

**Tables de mortalité
prospectives :
détecter, analyser et
anticiper les ruptures de
tendance**

Dominique ABGRALL
Actuaire – GIE AXA

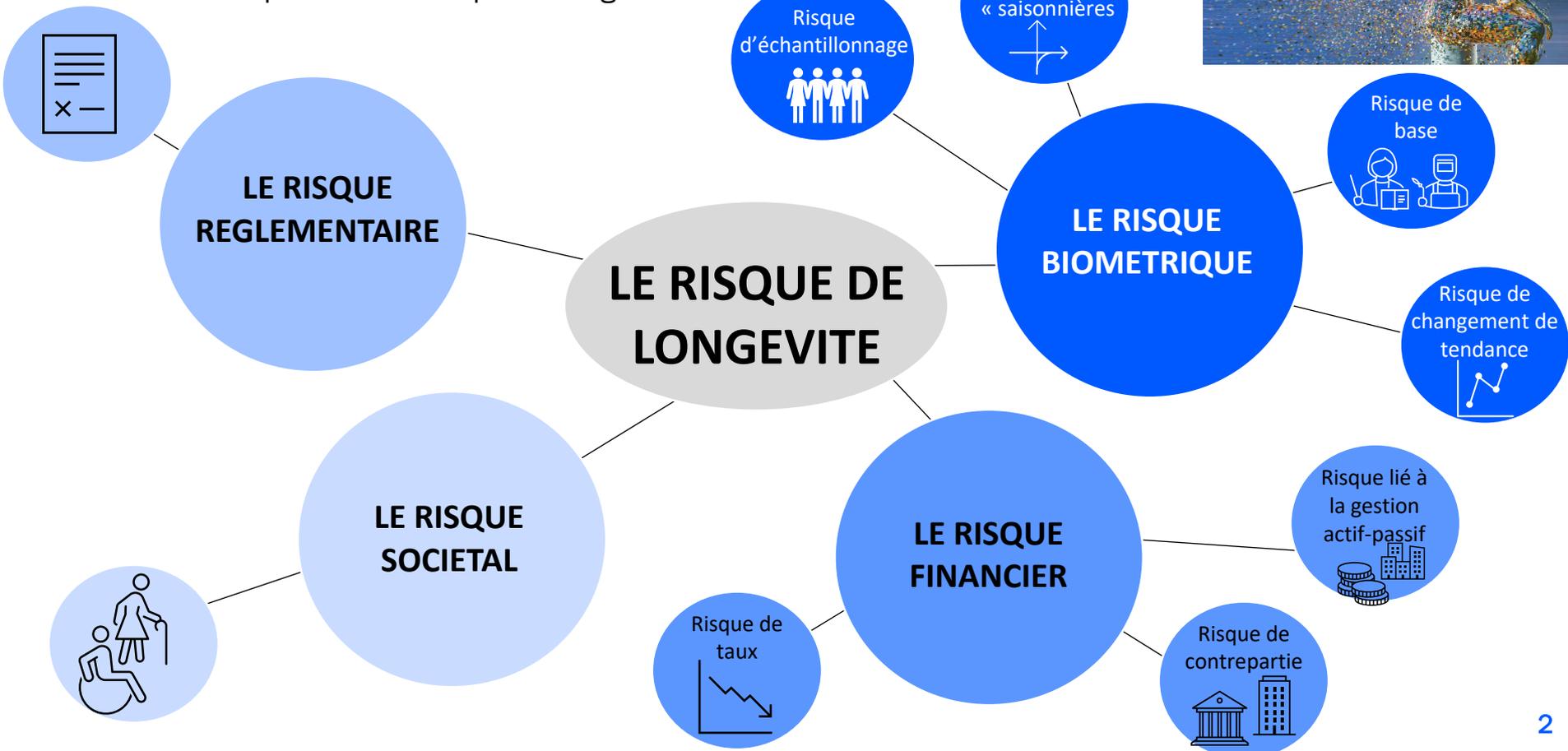
Irchad MAMODE VALJEE
*Actuaire – Consultant Manager –
GALEA*

Amélie MARTIN
*Actuaire – Consultante Junior –
GALEA*



Contextualisation

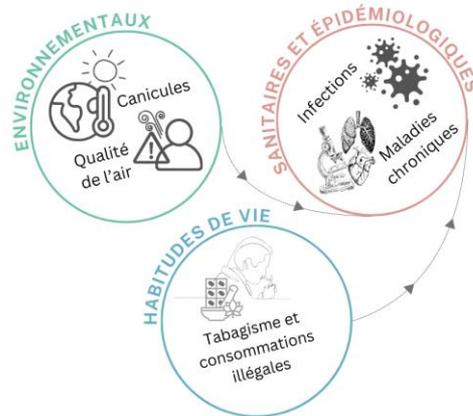
- Les composantes du risque de longévité





Contextualisation

- La naissance de la problématique
- Les tables de mortalité réglementaires prospectives TGH-05 et TGF-05 reposent sur des données anciennes,
 - Homologuées en 2006,
 - Elaborées à partir des données de 700 000 rentes liquidées sur la période 1993-2005,
 - Positionnées par rapport à une table prospective INSEE, construite à partir des tables du moment de 1962 à 2000.
- Une dynamique de la mortalité qui a évolué et une multitude de facteurs influençant la mortalité,



- ➔ Explorer l'actualisation des tables de mortalité prospectives à partir de données plus récentes, afin de disposer de références mieux adaptées au contexte démographique actuel.

Contextualisation

- Les tables de mortalité



Quelques notations

- La probabilité de survie entre x et $x + 1$:

$${}_1p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \text{ avec } l_x \text{ la population vivante à l'âge } x$$

- Le quotient de mortalité entre x et $x + 1$:

$${}_1q_x = 1 - {}_1p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

Cadre prospectif : le quotient de mortalité à l'âge x et à l'année t :

$$q_{x,t} = \mathbb{P}(x \leq T < x + 1 | T \geq x, U = t - x)$$

avec T la durée de vie totale de l'individu et U l'année de naissance de l'individu.

- Les taux de décès instantanés :

$$\mu_{x,t} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \mathbb{P}(t < T \leq t + h | T > t, U = t - x)$$

Une notion importante

- La censure à droite : la variable d'intérêt X est telle que $X \geq C$, avec $C > 0$ l'observation de la censure fixée.

Les tables prospectives

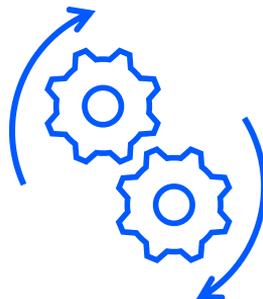
- Modélisation de la mortalité en fonction de l'âge mais également selon les années de naissance.





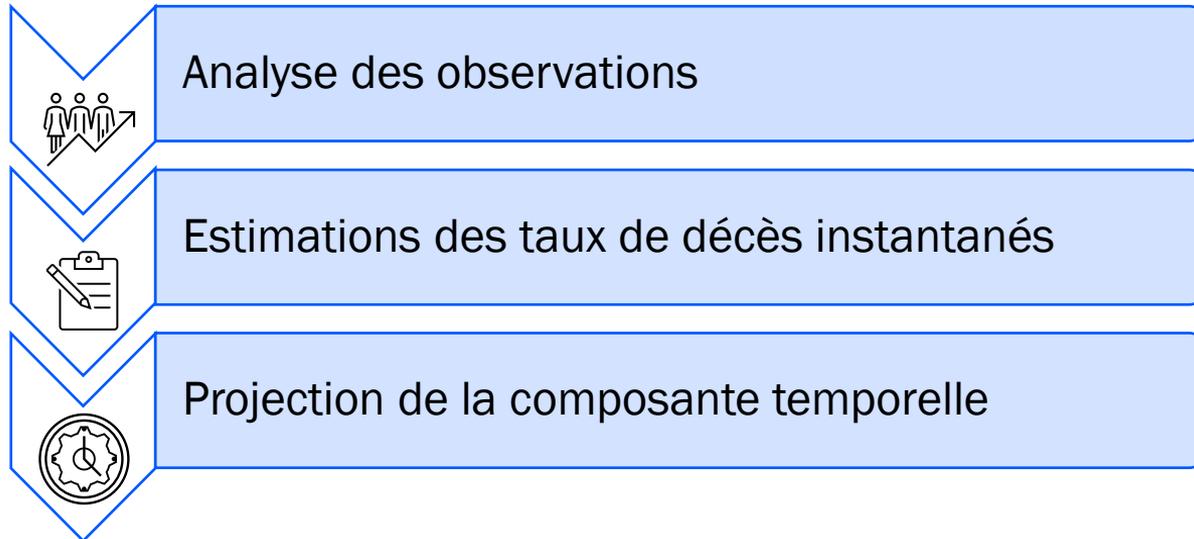
PARTIE 1 :

Modélisation et prise en compte des dynamiques récentes



Modélisation et prise en compte des dynamiques récentes

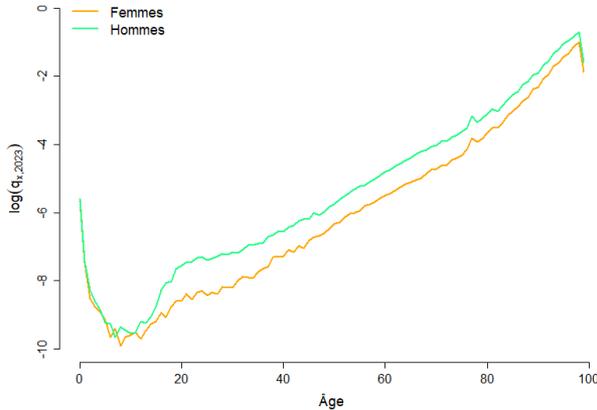
- La méthodologie de construction



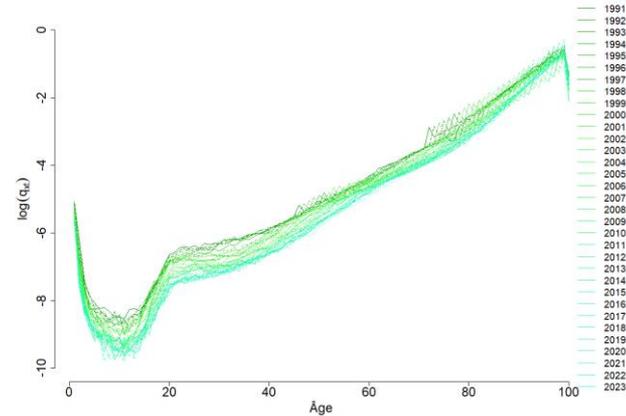
Modélisation et prise en compte des dynamiques récentes

- Analyse des observations

- Données de population** : le nombre d'individus au 1er janvier de chaque année, par âge de 0 à 99 ans et plus et par sexe de 1991 à 2023 (INSEE),
- Données de décès** : les fichiers décennaux des personnes décédées de 1970 à 2023 (INSEE).



Les logarithmes des taux de mortalité bruts en 2023 selon le sexe



Les logarithmes des taux de mortalité bruts des hommes selon l'âge par année



- Estimation des taux de décès instantanés

Les modèles

LEE & CARTER

$$\ln \hat{\mu}_{x,t} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t}$$

- α_x : la valeur moyenne des $\ln \hat{\mu}_{x,t}$ au cours du temps
- β_x : la sensibilité de l'âge x à l'évolution temporelle
- κ_t : l'évolution de la mortalité dans le temps
- $\varepsilon_{x,t}$: un terme d'erreur de moyenne nulle et de variance σ^2

Limites :

- L'homoscédasticité : la variance des erreurs est constante à travers les âges et le temps,
- Le paramètre β_x : la sensibilité de l'âge x à l'évolution temporelle ne tient pas compte du temps,
- Un unique paramètre temporel
- Un besoin important de données

LOG POISSON

Les décès se comportent comme s'ils suivaient une loi de Poisson, afin de permettre l'estimation par maximum de vraisemblance

$$D_{x,t} \sim P(E_{x,t} \mu_{x,t})$$

$$\text{avec } \mu_{x,t} = e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t}$$

Limites :

- Le paramètre β_x : la sensibilité de l'âge x à l'évolution temporelle ne tient pas compte du temps,
- Un unique paramètre temporel

RENSHAW & HABERMAN

Intégration de paramètres de cohortes

$$\ln \hat{\mu}_{x,t} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \beta_x^{(2)} \gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t}$$

- γ_{t-x} : l'effet cohorte des individus âgés de x ans et nés dans l'année $t - x$
- $\beta_x^{(2)}$: la sensibilité à chaque âge de l'effet cohorte (fixé à 1 pour l'étude)

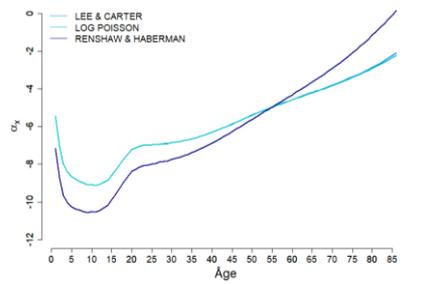
Limites :

- Les paramètres β_x et $\beta_x^{(2)}$ ne tiennent pas compte du temps,

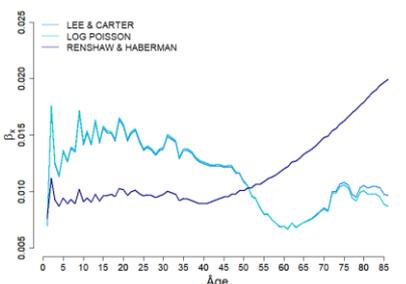
Modélisation et prise en compte des dynamiques récentes

- Estimation des taux de décès instantanés

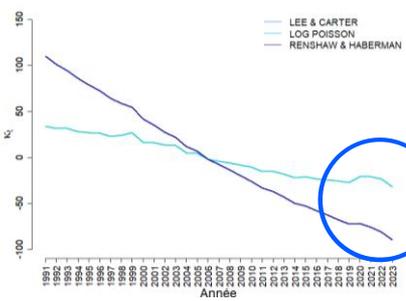
Les paramètres



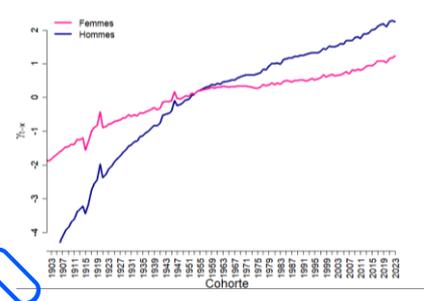
Le paramètre α_x traduit une croissance globale des taux de mortalité en fonction de l'âge



Le paramètre β_x reflète une sensibilité à l'évolution temporelle plus marquée à certains âges



Le paramètre κ_t met en évidence une diminution globale de la mortalité dans le temps avec cependant **une perturbation récente sur quelques points**



Le paramètre γ_{t-x} montre une amélioration générale de la mortalité dans les cohortes récentes.*

* Comparaison du γ_{t-x} des hommes et des femmes pour le modèle de Renshaw & Haberman

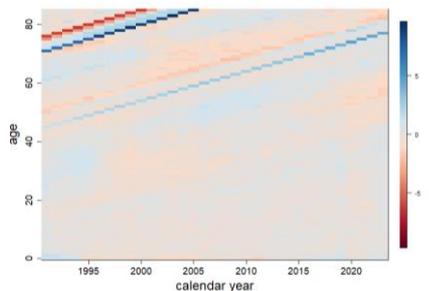


Modélisation et prise en compte des dynamiques récentes

- Estimation des taux de décès instantanés

L'évaluation des modèles et sélection finale

LEE & CARTER



$$r_{x,t} = \frac{D_{x,t} - \hat{D}_{x,t}}{\sqrt{\text{Var}(\hat{D}_{x,t})}}$$

$D_{x,t}$: décès observés et $\hat{D}_{x,t}$: décès prédits

BIC : 102 418

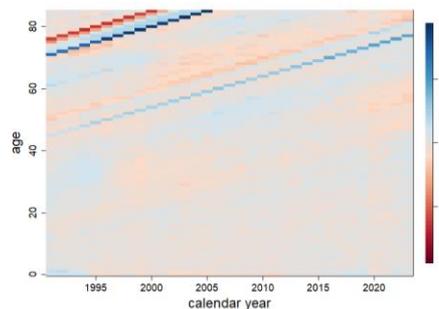
$$BIC = -2 \log(L) + k \log(n)$$

L : logarithme de la fonction de vraisemblance maximale

k : nombre de paramètres du modèle

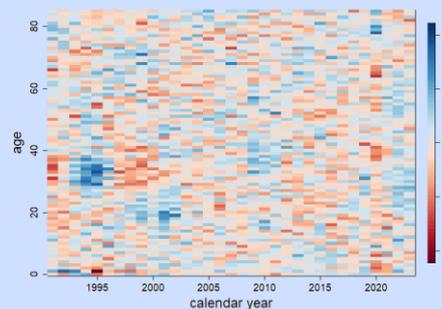
n : nombre d'observations dans les données

LOG POISSON



BIC : 98 040

RENSHAW & HABERMAN

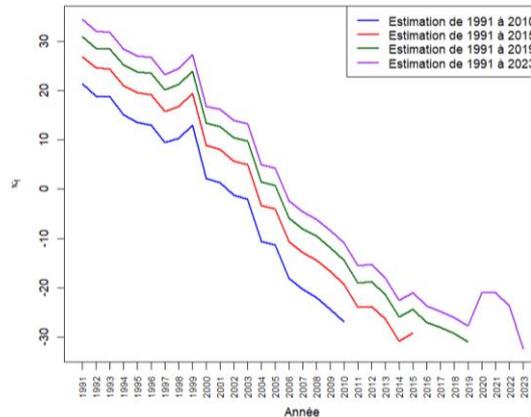


BIC : 30 926

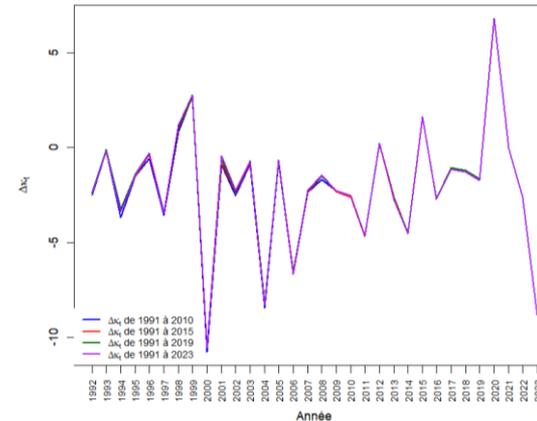
Modélisation et prise en compte des dynamiques récentes

- Estimation des taux de décès instantanés

Les paramètres



Comparaison des estimations des k_t des hommes selon différentes périodes



Comparaison des Δk_t des hommes selon différentes périodes

➔ Selon la période d'estimation, c'est principalement le niveau global de k_t , et non sa dynamique, qui est modifiée.



Modélisation et prise en compte des dynamiques récentes

- Projection de la composante temporelle

Un modèle $ARIMA(0, 1, 0)$ avec une constante μ qui représente la dérive :

$$\kappa_t = \mu + \kappa_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{avec } \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ i.i.d.}$$

La récente perturbation des dynamiques de mortalité soulève plusieurs questions sur son impact sur les prévisions futures.

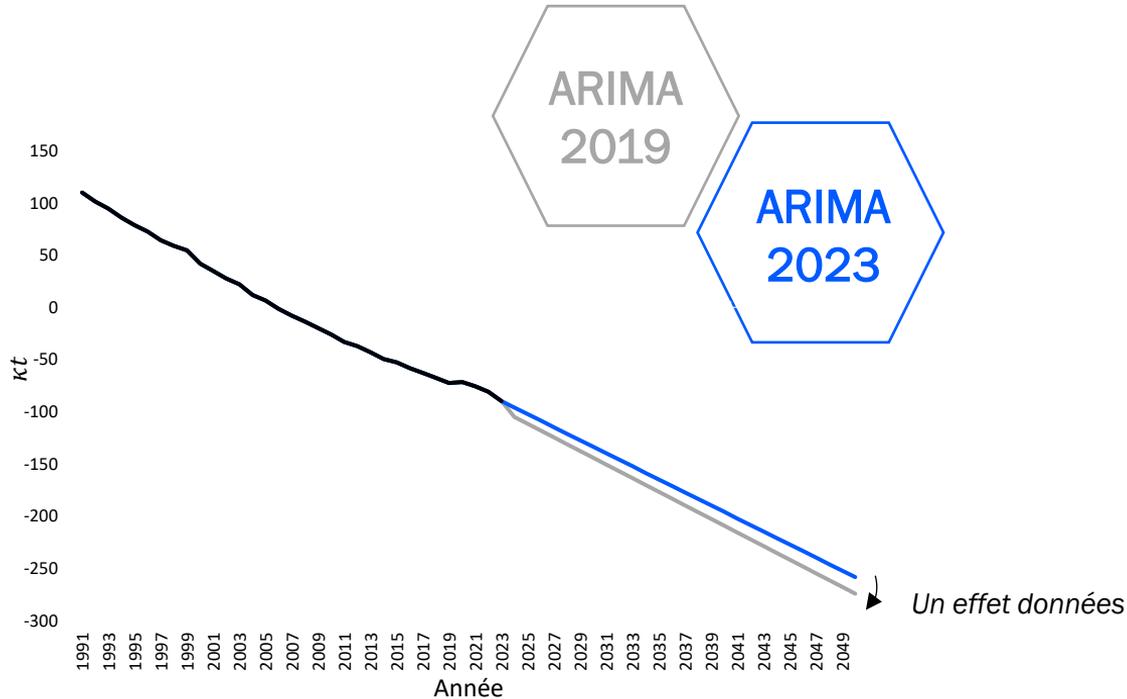
Deux scénarios de projection sont envisagés :

- Le premier scénario **exclut les années marquées par cette perturbation** (étude de la série de 1991 à 2019),
- Le second scénario **inclut les données récentes** (étude de la série de 1991 à 2023).



Modélisation et prise en compte des dynamiques récentes

- Projection de la composante temporelle



Interrogations :

- Une incertitude demeure sur la nature des perturbations : conjoncturelles ou structurelles ?
- Des interrogations émergent quant au réalisme des scénarios de projections : sont-ils trop extrêmes ?



Détection de ruptures de tendance sur le κ_t du scénario ARIMA 2023

Les projections de la composante temporelle des hommes avec les 2 scénarios



PARTIE 2 :

Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t





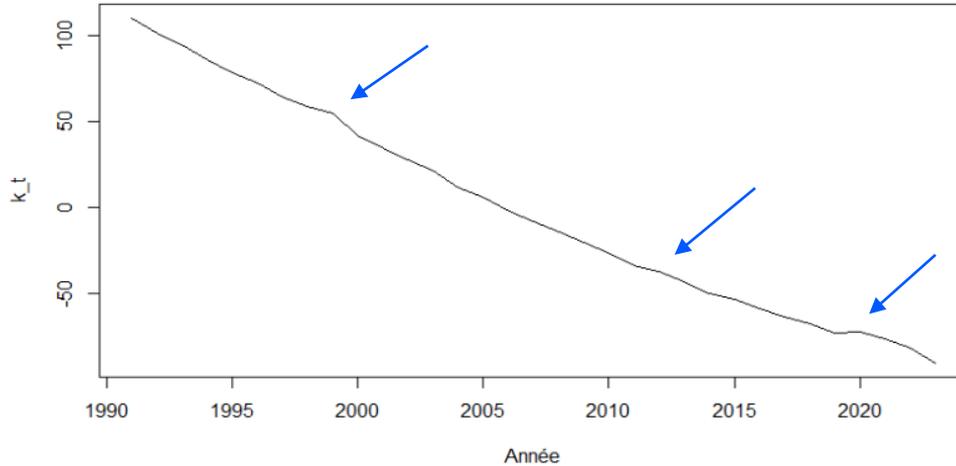
-  Les chocs sur le κ_t
-  Distinction du niveau et la pente
-  Modèle ARIMA(0,1,0): étude de $\kappa_t - \kappa_{t-1}$
-  Focus sur les dernières années
-  La détection de points de changement
-  Modèle ARIMA(0,1,0) : les différences sont stables
-  Modèle ARIMA(0,1,0) : est-il vraiment un bon choix ? Augmentation linéaire des différences à partir de 2007 ?

Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t

- Les chocs sur le κ_t

? Rupture dans la tendance ?
 Suivi d'une compensation/retour à la tendance initiale ?

Paramètre kappa pour les hommes

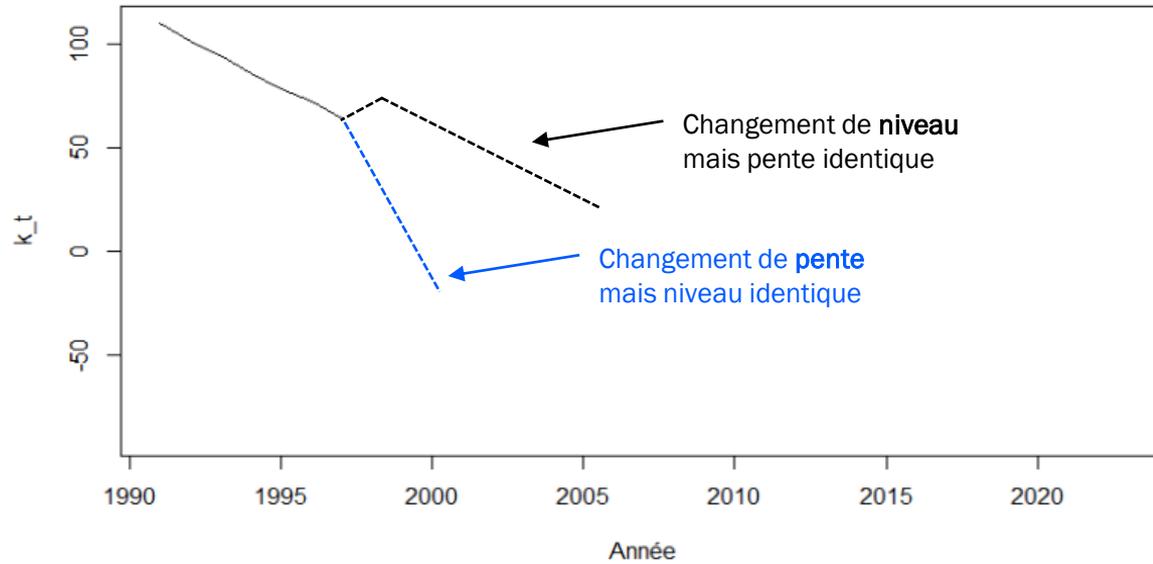




Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t

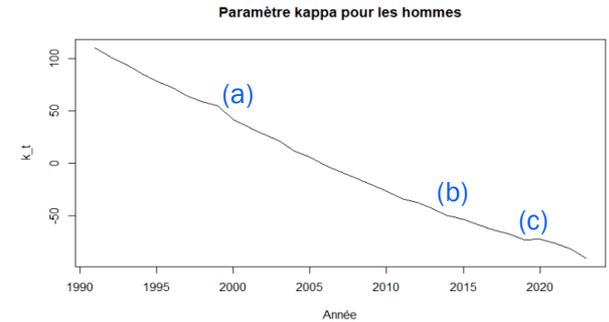
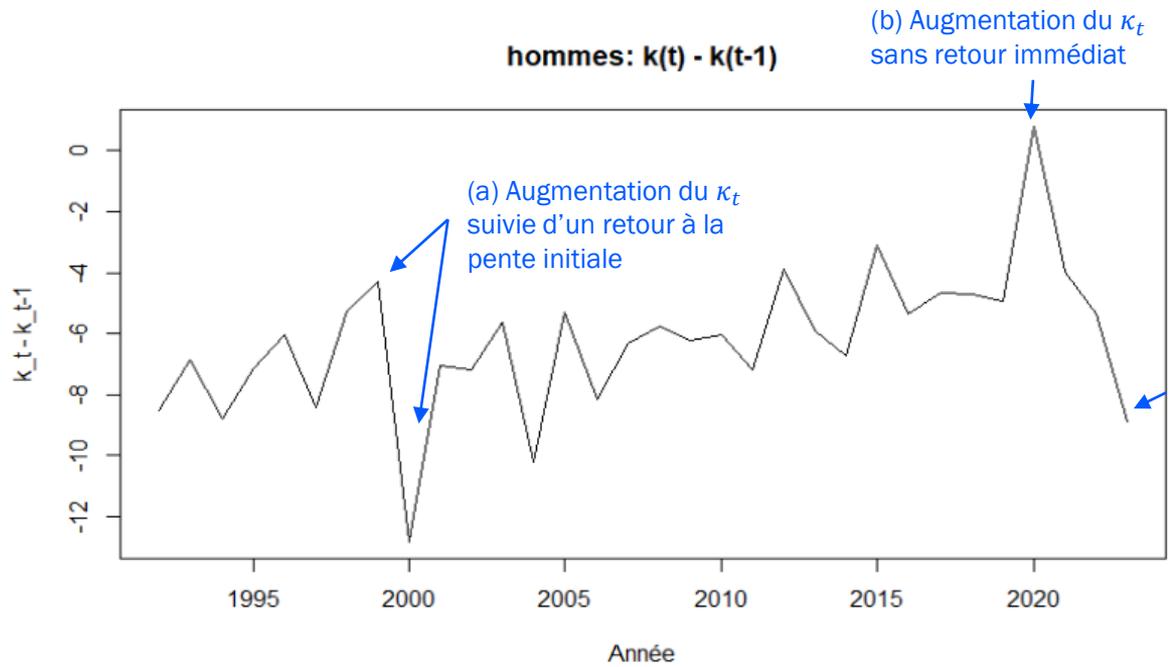
- Distinction du niveau et la pente

Paramètre kappa pour les hommes



Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t

- Modèle ARIMA(0,1,0): étude de $\kappa_t - \kappa_{t-1}$

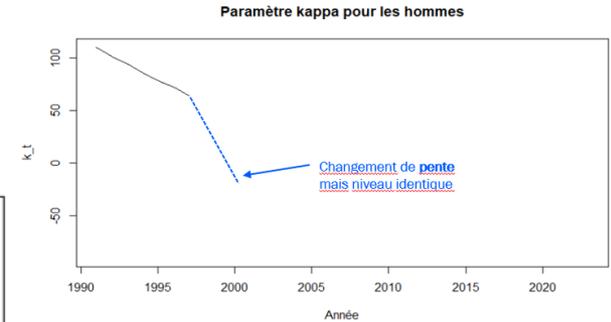
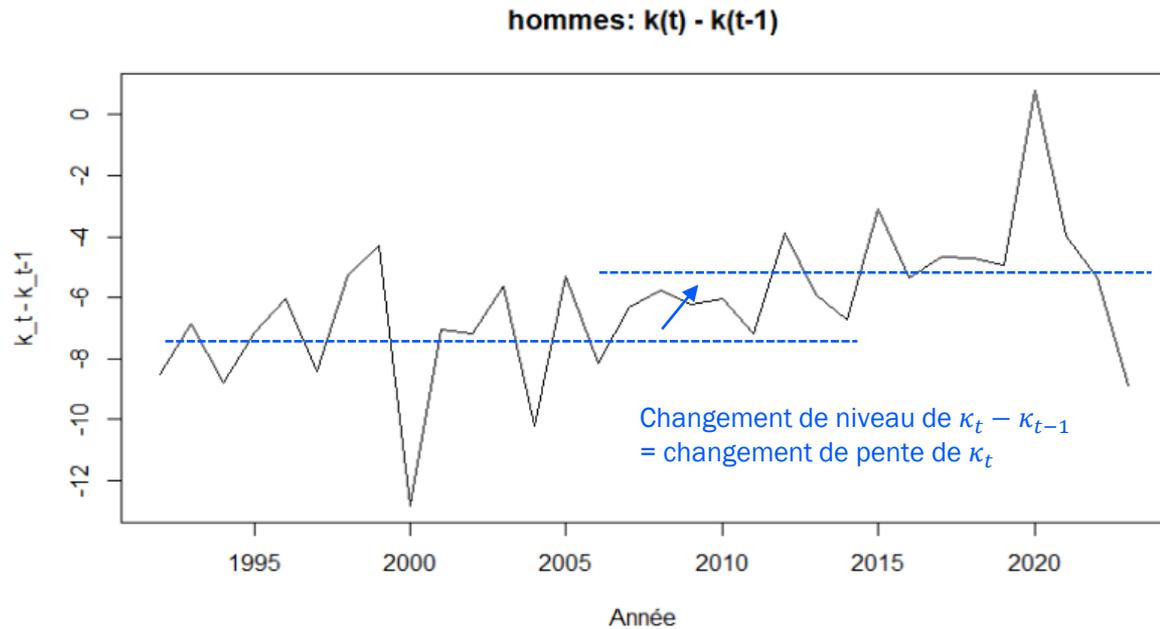


(c) Compensation tardive de (b) ? Phénomène non résolu ?



Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t

- Modèle ARIMA(0,1,0): étude de $\kappa_t - \kappa_{t-1}$



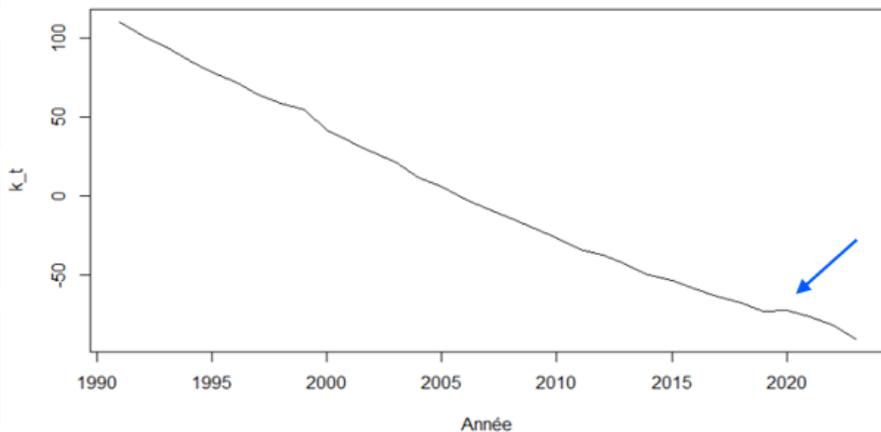


Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t

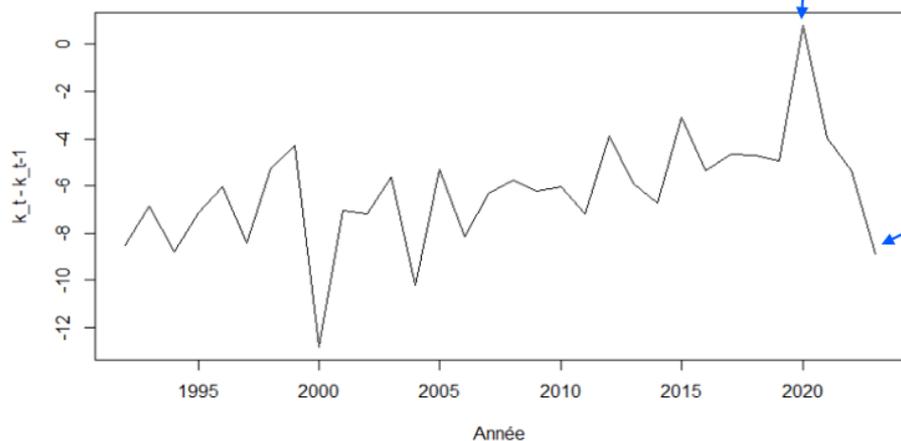
- Focus sur les dernières années

? Quelle validité pour le modèle ARIMA(0,1,0) ?

Paramètre kappa pour les hommes



hommes: $k(t) - k(t-1)$





Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t

- La détection de points de changement

Les motivations



Un possible changement apparaît dans les données : est-ce certain ?

S'agit-il d'un changement de tendance ou simplement de deux valeurs aberrantes consécutives ?

Quand le changement s'est-il produit ?



Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t

- La détection de points de changement

Les motivations



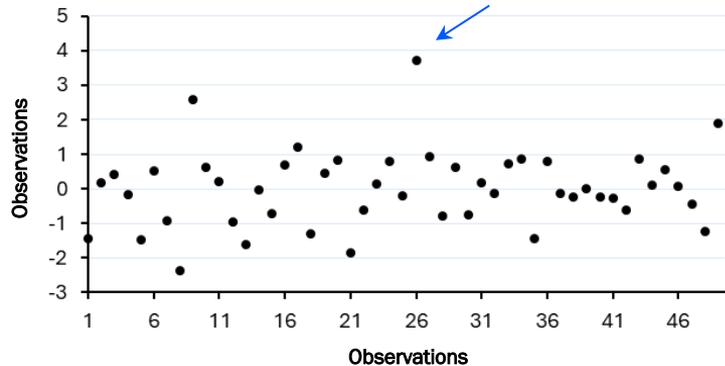
Un possible changement apparaît dans les données : est-ce certain ?

S'agit-il d'un changement de tendance ou simplement de deux valeurs aberrantes consécutives ?

Quand le changement s'est-il produit ?

Valeur aberrante ou changement persistant ?

Observations $\mathcal{N}(0, 1)$ avec une valeur aberrante





Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t

- La détection de points de changement

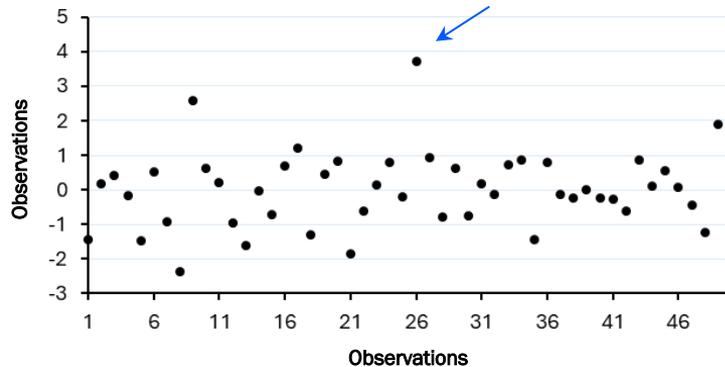
Les motivations



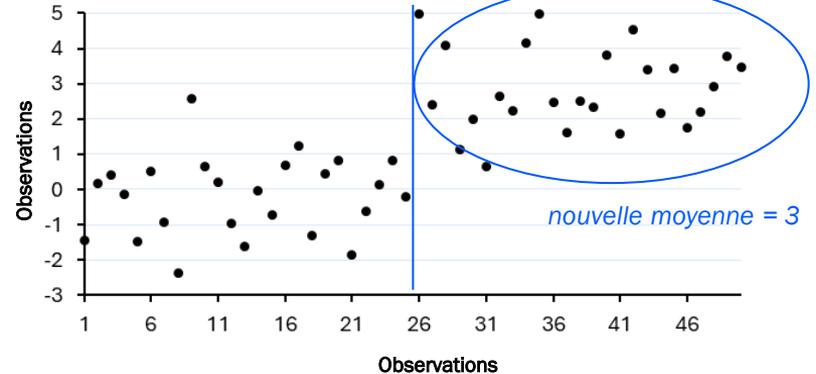
Un possible changement apparaît dans les données : est-ce certain ?
 S'agit-il d'un changement de tendance ou simplement de deux valeurs aberrantes consécutives ?
 Quand le changement s'est-il produit ?

Valeur aberrante ou changement persistant ?

Observations $\mathcal{N}(0, 1)$ avec une valeur aberrante



Observations $\mathcal{N}(0, 1)$ avec un changement persistant



Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t

- La détection de points de changement

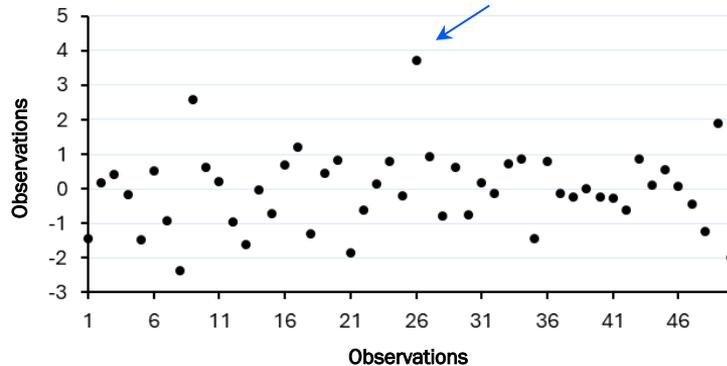
Les motivations



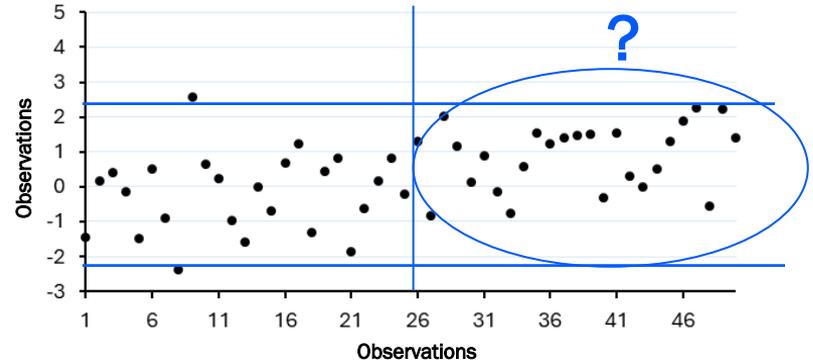
Un possible changement apparaît dans les données : est-ce certain ?
 S'agit-il d'un changement de tendance ou simplement de deux valeurs aberrantes consécutives ?
 Quand le changement s'est-il produit ?

Valeur aberrante ou changement persistant ?

Observations $\mathcal{N}(0, 1)$ avec une valeur aberrante



Observations $\mathcal{N}(0, 1)$ avec un changement persistant



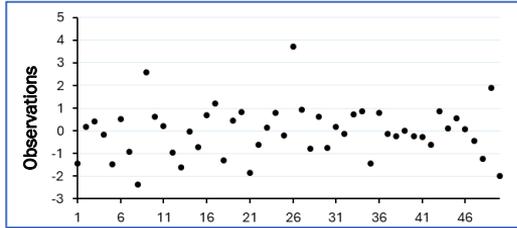


Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t

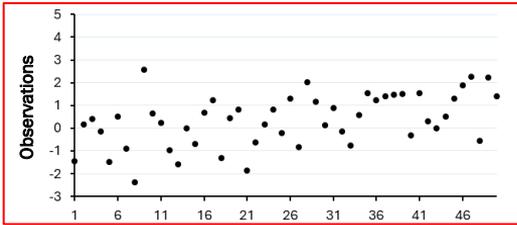
- La détection de points de changement

Détection de rupture en ligne

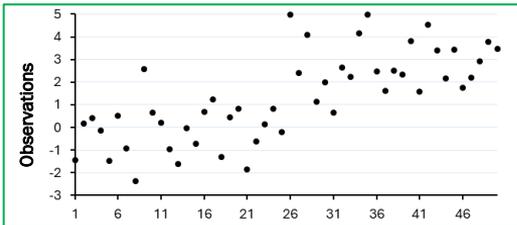
Avec une valeur aberrante



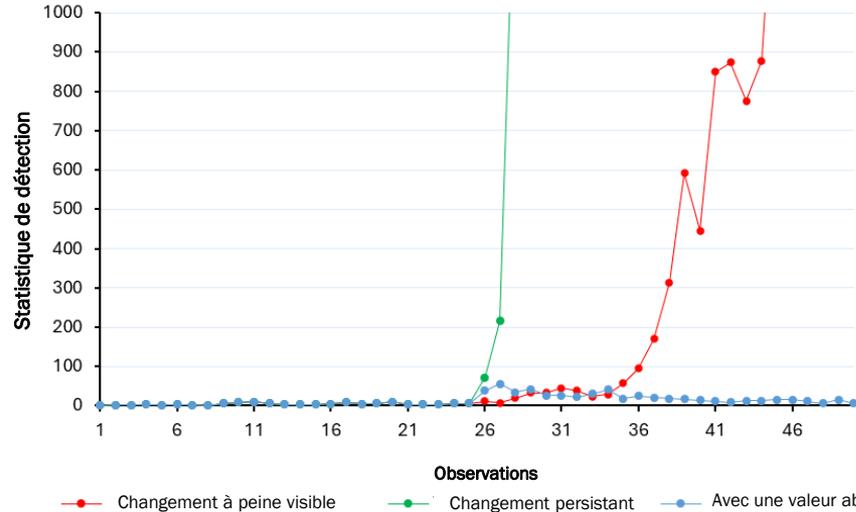
Changement à peine visible



Changement persistant



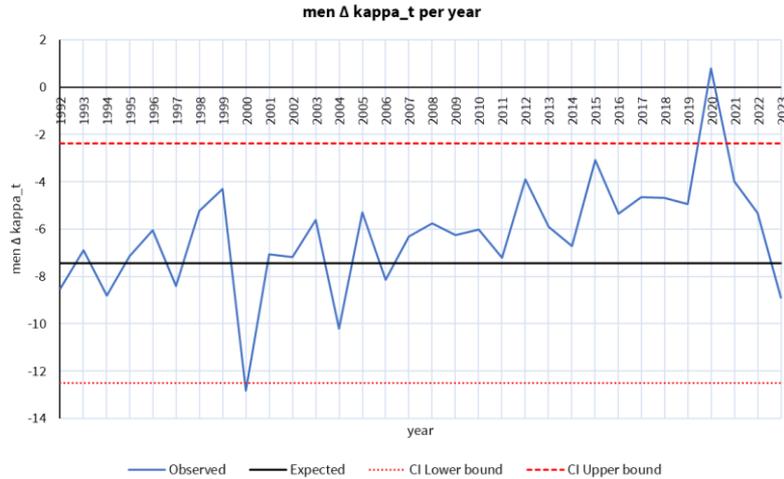
Statistique séquentielle





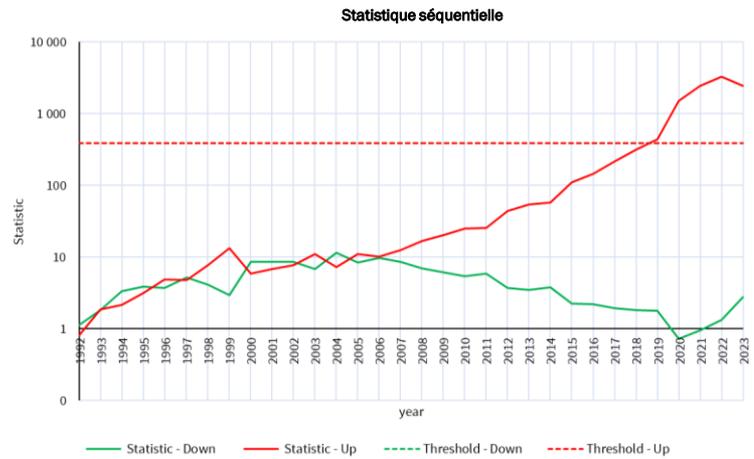
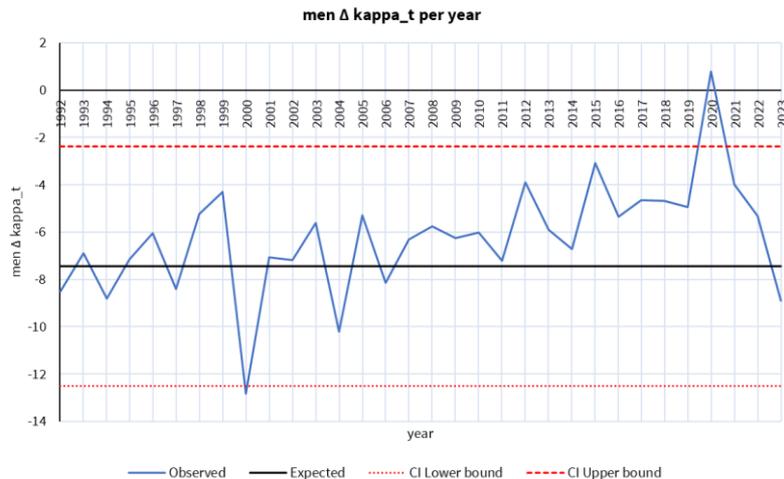
Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t

- Modèle ARIMA(0,1,0) : les différences sont stables



Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t

- Modèle ARIMA(0,1,0) : les différences sont stables

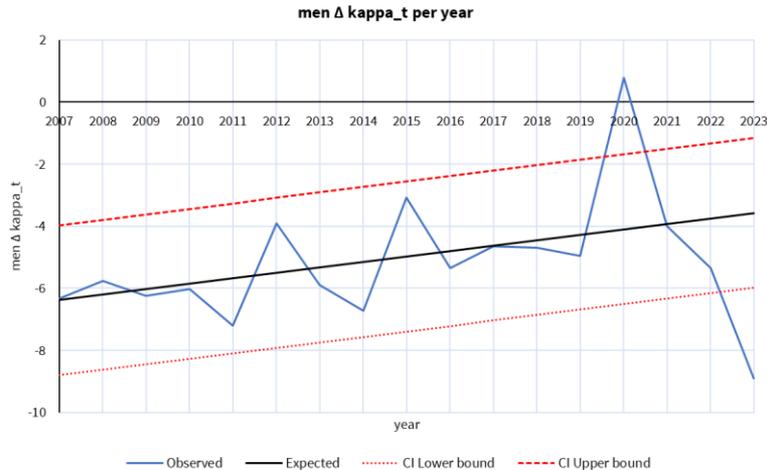


➔ Dérive à la hausse dès 2007/2008



Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t

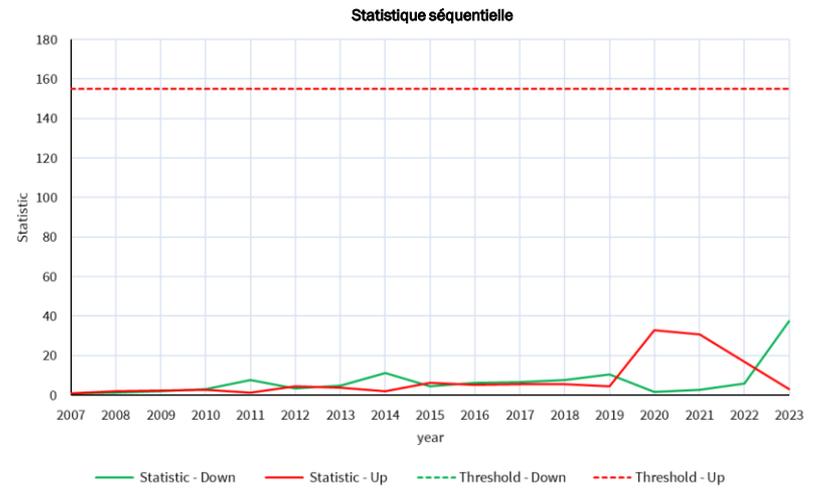
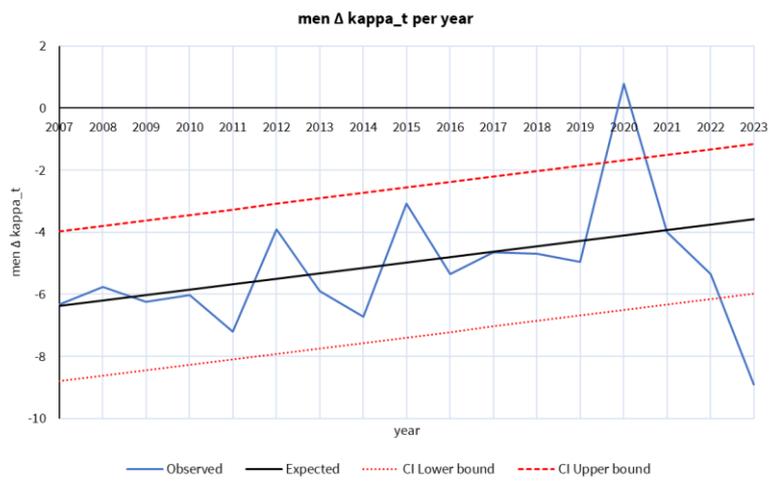
- Modèle ARIMA(0,1,0) : est-il vraiment un bon choix ? Augmentation linéaire des différences à partir de 2007 ?





Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t

- Modèle ARIMA(0,1,0) : est-il vraiment un bon choix ? Augmentation linéaire des différences à partir de 2007 ?



➔ Pas de dérive significative



CONCLUSION

Atténuation du risque de longévité



- Couverture du risque de longévité via le risque de mortalité
- Transfert du risque de longévité
 - Réassurance
 - Titrisation



*Des mécanismes théoriques
difficiles à mettre en place.*



Analyser les ruptures
de tendance

Alerter le top
management



Merci pour votre attention

Avez-vous des questions





ANNEXES

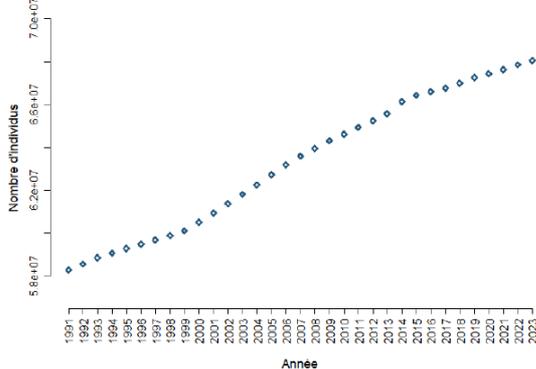
Annexes – Modélisation et prise en compte des dynamiques récentes



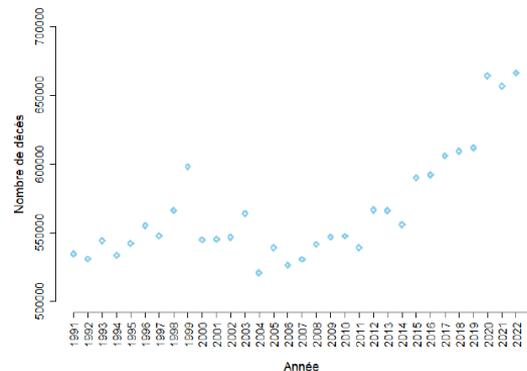
- Analyse des observations



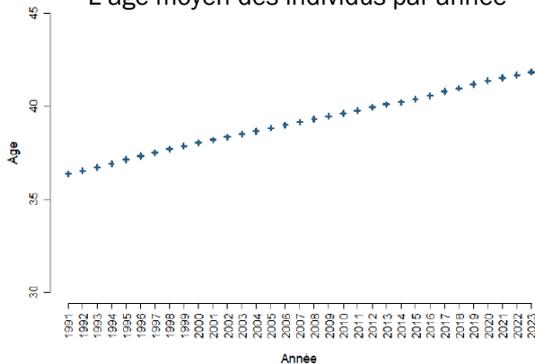
Le nombre d'individus par année



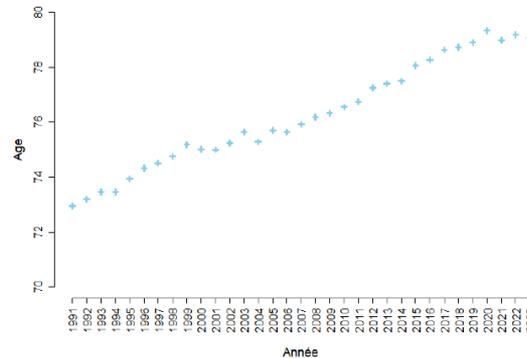
Le nombre de décès par année



L'âge moyen des individus par année

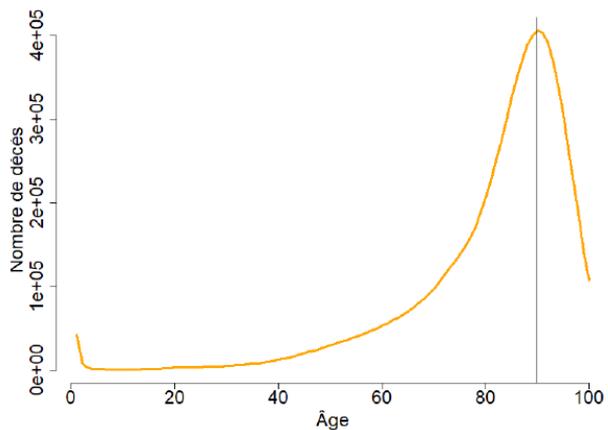


L'âge moyen des décès par année

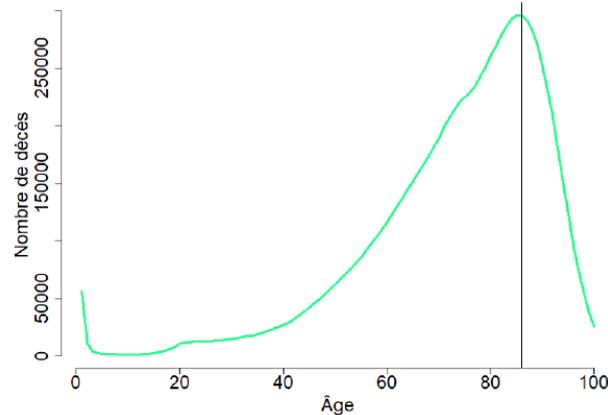




- Analyse des observations



Femmes



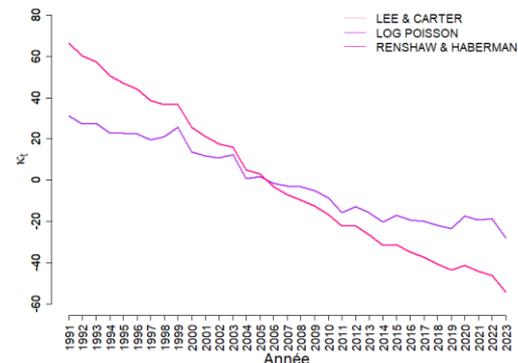
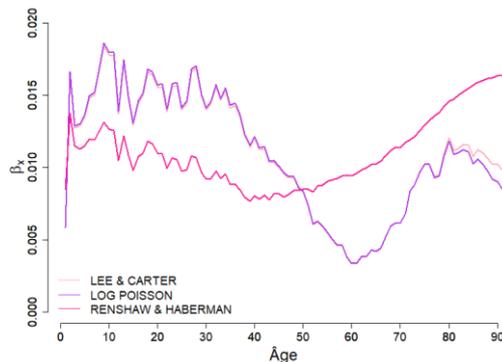
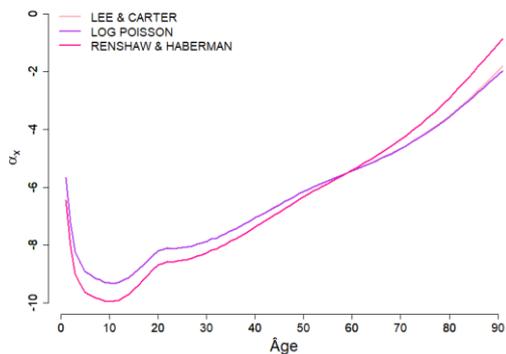
Hommes

Les nombres de décès observés

Annexes – Modélisation et prise en compte des dynamiques récentes

- Estimation des taux de décès instantanés

Les paramètres



La comparaison graphique des composantes des modèles pour les femmes



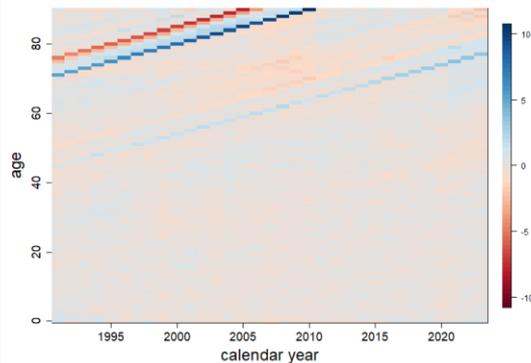
Annexes – Modélisation et prise en compte des dynamiques récentes

- Estimation des taux de décès instantanés



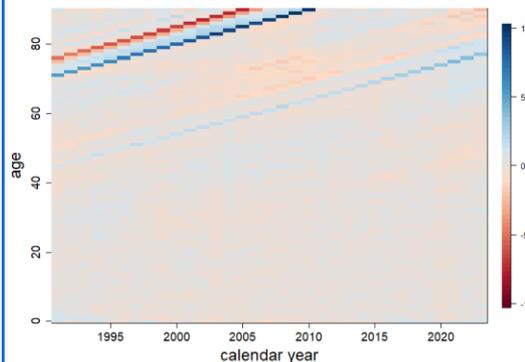
L'évaluation des modèles et sélection finale

LEE & CARTER



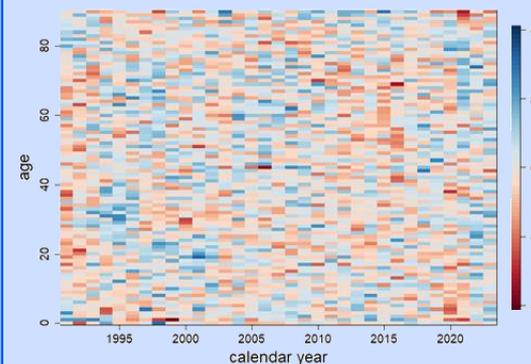
BIC : 115 603

LOG POISSON



BIC : 109 983

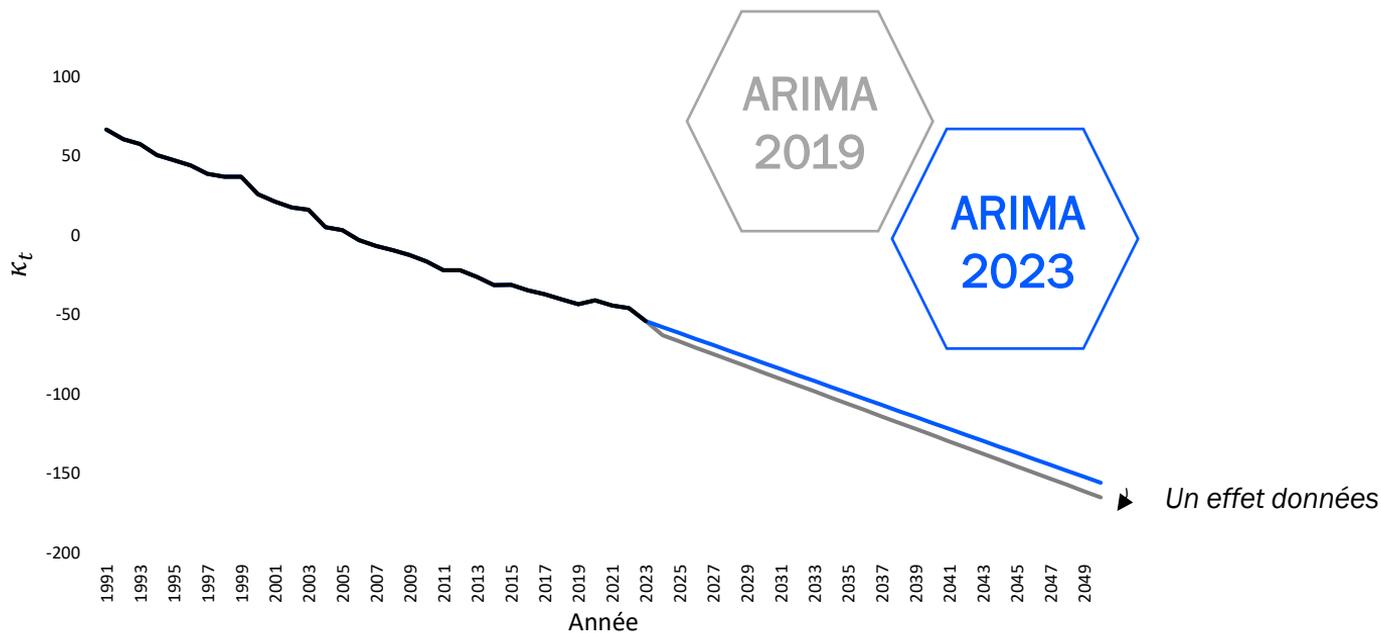
RENSHAW & HABERMAN



BIC : 30 910

Annexes – Modélisation et prise en compte des dynamiques récentes

- Projection de la composante temporelle



Les projections de la composante temporelle des femmes avec les 3 scénarios



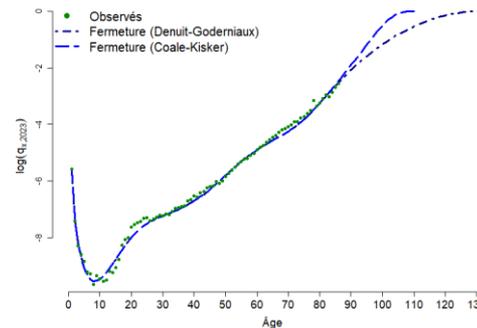
- Fermetures aux grands âges

La méthode de DENUIT & GODERNIAUX

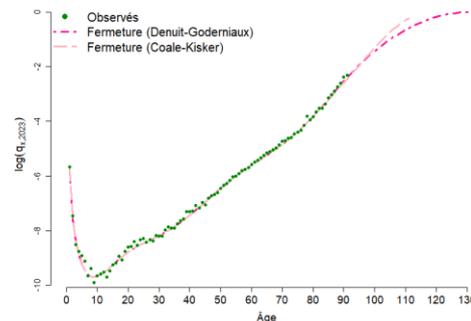
$$\ln(\hat{q}_{x,t}) = a_t + b_t x + c_t x^2 + \varepsilon_{x,t}$$

La méthode de COALE & KISKER

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{65} e^{k_x(x-65)}$$

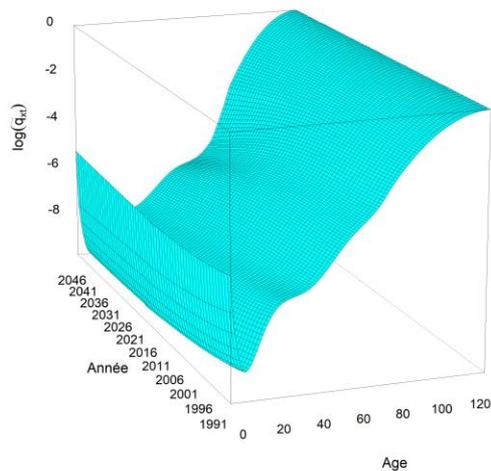


Les logarithmes des taux de décès de 2023 des hommes pour le scénario ARIMA 2023

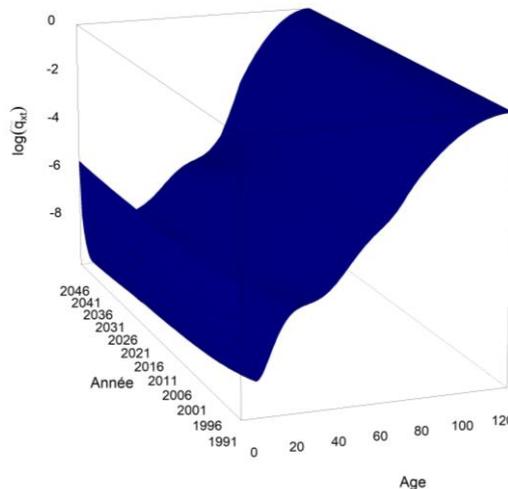


Les logarithmes des taux de décès de 2023 des femmes pour le scénario ARIMA 2023

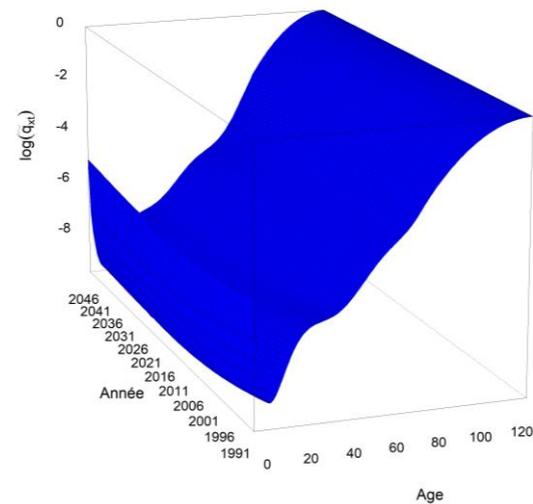
Annexes – Modélisation et prise en compte des dynamiques récentes



Les logarithmes des taux de décès des hommes du scénario ARIMA 2019



Les logarithmes des taux de décès des hommes du scénario ARIMA 2023



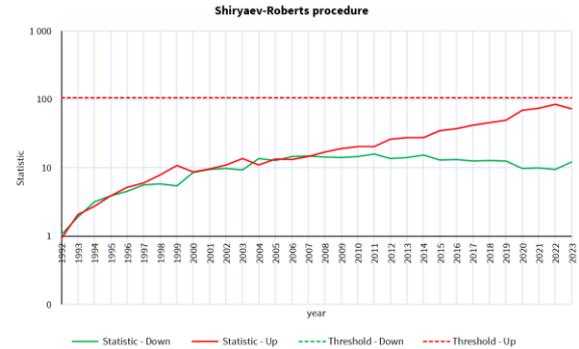
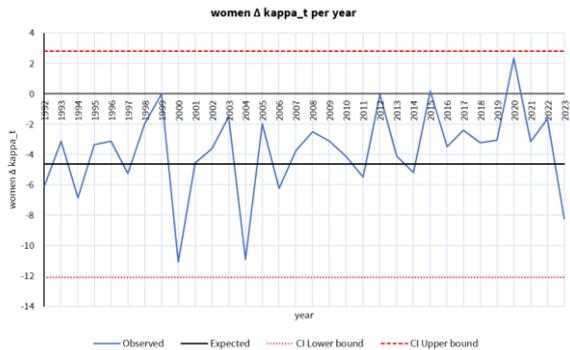
Les logarithmes des taux de décès des hommes du scénario PROPHET 2023



Analyse des ruptures de tendance sur le paramètre κ_t

- Des résultats similaires pour les femmes mais moins marqués

Différences stables ?



Augmentation croissante des différences à partir de 2007 ?

