Aide à la décision et préférences dynamiques : théorie et approximation numérique

Guillaume Broux-Quemerais

Congrès des actuaires - 17 Juin 2025

Directeurs de thèse:

Sarah Kaakaï
Anis Matoussi

Avec le support de:
ANR DREAMeS (ANR-21-CE46-0001)
Chaire Risques Emergents en Assurance (IRA / MMA-Covéa)

Introduction

- Notion d'utilité introduite en 1947 par [Von Neumann and Morgenstern, 1947].
  - modélise les préférences d'un agent,
  - fonction strictement croissante concave, représente son aversion au risque.
- Utility Maximization - X_t^π processus observable de stratégie $\pi \in \mathcal{A}$.
  Pour un modèle, une fonction d'utilité u et un horizon $T > 0$ fixés a priori

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[u(X_T^\pi)],$$

Introduction

- Notion d'utilité introduite en 1947 par [Von Neumann and Morgenstern, 1947].
  - modélise les préférences d'un agent,
  - fonction strictement croissante concave, représente son aversion au risque.
- Pour un modèle, une fonction d'utilité u et un horizon $T > 0$ fixés a priori

---

- Application - tarification par indifférence d'un risque $X \sim 6\mathcal{B}(0.5)$

$$\mathbb{E}[u(W_0 - X + \pi(X))] = u(W_0), \quad W_0 = \text{richesse initiale}$$

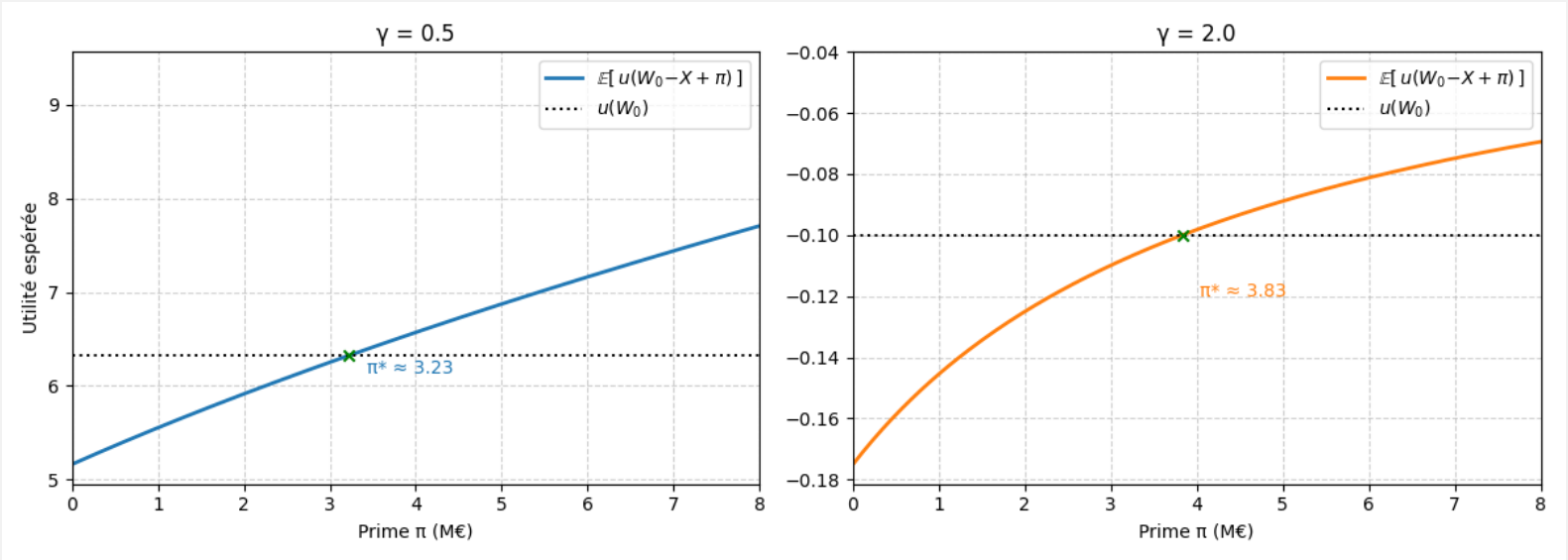


Figure 1: Tarification par indifférence pour l'utilité puissance $u(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$.

Limites de la théorie de maximisation d'utilité classique

- PROBLÈME - Tarification par indifférence sur un problème à 2 périodes.

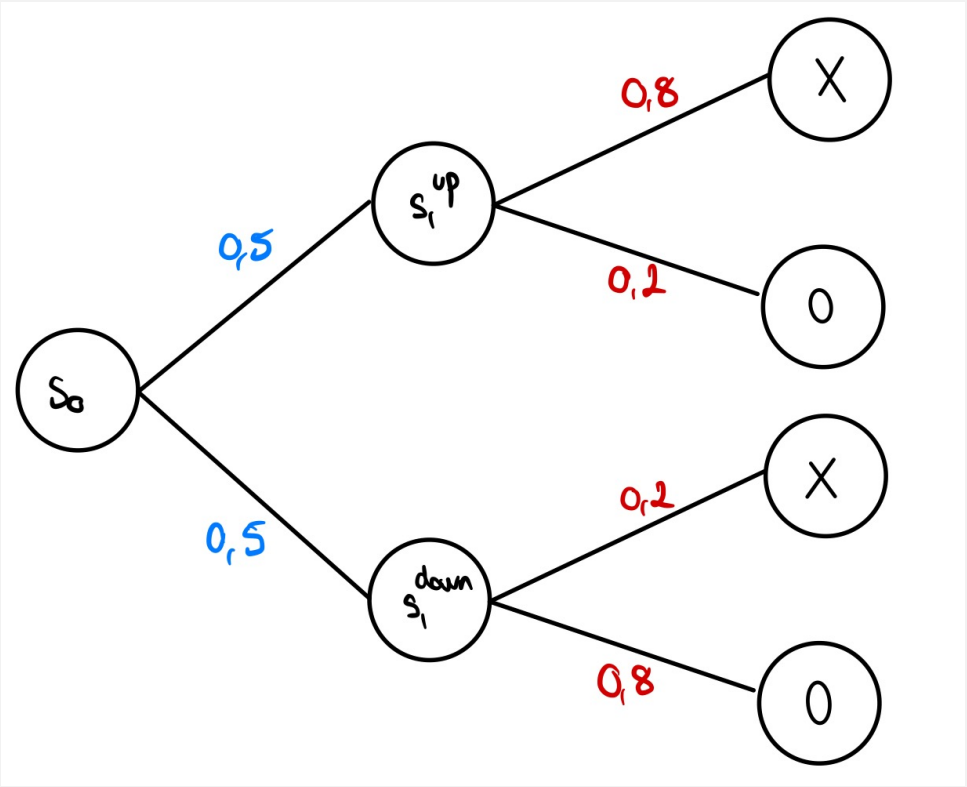


Figure 2: Arbre de probabilité, sinistre de Bernoulli.

- **Optimisation à** $t = 0$

  Probabilité de sinistre $p_0 = 0{,}5$

$$\boxed{\pi_0^* = 3{,}83}$$

Limites de la théorie de maximisation d'utilité classique

- PROBLÈME - Tarification par indifférence sur un problème à 2 périodes.

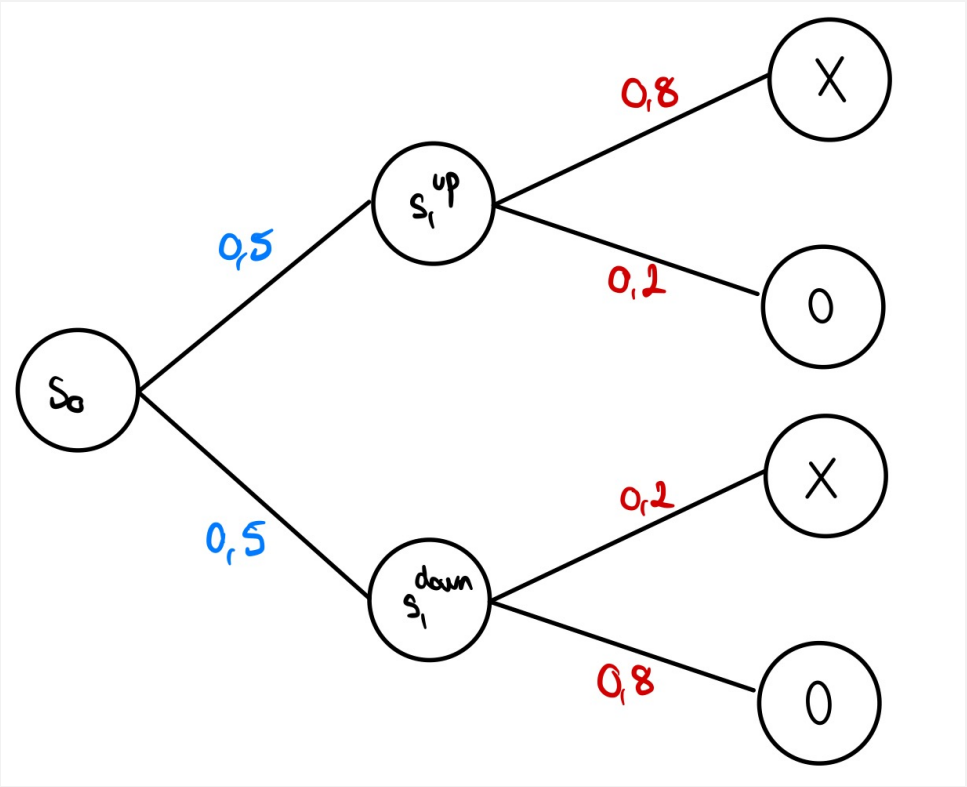


Figure 2: Arbre de probabilité, sinistre de Bernoulli.

- **Optimisation à** $t = 0$

  Probabilité de sinistre $p_0 = 0{,}5$

  $$\boxed{\pi_0^* = 3{,}83}$$

- **Ré-optimisation à** $t = 1$
  - état s_1^{up} : $p = 0{,}8$

    $\pi_1^{\text{up},*} = 5{,}21$
  - état s_1^{down} : $p = 0{,}2$

    $\pi_1^{\text{down},*} = 1{,}16$

Limites de la théorie de maximisation d'utilité classique

- PROBLÈME - Tarification par indifférence sur un problème à 2 périodes.

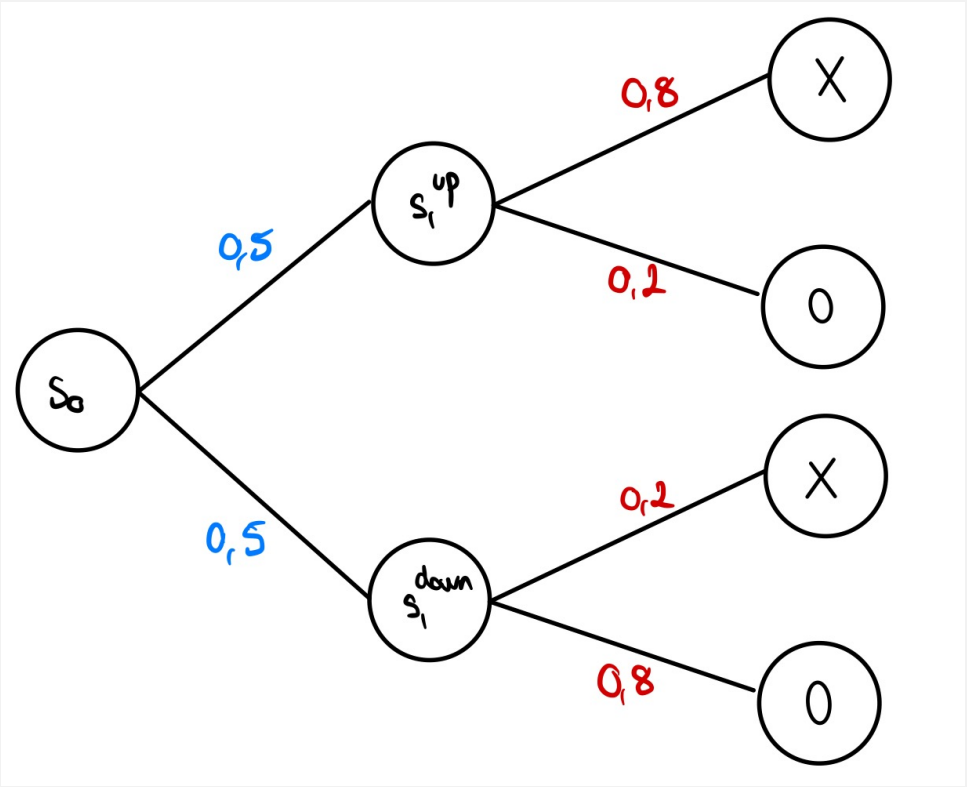


Figure 2: Arbre de probabilité, sinistre de Bernoulli.

- **Optimisation à** $t = 0$

  Probabilité de sinistre $p_0 = 0{,}5$

  $$\boxed{\pi_0^* = 3{,}83}$$

- **Ré-optimisation à** $t = 1$
  - état s_1^{up} : $p = 0{,}8$

    $\pi_1^{\text{up},*} = 5{,}21$
  - état s_1^{down} : $p = 0{,}2$

    $\pi_1^{\text{down},*} = 1{,}16$

La prime calculée à $t = 0$ n'est plus optimale !

Stratégies optimales dépendantes de l'horizon de temps et de l'utilité fixés initialement.

$\Longrightarrow$ flexibilité limitée pour *l'actualisation des préférences et de l'horizon*.

Utilités dynamiques et applications en assurance

- Forward optimization - déterminer la stratégie optimale π^* telle que

$$U(t, X_t^{\pi^*}) = \max_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[U(T, X_T^{\pi^*}) | \mathcal{F}_t], \quad \forall\, t, T \geqslant 0.$$

- Utilités dynamiques introduites par [Musiela and Zariphopoulou, 2006]
  - s'adapte en temps réel aux nouvelles informations et aux changements de l'environnement.
  - les préférences sont mises à jour en conservant l'optimalité à chaque instant.

- Le critère de décision et la strategie optimale sont caractérisés par une condition d'optimalité martingale

  $\Longrightarrow$ maximise l'utilité espérée de manière dynamique, sans horizon de temps.

- **Applications**: Valorisation d'option, assurance, taux intêret long terme, mesures de risque dynamiques, système de retraite.

Plan

Challenges:

- Manque de méthode de simulation pour les utilités dynamiques.

Plan

Challenges:

- Manque de méthode de simulation pour les utilités dynamiques.

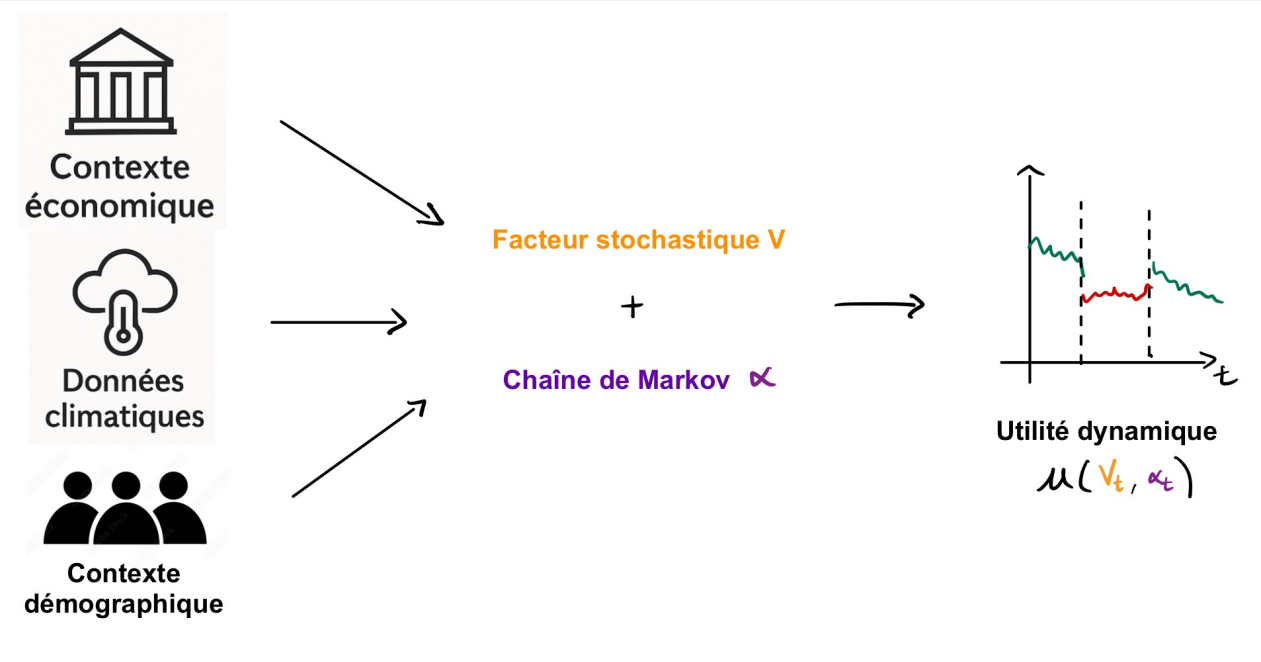
Contributions de ma thèse:

- **Méthodes numériques pour les utilités dynamiques dans des modèles à facteur stochastique**:
  - Développement de deux algorithmes de deep-learning,
  - Basés sur l'approximation de *ergodic BSDEs*,
  - Pour des modèles **standards** et avec **changement de régime**.
- **Modélisation de préférences dynamiques relatives**:
  - Problème d'optimisation à n joueurs

    Mean Field (MF) avec **bruit commun**

Méthodes numériques pour les utilités dynamiques I

- ⋆ G.B.Q, Sarah Kaakaï, Anis Matoussi, and Wissal Sabbagh, « Deep learning scheme for forward utilities using ergodic BSDEs », *in: Probability, Uncertainty and Quantitative Risk 9.2* (2024), pp. 149–180.
- ⋆ G.B.Q, Sarah Kaakaï, Anis Matoussi, and Wissal Sabbagh, « Numerical methods for regime switching forward utilities using system of ergodic BSDEs », *preprint*, June 2025.



→ Le critère de préférence s'adapte aux régimes et aux nouvelles informations de l'environnement.

Méthodes numériques pour les utilités dynamiques II

Motivation - Simulation d'utilités dynamiques homothétiques

$$U(t,x) = u(x) \sum_{i \in \mathcal{I}} e^{f^i(t,V_t)} \mathbb{1}_{\{\alpha_t = i\}}.$$

Méthodes numériques pour les utilités dynamiques II

Motivation - Simulation d'utilités dynamiques homothétiques

$$U(t,x) = u(x) \sum_{i \in \mathcal{I}} e^{f^i(t,V_t)} \mathbb{1}_{\{\alpha_t = i\}}.$$

Résultat clé [Liang and Zariphopoulou, 2017] et [Hu et al., 2020]

$$\underbrace{\text{Consistence en temps de } U}_{\text{optimalité martingale}} \implies \underbrace{\left(f^i(t,V_t)\right)_{i\in\mathcal{I}}}_{\text{critère décision dynamique}}$$

solution d'un système couplé de BSDEs ergodiques.

- Caractérise *simultanément* le critère de préférence dynamique et la stratégie optimale associée.
- Application aux utilités de type exponentiel, puissance et logarithmique.

Méthodes numériques pour les utilités dynamiques II

Motivation - Simulation d'utilités dynamiques homothétiques

$$U(t,x) = u(x) \sum_{i \in \mathcal{I}} e^{f^i(t,V_t)} \mathbb{1}_{\{\alpha_t = i\}}.$$

Résultat clé [Liang and Zariphopoulou, 2017] et [Hu et al., 2020]

$$\underbrace{\text{Consistence en temps de } U}_{\text{optimalité martingale}} \implies \underbrace{\left(f^i(t,V_t)\right)_{i\in\mathcal{I}}}_{\text{critère décision dynamique}}$$

solution d'un système couplé de BSDEs ergodiques.

- Caractérise *simultanément* le critère de préférence dynamique et la stratégie optimale associée.
- Application aux utilités de type exponentiel, puissance et logarithmique.

- **Absence de méthode numérique pour les eBSDEs.**
- Contributions - Algorithmes basés sur des réseaux de neurones pour l'approximation numérique de la solution Markovienne de système d'eBSDEs.

Résultats numériques et applications-

Exemple - le marché oscille entre 2 régimes

- Un actif S : "bull" market (1) vs "bear" market (2).
- Vecteur prix du marché linéaire $\theta^i(v) = \min(\left|\theta^i v\right|, b)$, avec $\theta_1 > \theta_2$.
- Taux de transition asymétriques $q_{12} = 0.5, \quad q_{21} = 1.$

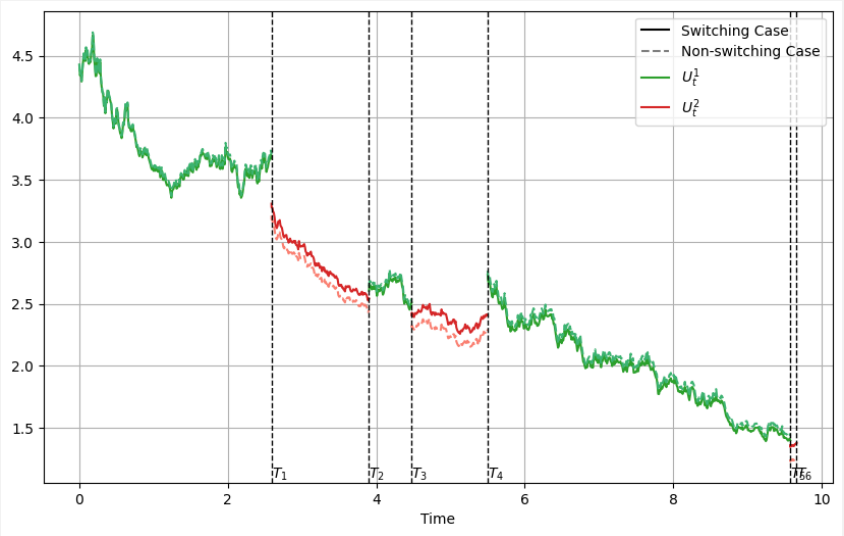


Figure 3: Utilité dynamique.

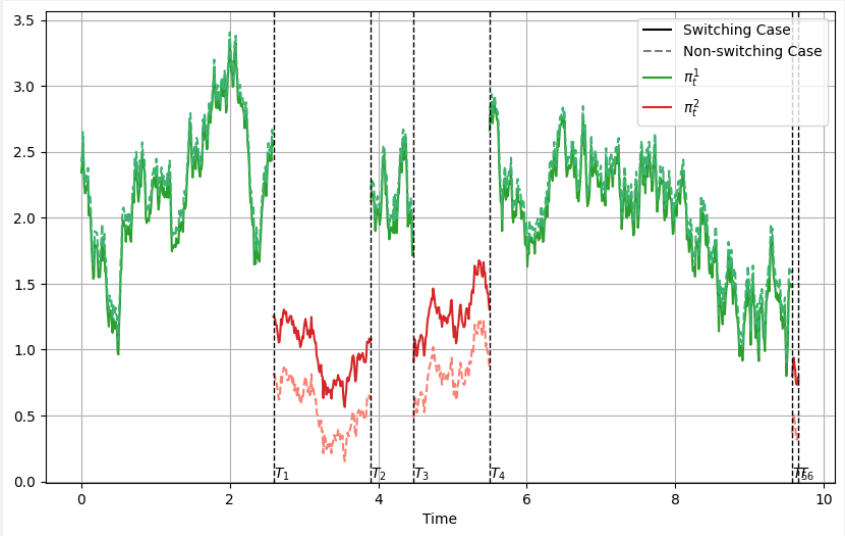


Figure 4: Stratégie optimale.

Résultats numériques et applications-

Exemple - le marché oscille entre 2 régimes

- Un actif S : "bull" market (1) vs "bear" market (2).
- Vecteur prix du marché linéaire $\theta^i(v) = \min(|\theta^i v|, b)$, avec $\theta_1 > \theta_2$.
- Taux de transition asymétriques $q_{12} = 0.5, \quad q_{21} = 1.$

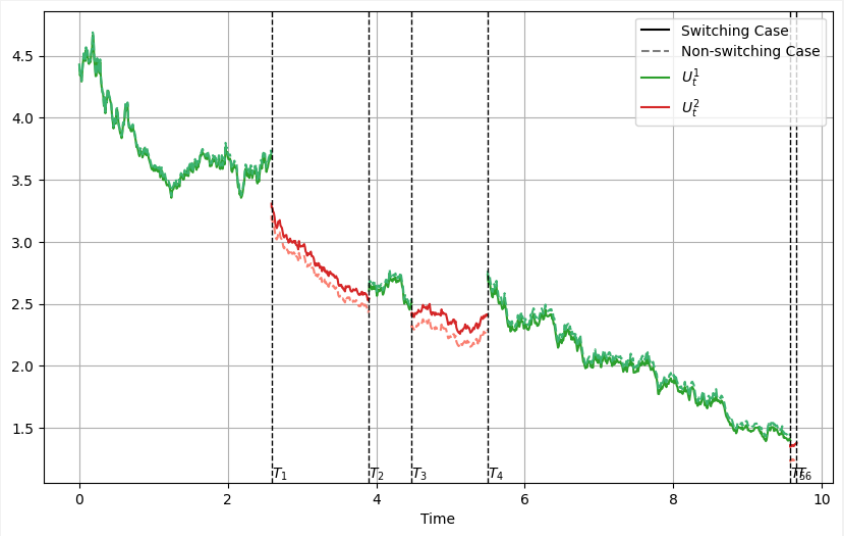


Figure 3: Utilité dynamique.

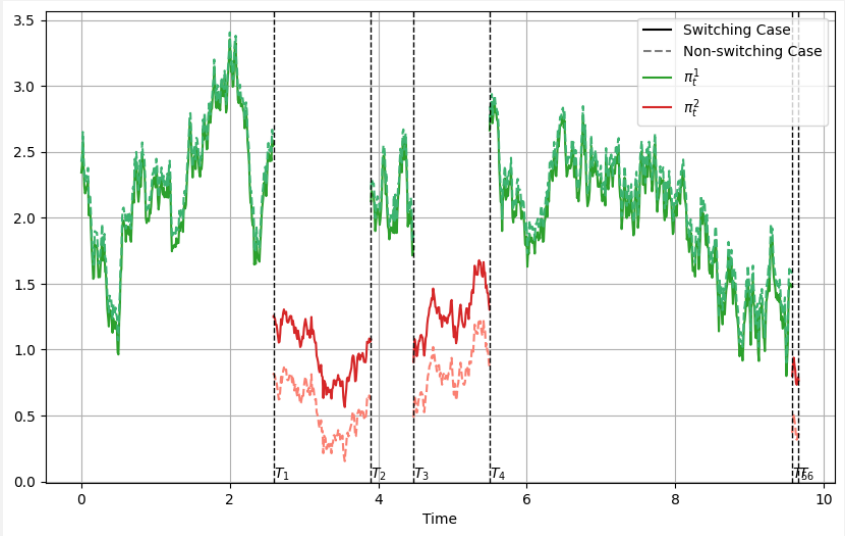


Figure 4: Stratégie optimale.

- **Applications** -
  - Contrats d'assurance vie "equity-linked" / dynamic hedging [Chong, 2019]
  - Systèmes de retraite [Hillairet et al., 2024]
  - Taux long terme [El Karoui et al., 2022]

Préférences dynamiques relatives

⋆ G.B.Q, Anis Matoussi, and Zhou Chao, « Optimal investment and consumption under forward utilities with relative performance concerns », *preprint - HAL*, (2024).

Motivation - Considerons n agents qui investissent sur un marché composé de

- un actif non risqué
- n stocks

Préférences dynamiques relatives

⋆ G.B.Q, Anis Matoussi, and Zhou Chao, « Optimal investment and consumption under forward utilities with relative performance concerns », *preprint - HAL*, (2024).

Motivation - Considerons n agents qui investissent sur un marché composé de

- un actif non risqué
- n stocks

Model - Actif i de prix actualisé (S_t^i) échangé **exclusivement** par l'agent i

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = \mu_i dt + \nu_i \underbrace{dW_t^i}_{\text{idiosyncratic noise}} + \sigma_i \underbrace{dB_t}_{\text{common noise}}, \quad S_0^i = s_0^i > 0,\ \mu_i \in \mathbb{R},\ \sigma_i \geqslant 0$$

Processus de richesse pour l'agent i

$$dX_t^i = \pi_t^i X_t^i \Big(\mu_i dt + \nu_i dW_t^i + \sigma_i dB_t\Big) - c_t^i X_t^i dt.$$

Problème - *Comment modéliser la compétition dans le problème d'optimisation associé aux utilités dynamiques ?* [Dos Reis and Platonov, 2022], [Zariphopoulou, 2024]

Critère de préférence relative pour l'agent i

- Relative performance metric - Pour un paramètre de compétition $\theta_i \in [0, 1]$.

$$\hat{X}^i = \frac{X^i}{\left(\tilde{X}^{(-i)}\right)^{\theta_i}}, \quad \text{où} \quad \tilde{X}^{(-i)} = \left(\prod_{k \neq i}^{n} X^k\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

$$\hat{c^i} = \frac{c^i}{\left(\tilde{c}^{(-i)}\right)^{\theta_i}}, \quad \text{où} \quad \tilde{c}^{(-i)} = \left(\prod_{k \neq i}^{n} c^k\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

Critère de préférence relative pour l'agent i

- Relative performance metric - Pour un paramètre de compétition $\theta_i \in [0,1]$.

$$\hat{X}^i = \frac{X^i}{\left(\tilde{X}^{(-i)}\right)^{\theta_i}}, \quad \text{où} \quad \tilde{X}^{(-i)} = \left(\prod_{k\neq i}^{n} X^k\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

$$\hat{c^i} = \frac{c^i}{\left(\tilde{c}^{(-i)}\right)^{\theta_i}}, \quad \text{où} \quad \tilde{c}^{(-i)} = \left(\prod_{k\neq i}^{n} c^k\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

- Critère de préférence relative -

$$Q^i(t, \hat{x^i}; (\pi_t^{-i}, c_t^{-i})) = U^i(t, \hat{x^i}) + \int_0^t V^i(s, \hat{c^i}\hat{x^i})\, ds,$$

- Contributions -
  - Caractérisation des utilités dynamiques relatives via une EDPS.
  - Etude de l'équilibre de Nash dans le cadre à n joueurs pour utilité CRRA.
  - Etude de l'équilibre de Nash dans le cadre à champ moyen pour utilité CRRA. Dérivation de stratégies optimales explicites.

Conclusion

Pour conclure, les utilités dynamiques

- intègrent automatiquement les nouvelles informations et garantissent la cohérence des décisions dans un environnement incertain,
- mènent à des stratégies adaptatives et optimales à tout instant,
- offrent un critère unique capable d'agréger plusieurs sources de risque (financier, démographique, climatique).

Conclusion

Pour conclure, les utilités dynamiques

- intègrent automatiquement les nouvelles informations et garantissent la cohérence des décisions dans un environnement incertain,
- mènent à des stratégies adaptatives et optimales à tout instant,
- offrent un critère unique capable d'agréger plusieurs sources de risque (financier, démographique, climatique).

Merci pour votre attention!

Chong, W. F. (2019).
Pricing and hedging equity-linked life insurance contracts beyond the classical paradigm: The principle of equivalent forward preferences.
Insurance: Mathematics and Economics, 88:93–107.

Dos Reis, G. and Platonov, V. (2022).
Forward utility and market adjustments in relative investment-consumption games of many players.
SIAM Journal on Financial Mathematics, 13(3):844–876.

El Karoui, N., Hillairet, C., and Mrad, M. (2022).
Ramsey rule with forward/backward utility for long-term yield curves modeling.
Decisions in Economics and Finance, 45(1):375–414.

Hillairet, C., Kaakai, S., and Mrad, M. (2024).
Time-consistent pension policy with minimum guarantee and sustainability constraint.
Probability, Uncertainty and Quantitative Risk, pages 1–30.

Hu, Y., Liang, G., and Tang, S. (2020).
Systems of ergodic BSDEs arising in regime switching forward performance processes.
SIAM Journal on Control and Optimization, 58(4):2503–2534.

Liang, G. and Zariphopoulou, T. (2017).
Representation of homothetic forward performance processes in stochastic factor models via ergodic and infinite horizon bsde.
SIAM Journal on Financial Mathematics, 8(1):344–372.

Musiela, M. and Zariphopoulou, T. (2006).
Investments and forward utilities.
Technical report.

Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1947).
Theory of games and economic behavior: 60th anniversary commemorative edition.
In *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press.

Zariphopoulou, T. (2024).

Mean field and many-player games in ito-diffusion markets under forward performance criteria.

Probability, Uncertainty and Quantitative Risk, 9(2):123–148.