

Générateur de scénarios économiques non-paramétrique : modélisation avec réseaux de neurones sous probabilité historique et risque-neutre

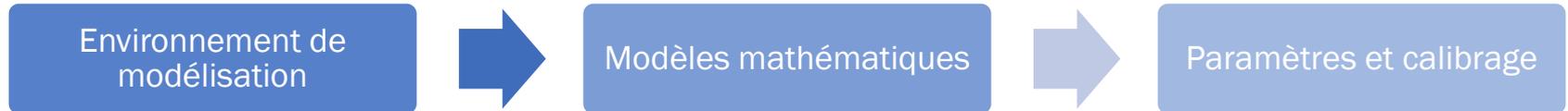
Papa Thiecouta DIALLO

Contexte et problématiques

GÉNÉRATEUR DE SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES : CONCEPTS ET APPLICATIONS

« Un générateur de scénarios économiques (GSE) est un outil qui permet de projeter des facteurs de risque économiques et financiers. »

Comment les GSE sont construits ?



Quels sont les types de mesures sous lesquels fonctionnent les GSE ?

- Mesure **historique** \mathbb{P} : réplique les comportements tirés du **passé**
- Mesure **risque-neutre** \mathbb{Q} : projections centrées autour du **taux sans risque**

Comment les GSE s'intègrent dans le cadre réglementaire Solvabilité II ?

- ❖ **ORSA** (GSE historique et GSE risque-neutre)
- ❖ **SCR** en modèle interne (GSE historique et GSE risque-neutre)
- ❖ **Best Estimate** (GSE risque-neutre)

ENJEUX ET SOLUTIONS CLÉS PRÉSENTÉS DANS CE MÉMOIRE

Quels sont les **enjeux** abordés dans cette étude ?

- Limites des **GSE traditionnels** : modèles **paramétriques** rigides, manque de **flexibilité** pour les dynamiques de marché
- **Unification** du **cadre méthodologique** entre les **GSE utilisés** pour la **valorisation** et la **projection**
- **Démocratisation** du **Machine Learning**

Quelles sont les **solutions** pour répondre à ces enjeux ?



Ce mémoire prolonge celui d'Aubert-Lassarade (2024) ainsi que la thèse de Moudiki (2018) sur l'usage du modèle RVFL en contexte GSE.

SOMMAIRE

01 Projections sous probabilité historique

02 Projections sous probabilité risque-neutre

03 Application : Calcul de *Best Estimate*

01

Projections sous probabilité historique

AU CŒUR DES DONNÉES ACTION DU CAC 40

Graphique de l'indice de **fermeture** du CAC 40



Cette transformation permet de **stabiliser** la variance, de normaliser la série et de faciliter l'**analyse statistique** en réduisant les **effets de niveau**.

Série Temporelle du CAC 40

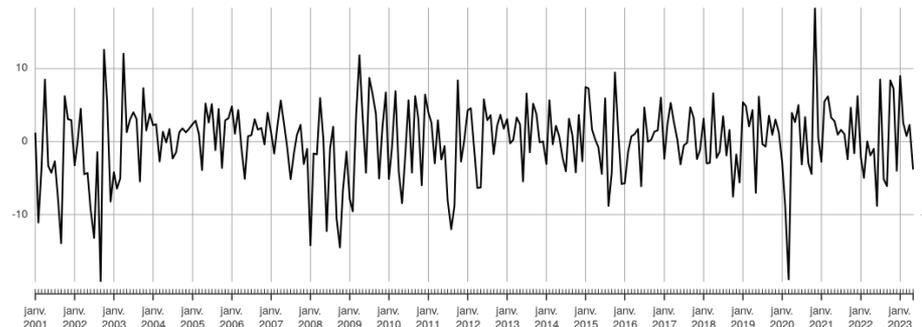
Date	ψ_t
2001-01-31	1,21
2001-02-28	-11,12
...	...
2023-04-30	3,50
2023-05-31	-1,35

entre le 31 janvier 2001 et le 31 mai 2023

Transformation
Log-rendements

$$\psi_t = \log \left(\frac{Close_t}{Close_{t-1}} \right) \times 100$$

ψ_t , la valeur du rendement à l'instant t

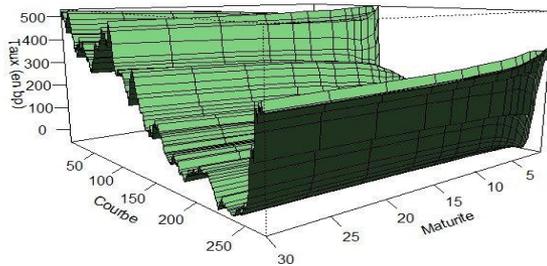


Graphique du **log-rendement** de l'indice du CAC 40

Série temporelle
résultante

ANALYSE APPROFONDIE DES DONNÉES DE TAUX : UN PARCOURS MÉTHODOLOGIQUE

Historique de courbes EUSA par mois

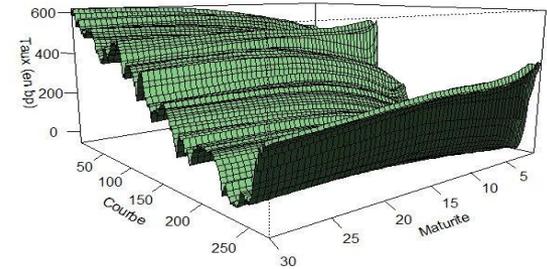


taux swaps contre EURIBOR 6M (EUSA)

Transformer les taux **swap** en taux **spot** par
Bootstrapping pour construire une courbe de **taux zc**



Historique des courbes de taux Spot par mois



Extraction des composantes de **Nelson-Siegel** pour
réduire la **dimension** des données de taux spot



Série Temporelle multivariée de l'EUSA

Date	β_1	β_2	β_3
2001-01-31	6,12	-1,46	-2,06
2001-02-28	6,08	-1,39	-2,16
...
2023-04-30	6,22	-1,37	-1,91
2023-05-31	6,36	-1,98	-1,73

entre le 31 janvier 2001 et le 31 mai 2023

Série temporelle
multivariée résultante



$$R(t, T) = \beta_1 + \beta_2 \frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} + \beta_3 \left(\frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} - \exp(-T/\lambda) \right)$$

- $R(t, T)$ représentant le taux zc à la date t pour une maturité T ;
- λ un paramètre d'échelle, **optimisé à 2,17** pour simplifier le modèle ;
- β_1 le facteur de niveau pour le taux long ;
- β_2 le facteur de rotation correspondant à l'écart taux long - taux court ;
- β_3 le facteur de pentification.

DÉCOUVERTE DU MODÈLE RVFL

RANDOM VECTOR FUNCTIONAL LINK

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j Z_i^{(j)} + \sum_{l=1}^L \gamma_l g \left(\sum_{j=1}^p W^{(j,l)} Z_i^{(j)} \right) + \epsilon_i$$

Série temporelle multivariée (STM) initiale obtenue après retraitement

Date	ψ	β_1	β_2	β_3
2001-01-31	1,21	6,12	-1,46	-2,06
2001-02-28	-11,12	6,08	-1,39	-2,16
...
2023-04-30	3,50	6,22	-1,37	-1,91
2023-05-31	-1,35	6,36	-1,98	-1,73

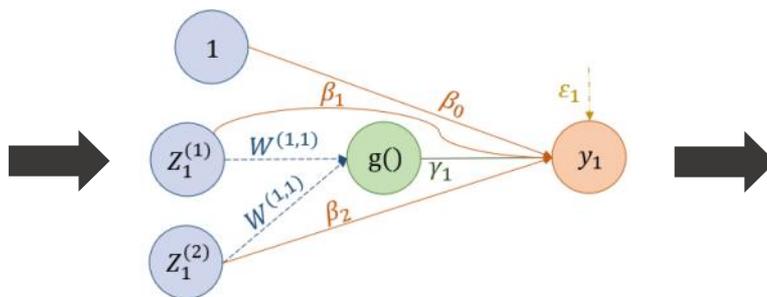


Schéma simplifié d'un RVFL à une couche pour $i = 1$

Le modèle RVFL nous donne une **projection centrale**

Comment générer l'aléa ?

Utilisation du **Block Bootstrap**

Génère des **résidus aléatoires** par **rééchantillonnage** en blocs à partir des données observées, résidus qui **seront ajoutés** à la **projection centrale** pour chaque simulation.

Comparé à un réseau de neurones classique, le RVFL réduit la **complexité**, accélère l'apprentissage et limite le **surapprentissage**, tout en intégrant deux paramètres de **régularisation** pour plus de flexibilité.

Projection n°1

Projection n°2

1000 Projections obtenus entre le 30 juin 2023 et le 31 mai 2043

...

Projection n°1000

01. Projections sous probabilité historique

RVFL À L'ŒUVRE : ANALYSE DES PERFORMANCES

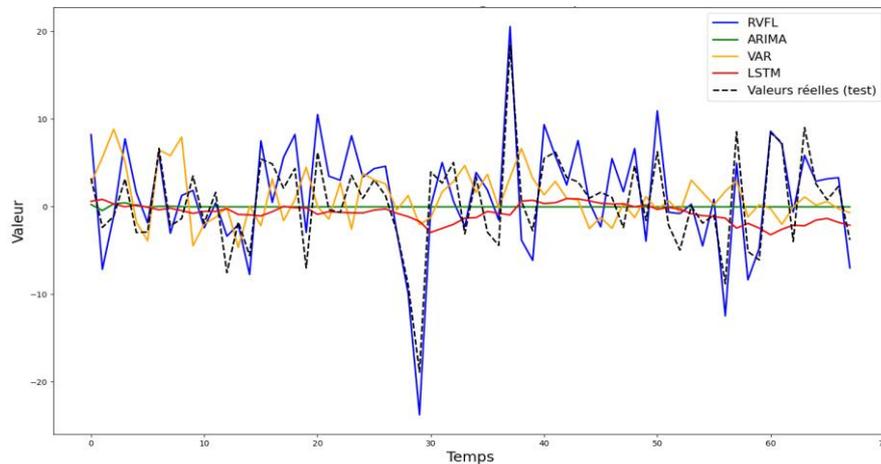
Comparaison avec le modèle VAR (Vector Auto Regression), ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average) et LSTM (Long Short-Term Memory)

Métriques de performance *out-of-sample* (ensemble de test)

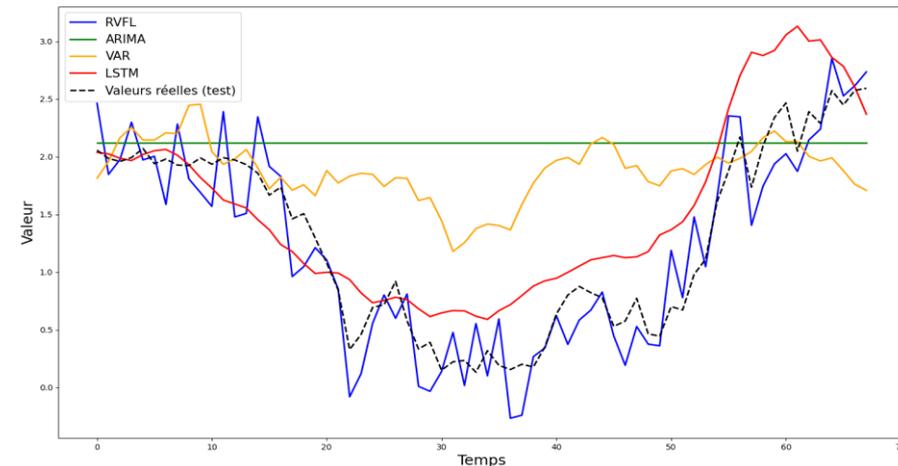
Mesure d'erreur sur les actions	RVFL	LSTM	VAR	ARIMA
RMSE	5,30	5,57	5,33	5,85
MAE	4,20	4,24	4,71	4,04

Mesure d'erreur sur le taux long	RVFL	LSTM	VAR	ARIMA
RMSE	0,34	0,37	0,90	1,15
MAE	0,28	0,31	0,74	0,92

Comparaison des quatre modèles avec les données réelles (test) pour le rendement logarithmique



Comparaison des quatre modèles avec les données réelles (test) pour le taux long (première composante β_1 de Nelson-Siegel)



➤ Les résultats de l'analyse prédictive montrent que le modèle RVFL arrive à capter les tendances de manière efficace.

01. Projections sous probabilité historique

ANALYSE DES SIMULATIONS DU MODÈLE RVFL SUR 20 ANS

Grille Hyperparamètres RVFL

Paramètres	Valeurs testées
<i>block_length</i>	[100,200]
<i>lags</i>	[5,30]
<i>nb_hidden</i>	[20,100]
λ_1	[1,1000]
λ_2	[1,1000]
<i>nodes_sim</i>	Sobol, Halton, Unif
<i>activ</i>	ReLU, Sigmoidé, Tanh

Optimisation Bayésienne
Validation Croisée

Hyperparamètres (optimisés)

<i>block_length</i>	<i>lags</i>	<i>nb_hidden</i>	<i>lambda_1</i>	<i>lambda_2</i>	<i>nodes_sim</i>	<i>activ</i>
120	29	82	5	1000	Sobol	ReLU

Application
RVFL sur 20 ans

Projections sur 20 ans (240 mois)

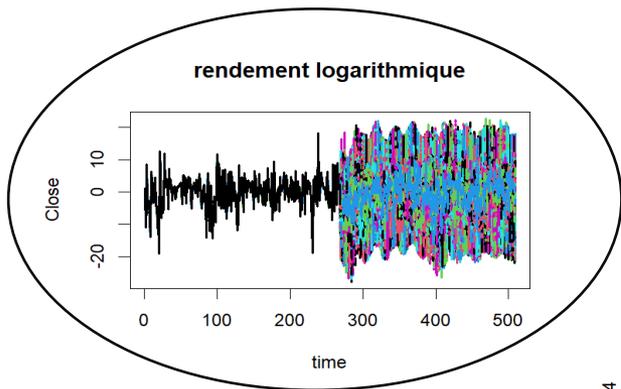
Projection n°1

Projection n°2

1000 Projections obtenus entre le 30 juin 2023 et le 31 mai 2043

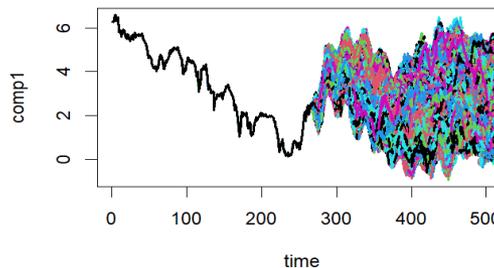
...

Projection n°1000



Série de l'action

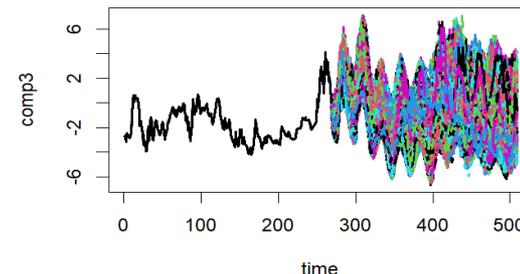
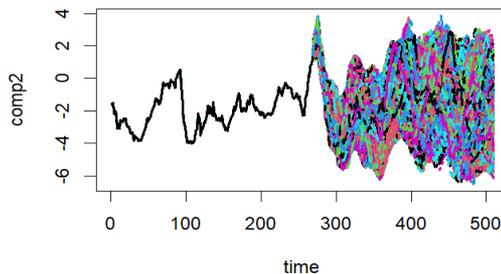
première composante : taux long



deuxième composante

Séries du taux

troisième composante

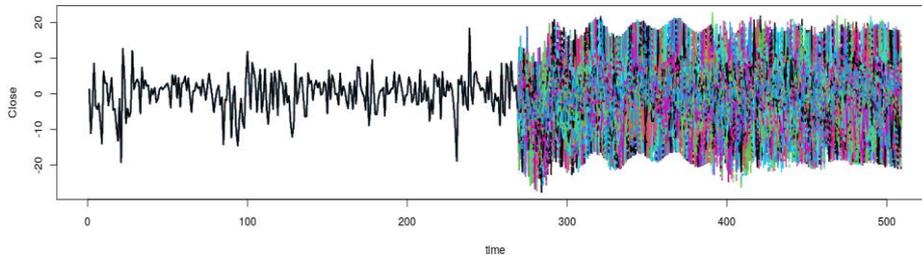


ANALYSE DES SIMULATIONS DU MODÈLE RVFL SUR 20 ANS

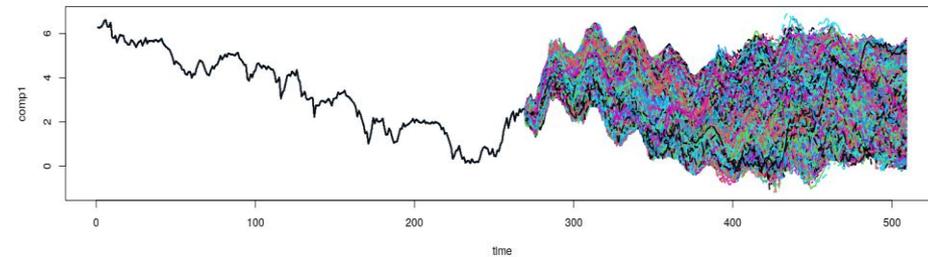
Cas des actions

Cas des taux

Historique et 1000 projections du rendement logarithmique

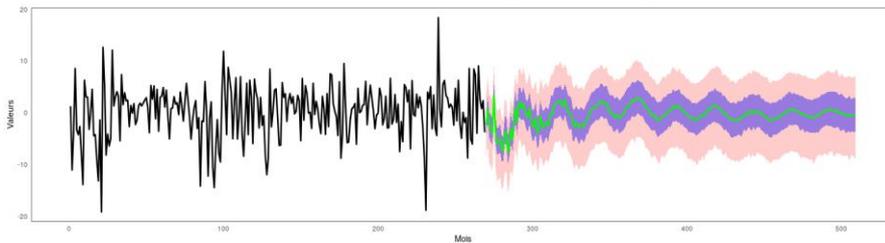


Historique et 1000 projections du taux long

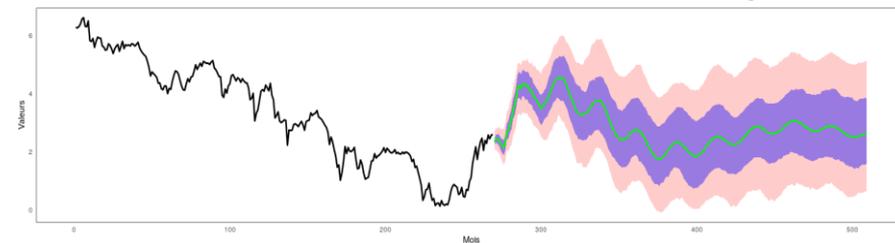


➤ Les projections indiquent une **diversité** de scénarios, offrant une vue d'ensemble des possibilités de croissance et d'évolution du marché sur le long terme.

Historique et distribution des 1000 projections du log-rendement



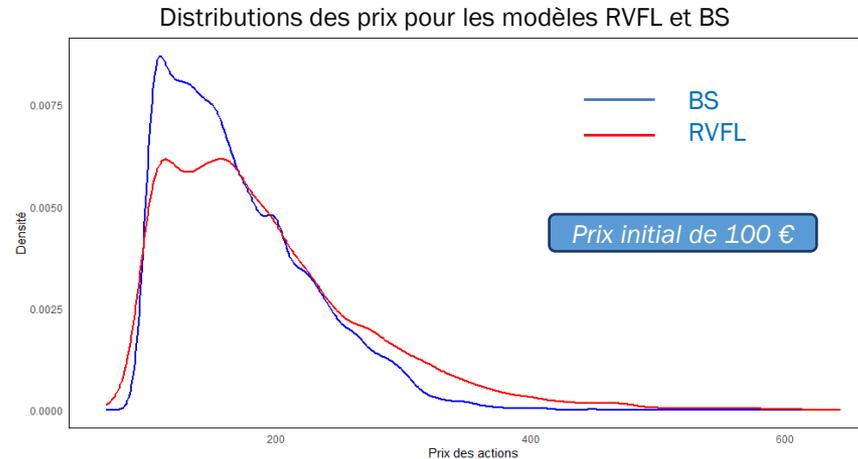
Historique et distribution des 1000 projections du taux long



➤ Les intervalles de prédiction étendus renforcent la **robustesse** des simulations, offrant une vue adaptable aux différents scénarios de marché.

DUALITÉ MODÉLISATION : RVFL ET MODÈLES PARAMÉTRIQUES EN PERSPECTIVE

Évolution du prix d'une action et comparaison avec un brownien géométrique : **Modèle Black-Scholes (BS)**



- Le modèle Black-Scholes est plus concentré, tandis que le RVFL est plus étalé avec de longues queues, capturant mieux les **scénarios extrêmes**.

Value at Risk (VaR) des prix des actions pour différents niveaux de confiance sur un horizon d'un an

α	0.5%	1%	5%	95%	99%	99.5%
VaR RVFL Prix à 1 an	98,50	100,75	110,00	144,50	153,75	155,30
VaR BS Prix à 1 an	113,42	114,15	117,72	138,42	143,97	145,26

- Le modèle RVFL présente une variabilité plus élevée des VaR, tandis que le modèle BS donne des résultats plus stables en raison de sa volatilité constante.

Les simulations du **modèle RVFL** produisent **des résultats cohérents**, capturant **bien** la volatilité du marché.

02

Projections sous probabilité risque-neutre

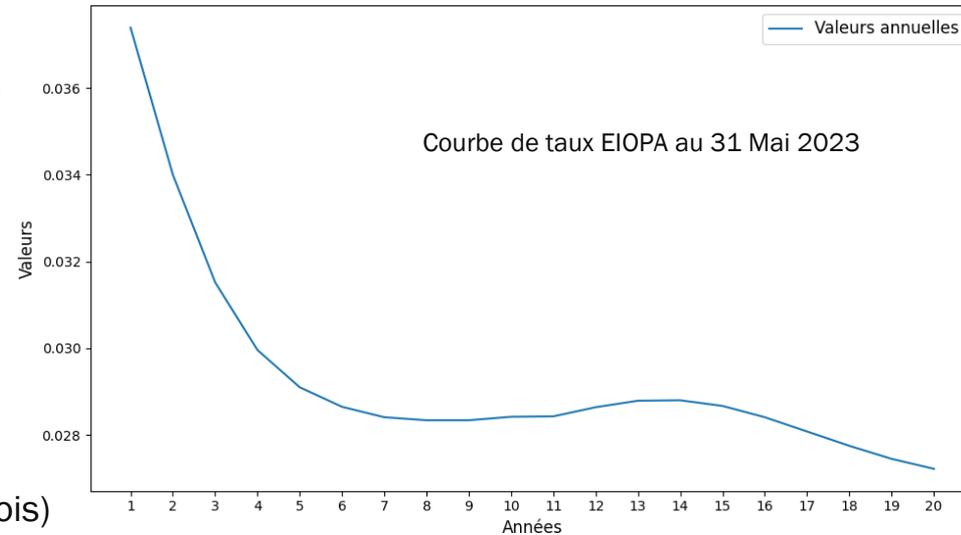
EXPLORATION DE LA PROBABILITÉ RISQUE-NEUTRE

La mesure **risque-neutre** est une mesure de probabilité sous laquelle la valeur d'un actif correspond à l'espérance de ses flux futurs, actualisés au **taux sans risque**.

Principes fondamentaux de la probabilité risque-neutre

- **Cohérence de marché (*Market Consistency*)** : Les prix des actifs sont cohérents avec les conditions actuelles du marché;
- **Propriété de martingalité** : Les prix ajustés pour le risque suivent un processus de martingale, assurant que la valeur espérée des gains futurs est égale au prix actuel, sans inclure de prime de risque.

$R(0,t)$, le taux sans risque pour la maturité t (1 à 240 mois)



EXPLORATION DE LA MODÉLISATION RISQUE-NEUTRE DES TAUX

1. Reconstruction des taux zéro-coupon

Calcul du taux zéro-coupon (zc)
$$R(t, T, j) = \beta_{1,t,j} + \beta_{2,t,j} \cdot \frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} + \beta_{3,t,j} \cdot \left(\frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} - \exp(-T/\lambda) \right)$$

$\beta_{1,t,j}$, $\beta_{2,t,j}$ et $\beta_{3,t,j}$ sont respectivement la première, deuxième et troisième composante projetée de Nelson-Siegel obtenues via le modèle RVFL pour l'instant t , la simulation j et la maturité T .

2. Alignement des taux projetés sur le taux sans risque

<p>Centrage des taux projetés</p> $R_c(t, T, j) = R(t, T, j) - \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L R(t, T, j)$ <p>avec, $L = 1000$, le nombre de simulations</p>	➔	<p>Ajout du taux sans risque</p> $R_{adj}(t, T, j) = R_c(t, T, j) + F(0, t, T)$ <p>$F(0, t, T)$ le taux forward, déduit de la courbe ZC initiale $R(0, t)$</p>
--	---	--

3. Calibration du paramètre d'ajustement

$$\{\alpha^*(t)\}_{t=1}^{12T} = \arg \min_{\{\alpha(t)\}_{t=1}^{12T}} \left[\sum_{T=1}^{20} \left(\pi_0^{\text{modèle}}(\{\alpha(t)\}_{t=1}^{12T}) - \pi_0^{\text{marché}}(T) \right)^2 \right]$$

Idée : reproduire les prix des swaptions du marché pour toutes les maturités

Le taux ZC sous la mesure risque-neutre après calibration est donné par $R_{RN}(t, T, j) = \alpha^*(t) \cdot R_{adj}(t, T, j)$.

APPROCHE RISQUE-NEUTRE : DÉMARCHE DE MODÉLISATION POUR LES ACTIONS

1. Assurer la propriété de martingalité

Idée : **ajuster** les rendements historiques pour **garantir** la propriété de martingalité.

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [P_{\text{actualisé}}(t, j)] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[P_0 \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^t \psi(k, j) - \sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j) \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{adj}}(t, j) &= \psi(t, j) + \Delta\psi(t, j) \\ \Delta\psi(t, j) &= r_{RN}(t, j) - \bar{\psi}(t) \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[P_0 \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^t \psi_{\text{adj}}(k, j) - \sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j) \right) \right] = P_0$$

$\psi(t, j)$, le rendement historique du RVFL à l'instant t pour la simulation j
 P_0 , le prix initial et $r_{RN}(s, j)$, le taux court risque neutre du modèle RVFL

$\psi_{\text{adj}}(k, j)$ le rendement pour assurer la propriété de martingalité

2. Calibration du paramètre d'ajustement

Calibrer un **paramètre β** pour s'assurer que les prix d'options calculés à l'aide des rendements ajustés sont en accord avec ceux du marché.

$$\beta^* = \arg \min_{\beta} \left[(P_{\text{call}}^{BS} - P_{\text{call}}^{RVFL}(\beta))^2 + (P_{\text{put}}^{BS} - P_{\text{put}}^{RVFL}(\beta))^2 \right]$$

Idée : **reproduire** le prix d'une option vanille à un an ($T=1$) à la monnaie.

Le rendement sous la mesure risque-neutre est finalement donné par

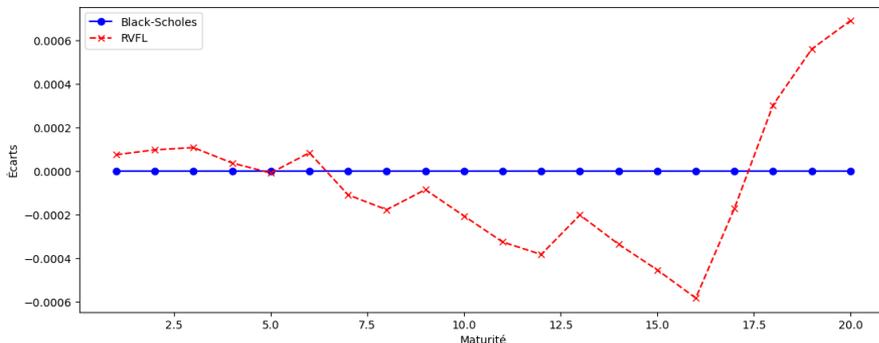
$$\psi_{RN}(t, j) = \beta^* \cdot \psi_{\text{adj}}(t, j)$$

TESTS DE MARTINGALITÉ : UNE APPROCHE ANALYTIQUE

Cas des actions

$$\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(t, j) \times \text{Indice}(t, j) - 1 = 0.$$

L est le nombre total de simulations, et t désigne les instants discrétisés de projection.

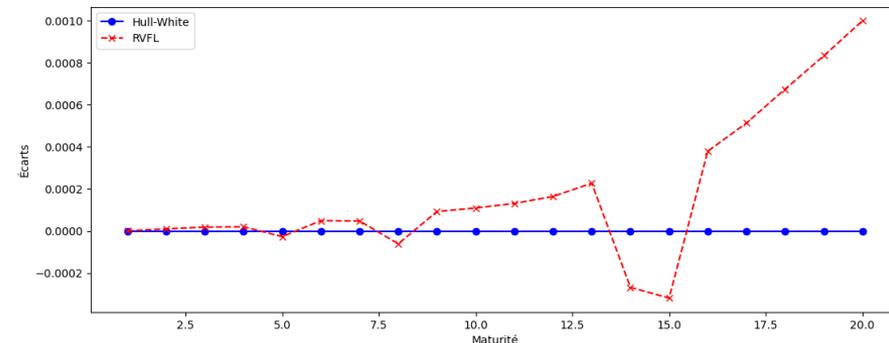


Evolution des écarts martingales des modèles RVFL et BS

Cas des taux

$$\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(t, j) - B\left(0, \frac{t}{12}\right) = 0$$

$B\left(0, \frac{t}{12}\right)$ représente le prix ZC à la maturité $\frac{t}{12}$, obtenu à partir des taux ZC initiaux



Evolution des écarts martingales des modèles RVFL et Hull-White (HW)

Les tests confirment le critère de martingalité. Le modèle RVFL présente un écart faible de 10^{-4} .

TEST DE MARKET-CONSISTENCY : ÉVALUATION ET ANALYSE

1. LES PRIX D'OPTIONS SUR LES ACTIONS

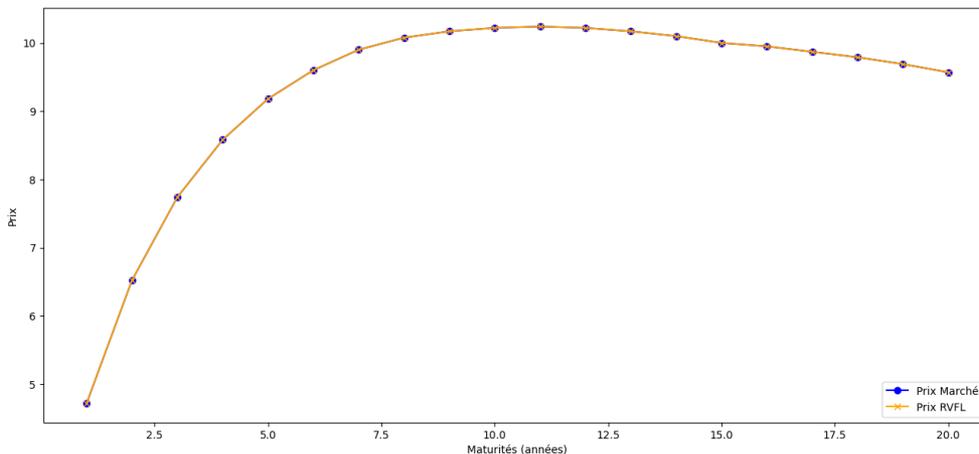
Prix des options *call* et *put* à T = 12 mois pour le modèle RVFL (après ajustement) et BS

Option	Modèle RVFL	Modèle BS
<i>Call</i>	7,757	7,766
<i>Put</i>	5,435	5,449

➤ Les **prix des *call* et *put*** restent **proches**, avec un écart de l'ordre 10^{-3} , validant la cohérence des rendements ajustés et des dynamiques de marché.

2. REPRICING DES SWAPTIONS (taux)

Comparaison entre les prix modèle et prix de marché après ajustement



➤ Le **prix ajusté des swaptions** dans le modèle est **aligné** avec celui du marché, avec un écart de l'ordre 10^{-4} , confirmant la cohérence de la modélisation des taux.

03

Application: Calcul de *Best Estimate*

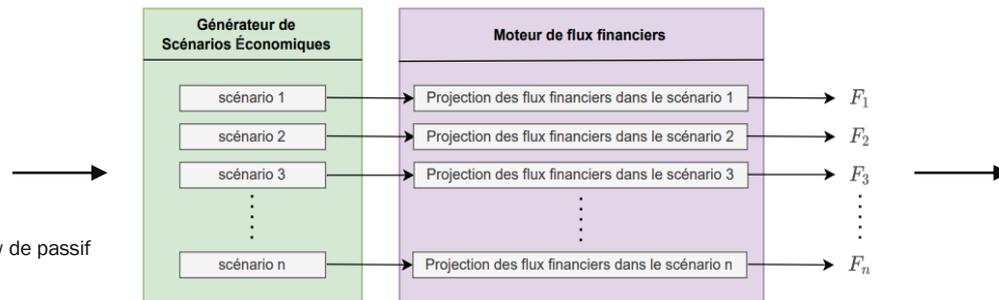
RÉVISION DES PRINCIPES FONDAMENTAUX

BE (*Best Estimate*)

« La meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque »
(Article 77, directive SII)

$$BEL_0 = \mathbb{E}^{Q \times P} \left[\sum_{u>t} \delta_u F_u \right]$$

avec δ le facteur d'actualisation et F le cash-flow de passif



TVOG (*Time Value of Options and Guarantees*)

- Représente le **coût des garanties et options incluses** dans les contrats d'assurance
- $TVOG = \text{Valeur avec options} - \text{Valeur sans options}$

LES FONDATIONS DU *BEST ESTIMATE* : HYPOTHÈSES CLÉS AU CŒUR DU CALCUL

BE pour un contrat d'épargne en euros

Hypothèses prises dans le Générateur de Scenarios Economiques

- Taux **Zéro Coupon** : taux des projections **RVFL** risque-neutres;
- Indices **Actions** : rendements des projections **RVFL** risque-neutres;
- **Inflation** : fourni par le GSE de Prim'Act (relation de **Fisher**);
- Indices **Immobiliers** : fourni par le GSE de Prim'Act (**modèle BS**);
- Indices de **Crédit** : fourni par le GSE de Prim'Act.

Répartition du portefeuille (fictif) d'actifs de l'assureur

Classe d'actif	Valeur de marché (M €)	Valeur comptable (M €)	Pourcentage
Action	20,00	18,54	20%
Immobilier	10,00	9,88	10%
Obligations	63,00	58,85	63%
Monétaire	7,00	7,00	7%
Total	100,00	94,26	100%

Description du contrat d'épargne au passif (fictif) de l'assureur

- Provision Mathématique (PM) : **60 millions d'euros**;
- Âge Moyen des Assurés : **50 ans**;
- Nombre d'Assurés : **128**;
- Taux contractuel de Participation aux Bénéfices (PB) : **90%**;
- Taux Minimum Garanti (TMG) : **0,5%**.

03. Calcul de *Best Estimate*

ÉVALUATION DU BE : CONFRONTATION ENTRE GSE-RVFL ET GSE DE PRIM'ACT

BE calculé à l'aide à l'outil **SimBEL** avec 1000 simulations, l'horizon de calcul fixé à 20 ans et la PM = 60 millions d'euros

Valeur du BE et de la TVOG (en M€)

Modèle	BE	TVOG
GSE RVFL	63,5	2,7
GSE de Prim'Act	64,4	2,4
Écart relatif	1,5%	13,31%

- L'écart de 1,5 % sur le BE reflète la **sensibilité** du **résultat** au choix du GSE. L'écart sur la TVOG reste **modéré** et **attendu**.

Impacts des chocs sur le BE et la TVOG (en M€)

Choc	BE RVFL	BE Prim'Act	TVOG RVFL	TVOG Prim'Act
Frais	63,85	64,07	0,53	0,55
Mortalité	64,25	64,41	0,42	0,56
Longévité	64,23	64,42	0,39	0,44
Rachat massif	63,59	63,84	0,21	0,22
Action	65,89	65,76	0,82	0,84
Immobilier	64,88	65,09	0,63	0,65
Spread	65,36	65,94	0,72	0,75

- Le modèle RVFL présente une **sensibilité** plus marquée aux chocs, en lien avec sa structure **non linéaire** et sa capacité à générer des scénarios variés.

Le modèle GSE RVFL produit des **résultats cohérents**, mais sa **stabilité** reste à confirmer.

Conclusion

CONCLUSION DE L'ÉTUDE

Bilan et impacts clés

- ✓ **RVFL historique** : respect des critères qui vise à refléter fidèlement la **réalité économique**;
- ✓ **RVFL risque-neutre** : respect des critères du **monde risque-neutre**;
- ✓ **Comparaison modèle paramétrique** : résultats **cohérents** mais avec des fluctuations;
- ✓ **Calcul du BE** : écart non-négligeable qu'un **modèle paramétrique**, mais avec une **sensibilité** accrue aux chocs et aux dynamiques de marché.

Limites et perspectives

- ❑ Intégration de **facteurs de risques** supplémentaires;
- ❑ Amélioration de la méthode risque-neutre : **calibration** (temps de calcul);
- ❑ Utilisation des tests de conformité pour les projections historiques (**signature** et la **MMD**)
- ❑ Exploration du calcul du **SCR** et l'**ORSA**.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION

Générateur de scénarios économiques non-paramétrique :
modélisation avec réseaux de neurones sous probabilité
historique et risque-neutre

Papa Thiecouta DIALLO