilon_i],\ \ RORAC(X + hX_i) > RORAC(X)$

Méthodes d'allocation classiques

Méthode proportionnelle

L'approche la plus simple.

$$\rho^{\text{Prop}}(X_i/X) = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j \in N} \rho(X_j)}\, \rho(X_N) \qquad \omega_i = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j \in N} \rho(X_j)}$$

Allocation complète, la symétrie n'est pas garantie.

Méthode marginale

Une première approche basée sur l'impact marginal.

$$\rho^{\text{Marg}}(X_i/X) = \frac{\rho(X_N) - \rho(X_{N\setminus\{i\}})}{\sum_{j \in N}\left(\rho(X_N) - \rho(X_{N\setminus\{j\}})\right)}\, \rho(X_N) = \frac{I_i(1,N)}{\sum_{j \in N} I_j(1,N)}\, \rho(X_N) \qquad \omega_i = \frac{\rho(X_N) - \rho(X_{N\setminus\{i\}})}{\sum_{j \in N}\left(\rho(X_N) - \rho(X_{N\setminus\{j\}})\right)}$$

Allocation complète et symétrie.

Méthode de Shapley

Une approche basée sur la théorie des jeux coopératifs.

$$\rho^{\text{Sh}}(X_i/X) = \sum_{S \in D_i} \frac{(s-1)!\,(n-s)!}{n!} \left(\rho(X_S) - \rho(X_{S\setminus\{i\}})\right) = \sum_{S \in D_i} \frac{(s-1)!\,(n-s)!}{n!}\, I_i(1,S) \qquad D_i = \{S \subset N \;/\; \mathrm{i} \in S\}$$

Allocation complète et symétrie. Propriété « No undercut » et compatibilité RORAC non vérifiés en général.

Méthodes d’allocation classiques

Méthode d’Euler

Une approche basée sur l’impact marginal « limite ».

$$\rho^{\mathrm{Eu}}(X_i/X) = \lim_{h\to 0}\frac{\rho(X_N) - \rho(X_N - hX_i)}{h} = \lim_{h\to 0} I_i(h,N)$$

Avec la TVaR, la méthode d’Euler est cohérente.

Allocation du SCR

- Approche « modèle interne » : $X_i = FP_i(0) - D(1).FP_i(1)$

- Approche « formule standard » :

  Une expression simple des contributions pour l’allocation du BSCR par risque avec la VaR

$$VaR^{Euler}(SCR_i|BSCR) = \frac{SCR_i}{BSCR} \times \left(SCR_i + \sum_{j\neq i}^{n} corr_{ij} \times SCR_j\right)$$

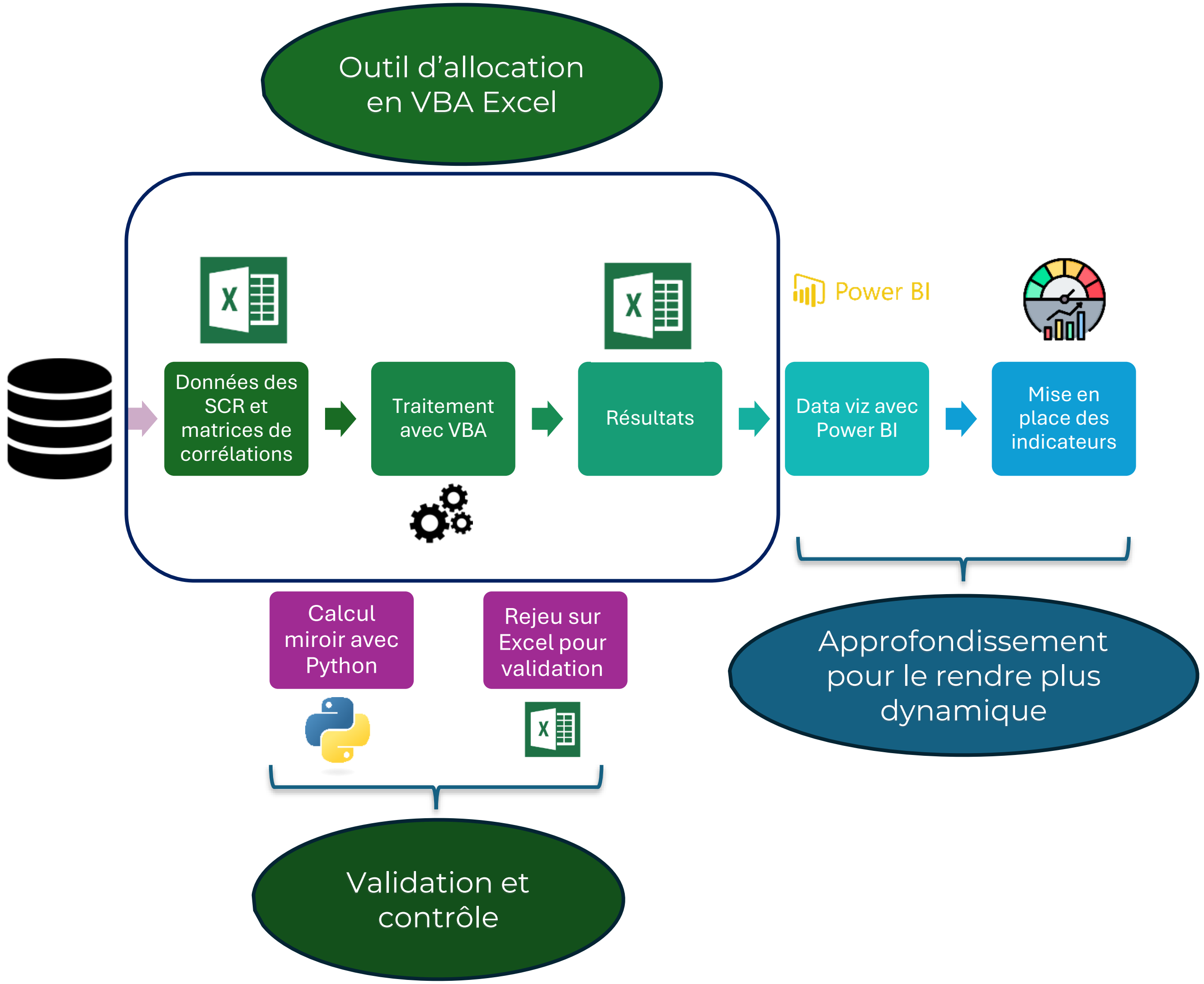
1. Introduction
2. Éléments théoriques sur l'allocation de capital économique
3. Mise en œuvre opérationnelle
4. Communication autour de l'allocation

Mise en œuvre opérationnelle

Objectif : mettre en place un outil pratique et illustratif pour l'allocation du capital, en intégrant les différentes méthodes couramment utilisées sur le marché:

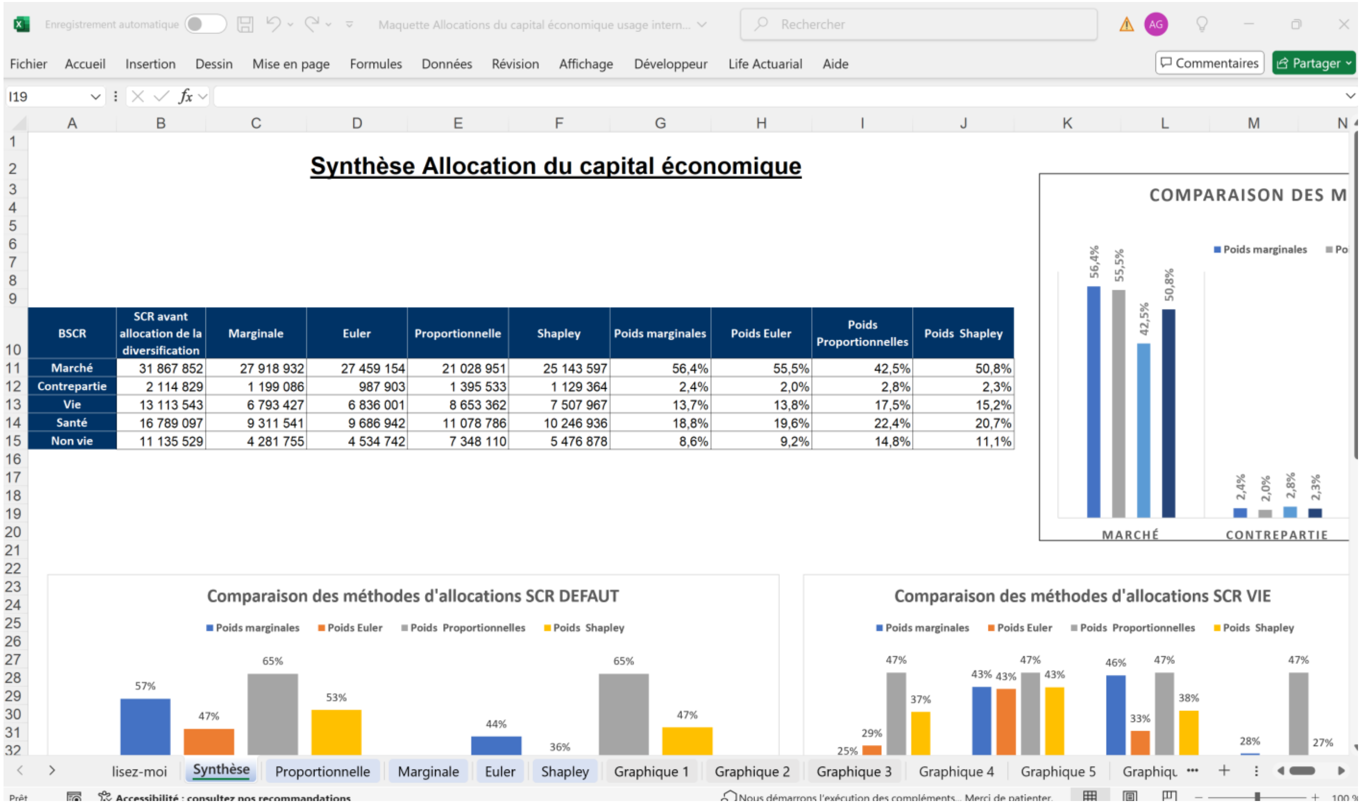
- Choix de la plateforme : Excel, largement adopté par l'ensemble des actuaires.
- Réflexion sur l'algorithme, l'interaction et le processus pour produire l'allocation.
- Programmation avec VBA : un langage plus accessible pour les actuaires.
- Contrôle avec des programmes miroirs en Python, notamment pour la méthode de Shapley, qui requiert un programme plus complexe que les autres méthodes.
- Rejeu sur Excel pour les autres méthodes.

Schéma de mise en œuvre opérationnelle



Structure du fichier de calcul de l'allocation

- Une synthèse
- Une feuille de calcul par méthode d'allocation
- Des graphiques
- Feuille de paramètres (matrices de corrélations)

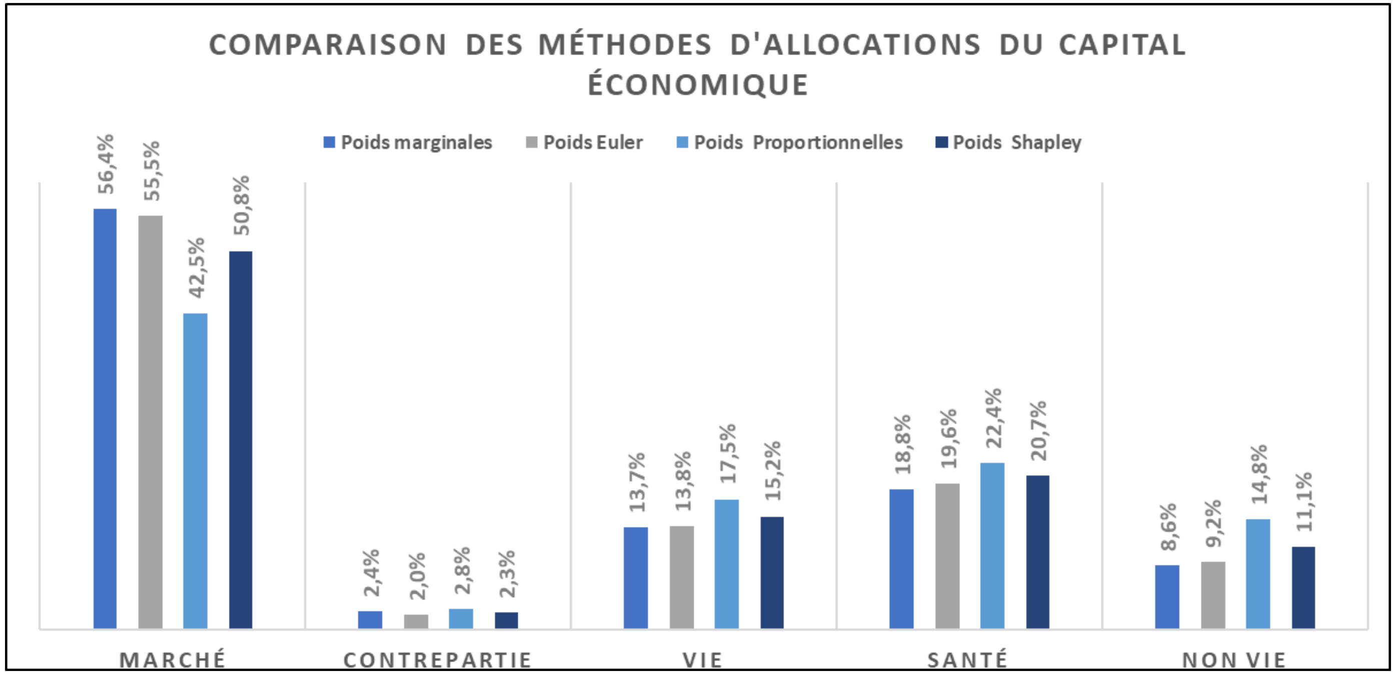


Synthèse Allocation du capital économique

BSCR	SCR avant allocation de la diversification	Marginale	Euler	Proportionnelle	Shapley	Poids marginales	Poids Euler	Poids Proportionnelles	Poids Shapley
Marché	31 867 852	27 918 932	27 459 154	21 028 951	25 143 597	56,4%	55,5%	42,5%	50,8%
Contrepartie	2 114 829	1 199 086	987 903	1 395 533	1 129 364	2,4%	2,0%	2,8%	2,3%
Vie	13 113 543	6 793 427	6 836 001	8 653 362	7 507 967	13,7%	13,8%	17,5%	15,2%
Santé	16 789 097	9 311 541	9 686 942	11 078 786	10 246 936	18,8%	19,6%	22,4%	20,7%
Non vie	11 135 529	4 281 755	4 534 742	7 348 110	5 476 878	8,6%	9,2%	14,8%	11,1%

Synthèse des résultats des différentes méthodes

BSCR	SCR avant allocation de la diversification	Marginale	Euler	Proportionnelle	Shapley	Poids marginales	Poids Euler	Poids Proportionnelles	Poids Shapley
Marché	31 867 852	27 918 932	27 459 154	21 028 951	25 143 597	56,4%	55,5%	42,5%	50,8%
Contrepartie	2 114 829	1 199 086	987 903	1 395 533	1 129 364	2,4%	2,0%	2,8%	2,3%
Vie	13 113 543	6 793 427	6 836 001	8 653 362	7 507 967	13,7%	13,8%	17,5%	15,2%
Santé	16 789 097	9 311 541	9 686 942	11 078 786	10 246 936	18,8%	19,6%	22,4%	20,7%
Non vie	11 135 529	4 281 755	4 534 742	7 348 110	5 476 878	8,6%	9,2%	14,8%	11,1%



Exemple Fonction Euler

- Function Euler(SCR_i, mat_SCR, mat_cor)
- Description : La fonction Euler calcule le poids d'allocation du risque i par rapport au SCR agrégé
- Paramètres :
  - SCR_i : SCR du risque i avant allocation
  - mat_SCR : Vecteur des SCR modulaires y compris le SCR_i
  - mat_cor : Matrice de corrélation correspondante (formule standard dans notre cas)
- Exemple :

Euler(SCR_i, mat_SCR, mat_cor)

BSCR	SCR avant allocation de la diversification	Euler	Poids Euler
Marché	31 867 852	27 459 154	55,5%
Contrepartie	2 114 829	987 903	2,0%
Vie	13 113 543	6 836 001	13,8%
Santé	16 789 097	9 686 942	19,6%
Non vie	11 135 529	4 534 742	9,2%

	SCR
BSCR	49 504 742
marché	31 867 852
contrepartie	2 114 829
vie	13 113 543
santé	16 789 097
non vie	11 135 529

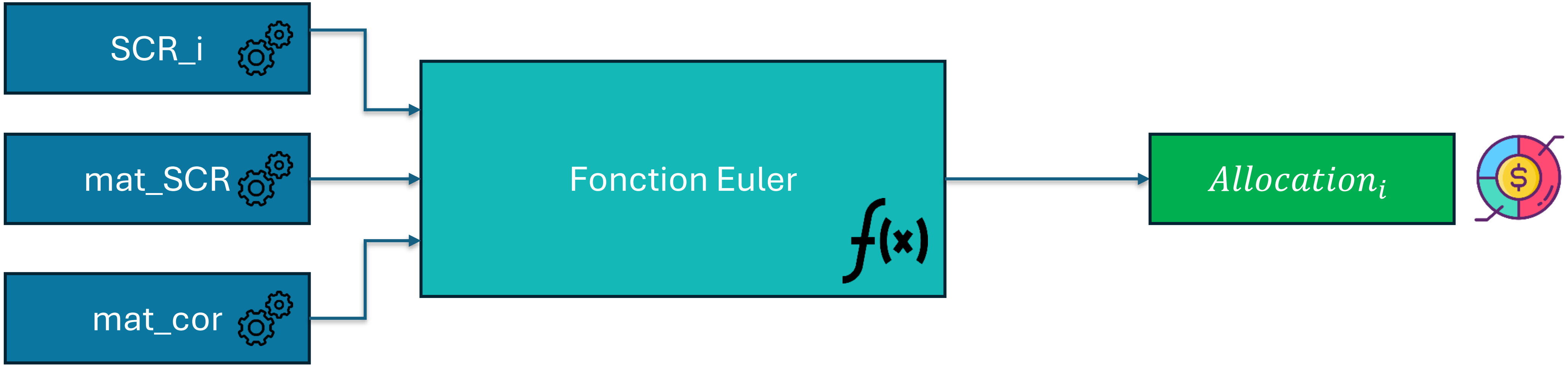
	Marché	Défaut	Vie	Santé	Non-vie
Marché	100%	25%	25%	25%	25%
Défaut	25%	100%	25%	25%	50%
Vie	25%	25%	100%	25%	0%
Santé	25%	25%	25%	100%	0%
Non-vie	25%	50%	0%	0%	100%

Représentation mathématique :

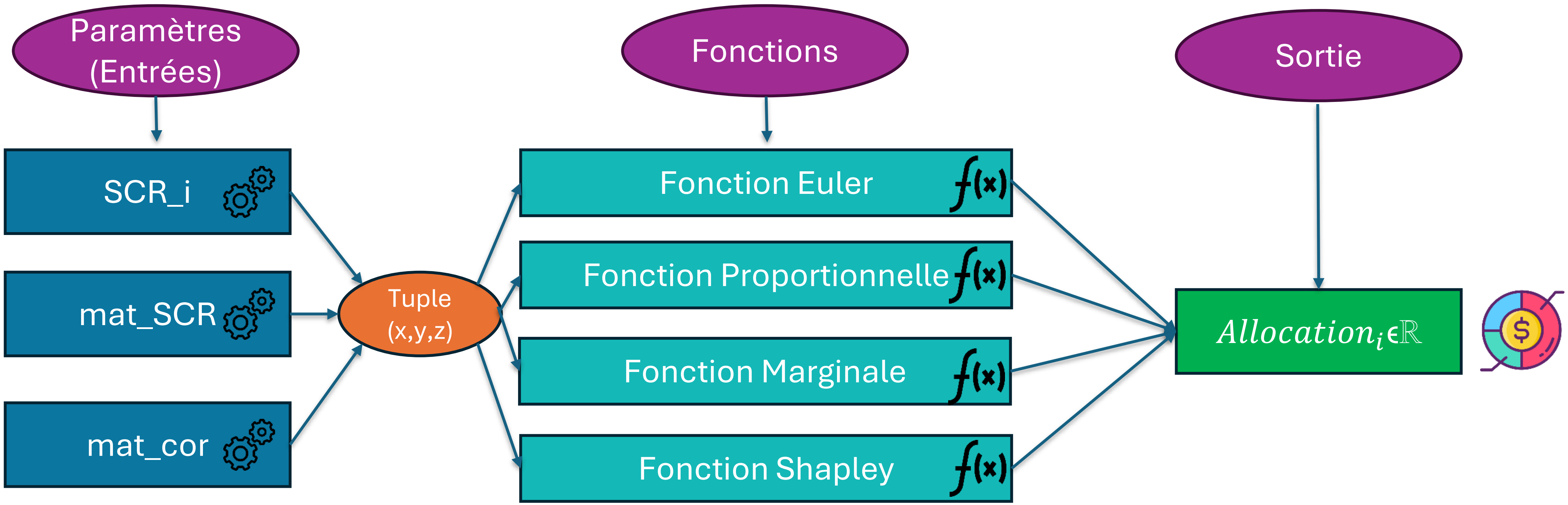
$$Allocation_i = SCR_i \times \frac{\sum_{j=1}^{n} corr(i,j).SCR_j}{SCR_{Agrégé}}$$

Ou :

- SCR_i est le SCR du risque i avant allocation
$-corr(i,j)$ est l’élément de la matrice de corrélation mat_corr entre les risques i est j
- $SCR_{Agrégé}$ = $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} corr(i,j) \times SCR_i \times SCR_j}$ représente le SCR total agrégé, calculé en tenant compte des corrélations entre les risques.



Liste des fonctions VBA



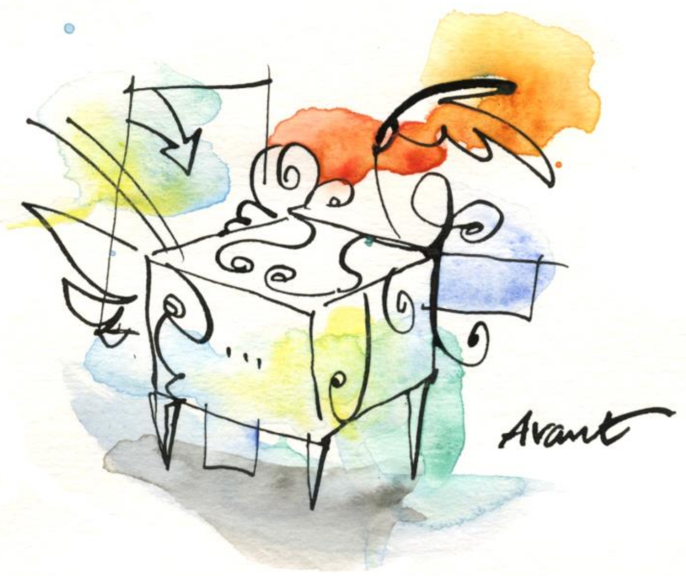
Liste des fonctions VBA

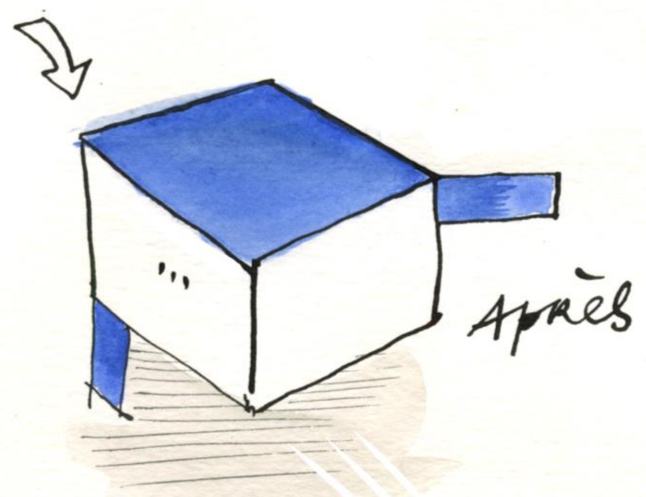
- Function Euler(SCR_i As Range, mat_SCR As Range, mat_cor As Range) As Double
- Function Proportionnelle(SCR_i As Range, mat_SCR As Range) As Double
- Function Marginale (SCR_i As Range, mat_SCR As Range, mat_cor As Range) As Double
- Function Shapley(SCR_i As Range, mat_SCR As Range, mat_cor As Range) As Double

1. Introduction
2. Éléments théoriques sur l’allocation de capital économique
3. Mise en œuvre opérationnelle
4. Communication autour de l’allocation

ACTUAIRES DATA SCIENCE DURABILITÉ BY Institut

Dessine moi un SCR





De la « boîte noire »… à la boîte à outils

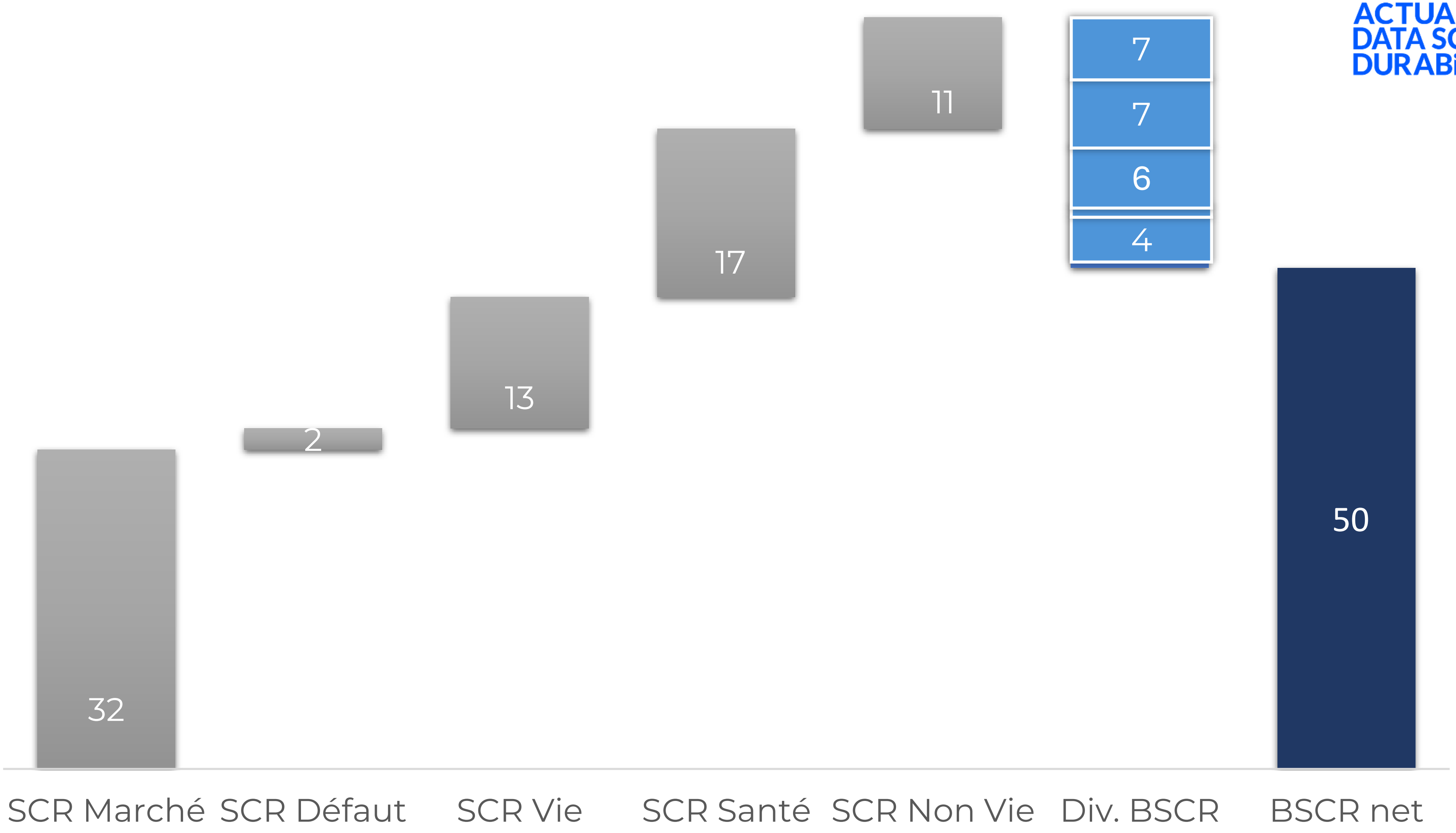
M€	SCR
Marché	32
Contrepartie	2
Vie	13
Santé	17
Non vie	11
Capital requis avant div.	**75**
Diversification	**-25**
BSCR net	**50**

Et si le SCR Marché augmentait de 1 M€…

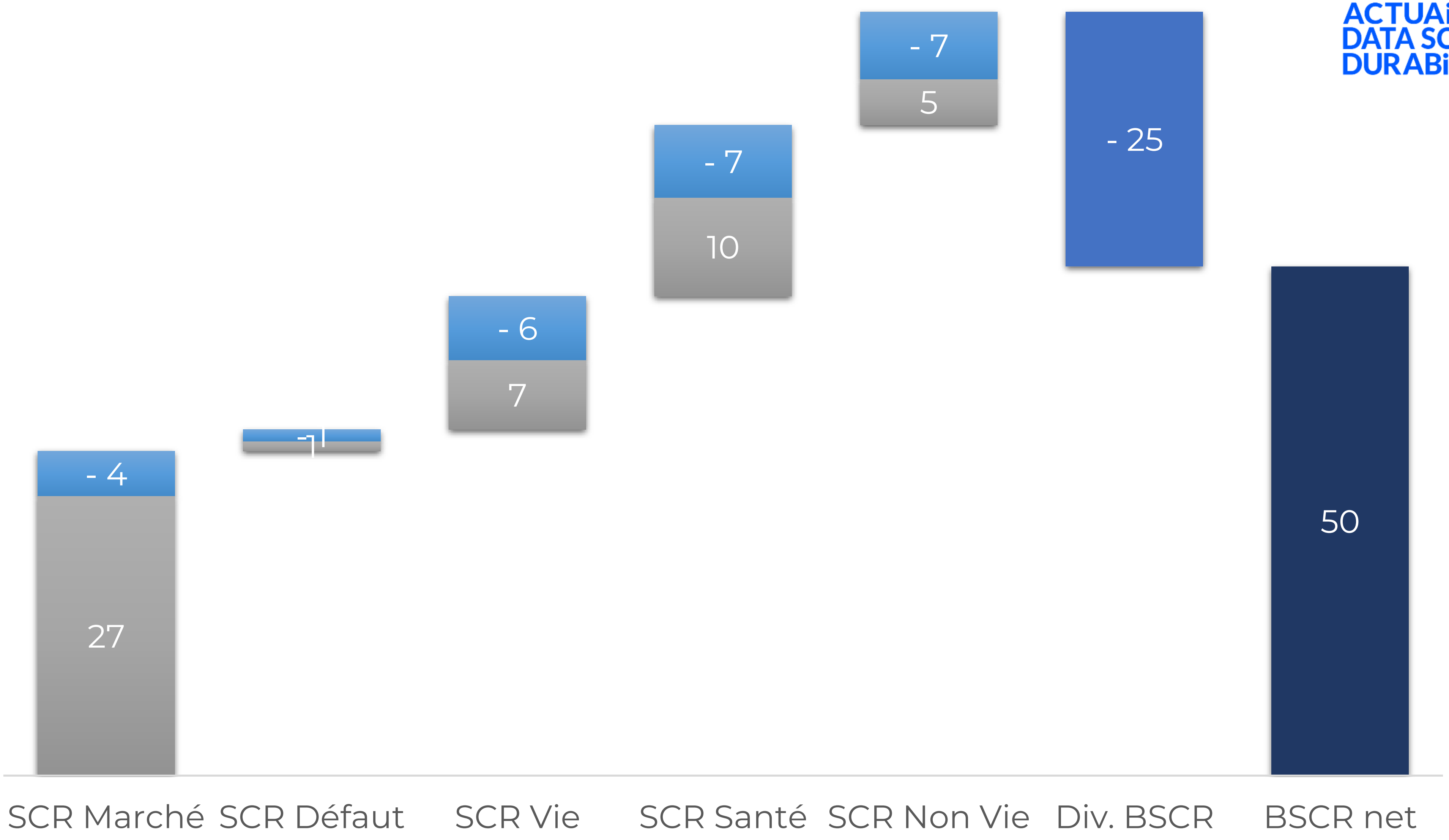
… et que le SCR Non vie diminuait de 1 M€ ?

=> Combien font 1 – 1 ?

Calcul du BSCR net



Allocation des effets de diversification (méthode d'Euler)



Contribution des différents risques de base au BSCR (*)

** Méthode d’Euler*

Ratio d'allocation =
outil de mesure des effets de diversification

M€	SCR
Marché	32
Contrepartie	2
Vie	13
Santé	17
Non vie	11
Capital requis avant div.	**75**
Diversification	**-25**
BSCR net	**50**

Et si le SCR Marché augmentait de 1 M€…

X 86%

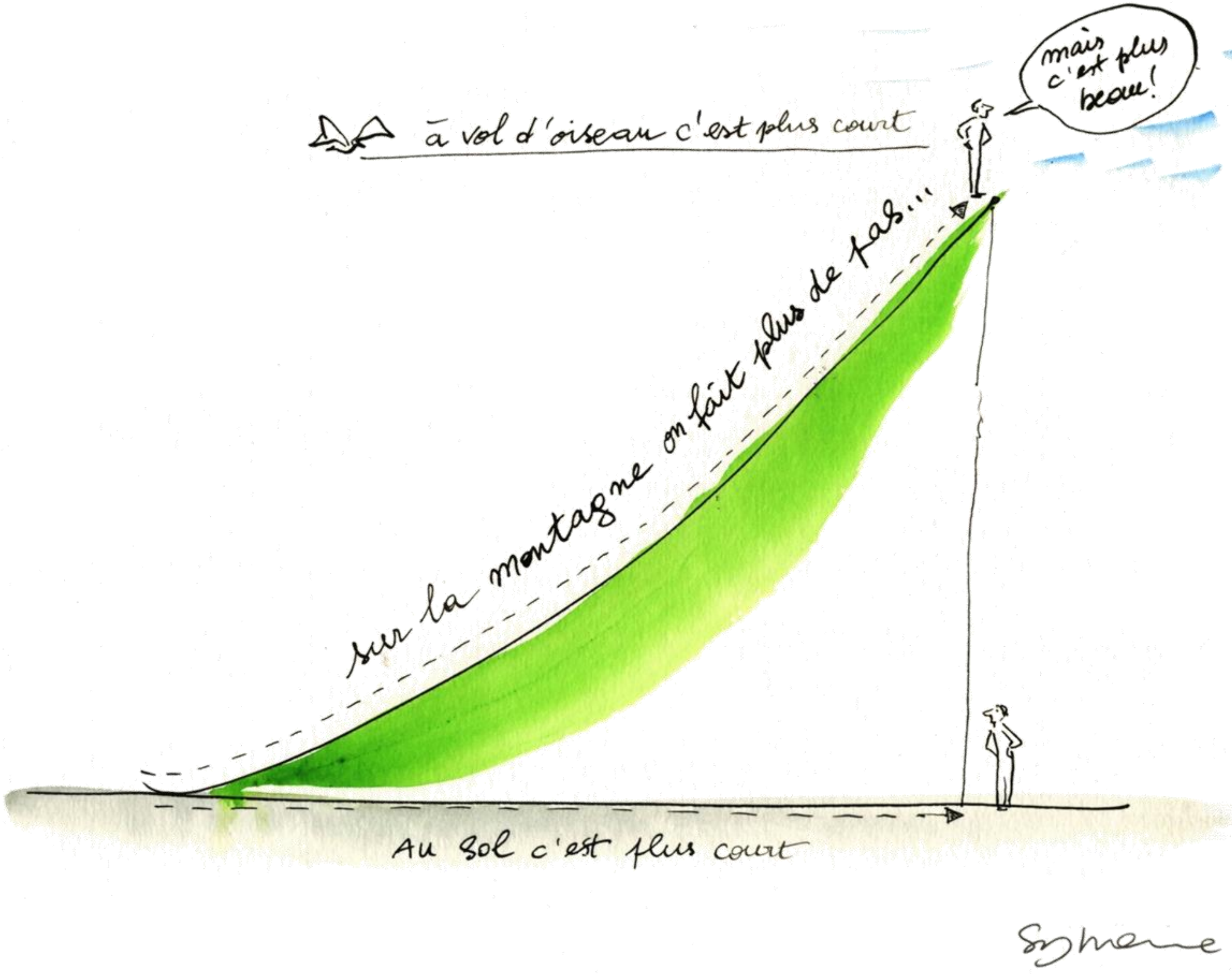
… et que le SCR Non vie diminuait de 1 M€ ?

X 41%

L'impact sur le BSCR est d'environ 1 M€ X (86%-41%)
soit une hausse d'environ 450 k€

* *Méthode d'Euler*

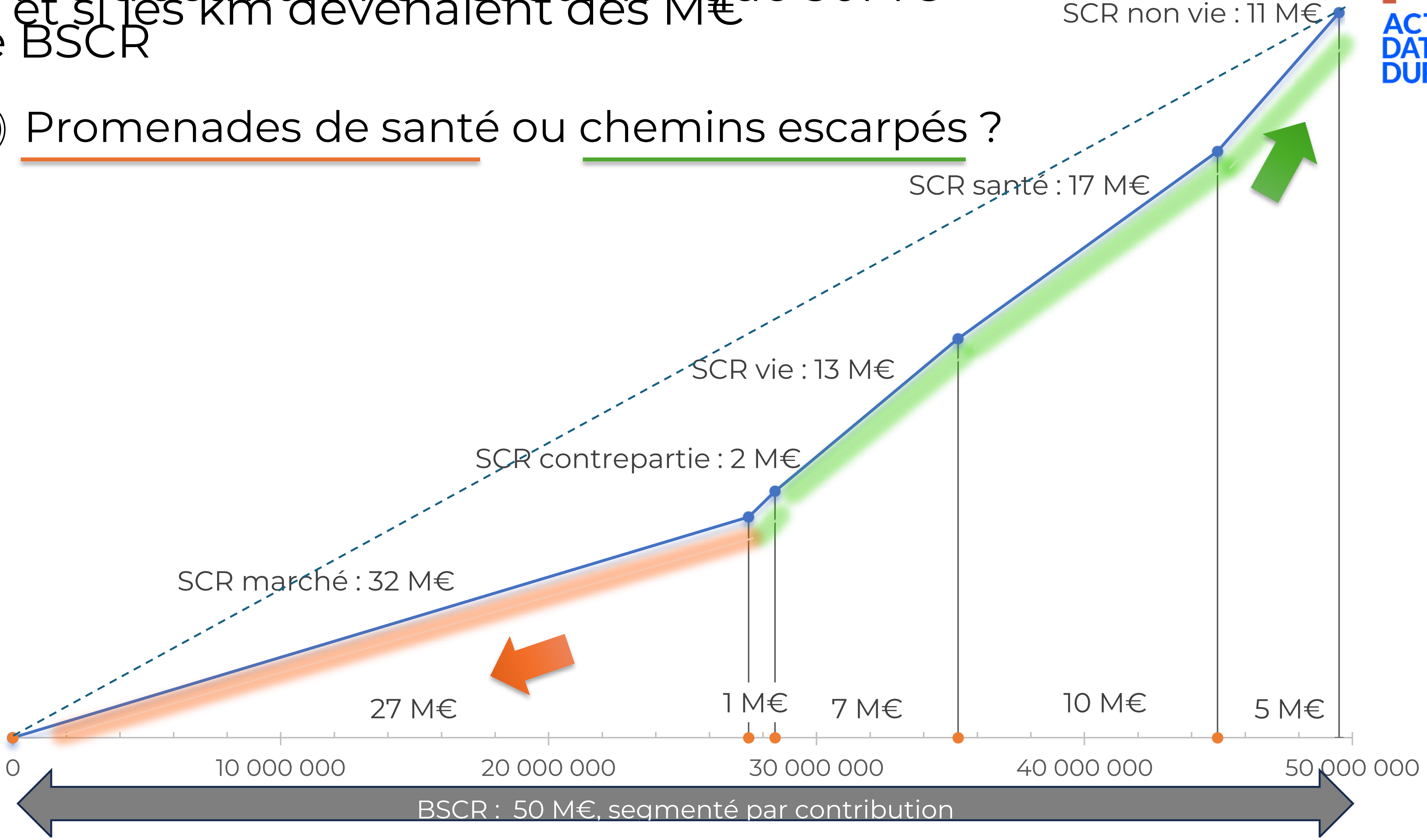
Plus loin et plus haut dans la diversification



75 M€ d'activités ne « coûtent » que 50M€ de BSCR

... et si les km devenaient des M€

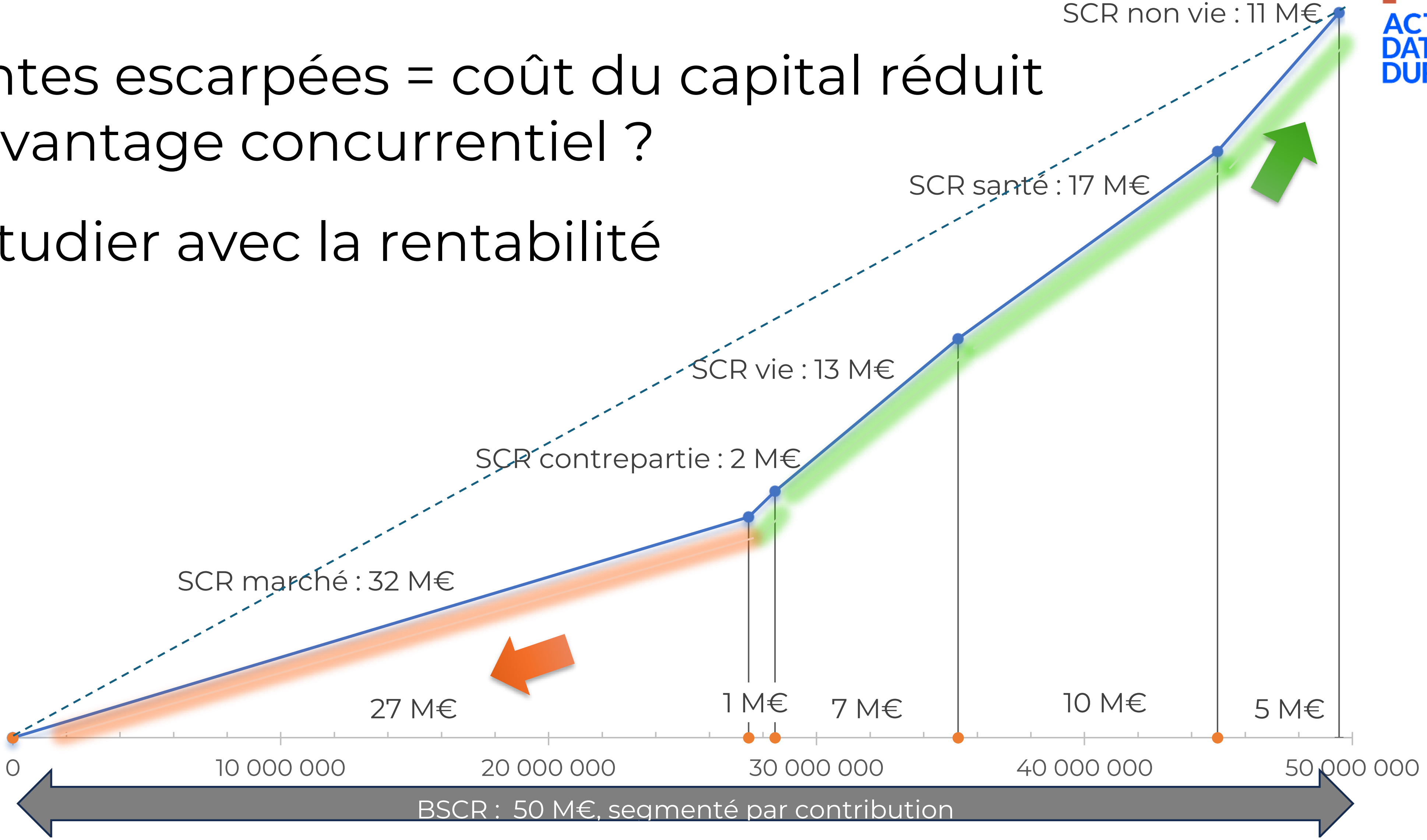
Promenades de santé ou chemins escarpés ?



* *Méthode d'Euler*

Pentes escarpées = coût du capital réduit
= avantage concurrentiel ?

A étudier avec la rentabilité



* *Méthode d'Euler*

Des outils pour optimiser la diversification

M€	SCR	Contributions nettes* diversification	Ratio d'allocation
Marché	32	27	86%
Contrepartie	2	1	47%
Vie	13	7	52%
Santé	17	10	58%
Non vie	11	5	41%
Capital requis avant div.	**75**		
Diversification	**-25**		
BSCR net	**50**	**50**	

-5 M€
?

9 – 5 =>
iso BSCR

+9 M€
?

Le ratio d'allocation moyen permet de distinguer les risques

À levier positif

À levier négatif

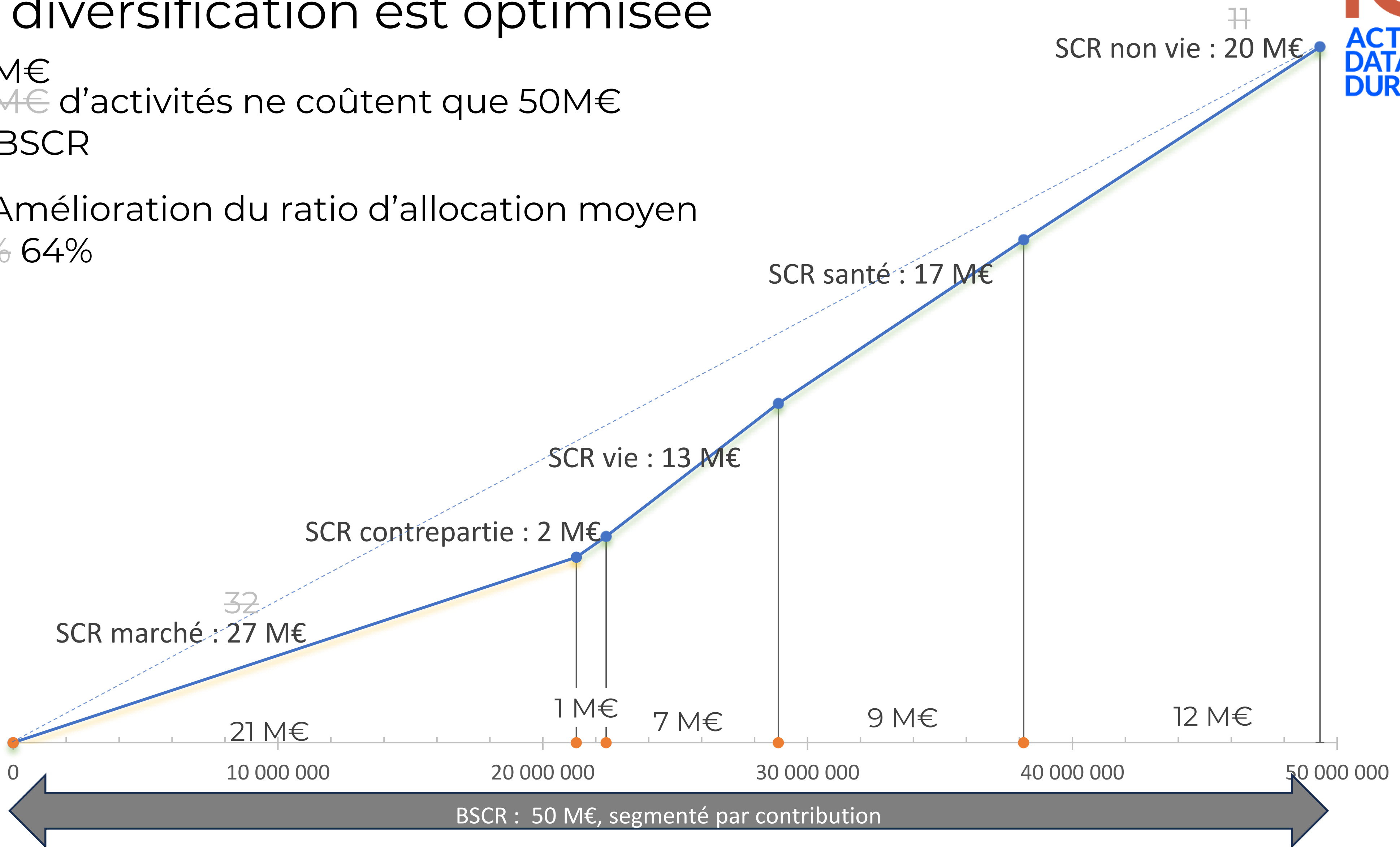
sur la diversification

** Méthode d'Euler*

+ les pentes* sont alignées sur le dénivelé moyen,
+ la diversification est optimisée

79 M€
~~75 M€~~ d'activités ne coûtent que 50M€ de BSCR

=> Amélioration du ratio d'allocation moyen
~~68%~~ 64%



Institut A

* *Méthode d'Euler*

Pourquoi faire une allocation du capital ?

Guide des bonnes pratiques

- Maîtrise des effets de diversification
- Alimenter les décisions stratégiques
- Meilleure utilisation des fonds propres

Questions ?

Merci !